Составители: М.Е. Куцко, Г.Г. Рогачева, Л.Б. Свинолобова

Рецензент: кандидат технических наук, доцент В.А. Сериков

Содержатся методические указания к расчету линейных резистивных цепей и цепей синусоидального тока. Все разделы сопровождаются примерами решения задач и достаточным набором вариантов исходных данных, которые могут использоваться как во время практических занятий, так и для домашних заданий. Издание предназначено для студентов всех специальностей института дневной, вечерней и заочной форм обучения.

Подготовлены к публикации кафедрой теоретической электротехники и механики Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

60x84 1/16.
печ. л. 3,3.
к. № 417

Задание I

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

З а д а ч а I.I. Анализ цепей методом преобразований

Простейшая электрическая цепь содержит один источник (тока или напряжения) и пассивные элементы, соединенные последовательно и параллельно. При анализе таких цепей целесообразно заменить все соединение пассивных элементов одним эквивалентным (входным) сопротивлением относительно точек подключения источника. Затем, используя закон Ома, можно определить токи всех ветвей и напряжения на всех резистивных элементах. Перед началом расчета следует указать на схеме стрелкой положительное направление тока каждой ветви. При наличии одного источника все токи во внешней цепи определяются направлением ЭДС или тока источника. Если цепь содержит несколько источников, то для приведения цепи к простейшей следует выполнить эквивалентные преобразования как пассивных, так и активных элементов цепи. При этом объединять можно при последовательном соединении только источники ЭДС, а при параллельном – источники тока. Поэтому, по мере необходимости, надо преобразовывать некоторые источники ЭДС e_k в источники тока $J=e_k/R_k$, а источники тока J_m в источники ЭДС $e_m=J_m R_m$.

При наличии идеального источника ЭДС ($R_k=0$) следует применить прием "перенос через узел", а в случае идеального источника тока ($R_m\to\infty$) – прием "разнос по контуру".

З а д а н и е

Варианты исходных данных к задаче приведены в Прил.I и Прил.3. На всех рисунках рядом с соответствующими элементами указаны их параметры, сопротивления даны в омах, токи источников – в амперах, ЭДС – в вольтах.

Перед решением задачи рекомендуется начертить заданную схему, обозначить элементы, записать отдельно их параметры, указать на схеме стрелками положительные направления токов каждой ветви.

Для заданного варианта задачи из Прил.I выполнить следующее:
- определить входное сопротивление (проводимость);
- рассчитать токи и напряжения на всех элементах;

- проверить баланс мощности.

Для варианта из Прил.3 сделать следующее:
- преобразовать заданную схему в простейшую;
- определить параметры эквивалентного источника ($e_э$ или $J_э$);
- найти входное сопротивление (проводимость) относительно точек подключения эквивалентного источника;
- рассчитать токи и напряжения на всех элементах.

П р и м е р I.I. Рассчитать цепь, схема которой показана на рис. I.I,а.

Параметры цепи: $e=4{,}3$ В; $R_1=0{,}6$ Ом; $R_2=4$ Ом; $R_3=1$ Ом; $R_4=1{,}2$ Ом; $R_5=2$ Ом.

Р е ш е н и е. Выделяем в схеме участки с параллельным соединением сопротивлений и преобразуем их в эквивалентные сопротивления, как это показано на рис.I.I,б. Затем находим входное

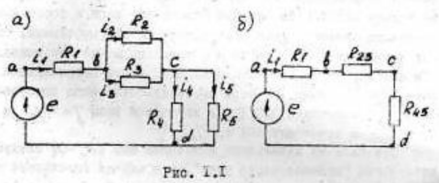


Рис. I.I

сопротивление

$$R_{вх}=R_1+R_{23}+R_{45}=R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}+\frac{R_4R_5}{R_4+R_5}=2{,}15\ Ом. \qquad (I.I)$$

Указываем на схеме стрелками положительные направления токов всех ветвей.

Используя закон Ома, получаем ток источника

$$i_1=\frac{e}{R_{вх}}=\frac{4{,}3}{2{,}16}=2\ А.$$

По эквивалентной схеме (рис.I.I,б) определяем напряжения на участках ab, bc, cd как произведения тока i_1 на соответствующее эквивалентное сопротивление этих участков

$$U_{ab}=i_1R_1=2\cdot 0{,}6=1{,}2\ В,\quad U_{bc}=i_1\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}=2\cdot 0{,}8=1{,}6\ В,$$

$$U_{cd}=i_1R_{45}=i_1\frac{R_4R_5}{R_4+R_5}=2\cdot 0{,}75=1{,}5\ В.$$

Проверка по закону напряжений Кирхгофа подтверждает правильность результатов

$$4{,}3\ В=e=U_{ab}+U_{bc}+U_{cd}=1{,}2+1{,}6+1{,}5=4{,}3\ В.$$

Найденные напряжения эквивалентной схемы соответствуют напряжениям тех же участков исходной схемы (рис.I.I,а). Поэтому токи всех остальных ветвей определяем по закону Ома для участка цепи

$$i_2=\frac{U_{bc}}{R_2}=i_1\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}\cdot\frac{1}{R_2}=i_1\frac{R_3}{R_2+R_3}=0{,}4\ А,$$

$$i_3=\frac{U_{bc}}{R_3}=i_1\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}\cdot\frac{1}{R_3}=i_1\frac{R_2}{R_2+R_3}=1{,}6\ А,$$

$$i_4=\frac{U_{cd}}{R_4}=i_1\frac{R_4R_5}{R_4+R_5}\cdot\frac{1}{R_4}=i_1\frac{R_5}{R_4+R_5}=1{,}25\ А,$$

$$i_5=\frac{U_{cd}}{R_5}=i_1\frac{R_4R_5}{R_4+R_5}\cdot\frac{1}{R_5}=i_1\frac{R_4}{R_4+R_5}=0{,}75\ А.$$

Проверка по закону токов Кирхгофа для узлов b и d подтверждает правильность результатов

$$2\ А=i_1=i_2+i_3=0{,}4+1{,}6=2\ А,$$

$$2\ А=i_1=i_4+i_5=1{,}25+0{,}75=2\ А.$$

Проверка правильности расчетов осуществляется также по балансу мощности, означающему равенство суммарной мощности, выделяемой во всех сопротивлениях $\sum P_R$, и мощности, вырабатываемой источником цепи $P_{ист}$. В данном случае получаем

$$P_{ист}=e\,i_1=4{,}3\cdot 2=8{,}6\ Вт,$$

$$\sum P_R=R_1i_1^2+R_2i_2^2+R_3i_3^2+R_4i_4^2+R_5i_5^2=$$
$$=0{,}6\cdot 2^2+4\cdot 0{,}4^2+1\cdot 1{,}6^2+1{,}2\cdot 1{,}25^2+2\cdot 0{,}75^2=8{,}6\ Вт.$$

Если в схеме (рис.I.I,а) вместо источника ЭДС подключить источник тока $J = 2$ А, то следует учитывать, что входной ток i_1 равен току источника $i_1 = J = 2$ А. Поэтому расчет начинаем с напряжения на зажимах источника тока

$$U_J = U_{ad} = J R_{вх} = 2 \cdot 2{,}15 = 4{,}3 \text{ В}.$$

Напряжения на участках ab, bc, cd определяем по закону Ома с учетом найденных ранее эквивалентных сопротивлений этих участков.

$$U_{ab} = J R_1 = 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2 \text{ В}; \qquad U_{bc} = J \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1{,}6 \text{ В};$$

$$U_{cd} = J \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 1{,}5 \text{ В}.$$

Токи ветвей i_2, i_3, i_4, i_5 определяем аналогично проделанному выше.

П р и м е р I.2. Схему, показанную на рис.I.2,а, представить в виде простейшей и определить ее эквивалентные параметры $e_э$, $R_{вх}$.

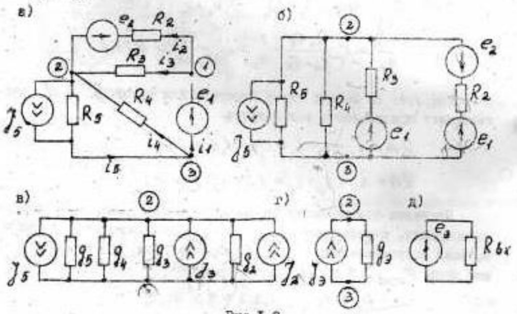


Рис.I.2

Р е ш е н и е. Выполняем "перенос через узел ① " идеального источника ЭДС e_1 (см.рис.I.2,б). В ветви 2 можно объединить источники ЭДС и получить $e_{12} = e_1 - e_2$. Для дальнейшего упрощения схемы преобразуем источники ЭДС e_1 и e_{12} в эквивалентные ис-

точники тока, параметры которых равны J_3 и J_2 (см.рис.I.2,в), где $J_3 = e_1/R_3$, $J_2 = e_{12}/R_2$, $g_к = 1/R_к$ при $к = 2,3,4,5$. Далее объединяем источники тока в один эквивалентный и определяем эквивалентную проводимость пассивных элементов (см.рис.I.2,г), где

$$J_э = J_2 + J_3 - J_5, \quad g_э = g_2 + g_3 + g_4 + g_5.$$

ЭДС эквивалентного источника $e_э$ и входное сопротивление $R_{вх}$ (рис.I.2,д) получаем путем следующих преобразований

$$e_э = J_э / g_э, \quad R_{вх} = 1/g_э.$$

З а д а ч а I.2. Анализ цепей по уравнениям токов ветвей и уравнениям напряжений ветвей

В любой цепи можно рассчитать токи всех ветвей, составив определенное число уравнений по законам Кирхгофа. Если цепь содержит p ветвей, то для ее расчета необходимо иметь также p независимых уравнений. Используя ЗТК, можно составить $n_{гс}$ независимых уравнений по числу главных сечений $n_{гс} = q - 1$, а число независимых уравнений по ЗНК определяется количеством главных контуров $n_{гк} = p - q + 1$. В результате получится система из p уравнений, содержащая $2p$ неизвестных: p токов и p напряжений. Поэтому к этой системе надо добавить p уравнений ветвей, связывающих ток и напряжение на их зажимах. Эти уравнения необходимы для исключения лишних неизвестных. Здесь q – число узлов схемы.

На рис.I.3,а приведен участок цепи, включающий в себя все типовые элементы: резистор $R_к$, источник ЭДС $e_к$, источник тока $J_к$. Такой активный двухполюсник, ток или напряжение на зажимах которого выбирается в качестве неизвестной переменной при анализе цепей, называется обобщенной ветвью.

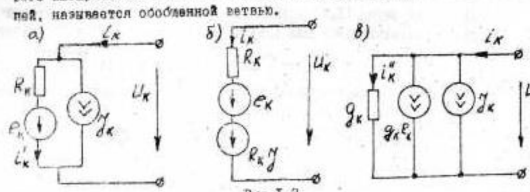


Рис.I.3

Уравнения по ЗТК и ЗНК для схемы рис.I.3,а имеют вид

$$\begin{cases} J_к - i_к + i'_к = 0, \\ U_к - R_к i'_к = -e_к, \end{cases} \qquad (I.2)$$

из которых можно вывести уравнение ветви.

Подстановка первого уравнения во второе системы (I.2) дает уравнение ветви

$$U_к = R_к i_к - e_к - R_к J_к, \qquad (I.3)$$

которому соответствует схема замещения на рис.I.3,б, где источник с ЭДС равной $R_к J_к$, учитывает действие источника тока $J_к$ исходной обобщенной ветви (рис.I.3,а). Исключение $i'_к$ с помощью второго уравнения системы (I.2) приведет к другому виду уравнения ветви

$$i_к = g_к U_к + g_к e_к + J_к, \qquad (I.4)$$

которое справедливо для соединения элементов по схеме замещения на рис. I.3,в, где проводимость $g_к = 1/R_к$, а источник тока $e_к/R_к$ получен преобразованием источника ЭДС $e_к$ исходной обобщенной ветви (рис.I.3,а).

Таким образом, схемы на рис.I.3,б,в описываются уравнениями, вытекающими из уравнения для схемы I.3,а. Значит все схемы на рис.I.3 эквивалентны, т.е. при их взаимной замене ток ветви $i_к$ и напряжение $U_к$ остаются неизменными. Это позволяет в зависимости от постановки задачи выбирать ту схему, которая в данном случае будет упрощать расчеты. Так, эквивалентная схема обобщенной ветви (рис.I.3,б) применяется при составлении системы уравнений, где независимыми переменными рассматриваются токи ветвей. Тогда уравнение ветви (I.3) используется для исключения напряжений ветвей в уравнениях ЗНК для главных контуров

$$\sum_n U_к = \sum_n R_к i_к - \sum_n e_к - \sum_n R_к J_к = 0, \text{ где } n = 1,2,\dots n_{гк}.$$

При этом система уравнений относительно токов ветвей принимает вид

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \sum\limits_m i_к = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right] m = 1,2 \dots n_{гс}, \\ \left.\begin{array}{l} \sum\limits_n R_к i_к = \sum\limits_n e_к + \sum\limits_n R_к J_к, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right] n = 1,2 \dots n_{гк}, \end{cases} \qquad (I.5)$$

где $n_{гс} = q - 1$, $n_{гк} = p - q + 1$, $n_{гс} + n_{гк} = p$, и значит число независимых уравнений равно числу неизвестных токов $i_к$ и определяется количеством ветвей p.

