МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»
(СПбГТИ(ТУ))

Кафедра математики

Численные методы и алгоритмы решения дифференциальных уравнений

Контрольные работы для студентов заочной формы обучения

Четвёртый семестр

Санкт-Петербург
2018

Введение

Дисциплина «Численные методы и алгоритмы решения дифференциальных уравнений» для студентов заочной формы обучения читается на втором курсе (в четвёртом семестре). Студенты выполняют три контрольных работы.

Контрольная работа может быть написана от руки на листах формата А4 или представлена в распечатанном виде. Листы должны быть скреплены степлером, причем каждая контрольная работа сдается отдельно. Работа может быть написана от руки в тетради. В этом случае каждая работа сдается в отдельной тетради.

На титульном листе указывается полное название университета, факультет, кафедра, фамилия, имя, отчество студента, номер учебной группы, номер контрольной работы, номер варианта, фамилия и инициалы преподавателя, проверяющего работу, год и ставится личная подпись студента.

Работа засчитывается преподавателем, если все задачи решены верно. Если в решении какой-либо задачи допущена ошибка, то студент должен сделать работу над ошибками (заново решить задачу). Работа над ошибками должна располагаться после записи решения последней задачи контрольной работы.

Студент самостоятельно выбирает вариант контрольной работы в соответствии с начальной буквой своей фамилии.

Буква	Номер варианта
А	1
Б	2
В	3
Г	4
Д	5
Е, Ё	6
Ж	7
З	8
И, Й	9
К	10
Л	11
М	12
Н	13
О	14
П	15
Р	16
С	17
Т	18
У	19
Ф	20
Х	21
Ц, Ю	22
Ч	23
Ш,Щ	24
Э, Я	25

Контрольная работа № 1

Тема: обыкновенные дифференциальные уравнения

Содержание контрольной работы № 1

Задание № 1

По условию задачи составьте дифференциальное уравнение и, решив его, ответьте на вопросы.

Задание № 2

Для заданного дифференциального уравнения вида $y' = f(x, y)$

1. Найдите уравнение линии экстремумов и постройте её;
2. Найдите линию (возможных) перегибов;
3. Постройте изоклины и поле направлений;
4. Постройте (графически) интегральную кривую, проходящую через заданую точку $M(x_0, y_0)$;
5. Найдите аналитически общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения и решение задачи Коши.

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Условия задач контрольной работы № 1

Вариант № 1.

Задание 1.

Два сообщающихся сосуда имеют форму параллелепипедов, основаниями которых являются квадраты со сторонами a и b. Диаметр отверстия между сосудами равен d. Начальная разность уровней жидкости в сосудах составляет h. Предполагается, что скорость истечения жидкости ($м/с$) через отверстие подчиняется закону

$$w = \varphi\sqrt{2g\,(z_1 - z_2)},$$

где $g = 9,81$ $м/с^2$, $\varphi = 0,61$, z_1 и z_2 — уровни жидкости в первом и во втором сосуде соответственно.

Найдите зависимость разности уровней от времени и ответьте на следующие вопросы:

1. Через какое время в сосудах установится одинаковый уровень жидкости? ($a = 0,7$; $b = 1,5$; $d = 0,03$; $h = 3$)

2. Чему равен диаметр отверстия между сосудами, если через время t после его открытия устанавливается одинаковый уровень жидкости в сосудах? ($a = 0,7$; $b = 1,5$; $t = 20$; $h = 3$).

3. Чему равны размеры основания первого сосуда, если за время t разность уровней изменится на l? ($l = 0,7$; $b = 2$; $t = 15$; $h = 3$).

4. Каковы размеры основания второго сосуда, если за время t разность уровней изменится на l? ($a = 1,3$; $l = 1$; $t = 15$; $h = 2,5$).

Все размеры указаны в метрах, а время — в секундах.

Задание 2.

$$y' = y - x^2, \qquad M(1;2).$$

Вариант № 2.

Скорость истечения воды из отверстия на расстоянии h по вертикали от свободной поверхности определяется формулой

$$v = c\sqrt{2gh},$$

где $c = 0,6$ — эмпирический коэффициент, $g = 9,81$ *м/с*^{2} — ускорение свободного падения. Вода заполняет полусферический сосуд диаметра D, на дне которого в начальный момент времени открывается отверстие радиуса r.

Найдите зависимость объёма в сосуде от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. За какое время вода из сосуда вытечет полностью? ($D = 3,4$ *м*; $r = 0,23$ *м*).

2. Каков радиус отверстия в дне сосуда, если вода из него полностью вытекла за время t_1? ($D = 3,4$ *м*; $t_1 = 44$ *с*).

Задание 2.

$$yy' = -2x, \qquad M(0;5).$$

Вариант № 3.

Задание 1.

Имеется шар из расщепляющегося вещества постоянной плотности. В начальный момент времени число свободных нейтронов в веществе равно N_0. В этот момент включается источник нейтронов, вводящий в шар

q нейтронов в секунду. В результате столкновений свободных нейтронов с атомными ядрами в единицу времени возникает дополнительное число нейтронов пропорционально числу имеющихся с коэффициентом пропорциональности α. Число нейтронов, покидающих вещество, также пропорционально их текущему количеству (коэффициент пропорциональности β).

Найдите зависимость числа свободных нейтронов от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Сколько свободных нейтронов было в начальный момент времени, если через время t их количество увеличилось на Q %? ($q = 200$; $Q = 50$ %; $t = 3600$ c; $\beta - \alpha = 5 \cdot 10^{-6}$).

2. Какова мощность источника нейтронов, если спустя t c количество свободных нейтронов увеличилось в m раз? ($N_0 = 1000000$; $m = 3$; $t = 3600$ c; $\beta - \alpha = 5 \cdot 10^{-6}$).

Задание 2.

$$y' = 2 + y^2, \qquad M(1; 2).$$

Вариант № 4.

Задание 1.

В газовой среде при ионизирующем действии постоянного излучения в единицу времени образуется m положительных и столько же отрицательных ионов на единицу объёма газа. Часть положительных ионов рекомбинирует в результате столкновений с отрицательными ионами. Частота столкновений пропорциональна произведению плотностей сталкивающихся ионов (коэффициент пропорциональности равен k). В начальный момент времени плотности положительных и отрицательных ионов были равны x_0.

Найдите зависимость количества положительных ионов в единице объёма от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. В какой момент времени t_2 плотность положительных ионов увеличится на P %, если в момент времени t_1 плотность равна x_1? ($k = 0.3$; $P = 70$ %; $x_0 = 2000$; $x_1 = 3000$; $t_1 = 10$ c).

2. В какой момент времени t_1 плотность положительных ионов будет равна x_1, если к моменту времени t_2 она увеличилась на P%? ($k = 0.3$; $x_0 = 2000$; $P = 30$ %; $x_1 = 2500$; $t_2 = 6$ c).

Задание 2.

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{y}, \qquad M(1; 1).$$

Вариант № 5.

Задание 1.

В резервуаре имеется V *л* раствора, содержащего M *кг* соли. Дно резервуара покрыто слоем слежавшейся соли. В резервуар поступает чистая вода со скоростью v *л/мин*. Одновременно из резервуара с той же скоростью удаляется раствор. Перемешивание обеспечивает одинаковую концентрацию соли во всём объёме резервуара. Предполагается, что скорость растворения твёрдой соли пропорциональна разности между концентрациями действительного и насыщенного раствора ($C = 0,3$ *кг/л*). Если бы вода была чистой, то скорость растворения составила бы m *кг/мин*.

Найдите зависимость количества растворённой соли от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Сколько соли было в резервуаре в начальный момент времени, если через t *мин* её концентрация уменьшилась на $P\,\%$? ($P = 10\%$; $V = 80$; $v = 30$; $t = 10$; $m = 1$).

2. Сколько соли было в резервуаре в начальный момент времени, если через t *мин* её концентрация становится постоянной с точностью до $Q\,\%$? ($Q = 3\,\%$; $V = 80$; $v = 30$; $t = 10$; $m = 1$).

3. Через сколько минут после начала процесса количество соли в резервуаре уменьшится на $P\,\%$? ($P = 10\,\%$; $V = 80$; $v = 30$; $M = 6$; $m = 1$).

4. Через сколько минут после начала процесса концентрация раствора становится постоянной с точностью до $Q\,\%$? ($Q = 3\%$; $V = 80$; $v = 30$; $M = 6$; $m = 1$).

Задание 2.

$$y' = (y-1)x, \qquad M(1; \tfrac{3}{2}).$$

Вариант № 6.

Задание 1.

В помещении цеха, объём которого V *м*^{3}, воздух содержит $C_1\%$ углекислоты. Вентиляторы доставляют в помещение цеха свежий воздух, содержащий $C_2\%$ углекислоты, в объёме a *м*^{3}*/мин*. Предполагается, что перемешивание свежего воздуха с загрязнённым происходит мгновенно, смешанный воздух через неплотности в дверях и окнах выходит наружу с той же скоростью, с какой поступает свежий воздух.

Найдите зависимость концентрации углекислоты от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Какова должна быть мощность вентилятора a, что бы через t_1 *мин* содержание углекислоты не превышало $C_3\,\%$? ($V = 7500$; $C_1 = 0,140\,\%$; $t_1 = 10$; $C_2 = 0,045\,\%$; $C_3 = 0,06\,\%$).

2. За какое время t_1 при заданной мощности вентилятора a концентрация углекислоты достигнет уровня $C_3\,\%$? ($V = 7500$; $C_1 = 0,140\,\%$; $a = 1000$; $C_2 = 0,045\,\%$; $C_3 = 0,06\,\%$).

3. Какая концентрация углекислоты $C_3\,\%$ будет достигнута, если вентилятор мощности a будет работать в течение t_1 *мин*? ($V = 7500$; $C_1 = 0,140\,\%$; $a = 800$; $t_1 = 10$; $C_2 = 0,04\,\%$).

4. Какова была начальная концентрация углекислоты $C_1\,\%$, если через t_1 *мин* после включения вентилятора она равнялась $C_3\,\%$? ($V = 7500$; $t_1 = 8$; $a = 1000$; $C_2 = 0,045\,\%$; $C_3 = 0,06\,\%$).

<u>Задание 2.</u>

$$yy' + x = 0, \qquad M(-2;-3).$$

Вариант № 7.

<u>Задание 1.</u>

Корабль замедляет своё движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость корабля составляла a *м/с*, а через t_1 *с* его скорость была b *м/с*.

Найдите зависимость скорости корабля от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Когда скорость корабля уменьшится до c *м/с*? ($a = 16,5$; $b = 8$; $c = 6$; $t_1 = 25$).

2. Какова была начальная скорость корабля, если через t_2 *с* его скорость стала d *м/с*? ($b = 8$; $d = 1,9$; $t_1 = 18,5$;$t_2 = 24$).

<u>Задание 2.</u>

$$y' = 3 + y^2, \qquad M(1;2).$$

Вариант № 8.