В уравнениях по ЗТК со знаком "плюс" берутся токи, направления которых совпадают с направлением главного сечения (по ветви дерева). При записи уравнений по ЗНК знак "плюс" ставится перед теми слагаемыми, у которых направление совпадает с обходом контура (по ветви связи).

Если в системе уравнений независимыми переменными требуется представить напряжения ветвей, то используется эквивалентная схема обобщенной ветви (I.3,в). Тогда уравнение ветви (I.4) применяется для исключения токов ветвей в уравнениях ЗТК для главных сечений (или q –I узла)

$$\sum_m i_к = \sum_m g_к U_к + \sum_m g_к e_к + \sum_m J_к = 0, \; m = 1,2 \dots n_{гс}.$$

При этом система уравнений относительно напряжений ветвей принимает вид

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \sum\limits_m g_к U_к = -\sum\limits_m J_к - \sum\limits_m g_к e_к, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right] m = 1,2 \dots n_{гс}, \\ \left.\begin{array}{l} \sum_n U_к = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right] n = 1,2 \dots n_{гк}, \end{cases} \qquad (I.6)$$

где число неизвестных напряжений равно числу независимых уравнений и определяется количеством ветвей p. В системе (I.6) при записи уравнений по ЗТК ставится знак "плюс" в левой части и знак "минус" в правой части для тех слагаемых, у которых направление совпадает с направлением главного сечения (по направлению ветви дерева). Такой алгоритм определения знаков обусловлен выбранными положительными направлениями $i_к$, $U_к$ при выводе уравнения ветви (рис.I.3).

З а д а н и я

Варианты схем даны в Прил.2. Рекомендуется перечертить заданную схему, выделив обобщенные ветви. Указать на схеме стрелками положительные направления тока каждой ветви. Обозначить все элементы. Определить число ветвей и узлов.

Для заданного варианта выполнить следующее:
- изобразить граф схемы, выделив дерево графа;

- записать систему уравнений для токов ветвей;
- записать систему уравнений для напряжений ветвей.

П р и м е р I.3. На рис.I.4,а изображена схема электрической цепи. Записать систему уравнений для токов ветвей.

Р е ш е н и е. Выделяем обобщенные ветви схемы и изображаем ее граф (рис.I.4,б).

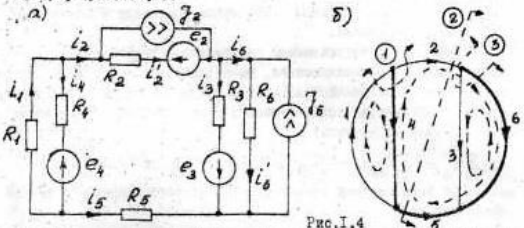


Рис.I.4

Подсчитываем число узлов $q = 4$, ветвей $p = 6$, количество уравнений по ЗТК $n_{гс} = q - 1 = 3$; по ЗНК $n_{гк} = p - q + 1 = 3$. Произвольно задаем положительные направления токов ветвей, которые соответственно переносим на граф как направления ветвей графа. Выделяем дерево графа и производим нумерацию ветвей графа и схемы. Рассматривая главные сечения ①,②,③ и главные контуры, показанные пунктиром на рис.I.4,б, составляем систему уравнений относительно токов ветвей, используя выражение (I.5)

$$\begin{array}{lr} \text{Г.С.} & ① \\ \text{Г.С.} & ② \\ \text{Г.С.} & ③ \\ \text{Г.К.} & 1\text{–}4 \\ \text{Г.К.} & 2\text{–}6\text{–}5\text{–}4 \\ \text{Г.К.} & 3\text{–}6 \end{array}\left\{\begin{array}{l} -i_1 + i_2 + i_4 = 0, \\ i_2 + i_5 = 0, \\ -i_2 + i_3 + i_6 = 0, \\ R_1 i_1 + R_4 i_4 = -e_4, \\ R_2 i_2 + R_6 i_6 - R_5 i_5 - R_4 i_4 = R_2 J_2 - e_2 - R_6 J_6 + e_4, \\ R_3 i_3 - R_6 i_6 = e_3 + R_6 J_6. \end{array}\right.$$

Полученная система из шести уравнений решается относительно токов обобщенных ветвей. Если требуется определить ток в сопротивлении обобщенной ветви, например i_2', то он находится из уравнения ЗТК $-i_2 + i_2' + J_2 = 0$.

П р и м е р I.4. Записать систему уравнений относительно напряжений ветвей для схемы рис.I.4,а, используя граф рис.I.4,б.

Р е ш е н и е. Выполняем задание в соответствии с выражением (I.6)

$$\begin{array}{lr} \text{Г.С.} & ① \\ \text{Г.С.} & ② \\ \text{Г.С.} & ③ \\ \text{Г.К.} & 1\text{–}4 \\ \text{Г.К.} & 2\text{–}6\text{–}5\text{–}4 \\ \text{Г.К.} & 3\text{–}6 \end{array}\left\{\begin{array}{l} -g_1 U_1 + g_2 U_2 + g_4 U_4 = g_2 e_2 - J_2 + g_4 e_4, \\ g_2 U_2 + g_5 U_5 = g_2 e_2 - J_2, \\ g_3 U_3 - g_2 U_2 + g_6 U_6 = J_2 - g_2 e_2 - g_3 e_3 + J_6, \\ U_1 + U_4 = 0, \\ U_2 + U_6 - U_5 - U_4 = 0, \\ U_3 - U_6 = 0. \end{array}\right.$$

З а д а ч а I.3. Анализ цепей методом токов связей (контурных токов)

Число уравнений, необходимых для расчета цепей, может быть сокращено, если в качестве определяемых переменных использовать токи ветвей связи, число которых $n_c = p - q + 1$. Для получения системы уравнений цепи относительно токов ветвей связи вначале составляются n_c-уравнений по ЗНК и затем исключаются из них $n_g = q - 1$ токов дерева с помощью ЗТК.

Для пояснения этой процедуры рассмотрим следующий пример. Пусть задан граф, изображенный на рис.I.5, имеющий $p = 6$, $q = 4$. Выберем дерево графа (ветви 4-5-6), произведем нумерацию ветвей и зададим их положительные направления. Стрелки "→" или ">>" рядом с ветвью указывают на наличие в данной ветви источника ЭДС или тока, соответственно. Тогда из уравнений ЗТК для главных сечений ①,②,③ имеем

$$\begin{aligned} i_4 &= i_3 - i_1, \\ i_5 &= i_1 - i_2, \\ i_6 &= i_2 - i_3. \end{aligned} \qquad (I.7)$$

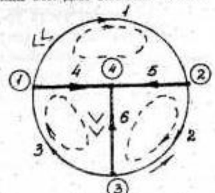


Рис.I.5

Уравнения (I.7) показывают, что токи дерева i_4, i_5 и i_6 всегда выражаются через токи связей i_1, i_2 и i_3.

В уравнения ЗНК для этого же графа входят все шесть токов графа

$$\left\{\begin{array}{l} R_1 i_1 + R_5 i_5 - R_4 i_4 = -R_1 J_1, \\ R_2 i_2 + R_6 i_6 - R_5 i_5 = -e_2 - R_6 J_6, \\ R_3 i_3 + R_4 i_4 - R_6 i_6 = R_6 J_6. \end{array}\right. \qquad (I.8)$$

Для исключения из этих уравнений токов дерева подставим уравнения (I.7) в (I.8) и сгруппируем подобные члены. Тогда получится система уравнений, содержащая только токи связей, и называемая уравнениями токов связей

$$\left\{\begin{array}{l} (R_1 + R_4 + R_5) i_1 - R_5 i_2 - R_4 i_3 = -R_1 J_1, \\ -R_5 i_1 + (R_2 + R_5 + R_6) i_2 - R_6 i_3 = -e_2 - R_6 J_6, \\ -R_4 i_1 - R_6 i_2 + (R_3 + R_4 + R_6) i_3 = R_6 J_6. \end{array}\right. \qquad (I.9)$$

Обобщая полученный результат (I.9), запишем уравнение токов связей для n-го контура, которое имеет значение алгоритма данного метода

$$R_{n1} i_1 + \ldots + R_{nm} i_m + \ldots + R_{nn} i_n + \ldots + R_{nn_c} i_{n_c} = \sum_n e_k + \sum_n R_k J_k. \qquad (I.10)$$

Здесь $R_{nn} > 0$ собственное сопротивление, равное сумме сопротивлений, входящих в n-й контур; R_{nm} – взаимное сопротивление, принадлежащее n-му и m-му контурам, оно входит со знаком "плюс", если направления n-го и m-го тока связи на R_{nm} совпадают, и со знаком "минус", если эти направления противоположны. При решении задачи составляются n_c уравнений по алгоритму (I.10), где число ветвей связи $n_c = p - q + 1$.

Правые части уравнений токов связей записываются также, как и в уравнениях ЗНК (см.задачу I.2).

Если цепь имеет ветвь, содержащую идеальный источник тока ($R_n \to \infty$), то эту ветвь рекомендуется выбирать в качестве ветви связи. Тогда уравнение для контура, образуемого этой связью, обращается в тождество

$$i_n = J_n, \qquad (I.11)$$

что, в частности, является следствием алгоритма (I.10), так как в этом случае $R_{nn} = \infty$.

Из системы уравнений, составленной по (I.10), определяются

$n_c = p - q + 1$ токов связей и затем по уравнениям ЗТК – токи дерева.

З а д а н и е

Варианты задач даны в Прил.3. На всех рисунках рядом с соответствующими элементами обозначены их величины, сопротивления указаны в омах, токи источников тока – в амперах, ЭДС – в вольтах. Требуется выполнить следующее:
- составить уравнения токов связей;
- определить токи ветвей; рассчитать токи всех ветвей;
- проверить баланс мощности.

Перед решением задачи рекомендуется начертить заново заданную схему, выделив в ней обобщенные ветви, обозначить все элементы. Затем изобразить граф схемы, выбранное дерево указать жирными линиями. Положительные направления ветвей и их нумерацию указать на графе и схеме.

П р и м е р I.5. Дана схема, изображенная на рис.I.6,а с числовыми данными: $e_1 = 48$ В; $J_2 = 1$ А; $R_1 = R_5 = R_6 = 20$ Ом; $J_3 = 1{,}6$ А; $R_3 = R_4 = 10$ Ом.

Определить токи ветвей методом токов связей. Проверить баланс мощности.

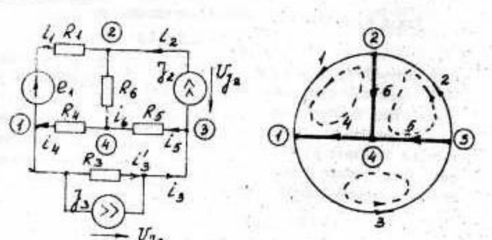


Рис. I.6

Р е ш е н и е. Изображаем граф (рис.I.6,б), выбираем дерево так, чтобы ветвь 2 с идеальным источником тока была связью. Производим нумерацию, начиная с ветвей связей, произвольно задаем положительные направления токов ветвей (кроме i_2). Далее определяем

$p = 6$, $q = 4$ и $n_c = 6-4+1 = 3$. Затем, используя алгоритм (I.I0) записываем уравнения

$$\begin{cases} (R_1+R_4+R_6)i_1 - R_6 i_2 - R_4 i_3 = -e_1, \\ i_2 = J_2, \\ -R_4 i_1 - R_5 i_2 + (R_3+R_4+R_5) i_3 = R_3 J_3. \end{cases}$$

Подставляем тождество в первое и третье уравнения с учетом числовых данных получаем

$$\begin{cases} 50 i_1 - 10 i_3 = -28, \\ -10 i_1 + 40 i_3 = 36. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений относительно токов связей i_1, i_3, откуда вычисляем $i_1 = -0{,}4$ А, $i_3 = 0{,}8$ А и учитываем, что $i_2 = J_2 = 1$ А.

Токи ветвей дерева находим по ЗТК

$$i_4 = i_3 - i_1 = 1{,}2 \text{ А},$$
$$i_5 = i_3 - i_2 = -0{,}2 \text{ А},$$
$$i_6 = i_2 - i_1 = 1{,}4 \text{ А}.$$

Ток в сопротивлении ветви 3 определяем как

$$i_3' = i_3 - J_3 = -0{,}8 \text{ А}.$$

Знак "минус" у токов i_1 и i_5 указывает на то, что направления этих токов противоположны положительным направлениям, выбранным произвольно и указанным на схеме и графе.

Проверить правильность расчетов можно по балансу мощности, который вытекает из закона сохранения энергии и заключается в равенстве суммарной мощности, отдаваемой всеми источниками, и мощности, потребляемой всеми приемниками:

$$\sum P_{ист} = \sum P_{пр},$$

где мощность приемников определяется выражением

$$\sum P_{пр} = \sum R_k i_k^2,$$

а мощность источников рассчитывается по формуле

$$\sum P_{ист} = \sum P_e + \sum P_J = \sum e_k i_k + \sum U_{Jk} J_k.$$

Перед произведением ставится знак "плюс", если положительное на-

правление тока ветви совпадает с направлением ЭДС, а положительное направление напряжения на источнике тока противоположно направлению тока в источнике.

Для проверки баланса мощности вначале определим напряжения на зажимах источников тока, используя уравнения ЗНК

$$U_{J2} = -R_5 i_5 + R_6 i_6 = -20\cdot(-0{,}2) + 20\cdot 1{,}4 = +32 \text{ В},$$
$$U_{J3} = R_3 i_3' = 10(-0{,}8) = -8 \text{ В}.$$

Затем находим мощности приемников

$$\sum P_{пр} = R_1 i_1^2 + R_3 (i_3')^2 + R_4 i_4^2 + R_5 i_5^2 + R_6 i_6^2 = 64 \text{ Вт}$$

и источников

$$\sum P_{ист} = \sum P_e + \sum P_J = -e_1 i_1 + U_{J2} J_2 - U_{J3} J_3 = -48\cdot(-0{,}4) + 32\cdot 1 - (-8)\cdot 1{,}6 =$$
$$= 19{,}2 + 32 + 12{,}8 = 64 \text{ Вт}.$$

В итоге получаем равенство отдаваемой и потребляемой мощностей. Значит расчеты выполнены верно.

З а д а ч а I.4. Анализ цепей методом узловых напряжений

Этот метод, также, как и метод токов связей, позволяет сократить число уравнений системы. За новые переменные здесь принимаются узловые напряжения, которые определяются как напряжения всех узлов схемы относительно одного из них, называемого опорным. Таким образом, число независимых переменных, и значит необходимо число уравнений, $n_{ун}$ равно $q - 1$, т.е. на единицу меньше числа узлов.

Для перехода к системе уравнений относительно узловых напряжений вначале надо составить $n_{ун}$ уравнения по ЗТК, в которых токи ветвей выразить через напряжения ветвей [см. первую часть системы (I.6)]

$$\sum_n g_k U_k = -\sum_n J_k - \sum_n g_k e_k, \qquad (I.12)$$

где n – номер узла, т.е. $n = 1, 2, \ldots, n_{ун}$.

Затем напряжения ветвей левой части уравнений (I.I2) можно исключить, выразив их через узловые напряжения с помощью ЗНК.

Для пояснения этой процедуры рассмотрим граф схемы на рис.I.7. Стрелки "→" или ">>" рядом с ветвью указывают на наличие в данной ветви источника ЭДС или тока, соответственно. Количество узлов q равно 4. Один из них выбираем опорным, обозначая его "0", остальные нумеруем. Узловые напряжения U_{10}, U_{20}, U_{30} имеют

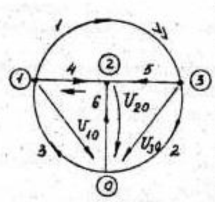


Рис.I.7

направления к опорному узлу, о чем свидетельствует порядок индексов.

Используя ЗТК в форме (I.I2), составляем $n_{ун}$ уравнений

$$\begin{array}{l} \text{Узел } 1 \\ \text{узел } 2 \\ \text{узел } 3 \end{array} \begin{cases} g_1 U_1 + g_4 U_4 - g_3 U_3 = g_4 e_4 - J_1, \\ -g_4 U_4 - g_5 U_5 - g_6 U_6 = -g_4 e_4, \\ -g_1 U_1 + g_2 U_2 + g_5 U_5 = J_1. \end{cases} \qquad (I.13)$$

В этих трех уравнениях содержатся шесть неизвестных напряжений ветвей. При помощи ЗНК их можно выразить через узловые напряжения

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{10} - U_{30}, & U_4 &= U_{10} - U_{20}, \\ U_2 &= U_{30}, & U_5 &= U_{30} - U_{20}, \\ U_3 &= -U_{10}, & U_6 &= -U_{20}. \end{aligned} \qquad (I.14)$$

Подставляя (I.I4) в (I.I3) и группируя подобные члены при узловых напряжениях, получаем

$$\begin{cases} (g_1+g_3+g_4)U_{10} - g_4 U_{20} - g_1 U_{30} = g_4 e_4 - J_1, \\ -g_4 U_{10} + (g_4+g_5+g_6)U_{20} - g_5 U_{30} = -g_4 e_4, \\ -g_1 U_{10} - g_5 U_{20} + (g_1+g_2+g_5)U_{30} = J_1. \end{cases} \qquad (I.15)$$

Система уравнений (I.I5) называется уравнениями узловых напряжений. Из них находятся $n_{ун} = q - 1$ узловых напряжений, а затем с использованием ЗНК (I.I4) определяются напряжения ветвей и далее – токи ветвей.

Можно записать отдельно уравнение для n-го узла, имеющее смысл алгоритма

$$-g_{n1}U_{10} \ldots - g_{nk}U_{k0} + g_{nn}U_{n0} - \ldots - g_{nn_{ун}}U_{n_{ун}0} = -\sum_n J_k - \sum_n g_k e_k. \qquad (I.16)$$

Здесь g_{nn} – собственная проводимость n-го узла, равная сумме проводимостей всех ветвей, присоединенных к данному узлу; g_{nk} – взаимная проводимость, равная сумме проводимостей ветвей соединяющих узел "n" с узлом "k". В правой части – сумма токов

источников, подключенных к узлу "n". Они записываются со знаком "плюс", если стрелка направлена к узлу.

При решении задачи составляется q –I уравнение по алгоритму (I.I6).

Если схема содержит ветвь с идеальным источником ЭДС e_m, то за опорный рекомендуется выбирать один из узлов, присоединенных к этой ветви. Тогда в соответствии с ЗНК уравнение для другого прилегающего узла "n" обращается в тождество

$$U_{n0} = \pm e_m,$$

что следует также и из (I.I6), так как в этом случае $g_{nn} = \infty$.

З а д а н и е

Варианты задач даны в Прил.3. На всех рисунках указаны параметры элементов схем: сопротивления даны в омах, токи источников – в амперах, напряжения источников – в вольтах. Требуется выполнить следующее:

- составить уравнения узловых напряжений;
- решить систему, найти узловые напряжения;
- определить токи всех ветвей;
- проверить баланс мощности.

Перед решением задачи рекомендуется начертить заново заданную схему, выделив в ней обобщенные ветви, и обозначить все элементы. Затем выбрать опорный узел, пронумеровать остальные и указать положительные направления тока каждой ветви.

П р и м е р I.6. Дана схема, изображенная на рис.I.8,а, с числовыми данными: $e_1 = 10$ В, $J_1 = 1$ А, $e_3 = 5$ В, $J_4 = 3$ А, $e_6 = 20$ В, $R_1 = R_2 = 5$ Ом, $R_3 = R_4 = R_5 = 10$ Ом.

Р е ш е н и е. Изобразим граф (рис.I.8,б), выберем опорный узел, присоединенный к ветви 6 с идеальным источником ЭДС, остальные узлы пронумеруем. Составим систему уравнений узловых напряжений:

$$\begin{cases} U_{10} = -e_6, \\ -\frac{1}{R_3} U_{10} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) U_{20} - \frac{1}{R_2} U_{30} = \frac{e_3}{R_3}, \\ -\frac{1}{R_1} U_{10} - \frac{1}{R_2} U_{20} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) U_{30} = -J_4 + \frac{e_1}{R_1} + J_1. \end{cases}$$

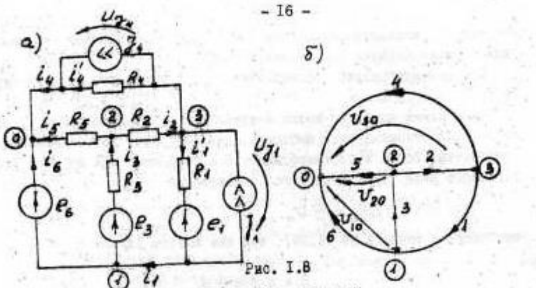


Рис. I.8

Подставив числовые данные, получаем

$$0{,}4\,U_{20} - 0{,}2\,U_{30} = -1{,}5,$$
$$-0{,}2\,U_{20} + 0{,}5\,U_{30} = -4.$$

Отсюда находим $U_{20} = -9{,}687$ В, $U_{30} = -11{,}875$ В.

После этого используем уравнения ЗНК и находим токи ветвей

$$R_1 i_1 + U_{10} - U_{30} = -e_1 - R_1 J_1, \quad i_1 = \frac{-e_1 - R_1 J_1 - U_{10} + U_{30}}{R_1} = -1{,}375\ A,$$

$$R_2 i_2 + U_{30} - U_{20} = 0, \quad i_2 = \frac{U_{20} - U_{30}}{R_2} = 0{,}437\ A,$$

$$R_3 i_3 + U_{20} - U_{10} = e_3, \quad i_3 = \frac{e_3 + U_{10} - U_{20}}{R_3} = -0{,}531\ A,$$

$$R_4 i_4 - U_{30} = R_4 J_4, \quad i_4 = \frac{R_4 J_4 + U_{30}}{R_4} = 1{,}812\ A,$$

$$R_5 i_5 - U_{20} = 0, \quad i_5 = \frac{U_{20}}{R_5} = -0{,}968\ A.$$

Ток в ветви 6 находим из уравнения ЗТК для опорного узла

$$i_6 = -i_4 - i_5 = -1{,}81 + 0{,}96 = -0{,}85\ A.$$

Токи в сопротивлениях обобщенных ветвей с источником тока определяем из уравнений ЗТК

$$i_4' = i_4 - J_4 = 1{,}812 - 3 = -1{,}188\ A,$$
$$i_1' = i_1 + J_1 = -1{,}375.$$

Для проверки баланса мощности вычисляем мощность, отдаваемую в цепь источниками

$$P_e + P_J = -e_1 i_1' + e_3 i_3 + e_6 i_6 + U_{J1} J_1 - U_{J4} J_4,$$

где
$$U_{J1} = R_1 i_1' + e_1,$$
$$U_{J4} = R_4 i_4'.$$

Далее рассчитываем мощность P_R, потребляемую всеми резисторами

$$P_R = R_1 (i_1')^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 (i_4')^2 + R_5 i_5^2.$$

Равенство отдаваемой и потребляемой мощностей

$$P_e + P_J = P_R$$

подтверждает правильность расчетов.

З а д а ч а I.5. Анализ цепей методом эквивалентного источника

Такой анализ основан на методе преобразования. Суть его в том, что по отношению к любой ветви вся остальная часть линейной цепи заменяется эквивалентным источником. Для определения параметров последнего используются измерения или расчет двух величин из следующих сочетаний:

- напряжение U_0 на зажимах разомкнутой "m" ветви и входное сопротивление $R_{вх}$ относительно этих же разомкнутых зажимов;
- ток $i_{кз}$ короткозамкнутой "m" ветви и входное сопротивление относительно разомкнутых зажимов ветви;
- напряжение U_0 на разомкнутой "m" ветви и ток $i_{кз}$ этой же короткозамкнутой ветви.

При расчете тока "m" ветви через U_0 и $R_{вх}$ применяется формула

$$i_m = \frac{U_0}{R_{вх} + R_m}, \qquad (I.17)$$

где R_m – известное сопротивление ветви.

В этом случае следует рассчитать две вспомогательные цепи для определения U_0 и $R_{вх}$, соответственно.

Первая схема образуется путем размыкания выбранной ветви.

Напряжение U_0 определяется из этой схемы при помощи ЗНК, записанного для контура, проходящего через зажимы этой разомкнутой ветви m. Напряжения ветвей, входящих в этот контур, могут быть рассчитаны любым рациональным методом.

При составление второй схемы все источники ЭДС исходной схемы закорачиваются, а источники тока размыкаются. Определяемое сопротивление $R_{вх}$ является входным сопротивлением этого пассивного двухполюсника относительно разомкнутых зажимов m ветви. Направление тока i_m определяется знаком напряжения U_0, положительное направление которого следует указать на схеме перед началом расчета.

З а д а н и е

Варианты задач даны в Прил.3. На всех рисунках указены сопротивления в омах, токи источников – в амперах, ЭДС – в вольтах. Требуется определить методом эквивалентного источника ток ветви, обозначенной * (звездочкой).

П р и м е р I.7. Дана схема (рис.I.9,а) с числовыми данными $e_1 = 10$ В, $e_4 = 30$ В, $e_6 = 20$ В, $R_1 = R_2 = 5$ Ом, $R_3 = R_4 = R_5 = 10$ Ом. Определить ток i_1 методом эквивалентного источника.

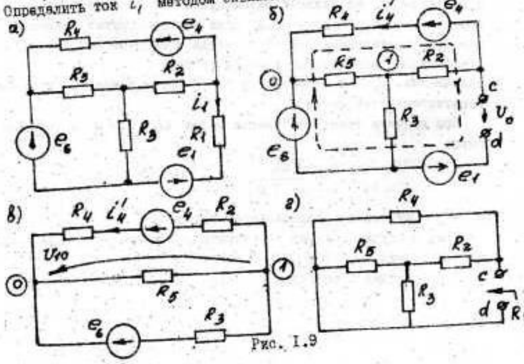


Рис. I.9

Р е ш е н и е. Составляем схему для определения напряжения U_0. Для этого размыкаем ветвь с сопротивлением R_1 (рис.I.9,б). Обозначаем входные зажимы эквивалентного источника точками c и d, стрелкой указывая положительное направление U_0. Выбираем контур для определения U_0, и указываем на рис.I.9,б направление обхода контура и положительное направление тока i_4'.