<u>Задание 1.</u>

Имеется химическое вещество A в количестве m *г*. В результате химической реакции оно переходит в вещество W (термин «переходит» означает, что в каждый момент времени количество образовавшегося вещества W равно количеству, на которое уменьшилось вещество A). Предполагается, что реакция подчиняется закону действующих масс, т. е. скорость реакции пропорциональна оставшемуся количеству вещества A.

Найдите зависимость количества образовавшегося вещества W от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Сколько вещества W образуется к моменту t_1 *c*, если через две секунды его стало m_2 *г*? ($m = 28$; $m_2 = 14$; $t = 14$).

2. Через сколько времени образуется m_3 *г* нового вещества, если известно, что через две секунды его стало m_2 *г*? ($m = 28$; $m_2 = 14$; $m_3 = 8,5$).

Задание 2.

$$xy' = 2y, \qquad M(2;3).$$

Вариант № 9.

Задание 1.

Известно, что скорость размножения бактерий в питательной среде пропорционально количеству бактерий (коэффициент пропорциональности K $1/$*час*).

Найдите зависимость числа бактерий от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Через какое время количество бактерий увеличинтся в P раз? ($P = 9,5$; $K = 1,5$).

2. Какое количество бактерий было в начальный момент времени, если известно, что через t_1 часов их стало N? ($k = 0,2$; $t = 16,5$; $N = 1000$).

Задание 2.

$$y'\left(x^2+2\right) = y, \qquad M(2;2).$$

Вариант № 10.

Задание 1.

В воздухе комнаты объёмом V *м*^{3} содержится P % углекислого газа (CO_2). Вентилятор подаёт за одну минуту a *м*^{3} воздуха, содержащего $0,04$ % CO_2. Предполагается, что количество подаваемого комнату воздуха равно количеству воздуха, уходящего через щели окон и дверей.

Найдите зависимость концентрации углекислого газа от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Через какое время содержание CO_2 станет Q %? ($V = 1000$; $P = 15$%; $Q = 12$ %; $a = 230$).

2. Сколько процентов углекислого газа будет в комнате через t *мин*? ($V = 1000; P = 15\,\%$; $t = 3,6$; $a = 460$).

Задание 2.

$$x^2 - y^2 + 2xy' = 0, \qquad M(2;1).$$

Вариант № 11.

Задание 1.

В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна его наличному количеству. Первоначально количество фермента было a, а через час оно увеличилось в r раз.

Найдите зависимость количества фермента от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Во сколько раз увеличилось количество фермента через t_1 часов? ($r = 3,3$; $t_1 = 3$).

2. Через сколько часов количество фермента увеличится в b раз? ($r = 2$; $b = 30$).

Задание 2.

$$y' = y - x, \qquad M(\tfrac{9}{2};1).$$

Вариант № 12.

Задание 1.

В баке находится V *л* раствора, содержащего a *кг* соли. В бак непрерывно со скоростью b *л* в минуту подаётся вода, которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает из бака с той же скоростью, с которой вода подаётся в бак (общий объём раствора остаётся постоянным).

Найдите зависимость количества соли в баке от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Сколько соли останется в баке через t_1 *мин*? ($V = 200$; $a = 6$; $b = 23,5$; $t_1 = 8,2$).

2. Через сколько минут концентрация раствора в баке станет P %? ($V = 200$; $a = 60$; $b = 33$; $P = 2\,\%$).

Задание 2.

$$y' = x^2 - y, \qquad M(1;\tfrac{1}{2}).$$

Вариант № 13.

Задание 1.

Известно, что в процессе быстрой коагуляции* электролитами скорость изменения концентрации золя x пропорциональна квадрату его концентрации с коэффициентом пропорциональности k, характеризующим вероятность столкновения частиц.

Найдите зависимость концентрации золя от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Какова была начальная концентрация золя, если через t_1 *мин* его концентрация стала C_1? ($k = 2$; $t_1 = 1$; $C_1 = 0,17$).

2. В какой момент времени концентрация золя уменьшится на P % по сравнению с начальной x_0? ($k = 0,2$; $x_0 = 0,5$; $P = 36$ %).

*Примечание. *Коагуляция* — процесс свёртывания, т. е. выделения из коллоидного раствора растворённых веществ в виде студня — геля. *Золь* — краткое название коллоидного раствора — тончайшей взвеси вещества в жидкости или газе (гидрозоли, аэрозоли).

Задание 2.

$$y' = xy, \qquad M(0; -1).$$

Вариант № 14.

Задание 1.

Два химических вещества A и B в процессе химической реакции образуют новое химическое вещество C. Реакция идёт по схеме

$$A + B \to C,$$

т. е. одна молекула A реагирует с одной молекулой B, в результате чего получается одна молекула C. Скорость химической реакции, т. е. скорость образования вещества C — $\dfrac{dx}{dt}$ (где $x(t)$ — количество вещества C в единице объёма), пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ A и B. Известно, что начальные значения концентраций A и B были равны a и b соответственно, а через t_1 *мин* концентрация вещества A уменьшилась на P %.

Найдите зависимость концентрации вещества C от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Каково количество вещества C, образовавшегося через t_1 *мин*? ($a = 0,46$; $b = 0,21; P = 10$ %; $t_1 = 18$).

2. За какое время концентрация вещества A уменьшилась на Q %? ($a = 0,46$; $b = 0,21; P = 10$ %; $t_1 = 14$; $Q = 15$ %).

Задание 2.

$$y' = xy, \qquad M(0;1).$$

Вариант № 15.

Задание 1.

На дне цилиндрического резервуара, наполненного жидкостью, образовалась щель. Предполагаем, что скорость истечения жидкости пропорциональна высоте её уровня в резервуаре. Известно, что начальный уровень составлял h_0 *м*, а в течение первых суток вытекло $a\,\%$ содержимого.

Найдите зависимость уровня жидкости от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Сколько жидкости осталось в резервуаре через t_1 дней? ($a = 23\,\%$; $h = 6,1$; $t_1 = 2$).

2. Сколько времени потребуется, чтобы из резервуара вытекло $b\,\%$ жидкости? ($a = 10\,\%$; $b = 54\,\%$).

Задание 2.

$$yy' = -\frac{x}{2}, \qquad M(4;2).$$

Вариант № 16.

Задание 1.

В бак с чистой водой объёмом V *л* со скоростью b *л/мин* вливается раствор, содержание соли в котором определяется зависимостью

$$x(t) = a \cdot \exp\left(-\frac{b \cdot t}{V}\right) \qquad \textit{кг/л}.$$

Найдите зависимость количества соли в баке от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Когда количество соли в баке станет наибольшим и каково это наибольшее значение? ($V = 300$; $a = 12,5$; $b = 9,5$).

2. Сколько соли станет в баке через t_1 минут? ($V = 300$; $a = 20$; $b = 24$; $t_1 = 16$).

Задание 2.

$$2\,(y + y') = x + 3, \qquad M(1; \tfrac{1}{2}).$$

Вариант № 17.

Задание 1.

Сосуд объёмом V *л* содержит воздух (80 % азота и 20 % кислорода). В сосуд втекает a литров азота в секунду. Азот непрерывно перемешивается с воздухом. Смесь покидает сосуд с той же скоростью, с которой поступает азот.

Найдите зависимость содержание азота от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Через сколько времени в сосуде будет p % азота? ($V = 200$; $a = 10$; $p = 91,5$ %).

2. Какое процентное содержание азота будет в сосуде через t_1 *с*? ($V = 360$; $a = 13,5$; $t_1 = 10$).

Задание 2.

$$y' = x + 2y, \qquad M(3;0).$$

Вариант № 18.

Задание 1.

Кривая проходит через точку M_0 с координатами $(x_0; y_0)$ и ограничивает вместе с осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ криволинейную трапецию, площадь которой удовлетворяет равенству

$$S = 2xy - x^3, \qquad x \in [a; b].$$

Найдите уравнение линии $y = y(x)$ и зависимость площади криволинейной трапеции от x.

Чему равна площадь криволинейной трапеции, соответствующая значению $x = x_0$? ($a = 4,6$; $b = 12,8$; $x_0 = 1$; $y = 7,5$)

Задание 2.

$$xy' = 2y, \qquad M(1;3).$$

Вариант № 19.

Задание 1.

Пусть в начальный момент времени тело массы m постоянной теплоёмкости C имеет температуру Θ_0. Температура окружающей среды считается постоянной и равна Θ_c ($\Theta_0 > \Theta_c$). Предполагается выполненным закон Ньютона, согласно которому тепло, отдаваемое телом за бесконечно малый промежуток времени dt, пропорционально длительности промежутка и разности температур тела и окружающей среды.

Найдите закон охлаждения тела, т. е. зависимость его температуры от времени, и ответьте на следующие вопросы.

1. За какое время температура тела понизится до Θ_1, если известно, что за время t_2 она понизилась до Θ_2? ($\Theta_0 = 300°C$; $\Theta_c = 20°C$; $\Theta_1 = 58°C$; $\Theta_2 = 200°C$; $t_2 = 34$ единиц времени).

2. Какой была температура тела в момент времени t_1, если известно, что за время t_2 она понизилась до Θ_2? ($\Theta_0 = 250°C$; $\Theta_c = 24°C$; $\Theta_2 = 150°C$; $t_1 = 10$; $t_2 = 48$ единиц времени).

Задание 2.

$$3yy' = x, \qquad M(-3; -2).$$

Вариант № 20.

Задание 1.

Конический резервуар с диаметром D_1 *м* верхнего основания, D_2 *м* нижнего основания и высотой H *м* заполнен водой. В начальный момент времени в дне резервуара открывается отверстие диаметром a *м*. Предполагается, что скорость истечения воды из отверстия удовлетворяет соотношению

$$v = \mu\sqrt{2gh},$$

где g — ускорение свободного падения, h — уровень воды над отверстием, μ — эмпирический коэффициент.

Найдите зависимость уровня воды от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. За какое время уровень воды понизится до H_1 *м* ($H_1 < H$), если известно, что за время t_0 *с* вода полностью вытекает из резервуара? ($D_1 = 2$; $D_2 = 0,5$; $H = 2$; $H_1 = 0,78$; $t_0 = 114$).

2. За какое время вода полностью вытечет из резервуара, если известно, что за время t_1 *с* уровень воды понизился до H_1 *м*? ($D_1 = 2$; $D_2 = 0,5$; $H = 2$; $H_1 = 1,22$; $t_1 = 38$).

Задание 2.

$$y' = y - x^2, \qquad M(-3; 4).$$

Вариант № 21.

Задание 1.

В газовой среде при ионизирующем действии постоянного излучения в единицу времени образуется m положительных и столько же отрицательных ионов на единицу объёма газа.Часть положительных ионов рекомбинирует в результате столкновений с отрицательными ионами. Частота столкновений пропорциональна произведению плотностей сталкивающихся ионов с коэффициентом пропорциональности k ($k/m = a^2$). В начальный момент времени плотности положительных и отрицательных ионов были равны x_0.

Найдите зависимость количества положительных ионов в единице объёма от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. В какой момент времени t_2 плотность положительных ионов увеличится на P %, если в момент времени t_1 плотность равна x_1? ($a = 37416,57$; $P = 19$ %; $x_0 = 240$; $x_1 = 1000$; $t_1 = 17$ *с*).

2. В какой момент времени t_1 плотность положительных ионов будет равна x_1, если к моменту времени t_2 она увеличилась на P %? ($a = 37416,57$; $P = 19$ %; $x_0 = 240$; $x_1 = 2400$; $t_2 = 10$ *с*).

Задание 2.

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, \qquad M(-2;1).$$

Вариант № 22.

Задание 1.

Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально толщине слоя и потоку, падающему на поверхность.

Найдите долю первоначального потока, доходящего до произвольно заданной глубины, и ответьте на следующие вопросы.

1. Какой процент первоначального светового потока дойдёт до глубины b *м*, если при прохождении через слой толщиной a *м* поглощается $\frac{1}{3}$ первоначального потока? ($a = 2,5$; $b = 3,5$).

2. Какая часть светового потока дойдёт до глубины a *м*, если до глубины b *м* доходит P% первоначального светового потока? ($a = 2,6$; $b = 1,6$; $P = 64$ %).

Задание 2.

$$y' = x^2 - y, \qquad M(2; \tfrac{3}{2}).$$

Вариант № 23.

Задание 1.

В момент раскрытия парашюта скорость падения парашютиста равна v_0. Предполагается, что парашют испытывает сопротивление воздуха, причём сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости парашюта. Ускорение свободного падения $g = 9,81$ *м/с*^{2}. Предельная скорость падения равна v_*.

Найдите зависимость скорости парашютиста от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. Какой будет скорость парашютиста через t_1 *с*? ($v_0 = 106,5$ *м/с*; $v_* = 30,5$ *м/с*; $t_1 = 9,5$ *с*).

2. За какое время скорость парашютиста снизится до v_1? ($v_0 = 106,5$ *м/с*; $v_* = 30,5$ *м/с*; $v_1 = 60$ *м/с*).

Задание 2.

$$y' = y - x, \qquad M(2;1).$$

Вариант № 24.

Задание 1.

Известно, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрациями насыщенного и действительного (наличного) растворов. В начальный момент времени в растворе было x_0 *кг* соли, количество соли в насыщенном растворе — y_0 *кг* ($y_0 > x_0$). Скорость растворения соли в чистом растворителе — $0,6$ *кг/мин*.

Найдите зависимость количества соли от времени и ответьте на следующие вопросы.

1. За какое время растворится вся соль? ($x_0 = 3,2$; $y_0 = 14,2$).

2. Какое количество соли было в растворе первоначально, если известно, что вся соль растворилась через t_1 *мин*? ($t_1 = 3,6$; $y_0 = 14,2$).

Задание 2.

$$yy' = -x, \qquad M(2;3).$$

Вариант № 25.

Задание 1.

Для очистки газа от газообразной примеси его пропускают через скуббер (сосуд, содержащий поглотитель). Количество газообразной примеси, поглощаемое слоем поглотителя при установившемся режиме работы аппарата, пропорционально концентрации примеси, толщине слоя и площади поперечного сечения слоя. Скуббер имеет форму конуса с радиусом основания R и высотой H. Газ поступает через вершину конуса.

Найдите зависимость концентрации газообразной примеси (q) от расстояния от вершины конуса (h) и ответьте на следующие вопросы.

1. Какова концентрация примеси в поступающем газе, если в выходящем газе она равна b_1 %, а на высоте $H/2$ — b_2 %? ($b_1 = 7,8$ %; $b_2 = 17$ %).

2. Какова концентрация примеси в выходящем газе, если в поступающем газе она равна $a\,\%$, а на высоте $H/2$ — $b\,\%$? ($b = 13,6\,\%$; $a = 17\,\%$).

Задание 2.

$$y' = y - x, \qquad M(4;2).$$

Контрольная работа № 2

Тема: применение степенных рядов для решения дифференциальных уравнений

Содержание контрольной работы № 2

Задание № 1

Найдите указанное число первых членов (считая нулевые) разложения в степенной ряд решения задачи Коши для дифференциального уравнения.

Задание № 2

Для нахождения решения задачи Коши для линейного дифференциального уравненения второго порядка в виде степенного ряда:

- составьте рекуррентную формулу для коэффициентов степенного ряда;
- выпишите первые члены степенного ряда (ненулевые) до x^8 включительно.

Условия задач контрольной работы № 2

Вариант № 1.

1. $y' = y^3 - x, \qquad y(0) = 1 \qquad$ (пять членов).
2. $(x^2 - 1)y'' + (x + 3)y' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 2.

1. $y' = e^y + xy, \qquad y(0) = 0 \qquad$ (пять членов).
2. $y'' - xy' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Вариант № 3.

1. $y'' = x \sin y', \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = \dfrac{\pi}{2} \qquad$ (шесть членов).
2. $(x + 1)y'' = (x - 1)y' + y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

Вариант № 4.

1. $y'' = x^2 y - y', \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \qquad$ (девять членов).

2. $y'' - 2xy' + 14y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 5.

1. $y' = x + \dfrac{1}{y}, \qquad y(0) = 1 \qquad$ (пять членов).

2. $(2x-1)y'' + 2(x-1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 6.

1. $y'' = (y')^2 + xy, \qquad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2 \qquad$ (пять членов).

2. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 7.

1. $y' = x^2y^2 - 1, \qquad y(0) = 1 \qquad$ (шесть членов).

2. $(x-1)y'' - y' - \dfrac{x-3}{4}\,y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 8.

1. $y' = \sin y - \sin x, \qquad y(0) = 0 \qquad$ (семь членов).

2. $(1-x^2)y'' - xy' + 49y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 9.

1. $y'' = xyy', \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \qquad$ (шесть членов).

2. $(x^2 + 3x + 2)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{1}{2}.$

Вариант № 10.

1. $y'' = \dfrac{y'}{y} - \dfrac{1}{x}, \qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \qquad$ (шесть членов).

2. $(1-x^2)y'' - 3xy' + 63y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 11.

1. $y' = y + xe^y, \qquad y(0) = 0 \qquad$ (пять членов).

2. $(x^2 - 4)y'' + 4xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 12.

1. $y' = y^2 - x, \qquad y(0) = 1 \qquad$ (пять членов).

2. $(1-x^2)y'' - 4xy' + 28y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Вариант № 13.

1. $y' = x^2 - y^2, \qquad y(0) = 0 \qquad$ (двенадцать членов).

2. $(x^2+4)y'' + 4xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Вариант № 14.

1. $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2, \qquad y(1) = 1 \qquad$ (шесть членов).

2. $(1-x^2)y'' - 4xy' + 40y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 15.

1. $yy'' + y' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \qquad$ (семь членов).

2. $(2x+1)y'' = (2x-3)y' + 2y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$

Вариант № 16.

1. $y'' = xy' - y^2, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \qquad$ (пять членов).

2. $(1-x^2)y'' - 3xy' + 48y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Вариант № 17.

1. $y' = 2x + \cos y, \qquad y(0) = 0 \qquad$ (пять членов).

2. $\left(x + \dfrac{1}{4}\right)y'' - (2x+1)y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

Вариант № 18.

1. $y'' = ye^x, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \qquad$ (шесть членов).

2. $(1-x^2)y'' - xy' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 19.

1. $y' = \dfrac{1-x^2}{y} + 1, \qquad y(0) = 1 \qquad$ (пять членов).

2. $(2x+4)y'' = (x-2)y' + y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{1}{2}.$

Вариант № 20.

1. $y'' = yy' - x^2, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \qquad$ (шесть членов).

2. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 42y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Вариант № 21.

1. $y'' + yy' - 2 = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ (девять членов).

2. $(x^2-1)y'' + (x-3)y' - y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$

Вариант № 22.

1. $y' = 4x - 2y^2, \qquad y(0) = 0$ (девять членов).

2. $y'' - xy' + 7y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 23.

1. $y' = y^3 + x^2, \qquad y(1) = 1$ (пять членов).

2. $y'' = 2xy' + 4y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Вариант № 24.

1. $y'' = yy' + x^2, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ (семь членов).

2. $y'' - 2xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Вариант № 25.

1. $y'' = (y')^2 + y, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ (пять членов).

2. $(x+1)y'' - (x+4)y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$

Контрольная работа № 3

Тема: дифференциальные уравнения в частных производных

Содержание контрольной работы № 3

Решите дифференциальное уравнение в частных производных при заданных начальных и граничных условиях методом разделения переменных (методом Фурье).

1. Запишите точное решение задачи ($u(x,t)$) в виде суммы ряда и выражение для скорости ($v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}$).
2. Выпишите частичную сумму ряда (удержать три первых слагаемых);
3. Постройте графики частичных сумм ряда $u(x,0)$ и $u(x,0.9)$ для двух первых слагаемых;
4. Постройте аналогичные графики для суммы 50 первых слагаемых.

Условия задач контрольной работы № 3

Вариант № 1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0,t) = u(4,t) = 0;$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0 \leqslant x < 2; \\ -\dfrac{x-4}{2}, & 2 \leqslant x \leqslant 4; \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 2. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0,t) = u(3,t) = 0;$$

$$u(x,0) = \frac{4}{9}\left(3x - x^2\right) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 3. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0,t) = u(4,t) = 0;$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 2; \\ 4 - x, & 2 \leqslant x \leqslant 4; \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 4. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0,t) = u(3,t) = 0;$$

$$u(x,0) = \frac{8}{9}\left(3x - x^2\right), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(6,t) = 0;$

$$u(x,0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 3; \\ 6 - x, & 3 \leqslant x \leqslant 6. \end{cases}$$

Вариант № 6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(4,t) = 0;$

$$u(x,0) = \frac{1}{8}\left(4x - x^2\right), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(6,t) = 0;$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x}{3}, & 0 \leqslant x < 3; \\ \dfrac{2(6-x)}{3}, & 3 \leqslant x \leqslant 6; \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(8,t) = 0;$

$$u(x,0) = 0; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 4; \\ 8 - x, & 4 \leqslant x \leqslant 8. \end{cases}$$

Вариант № 9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(18,t) = 0;$

$$u(x,0) = \frac{9}{100}\sin\frac{\pi x}{18}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(9,t) = 0;$

$$u(x,0) = x(9-x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(6,t) = 0;$

$$u(x,0) = \cos\frac{\pi(x-3)}{6}; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(8,t) = 0;$

$$u(x,0) = 0; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 4; \\ 8 - x, & 4 \leqslant x \leqslant 8; \end{cases}$$

Вариант № 13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(4,t) = 0;$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 2; \\ 4 - x, & 2 \leqslant x \leqslant 4; \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(10,t) = 0;$

$$u(x,0) = \frac{1}{10}\sin\frac{\pi x}{10}\,; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(14,t) = 0;$

$$u(x,0) = 0; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 7; \\ 14 - x, & 7 \leqslant x \leqslant 14. \end{cases}$$