Используя ЗНК для выбранного контура, записываем

$$U_0 - R_4 i_4' = -e_1 + e_6 - e_4,$$

откуда выражаем $U_0 = R_4 i_4' - e_1 + e_6 - e_4$.

Для выбора рационального метода расчета тока i_4' надо определить число ветвей p_r и число узлов q_r схемы эквивалентного источника. Для этой цели схема эквивалентного источника приобретает наиболее наглядный вид на рис.I.9,в, из которого видно, что $p_r = 3$, $q_r = 2$. Поэтому наименьшее количество уравнений дает применение метода узловых напряжений.

Составляем уравнение по методу узловых напряжений для схемы рис.I.9,в

$$\left(\frac{1}{R_2 + R_4} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) U_{10} = -\frac{e_4}{R_2 + R_4} - \frac{e_6}{R_3}.$$

Подставляя числовые данные и решая уравнение, получаем $U_{10} = -15$ В. Ток i_4' находится по ЗНК из контура, образованного ветвью с сопротивлением $R_2 + R_4$ и напряжением U_{10} (обход контура по току i_4'),

$$(R_2 + R_4)\, i_4' - U_{10} = e_4,$$

откуда выражаем ток

$$i_4' = \frac{U_{10} + e_4}{R_2 + R_4} = 1\ A.$$

Подставляя найденное значение тока i_4' в выражение для U_0, находим

$$U_0 = R_4 i_4' - e_1 + e_6 - e_4 = -10\ В.$$

При составлении схемы для определения $R_{вх}$ выбранная ветвь по-прежнему остается разомкнутой, все источники ЭДС исходной схемы закорачиваются (рис.I.9,г). Входное сопротивление этого пассивного двухполюсника относительно зажимов cd определяется по формуле $$R_{вх} = \frac{\left(\frac{R_5 R_3}{R_5+R_3} + R_2\right) R_4}{\frac{R_5 R_3}{R_5+R_3} + R_2 + R_4} = 5\,Ом.$$

Применяя теорему об эквивалентном источнике (I.I7), определяем ток искомой ветви

$$i_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_{вх}} = -1A.$$

Знак "минус" у тока означает, что его направление противоположно указанному на рис.I.9,б положительному направлению U_0 .

З а д а ч а I.6. Формирование матричных уравнений цепи

Топологическия матрицы схемы, к которым относятся матрица вершин $[B]$, матрица сечений $[C]$, матрица контуров $[K]$, используются для записи законов Кирхгофа в матричной форме

$$\begin{aligned} &[B][i] = 0 \quad ЗТК,\\ &[C][i] = 0 \quad ЗТК,\\ &[K][U] = 0 \quad ЗНК, \end{aligned} \qquad (I.I8)$$

где $[i]$ – столбцовая матрица токов ветвей, размером $p \times I$;
$[U]$ – столбцовая матрица напряжений ветвей, размером $p \times I$.

Элементами топологических матриц служат +I, –I, 0. На пересечении m строки S столбца записывается +I, если:

- S ветвь подключена к m узлу и направление ветви от узла (для матрицы $[B]$);
- S ветвь входит в m сечение и их направления совпадают (для матрицы $[C]$);
- S ветвь входит в m контур при совпадении их направлений (для матрицы $[K]$).

Элемент топологической матрицы равен – I, если направление ветви указано к узлу, а также если ветвь входит в сечение или контур, но их направления противоположны.

На соответствующем месте записывается 0, если ветвь не входит в узел, сечение или контур. Контурные и узловые уравнения записываются в матричной форме с привлечением как топологических, так и компонентных матриц. К последним относятся

- диагональная матрица сопротивлений $[R]$, по главной диагонали

которой записаны сопротивления соответствующих ветвей;
- столбцовая матрица источников ЭДС $[e]$;
- столбцовая матрица источников тока $[J]$.

Элементами матриц источников являются значения ЭДС e_k или тока источника J_k соответствующей ветви. Знак "минус" перед e_k или J_k ставится в том случае, если направления их действия противоположны положительному направлению тока этой ветви.

В контурное уравнение в качестве неизвестной входит столбцовая матрица контурных токов $[i_{кк}]$

$$[K][R][K]^T[i_{кк}] = [K]\big([e] + [R][J]\big), \qquad (I.I9)$$

где $[K]^T$ – транспонированная матрица контуров, а тройное матричное произведение $[K][R][K]^T$ представляет матрицу контурных сопротивлений $[R]_{конт}$, по диагонали которой расположены собственные сопротивления соответствующих контуров (со знаком "плюс"), а вне диагонали – взаимные сопротивления с соответствующим знаком.

После решения матричного уравнения (I.I9) и определения матрицы контурных токов $[i_{кк}]$ можно найти матрицу токов ветвей $[i]$ по следующему соотношению

$$[i] = [K]^T[i_{кк}]. \qquad (I.20)$$

Узловое уравнение относительно неизвестной столбцовой матрицы узловых напряжений $[U_{узл}]$ имеет вид

$$[B][g][B]^T[U_{узл}] = -[B]\big([J] + [g][e]\big), \qquad (I.2I)$$

где $[B]^T$ – транспонированная матрица вершин; $[g]$ – диагональная матрица проводимости ветвей, обратная матрице $[R]$, а тройное матричное произведение $[B][g][B]^T$ представляет матрицу узловых проводимостей $[g]_{узл}$, по диагонали которой расположены собственные проводимости соответствующих узлов, а вне диагонали – взаимные проводимости.

Матрицу напряжений ветвей определяют по выражению

$$[U] = [B]^T[U_{узл}], \qquad (I.22)$$

а токи ветвей из компонентного уравнения ветви в матричной форме

$$[i] = [g][U] + [g][e] + [J]. \qquad (I.23)$$

З а д а н и е

Варианты схем даны в Прил.2. Для заданного варианта выполнить следующее:

- перечертить схему, выделив обобщенные ветви;
- сформировать топологические и компонентные матрицы;
- записать законы Кирхгофа, контурное и узловое уравнения;
- раскрыв тройное матричное произведение, найти матрицы контурных сопротивлений и узловых проводимостей;
- сравнить полученные выражения с выражениями из задач I.3 и I.4;
- УИРС, составить программу вычисления на ЭВМ.

П р и м е р I.8. Для схемы, изображенной на рис.I.10,а, сформировать все топологические и компонентные матрицы, представить матричную запись законов Кирхгофа.

Рис.I.I0

Составить контурное и узловое уравнения для исходной схемы, путем перемножения соответствующих матриц. Найти матрицу контурных сопротивлений и матрицу узловых проводимостей.

Р е ш е н и е. Выделяем обобщенные ветви схемы и изображаем ее граф (рис.I.I0,б). Определяем, что число узлов $q = 4$, число ветвей $p = 6$. Произвольно задаем положительные направления токов ветвей, указывая их на схеме стрелками. Выделяем дерево графа (жирные линии на рис.I.I0,б).

Формируем главные контуры I,II,III (рис.I.I0,б), каждый из которых содержит только одну ветвь связи. Затем образуем главные сечения Iс, 2с, 3с (рис.I.I0,б), каждое из которых включает в себя только одну ветвь дерева.

Исходя из структуры графа, его главных контуров и главных сечений, составляем топологические матрицы

$$[B] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -I & I & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -I & I & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & -I & 0 & -I & -I \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \qquad [C] = \begin{bmatrix} -I & I & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -I & I & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{array}{c} Ic \\ 2c \\ 3c \end{array}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -I & -I & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array}$$

Компонентные матрицы формируем с учетом элементов схемы (рис.I.I0,а)

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 \\ -e_2 \\ e_3 \\ -e_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [J] = \begin{bmatrix} 0 \\ J_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -J_6 \end{bmatrix}.$$

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix}, \qquad [g] = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_6 \end{bmatrix}$$

Сформированные таким образом топологические матрицы [B], [C], [K], а также матрицу токов ветвей $[i]$ и матрицу напряжений ветвей $[U]$

$$[i]=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}, \qquad [U]=\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

подставляем в (I.18) и записываем ЗТК и ЗНК в матричной форме для заданной схемы рис.I.10,а.

Перемножая матрицы левой части полученных выражений, можно убедиться, что в результирующей столбцовой матрице каждая строка соответствует левой части ЗТК $\sum i_к = 0$ для данного узла (сечения) или ЗНК $\sum U_к = 0$ для данного контура. При выполнении задания это необходимо показать для своего варианта.

Запись контурного и узлового уравнения производим в соответствии с (I.19) и (I.21), куда подставляем сформированные выше топологические и компонентные матрицы. При этом матрица контурных токов $[i_{кк}]$ и матрица узловых напряжений $[U_{узл}]$ имеет вид

$$[i_{кк}]=\begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{22} \\ i_{33} \end{bmatrix}, \qquad [U_{узл}]=\begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{bmatrix}.$$

Перемножение матриц $[K]$, $[R]$, $[K]'$ в указанной последовательности приводит к матрице контурных сопротивлений

$$[R]_{конт}=\left[\begin{array}{c:c:c} R_1+R_4 & R_4 & 0 \\ -R_4 & (R_2+R_4+R_5+R_6) & -R_6 \\ 0 & -R_6 & R_3+R_6 \end{array}\right].$$

Полученный результат совпадает с выражениями для собственных и взаимных сопротивлений, которые записываются для схемы рис. I.10,а в соответствии с методическими указаниями для задачи I.3.

Для определения матрицы узловых проводимостей $[g]_{узл}$ перемножаем матрицы $[B]\cdot[g]\cdot[B]^T$

$$[g]_{узл}=\left[\begin{array}{c:c:c} g_1+g_2+g_4 & -g_2 & 0 \\ -g_2 & g_2+g_3+g_6 & g_3+g_6 \\ 0 & g_3+g_6 & g_3+g_5+g_6 \end{array}\right].$$

Собственные и взаимные проводимости в полученной матрице узловых проводимостей $[g]_{узл}$ совпадают с выражениями, записанными для схемы рис. I.10,а в соответствии с методическими указаниями для задачи I.4.

Задание 2

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ В ГАРМОНИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

З а д а ч а 2.I. Определение токов и напряжений ветвей с использованием законов Кирхгофа в комплексной форме

Основным способом для анализа линейных цепей в гармоническом режиме (при синусоидальных или косинусоидальных распределениях токов и напряжений) является расчет в комплексной форме. Он состоит в том, что мгновенное значение функции, например, напряжение

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) \qquad (2.1)$$

изображается вращающимся вектором в комплексной плоскости, как это показано на рис.2.I, и представляется комплексным числом в алгебраической, тригонометрической и показательной форме

$$U(t) \doteq \dot U(t) = U_1 + jU_2 = U_m\cos(\omega t+\psi_u) + jU_m\sin(\omega t+\psi_u) = \dot U_m e^{j\omega t}, \qquad (2.2)$$

$$\dot U_m = U_m e^{j\psi_u} \qquad (2.3)$$

где

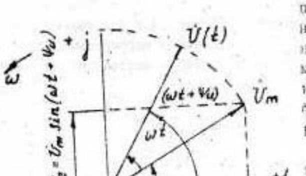


Рис. 2.1

– комплексная амплитуда, полностью определяющая заданное напряжение при определенной частоте $\omega = 2\pi f$; j – мнимая единица, определяемая как $j^2=-1$; ψ_u – начальная фаза напряжения; $e^{j\omega t}$ – оператор вращения.

Равенство (2.2) называют прямым преобразованием и используют для преобразования мгновенного значения в комплексное изображение гармонической функции $\dot U(t)$. Аналогично преобразуется

любая синусоидальная функция, например, ток

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \doteq \dot I_m e^{j\omega t},$$

где $\dot I_m = I_m e^{j\psi_i}$.

После расчета цепи в комплексной форме переходят к мгновенным значениям. ЗТК для мгновенных значений имеет вид $\sum\limits_n i_к = 0$. ЗТК в комплексной форме

$$\sum_n \dot I_{mn} = 0 \qquad \text{или} \qquad \sum_n \dot I_к = 0, \qquad (2.4)$$

где $\dot I_к = \dot I_{mк}/\sqrt2$ – комплекс действующего значения тока.

Знаки слагаемых в (2.4) определяются так же, как и при анализе резистивных цепей с учетом произвольно выбранных их положительных направлений.

ЗНК для мгновенных значений имеет вид $\sum\limits_n U_n = 0$. ЗНК в комплексной форме

$$\sum_n \dot U_{mк} = 0 \qquad \text{или} \qquad \sum_n \dot U_к = 0, \qquad (2.5)$$

так как $\dot U_к = \dot U_{mк}/\sqrt2$.

Знаки слагаемых в (2.5) определяются так же, как при анализе резистивных цепей с учетом положительных направлений напряжений и направления обхода n-го контура.