Вариант № 16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(10,t) = 0;$

$$u(x,0) = x(10 - x); \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(6,t) = 0;$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 3; \\ 6 - x, & 3 \leqslant x \leqslant 6; \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 18. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(8,t) = 0;$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x, & 0 \leqslant x < 3; \\ \dfrac{2(8 - x)}{5}, & 3 \leqslant x \leqslant 8; \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 19. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(6,t) = 0;$

$$u(x,0) = \frac{4}{9}\left(6x - x^2\right); \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 20. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(0,t) = u(10,t) = 0;$

$$u(x,0) = 0; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 5; \\ 10 - x, & 5 \leqslant x \leqslant 10. \end{cases}$$

Вариант № 21. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0,t) = u(8,t) = 0;$$
$$u(x,0) = x(8-x); \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 22. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0,t) = u(8,t) = 0;$$
$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 4; \\ 8-x, & 4 \leqslant x \leqslant 8; \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 23. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0,t) = u(10,t) = 0;$$
$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}, & 0 \leqslant x < 3; \\ \dfrac{10-x}{7}, & 3 \leqslant x \leqslant 10; \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 24. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0,t) = u(4,t) = 0;$$
$$u(x,0) = \frac{1}{4}\left(4x - x^2\right); \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 25. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0,t) = u(4,t) = 0;$$
$$u(x,0) = x(4-x); \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Решение типового варианта контрольной работы № 1

Задание 1

Стальная шаровая оболочка с внутренним радиусом r и внешним радиусом R находится в стационарном тепловом состоянии. Температура на внутренней её поверхности равна T_1, а на внешней — T_2. Предполагается, что процесс передачи тепла подчиняется закону Фурье: количество теплоты ΔQ, протекающее в единицу времени через площадку $\Delta\sigma$ в направлении нормали $\overline{n}$ равно

$$\Delta Q = -K\Delta\sigma \cdot \frac{\partial T}{\partial n},$$

где $K = 0,14$ (*кал/(град·см·с)*)— коэффициент теплопроводности (для стали), $\Delta\sigma$— площадь участка поверхности.

Найдите зависимость температуры от расстояния до центра оболочки и ответьте на следующие вопросы.

1. Какова температура слоя, равноудалённого от внутренней и внешней поверхностей? ($r = 6$; $R = 30$; $T_2 = 20°C$; $T_1 = 300°C$).
2. Какое количество теплоты отдаёт шар наружу за 1 *с*? ($r = 6$; $R = 30$; $T_2 = 20°C$; $T_1 = 300°C$).
3. Каков внешний радиус оболочки, если количество теплоты, отдаваемое ею в течение 1 *с* равно J_Q? ($r = 6$; $J_Q = 5000$ *кал/с*; $T_2 = 20°C$; $T_1 = 300°C$).
4. Какова температура внешней поверхности оболочки, если количество теплоты, отдаваемое ею в течение 1 *с* равно J_Q? ($r = 6$; $R = 30$; $T_1 = 200°C$; $J_Q = 1000$ *кал/с*).

Все размеры указаны в сантиметрах.

Задание 2.

$$3yy' = x, \qquad M(1;1).$$

Решение задания 1

Обозначим за ρ расстояние от точки шаровой оболочки до центра шара. Требуется найти зависимость $T(\rho)$. В стационарном состоянии поток тепла J_Q через любой сферический слой оболочки должен быть одинаковым и совпадать с количеством тепла, которое тело отдаёт в окружающую среду (см. рисунок 1). Учитывая, что площадь сферы радиуса ρ равна $4\pi\rho^2$, а

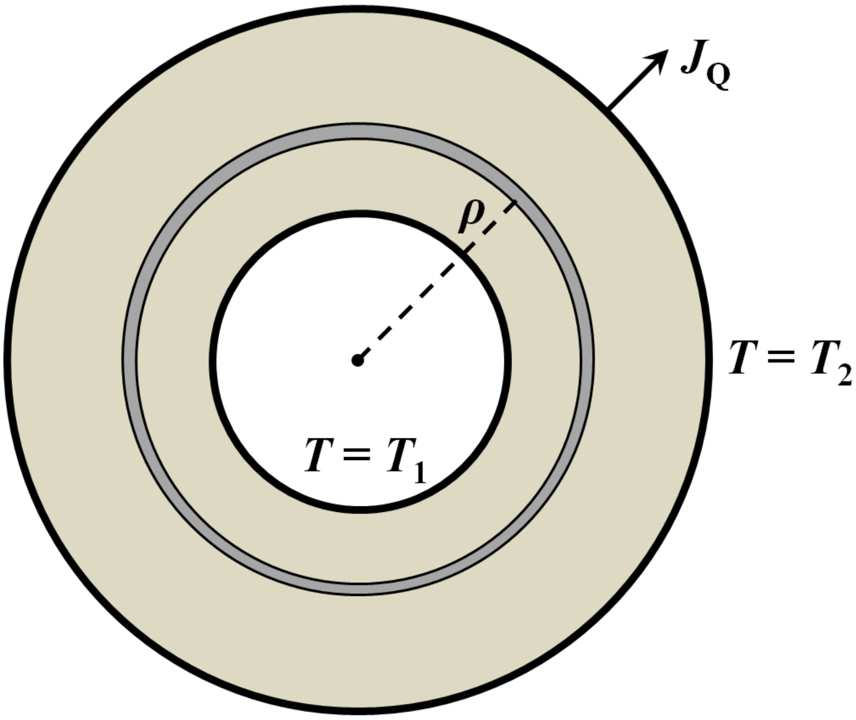

Рисунок 1: Схема к решению задания 1

нормальное направление к к сфере совпадает с радиальным, получаем из закона Фурье (см. условие):

$$-K \cdot 4\pi\rho^2 \cdot \frac{dT}{d\rho} = J_Q = const.$$

Таким образом, для нахождения зависимости температуры (T) от расстояния до центра (ρ) нужно найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dT}{d\rho} = -\frac{J_Q}{4\pi K} \cdot \frac{1}{\rho^2}, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$T\Big|_{\rho=r} = T_1, \qquad T\Big|_{\rho=R} = T_2. \tag{2}$$

Интегрируя обе части равенства (1), получаем

$$T = \frac{J_Q}{4\pi K} \cdot \frac{1}{\rho} + C. \tag{3}$$

Для нахождения неизвестной величины потока тепла (J_Q) и значения произвольной постоянной (C) воспользуемся граничными условиями (2):

$$\begin{cases} \dfrac{J_Q}{4\pi K} \cdot \dfrac{1}{r} + C = T_1, \\ \dfrac{J_Q}{4\pi K} \cdot \dfrac{1}{R} + C = T_2. \end{cases} \tag{4}$$

Вычитая из первого равенства системы (4) второе, получаем

$$\frac{J_Q}{4\pi K}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)=T_1-T_2,$$

откуда находим

$$J_Q=\frac{4\pi K(T_1-T_2)Rr}{R-r}. \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в первое равенство системы (4), находим C:

$$C=T_1-\frac{(T_1-T_2)R}{R-r}.$$

Подставляя найденные значения J_Q и C в формулу (3), окончательно получаем, что распределение температуры по телу задаётся формулой

$$T(\rho)=\frac{(T_1-T_2)Rr}{\rho(R-r)}+T_1-\frac{(T_1-T_2)R}{R-r}$$

или

$$T(\rho)=T_1+\frac{(T_1-T_2)Rr}{R-r}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right). \tag{6}$$

График зависимости температуры от расстояния от центра приведён на рисунке 2. Теперь мы можем дать ответы на все вопросы задания.

1) Слой равноудалённый от внешней и внутренней поверхностей соответствует, очевидно, значению $\rho=\dfrac{R+r}{2}$. Подставляя это значение в формулу (6), находим

$$T\left(\frac{R+r}{2}\right)=T_1+\frac{(T_1-T_2)Rr}{R-r}\left(\frac{2}{R+r}-\frac{1}{r}\right)=$$

$$=T_1+\frac{(T_1-T_2)Rr(r-R)}{(R-r)(R+r)r}=T_1-\frac{(T_1-T_2)R}{R+r}.$$

Подставляя в эту формулу данные для первого пункта, получаем:

$$T(18)=300-\frac{280\cdot 30}{30+6}=\frac{400}{6}\approx 66,667^\circ C.$$

2) Количество теплоты, отдаваемое телом в окружающую среду, в стационарном состоянии совпадает с потоком через произвольную сферическую поверхность и выражается формулой (5). Подставляя данные для второго пункта, получаем:

$$J_Q=\frac{(300-20)\cdot 30\cdot 6\cdot 4\pi\cdot 0,14}{30-6}\approx 3695\ \textit{кал/с}.$$

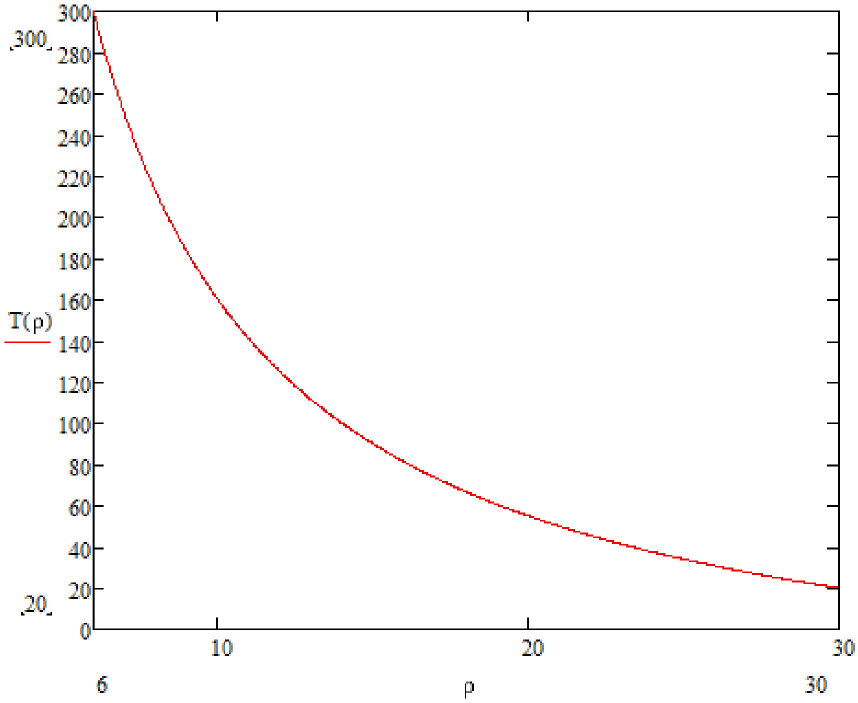

Рисунок 2: График зависимости температуры от расстояния (к заданию 1)

3) Из формулы (5) нетрудно выразить внешний радиус оболочки через остальные параметры:

$$(R-r)J_Q = 4\pi(T_1-T_2)KRr \Leftrightarrow J_QR - J_Qr + 4\pi K(T_2-T_1)Rr = 0,$$

откуда

$$R = \frac{J_Qr}{J_Q + 4\pi K(T_2-T_1)r}.$$

Подставляя данные для третьего пункта, находим

$$R = \frac{5000 \cdot 6}{5000 + 4\pi \cdot 0,14(20-300)\cdot 6} \approx 14,7 \text{ см}.$$

4) Из формулы (5) выразим значение T_2 через остальные параметры:

$$4\pi K(T_1-T_2)Rr = J_Q \cdot (R-r) \Leftrightarrow T_2 = T_1 - \frac{(R-r)J_Q}{4\pi KRr}.$$

Подставляя данные для пункта 4, находим

$$T_2 = 200 - \frac{(30-6)\cdot 1000}{4\pi \cdot 0,14 \cdot 30 \cdot 6} \approx 124°C.$$

Решение задания 2

Преобразуем дифференциальное уравнение к стандартному виду

$$y' = \frac{x}{3y}. \tag{7}$$

Отметим сразу, что условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши нарушаются в точках оси Ox ($y = 0$).