По уравнениям ЗТК строится векторная диаграмма токов для узлов или сечений схемы. По уравнениям ЗНК строятся векторные диаграммы напряжений для контуров. Эти векторные диаграммы представляют собой замкнутые многоугольники и наглядно, графически, изображают уравнения по законам Кирхгофа.

Уравнения, составленные по (2.4) и (2.5), могут использоваться для определения одного из токов в узле или одного из напряжений в контуре, если остальные известны.

П р и м е р 2.I. Даны выражения для мгновенных значений токов и напряжений:

$$U_1(t) = 100\cos(\omega t + 45^\circ)\ \text{В}, \quad U_2(t) = 75\cos\omega t,\ \text{В},$$
$$U_3(t) = 50\cos(\omega t - 90^\circ)\ \text{В}, \quad i_1(t) = 5\cos(\omega t - 45^\circ),\ \text{А},$$
$$i_2(t) = 4\cos(\omega t + 30^\circ)\ \text{А}, \quad i_3(t) = 5\cos(\omega t + 90^\circ),\ \text{А}.$$

Написать выражения для комплексных амплитуд и построить на комплексной плоскости вектора напряжений и токов

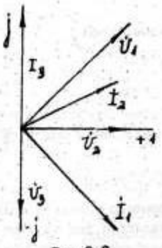


Рис.2.2

$\dot{U}_1 = 100\, e^{j45^\circ}$ В, $\dot{U}_2 = 75$ В
$\dot{U}_3 = 50\, e^{-j90^\circ} = -j50$ В,
$\dot{I}_1 = 5 e^{-j45^\circ}$ А, $\dot{I}_2 = 4\, e^{j30^\circ}$ А,
$\dot{I}_3 = 5\, e^{j90^\circ} = +j5$ А.

На рис.2.2 строим вектора токов и напряжений, задавшись масштабами токов $M_i = \dots$ А/мм и напряжений $M_u = \dots$ В/мм.

П р и м е р 2.2. Определить мгновенное, амплитудное и действующее значения тока i_3 (рис.2.2,а), если заданы $I_{m1} = I_{m2} = 5\sqrt{2}$ А, $\psi_{i1} = 30^\circ$, $\psi_{i2} = -30^\circ$. Построить векторную диаграмму токов.

Рис. 2.3

Р е ш е н и е. Записываем мгновенные значения токов

$$i_1(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 30^\circ)\ \text{А},$$
$$i_2(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t - 30^\circ)\ \text{А}.$$

Переходим к их комплексным изображениям

$$\dot{I}_1 = 5\, e^{j30^\circ} = 5\cos 30^\circ + j\,5\sin 30^\circ = (4{,}33 + 2{,}5)\ \text{А},$$
$$\dot{I}_2 = 5\, e^{-j30^\circ} = 5\cos 30^\circ - j\,5\sin 30^\circ = (4{,}33 - 2{,}5)\ \text{А}.$$

Записываем уравнение ЗТК $\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ и отсюда

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = (4{,}33 - j\,2{,}5) - (4{,}33 + j\,2{,}5) = -j5 = 5\, e^{-j90^\circ}\ \text{А}.$$

На рис.2.3,б строим векторную диаграмму токов, задавшись масштабом токов $M_i = \dots$ А/мм.

Мгновенное значение $i_3(t) = Re\, 5\sqrt{2}\, e^{-j90^\circ} e^{j\omega t} = 5\sqrt{2}\cos(\omega t - 90^\circ)$ А и отсюда $I_{m3} = 5\sqrt{2}$ А, $I_3 = 5$ А.

П р и м е р 2.3. Определить мгновенное, амплитудное и действующее значения напряжения U_3 (рис.2.4,а), если заданы $U_{m1} = U_{m2} = 40\sqrt{2}$ В, $\psi_{U1} = -135^\circ$, $\psi_{U2} = 135^\circ$. Построить векторную диаграмму напряжений.

Р е ш е н и е. Записываем мгновенные и комплексные значения напряжений

$$U_1(t) = 40\sqrt{2}\cos(\omega t - 135^\circ)\ \text{В},$$
$$U_2(t) = 40\sqrt{2}\cos(\omega t + 135^\circ)\ \text{В},$$
$$\dot{U}_1 = 40\, e^{-j135^\circ} = (-20\sqrt{2} - j\,20\sqrt{2})\ \text{В},$$
$$\dot{U}_2 = 40\, e^{j135^\circ} = (-20\sqrt{2} + j\,20\sqrt{2})\ \text{В}.$$

Уравнения ЗНК $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$, откуда

$$\dot{U}_3 = -\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = -(-20\sqrt{2} - j\,20\sqrt{2}) - (-20\sqrt{2} + j\,20\sqrt{2}) = 40\sqrt{2}\ \text{В}.$$

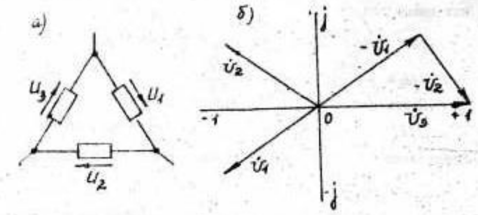


Рис. 2.4

По последнему равенству на рис.2.4,б строим векторную диаграмму. Далее находим

$$U_3(t) = Re\, \dot{U}_{m3} e^{j\omega t} = Re\, 40\sqrt{2}\, e^{j\omega t} = 40\sqrt{2}\cos\omega t\ \text{В},$$
$$U_{m3} = 40\sqrt{2}\ \text{В}, \qquad U_3 = 40\ \text{В}.$$

Варианты задач приведены в Прил. 4 и 5. Требуется: определить мгновенное, амплитудное и действующее значения напряжения и тока, построить векторные диаграммы токов и напряжений.

З а д а ч а 2.2. Анализ пассивных цепей в гармоническом режиме

Рассматриваемые цепи имеют один источник и ветви, включенные между собой последовательно и параллельно. В общем случае ветвь может содержать сопротивление, индуктивность и емкость, соединенные последовательно (рис.2.5,а) или параллельно (рис. 2.5,б).

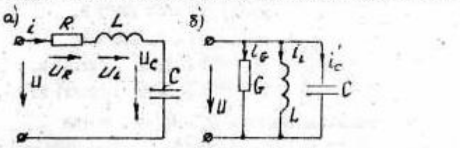


Рис. 2.5

Уравнения этих элементов при любом законе изменения токов в них имеет вид

$$U_R = Ri;\quad U_L = L\frac{di}{dt};\quad i_L = \frac{1}{L}\int_0^t U\,dt; \tag{2.6}$$
$$U_C = \frac{1}{C}\int_0^t dt;\quad i_C = C\frac{dU_C}{dt}.$$

Пусть напряжение и ток заданы в виде

$$U(t) = U_m\cos(\omega t + \psi_u) \quad \text{и} \quad i(t) = I_m\cos(\omega t + \psi_i).$$

Представим их в комплексной форме

$$U(t) \doteq \dot{U}_m e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad i(t) \doteq \dot{I}_m e^{j\omega t},$$

где $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ и $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ – комплексные амплитуды напряжения и тока.

Подставив комплексные изображения напряжения и тока в уравнения элементов (2.6) получим уравнения элементов в комплексной форме

$$\dot{U}_R = R\dot{I};\ \dot{U}_L = j\omega L\dot{I};\ \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C};\ \dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I};\ \dot{U} = \underline{Z}\dot{I}; \tag{2.7}$$
$$\dot{I}_G = G\dot{U};\ \dot{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\dot{U};\ \dot{I}_L = -j\frac{1}{\omega L}\dot{U};\ \dot{I}_C = j\omega C\dot{U};\ \dot{I} = \underline{Y}\dot{U}.$$

Из сравнения уравнений элементов в виде (2.6) и (2.7) следует важное правило: изображение производной находится умножением изображающего комплекса на $j\omega$, а интеграла – делением

на $j\omega$. Так как умножению на $j = e^{j90^\circ}$ соответствует поворот вектора на угол 90° (в положительном направлении), то напряжение на индуктивности опережает ток на угол 90°. Деление на $j\ (1/j = e^{-j90^\circ})$ соответствует повороту вектора на угол -90° (по направлению движения часовой стрелки). Поэтому напряжение на емкости отстает от тока на угол 90°.

Запишем уравнение ЗНК для цепи (рис.2.5,а)

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\dot{I} \tag{2.8}$$

и построим по нему (на рис.2.6,а) векторную диаграмму напряжений.

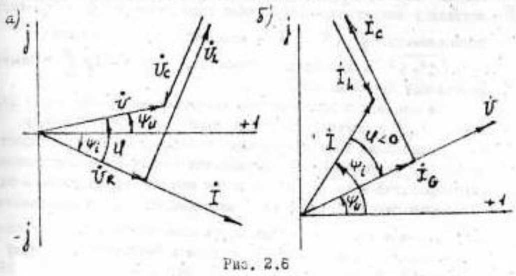


Рис. 2.6

Из (2.8) и из векторной диаграммы (рис.2.6,а) находим

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\dot{U}}{R + jX} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}, \tag{2.9}$$

где $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – реактивное сопротивление; X_L и X_C – индуктивное и емкостное реактивные сопротивления; $\underline{Z} = R + jX$ – комплексное сопротивление; $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ – полное сопротивление; $\varphi = arctg\,\frac{X}{R}$ – аргумент, определяющий угол сдвига между напряжением и током, так как $\varphi = \psi_u - \psi_i$, (см. рис. 2.6,а).

Углы ψ_u и ψ_i отсчитываются от вещественной оси +1 до векторов $\dot{U}$ и $\dot{I}$, а угол φ – от вектора тока $\dot{I}$ до вектора напряжения $\dot{U}$. Если направление отсчета совпадает с направлением вращения векторов (против часовой стрелки), то знак угла положительный. Это означает, что ток отстает по фазе от напряжения и цепь носит индуктивный характер. Если же ток опережает напряжение, то угол $\varphi < 0$ и цепь носит емкостной характер. Для случая рис.2.6,а

$$\varphi = \psi_u - (-\psi_i) = \psi_u + \psi_i > 0.$$

Запишем уравнения ЗТК для цепи (рис.2.5,б)

$$\underline{\dot{I}} = \dot{I}_G + \dot{I}_L = \dot{I}_C = G\dot{U} + j\omega C\dot{U} - j\frac{1}{\omega L}\dot{U} = \\ = \left[G - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right]\dot{U} = (G - jB)\dot{U} = \underline{Y}\dot{U}, \tag{2.10}$$

где $B = B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ – реактивная проводимость; B_C и B_L – емкостная и индуктивная реактивные проводимости; $G = 1/R$ – активная проводимость; $\underline{Y} = G - jB$ – комплексная проводимость; $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ – полная проводимость; $\varphi = arctg\frac{B}{G}$ – имеет знак реактивной проводимости.

На рис.2.6,б представлена векторная диаграмма токов для цепи (рис.2.5,б) в случае, если цепь имеет емкостной характер.

Полученные выше соотношения позволяют рассчитать простейшую цепь. Для этого вначале записываются комплексы сопротивлений или проводимостей всех ветвей и затем используют аналогию между уравнениями цепей постоянного и переменного тока в комплексной форме.

П р и м е р 2.4. Определить мгновенные и действующие значения токов в цепи (рис.2.7). Построить векторную диаграмму токов напряжений. Параметры цепи: R = 10 Ом, L = 16 мГн, C = 160 мкФ, f = 100 Гц, $U_m = 10\sqrt{2}$ В, $\psi_u = -45°$.

Р е ш е н и е. Записываем выражение приложенного к цепи напряжения $u(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t - 45°) = 10\sqrt{2}e^{-j45°}e^{j\omega t}$ В,
$\dot{U} = 10e^{-j45°}$

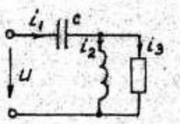


Рис.2.7

Записываем сопротивления ветвей

$$\underline{Z}_1 = -jX_C = -j\frac{1}{2\pi fC} = -j10 = 10e^{-j90°} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = jX_L = 2\pi fL = j10 = 10e^{j90°} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 = 10 \text{ Ом}.$$

Находим входное сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = -j10 + \frac{j10 \cdot 10}{10 + j10} = 5 - j5 = 5\sqrt{2}e^{-j45°} \text{ Ом}$$

и токи ветвей

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{10e^{-j45°}}{5\sqrt{2}e^{-j45°}} = \sqrt{2}\ A; \quad \dot{U}_L = \dot{U}_R = \dot{I}_1\frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \sqrt{2}\frac{10}{10 + j10} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}e^{j45°}} = 1e^{-j45°} = (0{,}707 - j0{,}707)\ A;$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \sqrt{2}\frac{10e^{j90°}}{10 + j10} = \sqrt{2}\frac{10e^{j90°}}{10\sqrt{2}e^{j45°}} = 1e^{j45°} = (0{,}707 + j0{,}707)\ A.$$

Проверка по ЗТК

$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ = 0,707 – j0,707 + j0,707 + 0,707 = 1,41 = $\sqrt{2}$ А.