1) Необходимым условием экстремума является равенство $y' = 0$, из уравнения (7) заключаем, что экстремум может достигаться только в точках линии

$$x = 0,$$

т. е. в точках оси Oy. Таким образом, линией экстремумов является ось Oy.

2) Необходимым условием перегиба является равенство $y'' = 0$. Дифференцируя по x обе части равенства (7), получаем

$$y'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}$$

или, с учётом формулы (7),

$$y'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{y - x \cdot \dfrac{x}{3y}}{y^2} = \frac{3y^2 - x^2}{9y^3}\,.$$

Вторая производная обращается в ноль, если

$$3y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}}\,.$$

Таким образом, линиями возможных перегибов является пара прямых, пересекающихся в начале координат. Ниже будет показано, что данные линии являются не линиями перегибов, а асимптотами интегральных кривых.

3) Тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой (k) равен значению y' в точке касания. Полагая $y' = k$, из формулы (7) получаем уравнения изоклин

$$y = \frac{x}{3k}.$$

Изоклинами являются прямые, проходящие через начало координат (см. рисунок 3). Выпишем уравнения некоторых изоклин

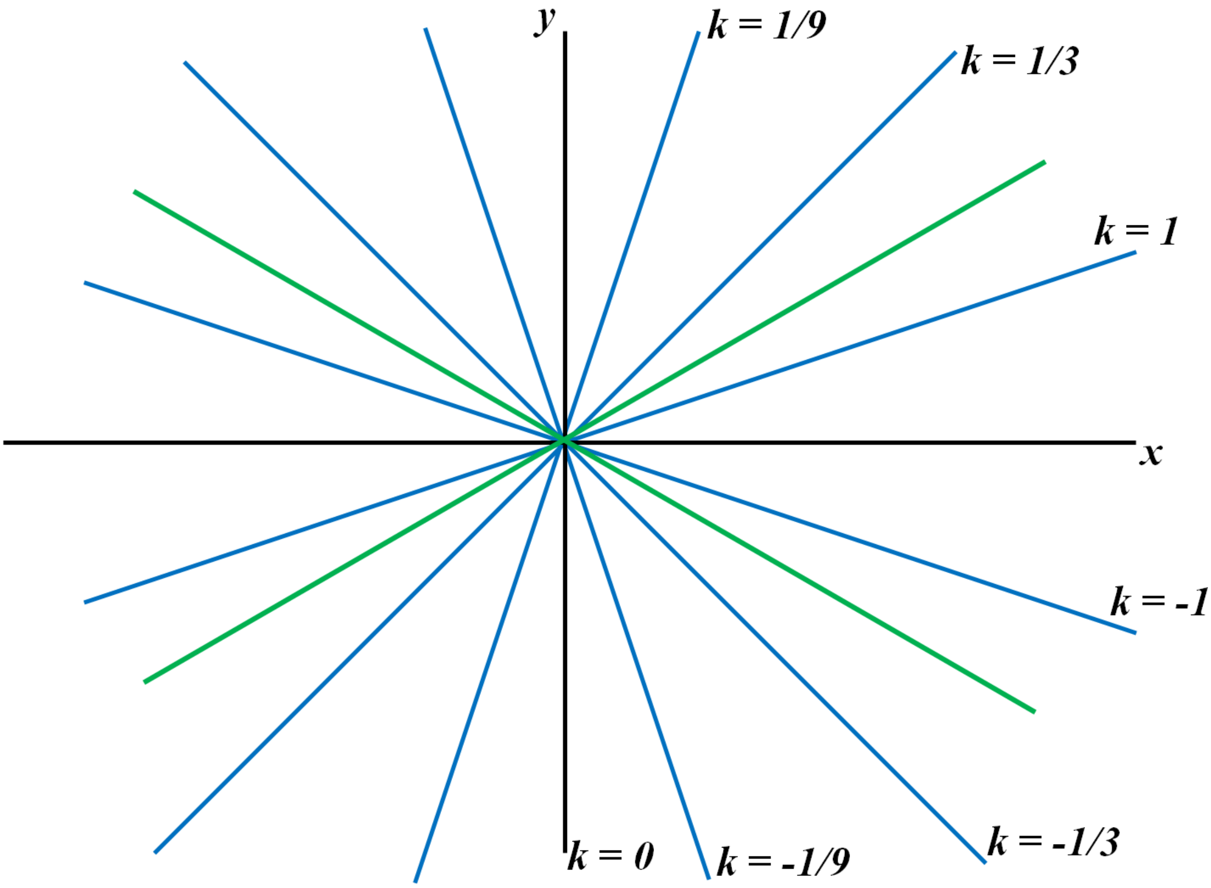

Рисунок 3: Изоклины дифференциального уравнения (к заданию 2)

$$k = 1 \leftrightarrow y = \frac{x}{3}, \quad k = \frac{1}{3} \leftrightarrow y = x, \quad k = \frac{1}{9} \leftrightarrow y = 3x,$$

$$k = -1 \leftrightarrow y = -\frac{x}{3}, \quad k = -\frac{1}{3} \leftrightarrow y = -x, \quad k = -\frac{1}{9} \leftrightarrow y = -3x.$$

По найденым изоклинам построим поле направлений. Отметим штрихами на каждой из изоклин направление, в котором интегральные кривые пересекают данную изоклину. Значение углового коэффициента k равно тангенсу угла между касательной к интегральной кривой и осью Ox (см. рисунок 4). Значение $k = 0$ означает, что изоклина пересекается в гори-

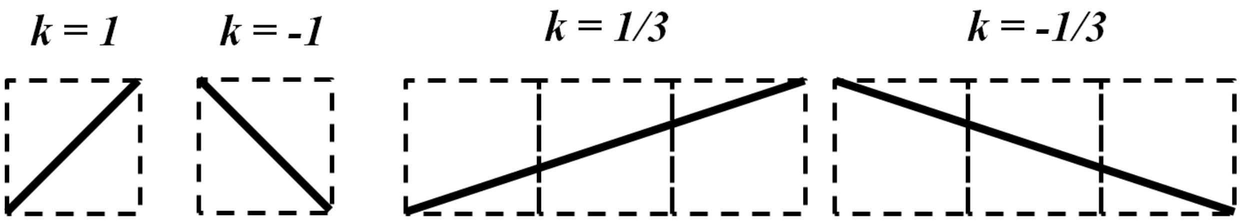

Рисунок 4: Изображение наклона интегральных кривых (к заданию 2)

зонтальном направлении. Ось Ox $(y = 0)$ соответствует значению $k = \infty$, это означает, что ось Ox интегральными кривыми пересекается в вертикальном направлении. Важно заметить, что линии $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ в рассматриваемом случае являются также изоклинами, соответствующими наклону $k = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Поскольку направление интегральной кривой совпадает с направлением самой изоклины, линии $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ являются интегральными кривыми дифференциального уравнения.

Поле направлений для дифференциального уравнения (1) приведено на рисунке 5.

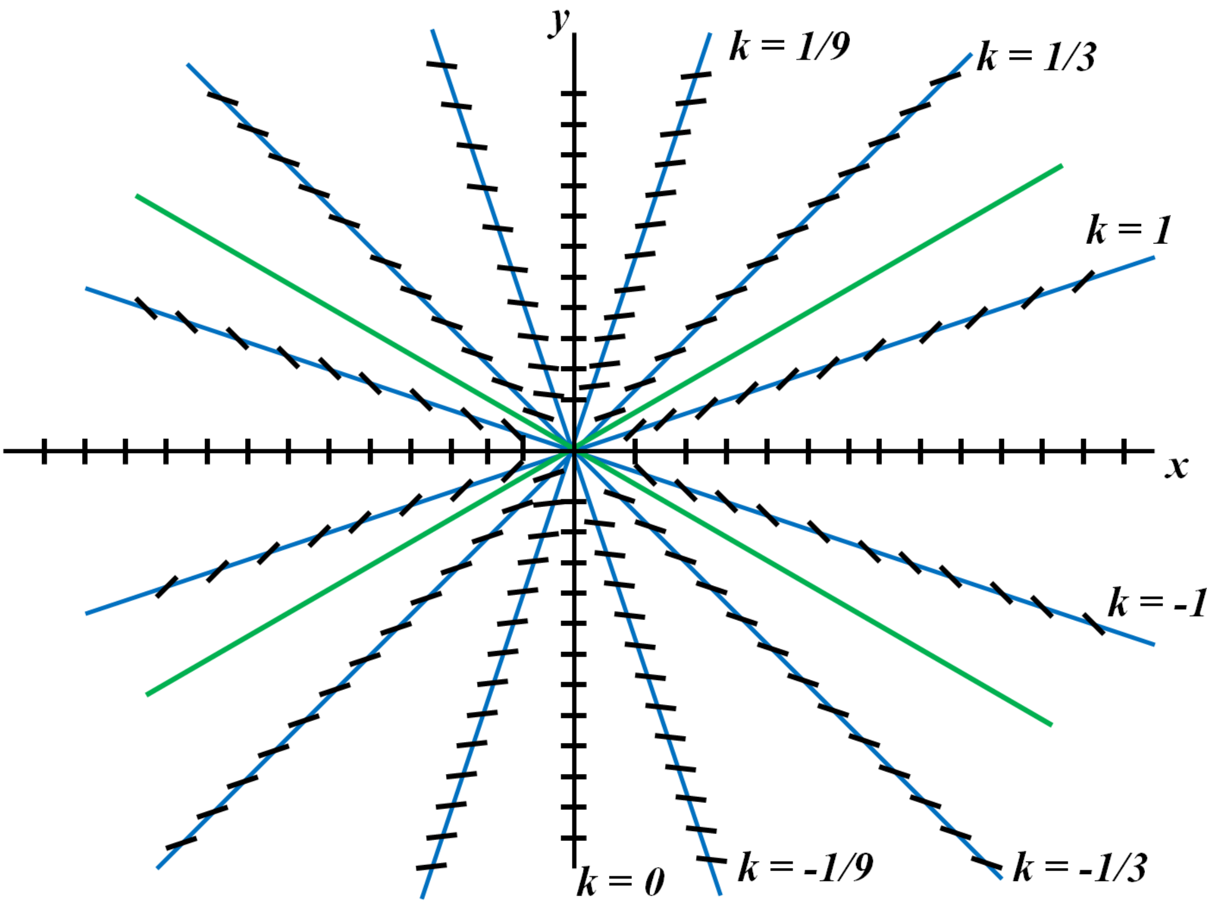

Рисунок 5: Поле направлений для дифференциального уравнения (к заданию 2)

4) Отметим на чертеже точку $M_0(1;1)$ и начертим проходящую через нее кривую, которая пересекат изоклины в отмеченном на них направлении (см. рисунок 6).