Находим напряжения на элементах схемы

$\dot{U}_L = \dot{U}_R = R\dot{I}_3 = 10e^{j45°}$ В, $\quad \dot{U}_C = -jX_C\dot{I}_1 = 10\sqrt{2}e^{-j90°}$ В.

Мгновенные значения токов и напряжений

$i_1(t) = 2\cos\omega t$ А, $i_2(t) = 2\cos(\omega t - 45°)$ А, $i_3(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t + 45°)$ А,
$u_L(t) = u_R(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 45°)$ В, $u_C(t) = 20\cos(\omega t - 90°)$ В.

Их действующие значения $I_1 = \sqrt{2}$ А, I_2 = 1А, I_3 = 1А, $U_C = 10\sqrt{2}$ В, $U_L = U_R$ = 10 В.

На рис.2.8 построена векторная диаграмма по уравнениям ЗТК $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ и ЗНК $\dot{U} = \dot{U} + \dot{U}_C$.

Варианты задач даны в Прил.6.

Требуется рассчитать мгновенные и действующие значения токов и напряжений всех ветвей и построить векторную диаграмму токов и напряжений.

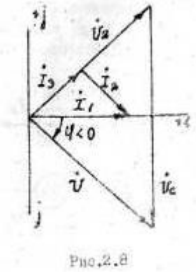


Рис.2.8

З а д а ч а 2.3. Анализ цепей в гармоническом режиме общими методами

ЗТК и ЗНК в комплексной форме аналогичны соответствующим уравнениям для резистивных цепей. Поэтому все методы расчета резистивных цепей – токов связей, узловых напряжений и т.п. – могут использоваться и для расчета цепей в гармоническом режиме. Отличие состоит только в том, что напряжения и токи записываются в комплексной форме и вместо сопротивлений R используются комплексные сопротивления $\underline{Z}$, а вместо проводимостей G – комплексная проводимость ветвей $\underline{Y}$.

Для проверки правильности расчета используется баланс мощности в комплексной форме

$$\sum \dot{S}_K = \sum \dot{S}_E + \sum \dot{S}_J, \tag{2.11}$$

где $\dot{S}_K = \dot{U}_K\overset{*}{I}_K = \underline{Z}_K I_K^2 = P_K + jQ_K$ – комплекс полной мощности, выделяемой в K-й ветви; P и Q – активная и реактивная части; $\overset{*}{I}_K$ – сопряженный комплекс тока $\dot{I}_K$.

Суммирование левой части равенства (2.11) выполняется по всем сопротивлениям цепи. В правой части равенства (2.11)

$$\dot{S}_E = \dot{E}\overset{*}{I}_E = P_E + jQ_E \quad \text{и} \quad \dot{S}_J = \dot{U}_J\overset{*}{J} = P_J + jQ_J$$

– комплексы мощностей, вырабатываемые источниками ЭДС и тока. Они записываются в равенства (2.11) со знаком "плюс", если положительное направление тока I_E в источнике ЭДС совпадает с направлением ЭДС $\dot{E}$ и напряжение $\dot{U}_J$ имеет направление, противоположное току источника тока $\dot{J}$, как это показано на рис.2.9,а и б.

Рис.2.9

Суммирование в правой части (2.11) выполняется по всем источникам ЭДС и тока.

Расчет цепи верен, если в выражении (2.11) отдельно равны вещественные и мнимые части, т.е. активные и реактивные мощности, выделяемые всеми источниками, равны сумме активных и реактивных мощностей, выделяемых на всех сопротивлениях цепи.

П р и м е р 2.5. Рассчитать мгновенное значение токов и напряжений на всех ветвях в схеме, приведенной на рис.2.10. Построить векторную диаграмму токов и напряжений. Проверить баланс мощности. Исходные данные: $R_1 = R_3$ = 5 Ом, R_2 = 20 Ом, $X_1 = X_3$ = 5 Ом, $J_m = \sqrt{2}$ А, $E_m = 5\sqrt{2}$ В, ψ_J = – 45°, ψ_E = 45°.

Р е ш е н и е. Записываем мгновенные значения $J(t)$ и $e(t)$

$J(t) = J_m\cos(\omega t + \psi_J) = \sqrt{2}\cos(\omega t - 45°)$ А,
$e(t) = E_m\cos(\omega t + \psi_E) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 45°)$ В.

Исходные данные в комплексной форме

$\dot{J} = 1e^{-j45°}$ = 0,707 – 0,707 А,
$\dot{E} = 5e^{j45°}$ = 3,54 + 3,54 В,

$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 5 + j5 = 5\sqrt{2}e^{j45°}$ Ом; $\quad \underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{5\sqrt{2}e^{j45°}} = 0{,}1 - j0{,}1$ См;
$\underline{Z}_2 = R_2 = 20$ Ом; $\quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20} = 0{,}05$ См;
$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_3 = 5 - j5 = 5\sqrt{2}e^{-j45°}$ Ом; $\quad \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{5\sqrt{2}e^{-j45°}} = 0{,}1 + j0{,}1$ См.

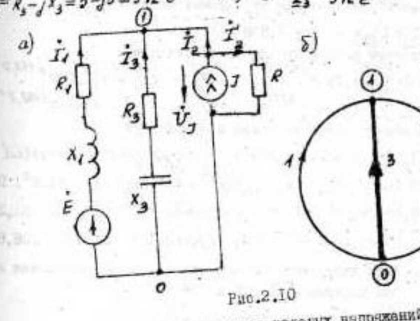


Рис.2.10

Для решения выбираем метод узловых напряжений. Опорный узел указан на графе (рис.2.6,б). Так как q = 2, то число уравнений $n_{уч} = q - 1 = 1$.

$\dot{U}_{10}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) = \dot{E}\underline{Y}_1 + \dot{J}$, откуда находим

$$\dot{U}_{10}=\frac{\dot{E}\cdot\underline{Y}_1+\dot{J}}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}=\frac{1,41-j0,707}{0,25}=6,31e^{-j26,5^\circ}=5,64-j2,82\ \text{В}.$$

Токи ветвей находим, используя уравнения ЗНК

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}-\dot{U}_{10}}{\underline{Z}_1}=\frac{3,54+j3,54-5,64+j2,82}{5+5}=0,947\,e^{j63,2^\circ}=$$
$$=0,425+j0,846\ \text{А},$$

$$\dot{I}_2=\frac{R\dot{J}-\dot{U}_{10}}{R}=\dot{J}-\frac{\dot{U}_{10}}{R}=0,707-j0,707-0,282+j0,141=$$
$$=0,707\,e^{-j63,1^\circ}\ \text{А},$$

$$\dot{I}_3=-\frac{\dot{U}_{10}}{\underline{Z}_3}=-\frac{6,31\,e^{-j26,5^\circ}}{5\sqrt{2}\,e^{-j45^\circ}}=-0,89\,e^{j18,5^\circ}=-0,846-j0,282\ \text{А},$$

$$\dot{I}_2'=\dot{I}_2-\dot{J}\quad \text{или}\quad \dot{I}_2'=-\frac{\dot{U}_{10}}{\underline{Z}_2}=-\frac{0,631\,e^{-j26,5^\circ}}{2}=-0,282+j0,141=$$
$$=0,315\,e^{j163,5^\circ}\ \text{А}.$$

Комплексы напряжения на зажимах источника тока

$$\dot{U}_J=\dot{U}_{10}=-\dot{U}_e=6,3\,e^{-j26,5^\circ}\ \text{В}.$$

Комплексы напряжения на элементах схемы

$$\dot{U}_{R1}=R_1\dot{I}_1=4,73\,e^{j63,2^\circ}\ \text{В},\qquad \dot{U}_{X1}=jX_1\dot{I}_1=4,735\,e^{j153,2^\circ}\ \text{В},$$
$$\dot{U}_{R3}=R_3\dot{I}_3=4,46\,e^{-j161,5^\circ}\ \text{В},\qquad \dot{U}_{X3}=-jX_3\dot{I}_3=4,46\,e^{j108,8^\circ}\ \text{В}.$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$i_1(t)=\sqrt{2}\cdot 0,947\cos(\omega t+63,2^\circ)$ А, $\quad -u_e(t)=u_J(t)=\sqrt{2}\cdot 6,3\cos(\omega t-26,6^\circ)$ В,

$i_2(t)=1\cos(\omega t-53,1^\circ)$ А, $\quad u_{R3}(t)=\sqrt{2}\cdot 4,46\cos(\omega t-161,5^\circ)$ В,

$i_3(t)=\sqrt{2}\cdot 0,89\cos(\omega t-161,5^\circ)$ А, $\quad u_{X1}(t)=\sqrt{2}\cdot 4,735\cos(\omega t+153,2^\circ)$ В,

$u_{R1}(t)=\sqrt{2}\cdot 4,73\cos(\omega t-63,2^\circ)$ В, $\quad u_{X3}(t)=\sqrt{2}\cdot 4,46\cos(\omega t+108,8^\circ)$ В.

Векторная диаграмма токов и напряжений представлена на рис.2.11. Она построена по ЗТК и ЗНК

$$\dot{E}=\dot{U}_{R1}+\dot{U}_{X1}-\dot{U}_{X3}-\dot{U}_{R3},$$
$$\dot{U}_J=-\dot{U}_{R3}-\dot{U}_{X3},$$
$$\dot{J}=\dot{I}_2-\dot{I}_2',$$
$$\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=0.$$

Баланс мощности проверим по (2.11)

$$\dot{S}_E+\dot{S}_J=\dot{S}_1+\dot{S}_2+\dot{S}_3,$$

или

$$\dot{E}\overset{*}{I}_1+\dot{U}_J\overset{*}{J}=\underline{Z}_1I_1^2+\underline{Z}_2(I_2')^2+\underline{Z}_3I_3^2.$$

Левая часть

$$5e^{j45^\circ}\cdot 0,947e^{-j63,2^\circ}+e^{j45^\circ}\cdot 6,3e^{-j26,5^\circ}=10,6+j0,6\ \text{ВА}.$$

Правая часть

$$5\sqrt{2}\,e^{j45^\circ}\cdot 0,945^2+20\cdot 0,315^2+5\sqrt{2}\,e^{-j45^\circ}\cdot 0,89^2=10,6+j0,6\ \text{ВА}.$$

Следовательно, расчет выполнен верно.

Варианты задач приведены в Прил.7. Для заданной схемы определить мгновенные и действующие значения всех токов и напряжений. Построить векторную диаграмму. Проверить баланс мощности.

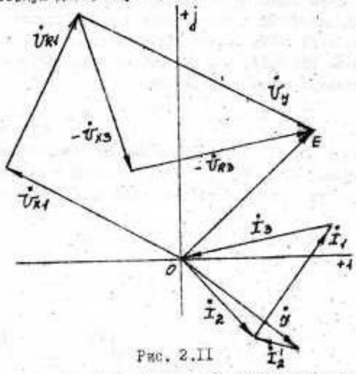


Рис. 2.11

Для вариантов задач из Прил.8 и 9 изобразить направленный граф схемы, пронумеровать ветви, составить системы уравнений всеми известными методами. Определить мгновенные и действующие значения токов и напряжений. Расчет произвести рациональным методом. Построить векторную диаграмму. Проверить баланс мощности.

На рисунках в Прил. 8 и 9 цифры, проставленные около со-

противлений обозначают их номиналы в омах. Первая цифра, проставленная около источников определяет амплитудные значения E_m ЭДС или J_m источника тока (в вольтах или амперах, соответственно), вторая цифра, указанная в скобках - их начальную фазу.

Задача 2.4. Расчет пассивных цепей в вещественной форме методом преобразований

Цепи, которые содержат один источник энергии и в которых все ветви соединены между собой только последовательно и параллельно, можно рассчитать в вещественной форме. Вначале заданная схема методами преобразований приводится к двум последовательно соединенным активному $R_{\delta x}$ и реактивному $X_{\delta x}$ сопротивлениям, либо к двум параллельно соединенным активной $G_{\delta x}$ и реактивной $B_{\delta x}$ проводимостям. При преобразовании схемы используются формулы перехода. Если ветвь задана сопротивлениями R_K и X_K, как это показано на рис.2.12, а и б, то она преобразуется в эквивалентную параллельную ветвь по формулам

$$G_K=\frac{R_K}{R_K^2+X_K^2},\qquad B_K=\frac{X_K}{R_K^2+X_K^2}.$$

Если же требуется выполнить обратное преобразование - от заданной значениями G_K и B_K параллельной ветви к эквивалентной последовательности ветви, то используются формулы перехода в ином виде:

$$R_K=\frac{G_K}{G_K^2+B_K^2},\qquad X_K=\frac{B_K}{G_K^2+B_K^2}.$$

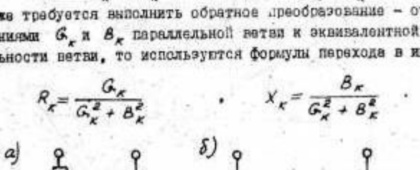


Рис. 2.12

При последовательном соединении n активных сопротивлений их эквивалентное активное сопротивление определяется их арифметической суммой

Причем, индуктивные сопротивления входят в эту сумму со знаком "плюс", а емкостное - со знаком "минус". Полное сопротивление равно геометрической сумме активного и реактивного сопротивлений

$$Z_\vartheta=\sqrt{R_\vartheta^2+X_\vartheta^2}.$$

При параллельном соединении n активных проводимостей их эквивалентная активная проводимость определяется их арифметической суммой

$$G_\vartheta=\sum_{K=1}^{n}G_K.$$

Эквивалентная реактивная проводимость n параллельно соединенных реактивных проводимостей равна их алгебраической сумме

$$B_\vartheta=\sum_{K=1}^{n}B_K,$$

причем индуктивные проводимости входят в эту сумму со знаком "плюс", а емкостные - со знаком "минус".

Полная проводимость равна геометрической сумме активной и реактивной проводимостей

$$Y_\vartheta=\sqrt{G_\vartheta^2+B_\vartheta^2}.$$

После преобразований определяются токи в ветвях с применением закона Ома

$$I=\frac{U}{Z}=\frac{U}{\sqrt{R^2+X^2}},\qquad I=YU=\sqrt{G^2+B^2}\,U.$$

Угол сдвига между током и напряжением в каждой ветви определяется по формуле

$$\varphi_K=arctg\,\frac{X_K}{R_K}=arctg\,\frac{B_K}{G_K};\qquad -90^\circ\leq\varphi_K\leq+90^\circ.$$

Пример 2.6. Определить действующие значения токов во всех ветвях и напряжений на всех элементах цепи, изображенной на рис.2.13,а. Построить векторную диаграмму токов и напряжений. Параметры цепи: X_1 = 10 Ом, X_2 = 10 Ом, R_2 = 10 Ом, R_3 = 20 Ом.

Решение. Так как вторая и третья ветвь соединены параллельно, то вначале преобразуем их в параллельные эквивалентные схемы как это показано на рис.2.13,б

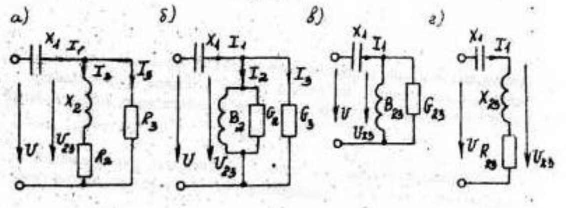


Рис. 2.13

$$G_2=\frac{R_2}{R_2^2+X_2^2}=\frac{10}{10^2+10^2}=0{,}05\ См;\quad B_2=\frac{X_2}{R_2^2+X_2^2}=\frac{10}{10^2+10^2}=0{,}05\ См;$$

$$G_3=\frac{1}{R_3}=\frac{1}{20}=0{,}05\ См,\qquad B_3=0.$$

Далее переходим к схеме рис.2.13,в

$$G_{23}=G_2+G_3=0{,}05+0{,}05=0{,}1\ См;\quad B_{23}=B_2=0{,}05\ См;$$
$$Y_{23}=\sqrt{G_{23}^2+B_{23}^2}=\sqrt{0{,}1^2+0{,}05^2}=0{,}11\ См..$$

Ветви 2 и 3 соединены с первой ветвью последовательно, поэтому преобразуем их в последовательные эквивалентные схемы (рис.2.13,г)

$$R_{23}=\frac{G_{23}}{G_{23}^2+B_{23}^2}=\frac{0{,}1}{0{,}1^2+0{,}05^2}=8\ Ом;\ X_{23}=\frac{B_{23}}{G_{23}^2+B_{23}^2}=\frac{0{,}05}{0{,}1^2+0{,}05^2}=4\ Ом;$$

$$Z_{23}=\sqrt{R_{23}^2+X_{23}^2}=\sqrt{8^2+4^2}=8{,}94\ Ом.$$

И, наконец, находим входные сопротивления

$$R_{вх}=R_{23}=8\ Ом;\quad X_{вх}=X_{23}-X_1=4-10=-6\ Ом;$$
$$Z_{вх}=\sqrt{R_{вх}^2+X_{вх}^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10\ Ом.$$

и угол сдвига между приложенным напряжением $\vec{U}$ и током $\vec{I}_1$

$$\varphi_{вх}=arctg\frac{X_{вх}}{R_{вх}}=arctg-\frac{6}{8}=36{,}8^\circ.$$

Здесь знак "минус" означает, что цепь носит емкостной характер и что ток $\vec{I}_1$ опережает напряжение $\vec{U}$.

Расчет схемы начинается с последней эквивалентной схемы (рис.2,13,г). Вначале находим ток

$$I_1=\frac{U}{Z_{вх}}=\frac{10}{10}=1A,\quad \varphi_{вх}=arctg\frac{X_{вх}}{R_{вх}}.$$

Далее находим напряжение U_{23} по схеме рис.2.13,г или в

$$U_{23}=Z_{23}I_1=\frac{I_1}{Y_{23}}=8{,}94\ В$$

и остальные токи

$$I_2=\frac{U_{23}}{Z_{23}}=\frac{U_{23}}{\sqrt{R_2^2+X_2^2}}=\frac{8{,}94}{\sqrt{10^2+10^2}}=0{,}63\ A;\ I_3=\frac{U_{23}}{R_3}=\frac{8{,}94}{20}=0{,}447\ A.$$

Угол между напряжением $\vec{U}_{23}$ и током $\vec{I}_2$

$$\varphi_2=arctg\frac{X_2}{R_2}=arctg\frac{B_2}{G_2}=arctg\,1=45^\circ.$$

Векторная диаграмма для данной цепи изображена на рис.2.14.

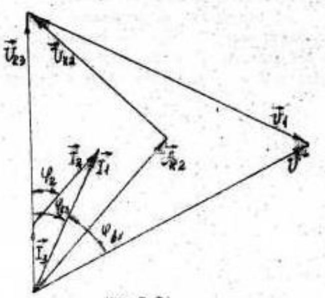


Рис.2.14

Ее построение рационально начать с вектора, изображающего напряжение $\vec{U}_{23}$, которое откладывается в масштабе произвольно. Относительно этого напряжения строится векторная диаграмма токов по уравнению ЗТК

$$\vec{I}_1=\vec{I}_2+\vec{I}_3,$$

причем ток $\vec{I}_3$ совпадает по направлению с напряжением $\vec{U}_{23}$, а $\vec{I}_2$ – отстает на угол φ_2, так как эта ветвь содержит индуктивность. Этот треугольник токов можно построить по трем сторонам или по углам φ_2 и φ_{23}.

Векторная диаграмма напряжений строится по уравнению ЗНК

$$\vec{U}=\vec{U}_{23}+\vec{U}_1$$

Вектор изображающий напряжение $\vec{U}_{23}$ уже построен, а $\vec{U}_1$ строится так, чтобы он отставал от тока $\vec{I}_1$ на 30°, так как в первой ветви содержится только емкость.

Кроме этого, в соответствии с уравнением ЗНК

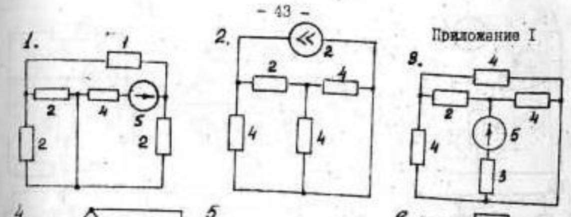
$$\vec{U}_{23}=\vec{U}_{R2}+\vec{U}_{X2},$$

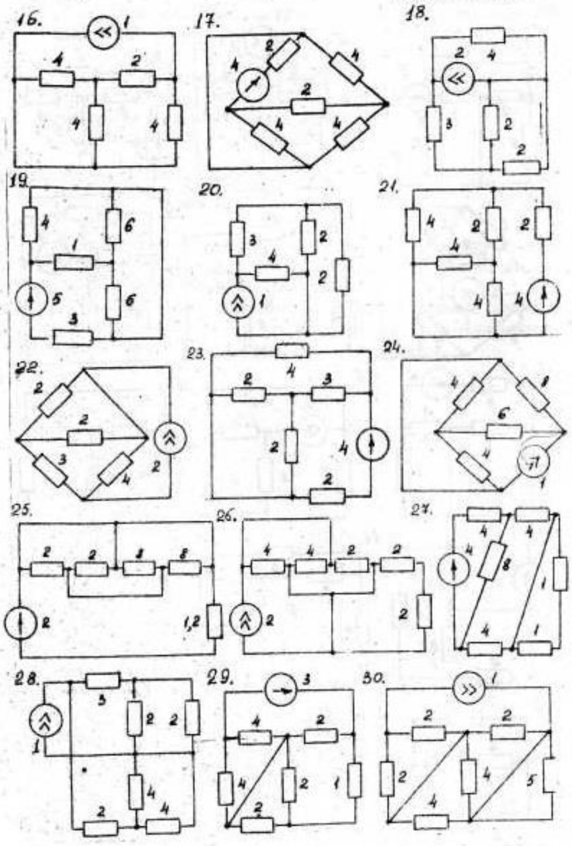
причем $\vec{U}_{R2}$ совпадает по напряжению с $\vec{I}_2$, а $\vec{U}_{X2}$ опережает $\vec{I}_2$ на угол 90°.

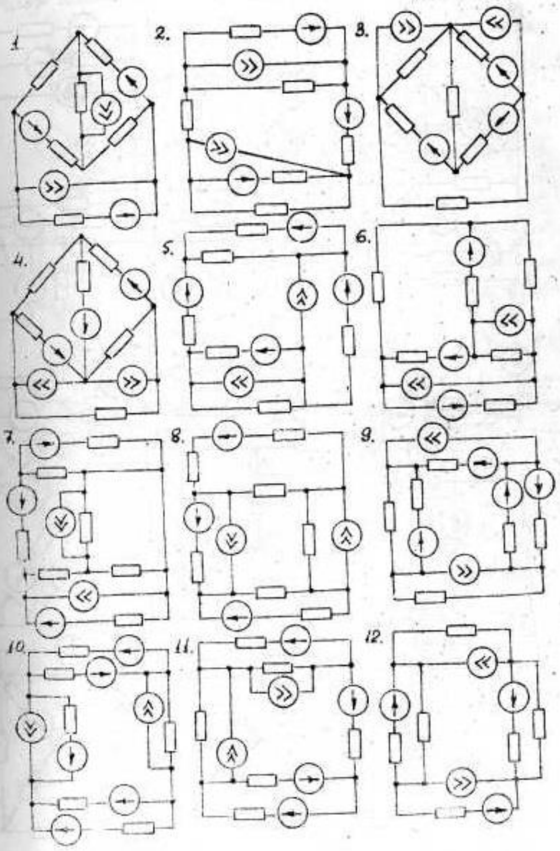
Проверку векторной диаграммы можно выполнить по величине угла $\varphi_{вх}$, который рекомендуется измерить по векторной диаграмме и сравнить с рассчитанными значениями.

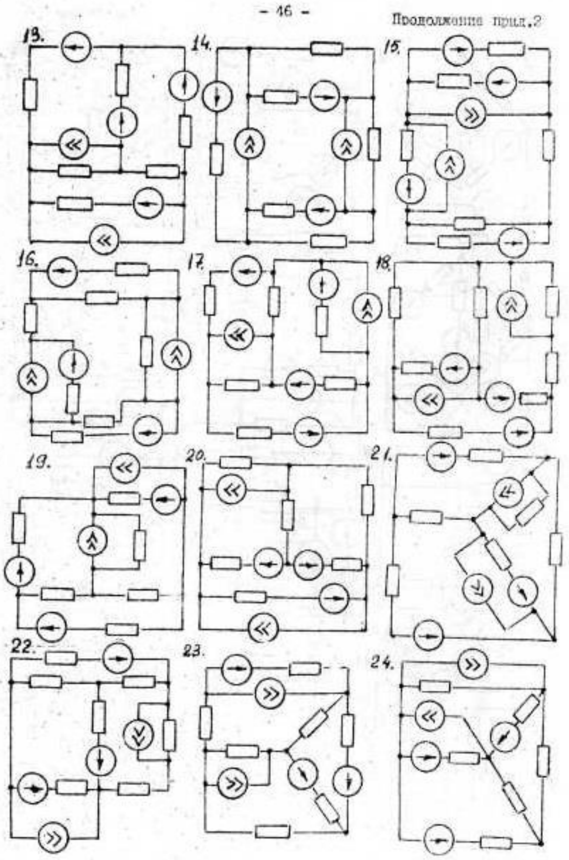
Варианты задач приведены в Прил.6. Для заданной схемы определить действующие значения токов и напряжений на всех элементах. Построить векторные диаграммы токов и напряжений.