5) Перепишем исходное дифференциальное уравнение в симметричной

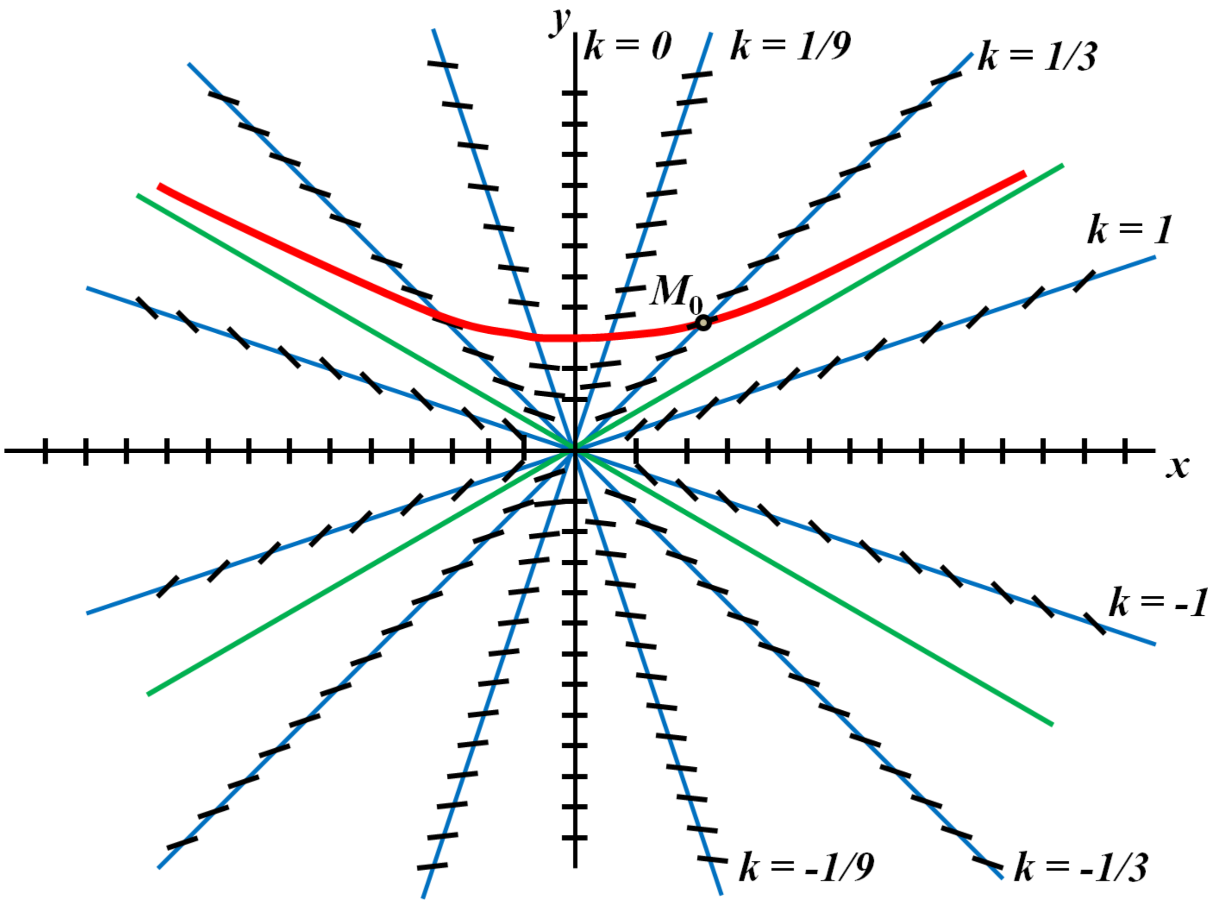

Рисунок 6: График решения задачи Коши (к заданию 2)

форме и умножим обе его части на $\dfrac{2}{3}$:

$$3yy' = x \Leftrightarrow 3ydy = xdx \Leftrightarrow 2ydy = \frac{2xdx}{3}\ .$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получаем

$$\int 2ydy = \frac{1}{3}\int 2xdx \Leftrightarrow y^2 + C = \frac{x^2}{3}.$$

Таким образом, общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = C. \tag{8}$$

Заметим, что интегральные кривые представляют собой семейство гипербол с асмиптотами $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, которые сами также являются интегральными кривыми (при $C = 0$).

Для нахождения значения произвольной постоянной подставим в равенство (8) значения $x = 1$ и $y = 1$. Получим

$$C = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

Подставив в равенство (8) найденное значение C и выразив из него y, получим формулу, задающую решение задачи Коши:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{3}}\,.$$

Отметим хорошее соответствие интегральной кривой, изображённой на рисунке 6, графику точного решения задачи Коши.

Решение типового варианта контрольной работы № 2

Задание 1

$$y'' = xy' + y^2, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \qquad \text{(девять членов).}$$

Задание 2

$$(1 - x^2)y'' + (x^2 - 4x - 1)y' + 2(x - 1)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Решение задания 1

Учтём, что если решение задачи Коши раскладывается в степенной ряд, то этот ряд должен совпадать с рядом Тейлора (Маклорена):

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y'(0)x^k}{k!} = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2!} + \frac{y'''(0)x^3}{3!} + \ldots$$

Первые два члена ряда можно выписать сразу, используя начальные условия задачи Коши. Третий член ряда находится непосредственно из уравнения. Подставляя в уравнение значение $x = 0$, с учётом начальных условий получаем

$$y''(0) = 0 \cdot y'(0) + (y(0))^2 = 0 + 1 = 1.$$

Таким образом, сразу можем записать:

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2!} + \ldots = 1 + 0 \cdot x + \frac{x^2}{2} + \ldots$$

Чтобы найти остальные члены ряда, найдём производные y до восьмого порядка включительно. Для этого последовательно будем дифференцировать обе части исходного дифференциального уравнения.

$$y''' = xy'' + y' + 2yy';$$

$$y^{(IV)} = xy''' + y'' + y'' + 2(y'y' + yy'') = xy''' + 2y'' + 2\left((y')^2 + yy''\right);$$

$$y^{(V)} = xy^{(IV)} + y''' + 2y''' + 2\left(2y'y'' + y'y'' + yy'''\right) =$$
$$= xy^{(IV)} + 3y''' + 2\left(3y'y'' + yy'''\right);$$

$$y^{(VI)} = xy^{(V)} + y^{(IV)} + 3y^{(IV)} + 2\left(3y''y'' + 3y'y''' + y'y''' + yy^{(IV)}\right) =$$
$$= xy^{(V)} + 4y^{(IV)} + 2\left(3(y'')^2 + 4y'y''' + yy^{(IV)}\right);$$

$$y^{(VII)} = xy^{(VI)}+y^{(V)}+4y^{(V)}+2\left(6y''y''' + 4y''y''' + 4y'y^{(IV)} + y'y^{(IV)} + yy^{(V)}\right) =$$

$$= xy^{(VI)} + 5y^{(V)} + 2\left(10y''y''' + 5y'y^{(IV)} + yy^{(V)}\right);$$

$$y^{(VIII)} = xy^{(VII)} + y^{(VI)} + 5y^{(VI)} + 2\left(10(y''')^2 + 10y''y^{(IV)} + 5y''y^{(IV)} +\right.$$

$$\left. +5y'y^{(V)} + y'y^{(V)} + yy^{(VI)}\right) =$$

$$= xy^{(VII)} + 6y^{(VI)} + 2\left(10(y''')^2 + 15y''y^{(IV)} + 6y'y^{(V)} + yy^{(VI)}\right).$$

Последовательно подставляя значение $x = 0$ в каждое из выражений, полученных выше, находим:

$$y'''(0) = 0 + 0 + 0 = 0;$$

$$y^{(IV)}(0) = 0 + 2 + 2(1 + 0) = 4;$$

$$y^{(V)}(0) = 0;$$

$$y^{(VI)}(0) = 0 + 4 \cdot 4 + 2(3 + 0 + 4) = 30;$$

$$y^{(VII)}(0) = 0;$$

$$y^{(VIII)}(0) = 0 + 6 \cdot 30 + 2(0 + 15 \cdot 4 + 0 + 30) = 360.$$

Теперь можно выписать все требуемые члены разложения в ряд:

$$y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{4x^4}{24} + \frac{30x^6}{720} + \frac{360x^8}{40320} + ...$$

Окончательно получаем:

$$y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{24} + \frac{x^8}{112} + ...$$

Решение задания 2

Решение задачи Коши будем искать в виде степенного ряда с центром в точке $x_0 = 0$:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + ... \tag{9}$$

Учитывая, что внутри интервала сходимости степенные ряды допускают почленное дифференцирование, получим

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

Подставим выражения для y, y' и y'' в исходное дифференциальное уравнение:

$$y'' - x^2y'' + x^2y' - 4xy' - y' + 2xy - 2y = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x^2\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2} + x^2\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1} -$$

$$-4x\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 2x\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k - 2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k = 0.$$

Преобразуем полученное равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^k + \sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k+1} -$$

$$-4\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^k - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1} - 2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k = 0.$$

Переобозначим индекс суммирования так, чтобы под всеми знаками суммы в общем члене ряда оказалась одинаковая степень x:

$$\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k+1} = a_1x^2 + 2a_2x^3 + 3a_3x^4 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1} = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n.$$

Слагаемые, содержащие нулевую и первую степень x выпишем отдельно, а остальные запишем под общим знаком суммирования:

$$2a_2 + 6a_3x - 4a_1x - a_1 - 2a_2x + 2a_0x - 2a_0 - 2a_1x +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + (n-1)a_{n-1} - 4na_n -$$

$$-(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} - 2a_n\big)\,x^n = 0.$$

Упрощая данное равенство, получим:

$$2a_2 - a_1 - 2a_0 + (6a_3 - 2a_2 - 6a_1 + 2a_0)\,x + \sum_{n=2}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2} -$$

$$-(n+1)a_{n+1} - (n^2+3n+2)a_n + (n+1)a_{n-1}\big)\, x^n = 0.$$

Полученное равенство показывает, что сумма степенного ряда равна нулю. В силу единственности разложения функции в степенной ряд заключаем, что коэффициенты при всех степенях должны быть нулевые. Приравнивая коэффициенты нулю, получаем бесконечную систему уравнений:

$$2a_2 - a_1 - 2a_0 = 0,$$

$$6a_3 - 2a_2 - 6a_1 + 2a_0 = 0,$$

и при $n \geqslant 2$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} - (n+2)(n+1)a_n + (n+1)a_{n-1} = 0.$$

Из начальных условий задачи Коши получаем,

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

Остальные коэффициенты легко находятся из выписанной выше системы уравнений, поскольку коэффициенты с бо́льшими номерами выражаются через найденные ранее коэффициенты с меньшими номерами:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_0\right),$$

$$a_3 = \frac{1}{3}\left(a_2 + 3a_1 - a_0\right),$$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{n+2} + a_n - \frac{a_{n-1}}{n+2} \quad (n \geqslant 2). \tag{10}$$

Формула (10) представляет собой искомое рекуррентное соотношение, позволяющее найти любое число членов ряда. По условию задачи надо найти все коэффициенты до a_8 включительно. Находим:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 0,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_0) = \frac{1}{2}(0+2) = 1,$$

$$a_3 = \frac{1}{3}\left(a_2 + 3a_1 - a_0\right) = \frac{1}{3}(1+0-1) = 0.$$

Далее по формуле (10):

$$n = 2: \qquad a_4 = \frac{a_3}{4} + a_2 - \frac{a_1}{4} = 0 + 1 - 0 = 1,$$

$$n = 3: \qquad a_5 = \frac{a_4}{5} + a_3 - \frac{a_2}{5} = \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{5} = 0,$$

$$n = 4: \qquad a_6 = \frac{a_5}{6} + a_4 - \frac{a_3}{6} = 0 + 1 - 0 = 1,$$

$$n = 5: \qquad a_7 = \frac{a_6}{7} + a_5 - \frac{a_4}{7} = \frac{1}{7} + 0 - \frac{1}{7} = 0,$$

$$n = 6: \qquad a_8 = \frac{a_7}{8} + a_6 - \frac{a_5}{8} = 0 + 1 - 0 = 1.$$

Таким образом, решение задачи Коши записывается степенным рядом

$$y = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots$$

Примечание. В полученном ряде нетрудно узнать геометрическую прогрессию:

$$y = \frac{1}{1 - x^2}\,.$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что данная функция является точным решением задачи.

Решение типового варианта контрольной работы № 3

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}\,, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{4-x}{2}\,, & 2 < x \leqslant 4; \end{cases} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x(4-x); \\ u(0,t) = u(4,t) = 0. \end{cases}$$

Решение

Задача соответствует свободным колебаниям закреплённой на концах струны при заданных начальной форме и начальной скорости движения. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x \in [0;4], \tag{11}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = f(x), \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \tag{13}$$

и граничным условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{14}$$

Ключевая идея метода Фурье заключается в том, чтобы искать нетривиальные (т. е. отличные от тождественного нуля) решения уравнения (11), удовлетворяющие граничным условиям (14), в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t). \tag{15}$$

Из равенства (15), очевидно, следует

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t); \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)T(t); \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Подставляя выражения для вторых производных в исходное уравнение (11), получим

$$T''(t)X(x) = 9X''(x)T(t).$$

Разделив обе части равенства на $9T(t)X(x)$, получим

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,. \tag{16}$$

Левая часть равенства (16) зависит только от t и не зависит от x. Правая часть равенства зависит только от x и не зависит от t. Можно заключить, что равенство возможно только в том случае, если обе его части в действительности не зависят ни от t, ни от x, т.е. являются константой.

Обозначая эту константу μ, мы можем записать

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{T''(t)}{9T(t)} = \mu, \\ \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \mu. \end{cases}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение в частных производных сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям, по каждой из переменных в отдельности:

$$\begin{cases} T''(t) = 9\mu T(t), \\ X''(x) = \mu X(x). \end{cases} \tag{17}$$

Рассмотрим, в каком случае решение исходного уравнения, представленное в виде (15) будет удовлетворять граничным условиям. Подставляя в равенство (15) значения $x = 0$ и $x = 4$, с учётом граничных условий (14), получаем равенства

$$X(0) \cdot T(t) = X(4) \cdot T(t) = 0, \tag{18}$$

которые должны выполняться в любой момент времени t. Получаем

$$X(0) = 0, \qquad X(4) = 0, \tag{19}$$

поскольку при невыполнении хотя бы одного из этих равенств из (18) следует, что функция $T(t)$, а следовательно и $u(x,t)$, тождественно равна нулю, что недопустимо с точки зрения выполнения неоднородных начальных условий (12) и (13).

Найдём решение второго уравнения системы (17):

$$X''(x) - \mu X(x) = 0. \tag{20}$$

Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Нас интересуют нетривиальные решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям (19). На дифференциальное уравнение второго порядка наложено два дополнительных условия — заданы значения решения в двух фиксированных точках. Такая задача для дифференциальных уравнений называется ***краевой***. В отличие от задачи Коши, которая для дифференциальных уравнений данного типа всегда имеет единственное решение, краевая задача может вообще не иметь решений, а может иметь бесконечно много решений.

Характеристическое уравнение для линейного дифференциального уравнения (20) имеет вид

$$p^2 - \mu = 0. \tag{21}$$

Вид общего решения уравнения (20) зависит от знака числа μ. Разберём возможные случаи.

Случай 1. $\mu > 0$.

Обозначим $\mu = \lambda^2 \neq 0$. Корни характеристического уравнения (21) равны

$$p_{1,2} = \pm\lambda,$$

общее решение уравнения (20) имеет, следовательно, вид

$$X(x) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}.$$

Учтём краевые условия (19):

$$\begin{cases} C_1 & + & C_2 & = 0, \\ C_1 e^{-4\lambda} & + & C_2 e^{4\lambda} & = 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что данная система имеет единственное решение $C_1 = C_2 = 0$. Таким образом, в этом случае граничным условиям может удовлетворять только тривиальное решение.

Случай 2. $\mu = 0$.

Уравнение (20) имеет в этом случае вид $X''(x) = 0$. Его общим решением является произвольный многочлен первой степени:

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Подставляя значение $x = 0$ из (19) получаем

$$0 = X(0) = 0 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 0 \Longrightarrow X(x) = C_1 x.$$

Подставляя $x = 4$, получаем

$$0 = X(4) = 4C_1 \Longrightarrow C_1 = 0.$$

Таким образом, и в этом случае краевым условиям (19) удовлетворяет только тривиальное решение.

Случай 3. $\mu < 0$.

Обозначим $\mu = -\lambda^2 \neq 0$. Корни характеристического уравнения (21) равны

$$p_{1,2} = \pm\lambda i,$$

общее решение уравнения (20) имеет, следовательно, вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Подставляем $x = 0$:

$$0 = X(0) = C_1 + 0 \Longrightarrow C_1 = 0,$$

и решение должно иметь вид $X = C_2 \sin \lambda x$. Подставляем значение $x = 4$:

$$0 = X(4) = C_2 \sin 4\lambda.$$

Поскольку C_1 и C_2 не должны одновременно обращаться в ноль, получаем

$$\sin 4\lambda = 0,$$

откуда следует, что

$$4\lambda_k = \pi k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

В результате получаем, что уравнение (20) может иметь нетривиальные решения, удовлетворяющие краевым условиям (19), только при значениях μ равных

$$\mu_k = -\left(\frac{\pi k}{4}\right)^2, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{22}$$

Решения, соответствующие конкретному значению k, обозначим

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{\pi k x}{4}\,, \tag{23}$$

постоянная C_k может быть произвольной.

Перейдём теперь к рассмотрению первого уравнения системы (17), учитывая, что возможные значения μ задаются формулой (22):

$$T''(t) + 9\left(\frac{\pi k}{4}\right)^2 T(t) = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдём его корни

$$p^2 + \left(\frac{3\pi k}{l}\right)^2 = 0 \Longrightarrow p_{1,2} = \frac{3\pi k}{l}\, i.$$

Общее решение имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{3\pi k}{4}\, t + B_k \sin\frac{3\pi k}{4}\, t, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{24}$$

Подставляя выражения (23) и (24) в формулу (15), найдём решения уравнения (11), удовлетворяющие граничным условиям (14):

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{3\pi kt}{4} + b_k \sin\frac{3\pi kt}{4}\right)\sin\frac{\pi kx}{4}, \tag{25}$$

где $a_k = A_k C_k$, $b_k = B_k C_k$.

Решения $u_k(x,t)$ называются ***собственными функциями*** задачи, а соответствующие им колебания — собственными колебаниями.

Для построения решения уравнения, удовлетворяющего также и начальным условиям, возьмём сумму всех решений (25), которая в силу линейности и однородности уравнения (11) тоже будет являться его решением:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{3\pi kt}{4} + b_k \sin\frac{3\pi kt}{4}\right)\sin\frac{\pi kx}{4}\ . \tag{26}$$

В граничных точках струны $x = 0$ и $x = 4$ функция u, обращается в ноль, поскольку в ноль обращается каждое слагаемое суммы. Остаётся подобрать коэффициенты a_k и b_k таким образом, чтобы функция $u(x,t)$, задаваемая формулой (26), удовлетворяла начальным условиям.

Подставляя в равенство (26) значение $t = 0$, получаем из условия (12)

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi kx}{4}.$$

Полученное равенство означает, что числа a_k являются коэффициентами разложения функции f в ряд по синусам. По известной формуле для коэффициентов тригонометрического ряда Фурье имеем

$$a_k = \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\sin\frac{\pi kx}{4}\, dx. \tag{27}$$

Теперь продифференцируем обе части равенства (26) по переменной t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-a_k \cdot \frac{3\pi k}{4} \sin \frac{3\pi k t}{4} + b_k \cdot \frac{3\pi k}{4} \cos \frac{3\pi k t}{4} \right) \sin \frac{\pi k x}{4} \ .$$

Подставляя значение $t = 0$, получаем из условия (13)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x(4-x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \frac{3\pi k}{4} \ \sin \frac{\pi k x}{4} \ .$$

Заметив, что числа $b_k \cdot \dfrac{3\pi k}{4}$ являются коэффициентами разложения функции $x(4-x)$ в ряд по синусам, здесь также можно использовать формулу для коэффициентов ряда Фурье:

$$b_k \cdot \frac{3\pi k}{4} = \frac{2}{4} \int\limits_0^4 x(4-x) \sin \frac{\pi k x}{4} \, dx,$$

откуда окончательно получаем

$$b_k = \frac{2}{3\pi k} \int\limits_0^4 x(4-x) \sin \frac{\pi k x}{4} \, dx. \tag{28}$$

Итак, решение разбираемой задачи задаётся формулой (26), где коэффициенты a_k и b_k определяются по формулам (27) и (28) соответственно. Найдём эти коэффициенты, вычислив соответствующие интегралы.

$$a_k = \frac{1}{2} \int\limits_0^4 f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^2 x \sin \frac{\pi k x}{4} \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_2^4 (4-x) \sin \frac{\pi k x}{4} \, dx \right) . \tag{29}$$

Сделаем во втором слагаемом замену $y = 4 - x$:

$$\int\limits_2^4 (4-x) \sin \frac{\pi k x}{4} dx = \int\limits_2^0 y \sin \left(\pi k - \frac{\pi k y}{4} \right) (-dy) = (-1)^{k-1} \int\limits_0^2 y \sin \frac{\pi k y}{4} dy.$$

Таким образом, при нечётных k второе слагаемое в формуле (29) совпадает с первым, а при чётных — отличается от него знаком. Заключаем, что

$$a_{2n} = 0,$$

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x \sin\frac{\pi(2n-1)x}{4}\,dx.$$

Вычислим интеграл, применив интегрирование по частям:

$$\left.\begin{aligned} &u = x \\ &dv = \sin\frac{\pi(2n-1)x}{4}\,dx \end{aligned}\;\right|\;\begin{aligned} &du = dx \\ &v = -\frac{4}{\pi(2n-1)}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{4}, \end{aligned}$$

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{4x}{\pi(2n-1)}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{4}\bigg|_0^2 + \frac{4}{\pi(2n-1)}\int\limits_0^2 \cos\frac{\pi(2n-1)x}{4}\,dx\right),$$

$$a_{2n-1} = -\frac{4}{\pi(2n-1)}\cos\frac{\pi(2n-1)}{2} + \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{4}\bigg|_0^2 =$$

$$= 0 + \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\sin\frac{\pi(2n-1)}{2} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}.$$

Интеграл в формуле (28) также находится по частям:

$$\left.\begin{aligned} &u = 4x - x^2 \\ &dv = \sin\frac{\pi kx}{4}\,dx \end{aligned}\;\right|\;\begin{aligned} &du = (4-2x)dx \\ &v = -\frac{4}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{4}, \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{2}{3\pi k}\left(-\frac{4x(4-x)}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{4}\bigg|_0^4 + \frac{4}{\pi k}\int\limits_0^4 (4-2x)\cos\frac{\pi kx}{4}\,dx\right) =$$

$$= 0 + \frac{16}{3\pi^2 k^2}\int\limits_0^4 (2-x)\cos\frac{\pi kx}{4}\,dx.$$

Повторно интегрируем по частям:

$$\left.\begin{aligned} &u = 2 - x \\ &dv = \cos\frac{\pi kx}{4}\,dx \end{aligned}\;\right|\;\begin{aligned} &du = -dx \\ &v = \frac{4}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{4}, \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{64}{3\pi^3 k^3}\left((2-x)\sin\frac{\pi kx}{4}\bigg|_0^4 + \int\limits_0^4 \sin\frac{\pi kx}{4}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{256}{3\pi^4 k^4}\cos\frac{\pi kx}{4}\bigg|_0^4 = \frac{256(1-\cos\pi k)}{3\pi^4 k^4} = \frac{256(1-(-1)^k)}{3\pi^4 k^4}.$$

Для коэффициентов с чётными номерами имеем

$$b_{2n} = 0,$$

а для с коэффициентов с нечётными номерами

$$b_{2n-1} = \frac{512}{3\pi^4(2n-1)^4}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (26), получаем окончательный результат:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1} \cdot 8 \cos \frac{3\pi(2n-1)t}{4}}{\pi^2(2n-1)^2} + \frac{512 \sin \frac{3\pi(2n-1)t}{4}}{3\pi^4(2n-1)^4} \right) \sin \frac{\pi(2n-1)x}{4} \ .$$

Дифференцируя по t, получим выражение для скорости:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n} \cdot 6 \cos \frac{3\pi(2n-1)t}{4}}{\pi(2n-1)} + \frac{128 \sin \frac{3\pi(2n-1)t}{4}}{\pi^3(2n-1)^3} \right) \sin \frac{\pi(2n-1)x}{4} \ .$$

Выпишем три первые слагаемые ряда:

$$u(x,t) = \left(\frac{8 \cos \frac{3\pi t}{4}}{\pi^2} + \frac{512 \sin \frac{3\pi t}{4}}{3\pi^4} \right) \sin \frac{\pi x}{4} +$$

$$+ \left(\frac{-8 \cos \frac{9\pi t}{4}}{9\pi^2} + \frac{512 \sin \frac{9\pi t}{4}}{243\pi^4} \right) \sin \frac{3\pi x}{4} + \left(\frac{8 \cos \frac{15\pi t}{4}}{25\pi^2} + \frac{512 \sin \frac{15\pi t}{4}}{1875\pi^4} \right) \sin \frac{5\pi x}{4} + \ldots$$

Графики зависимости $u(x,0)$ для 2 и 50 первых слагаемых ряда приведены на рисунке 7.

Графики зависимости $u(x,0.9)$ для 2 и 50 первых слагаемых ряда приведены на рисунке 8.

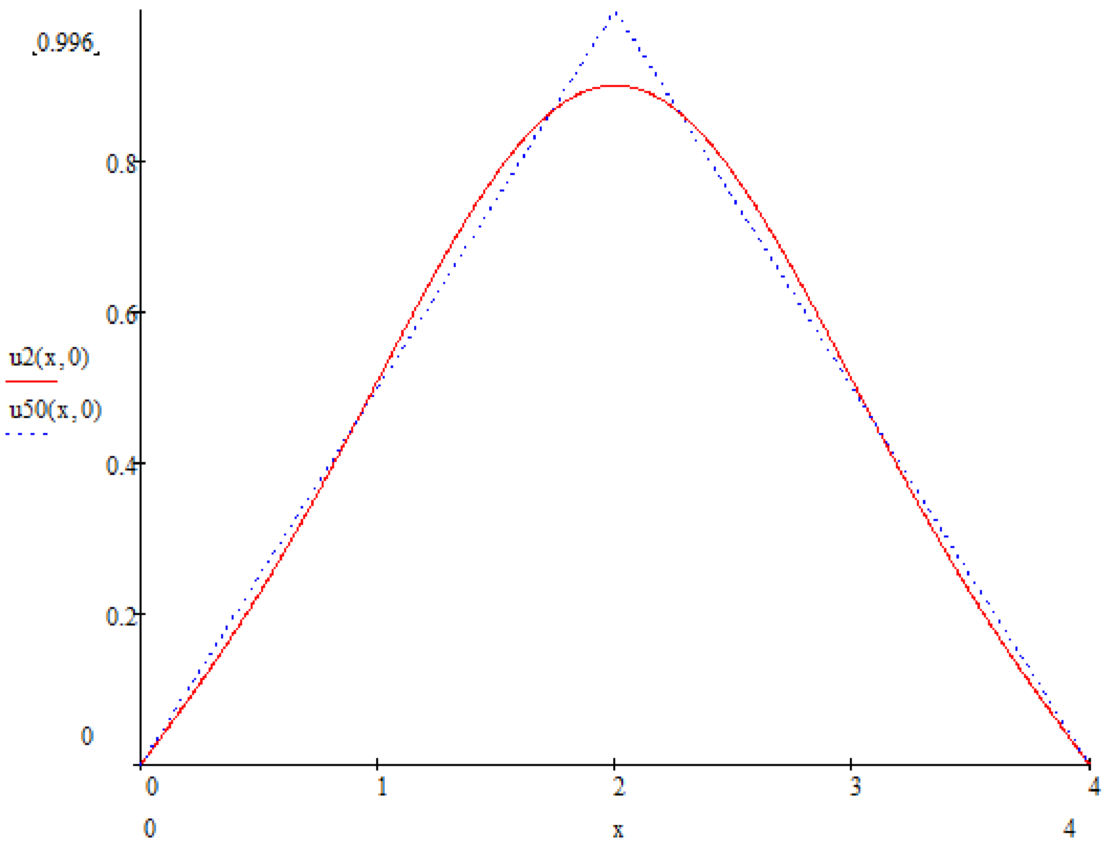

Рисунок 7: График $u(x, 0)$ для 2 и 50 слагаемых ряда

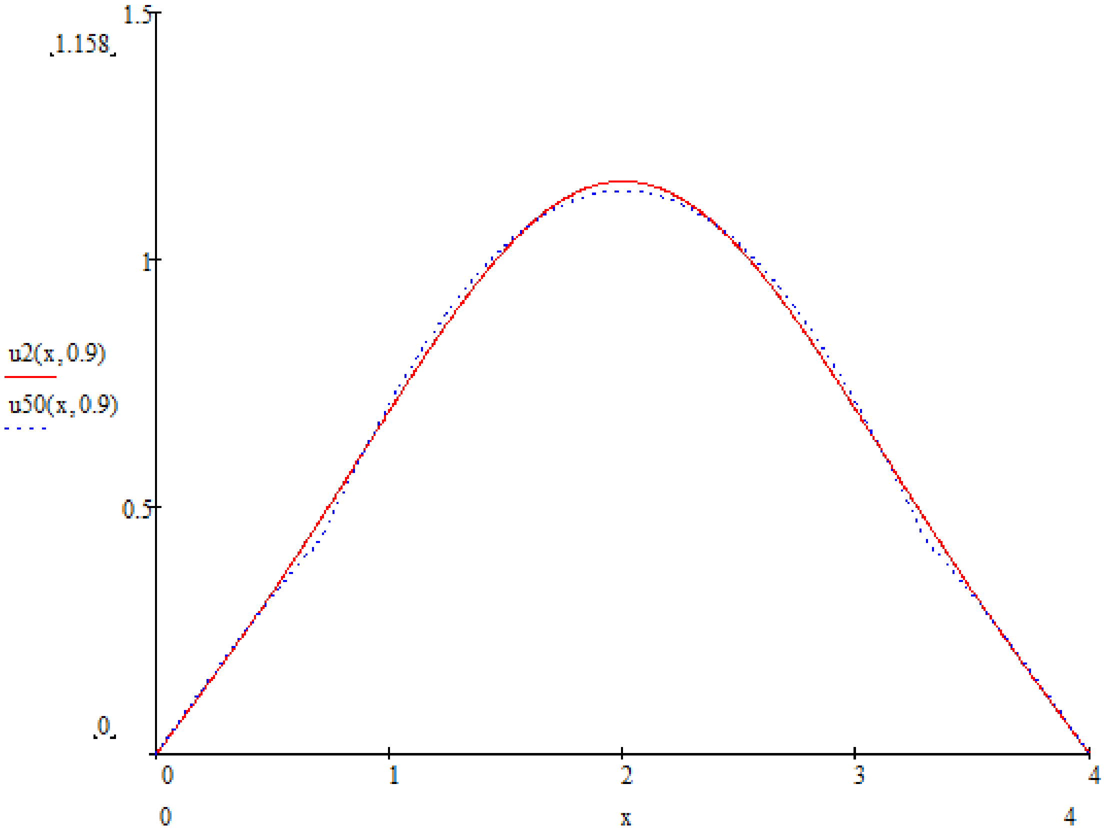

Рисунок 8: График $u(x, 0.9)$ для 2 и 50 слагаемых ряда

Содержание