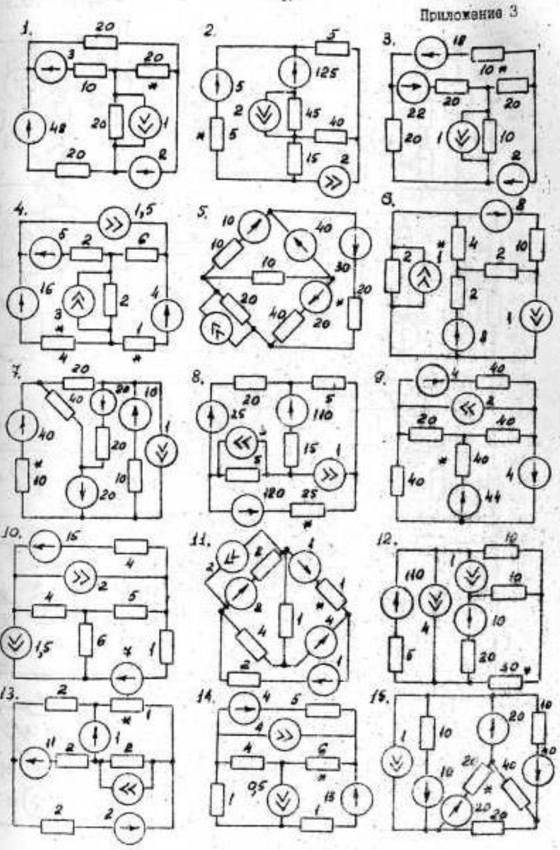
Приложение I



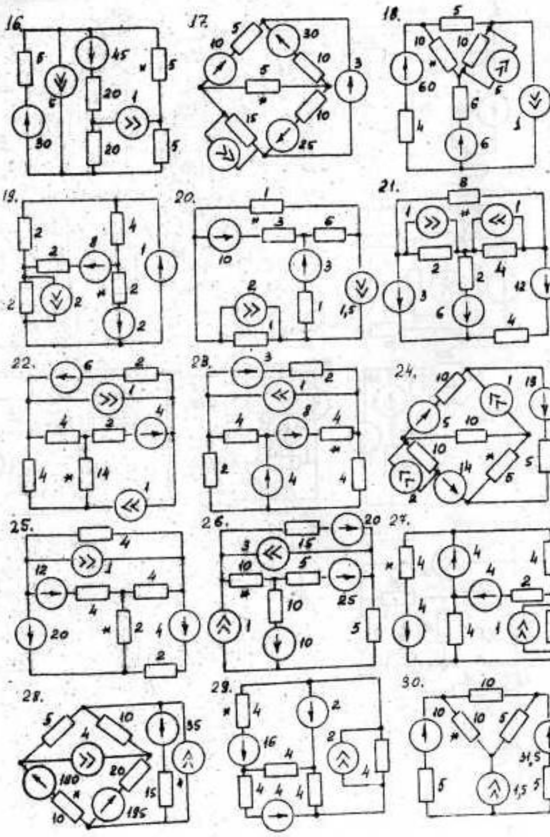








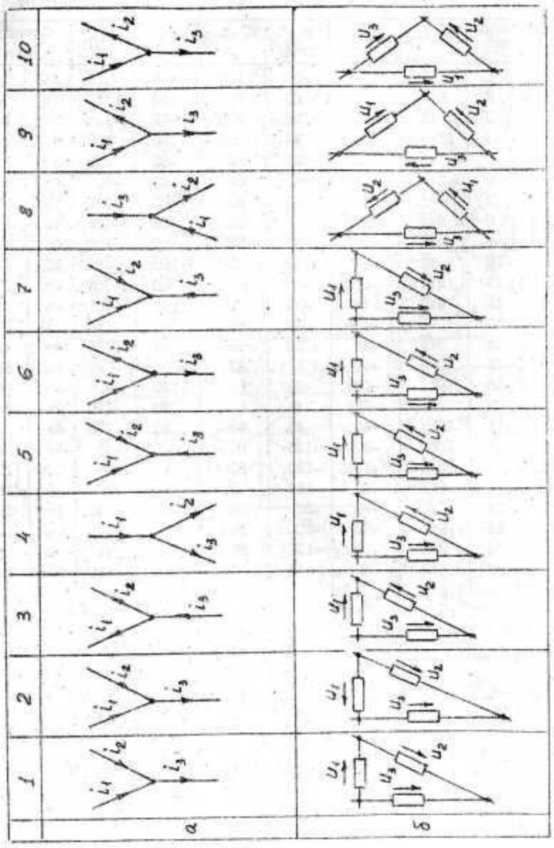
Продолжение прил.3



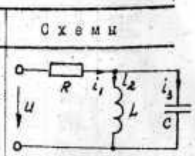
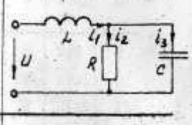
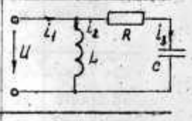
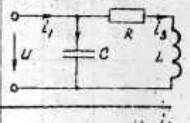
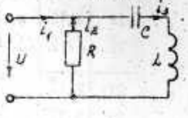
Приложение 4

Вари-ант	I_{m1}, I_{m2} А	ψ_{i1}, град.	ψ_{i2}, град.	U_{m1}, U_{m2}, В	ψ_{u1}, град.	ψ_{u2}, град.	Схемы из Прил.5	
I	$10\sqrt{2}$	-30	+60	I00	+45	+I35	Iа	Iб
2	$20\sqrt{2}$	+60	-I80	50	+30	+I50	2а	2б
3	$40\sqrt{2}$	+30	-I20	200	-45	+I35	3а	3б
4	$20\sqrt{2}$	-60	+I20	I00	+I20	-60	4а	4б
5	$5\sqrt{2}$	-60	-I20	50	+60	-I20	5а	5б
6	$2\sqrt{2}$	-I80	-45	20	+60	-30	6а	6б
7	$5\sqrt{2}$	-I35	-45	80	-60	+I20	7а	7б
8	$2\sqrt{2}$	-45	+I35	60	+I35	-I35	8а	8б
9	$4\sqrt{2}$	-I50	+30	50	+I50	-I50	9а	9б
I0	$\sqrt{2}$	+90	+I80	40	-I20	+I50	I0а	I0б
II	$2\sqrt{2}$	-I50	+30	50	+I50	-I50	Iа	Iб
I2	$4\sqrt{2}$	-I50	-30	I00	+60	-60	2а	2б
I3	$\sqrt{2}$	-I50	-60	200	+I20	+I50	3а	3б
I4	$2\sqrt{2}$	+60	+I20	I50	+I35	-I35	4а	4б
I5	$3\sqrt{2}$	+90	0	60	+60	-I20	5а	5б
I6	$10\sqrt{2}$	-I50	+60	50	+I20	-30	6а	6б
I7	$8\sqrt{2}$	+I35	+45	60	+I20	-I20	7а	7б
I8	$10\sqrt{2}$	-60	+90	50	+30	-I35	8а	8б
I9	$15\sqrt{2}$	-90	+I35	60	-45	+45	9а	9б
20	$20\sqrt{2}$	+I35	-I20	80	-I35	+45	I0а	I0б
2I	$5\sqrt{2}$	+60	-I80	I00	+90	-90	9а	2б
22	$10\sqrt{2}$	-90	+30	I20	-90	+I35	8а	3б
23	$15\sqrt{2}$	+60	-I20	I00	-I20	+30	7а	4б
24	$4\sqrt{2}$	-I20	+I20	50	+60	-45	6а	5б
25	$6\sqrt{2}$	+30	-45	70	-30	+I50	5а	6б

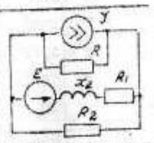
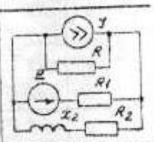
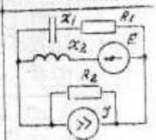
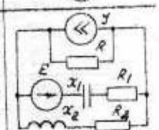
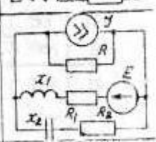
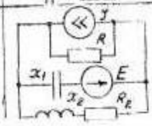
Приложение 5



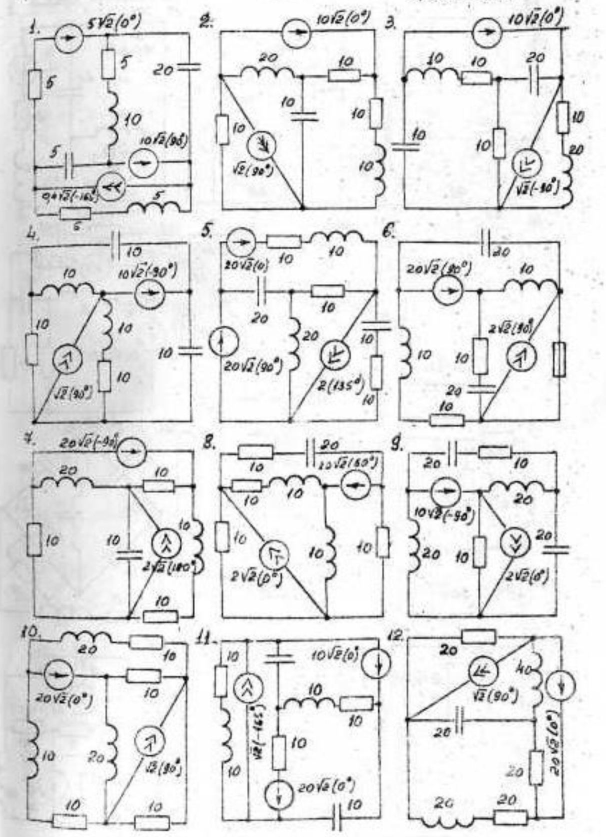
Приложение 6

Вари-ант	U_m, В	ψ_u, град.	f, Гц	R, Ом	L, мГн	C, мкФ	Схемы
I	$20\sqrt{2}$	0	50	I0	32	640	
2	$20\sqrt{2}$	+45	50	20	64	3I8,5	
3	$10\sqrt{2}$	0	50	20	32	I60	
4	$10\sqrt{2}$	-45	50	I0	32	640	
5	$5\sqrt{2}$	+45	I00	5	8	3I8,5	
6	$10\sqrt{2}$	0	I00	20	32	80	
7	$10\sqrt{2}$	+45	I00	I0	I6	I60	
8	$20\sqrt{2}$	0	I00	I0	I6	I60	
9	$5\sqrt{2}$	-I5	400	5	2	80	
I0	$5\sqrt{2}$	+45	400	I0	4	40	
II	$10\sqrt{2}$	0	400	I0	4	40	
I2	$20\sqrt{2}$	+45	400	20	5	20	
I3	$20\sqrt{2}$	+45	50	20	64	I60	
I4	$20\sqrt{2}$	-45	50	I0	32	3I8,5	
I5	$10\sqrt{2}$	+45	50	5	I5,4	640	
I6	$5\sqrt{2}$	-45	50	5	I5,4	640	
I7	$20\sqrt{2}$	-45	I00	20	32	80	
I8	$10\sqrt{2}$	0	I00	I0	I6	I60	
I9	$5\sqrt{2}$	+45	I00	5	I6	3I8,5	
20	$10\sqrt{2}$	0	I00	I0	I6	80	
2I	$20\sqrt{2}$	0	400	20	I6	20	
22	$10\sqrt{2}$	+45	400	5	4	80	
23	$10\sqrt{2}$	0	400	I0	4	20	
24	$5\sqrt{2}$	-45	400	5	2	40	

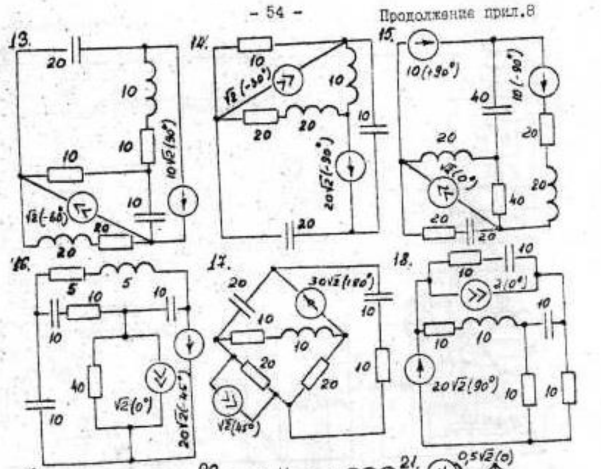
Приложение 7

Вари- ант	E_m, В	ψ, град	J_m, А	ψ, град	R, R_1, Ом	X_1, Ом	R_2, Ом	X_2, Ом	Схемы
I	$2\sqrt{2}$	+90	$\sqrt{2}$	0	2	2	2	–	
2	$2\sqrt{2}$	-90	$\sqrt{2}$	-45	I	2	I	–	
3	$4\sqrt{2}$	+45	$\sqrt{2}$	0	2	2	2	–	
4	$10\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$	-45	5	5	5	–	
5	$10\sqrt{2}$	90	$\sqrt{2}$	0	IO	–	IO	20	
6	$20\sqrt{2}$	-90	$2\sqrt{2}$	45	IO	–	IO	IO	
7	$20\sqrt{2}$	0	$5\sqrt{2}$	90	5	–	IO	5	
8	$10\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	-45	5	–	5	5	
9	$5\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	5	5	–	5	
IO	$10\sqrt{2}$	-45	$2\sqrt{2}$	45	IO	IO	–	IO	
II	$20\sqrt{2}$	90	$5\sqrt{2}$	-45	5	IO	–	5	
I2	$5\sqrt{2}$	45	$\sqrt{2}$	90	5	5	–	IO	
I3	$40\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	40	40	40	80	
I4	$10\sqrt{2}$	30	$2\sqrt{2}$	-30	20	IO	IO	20	
I5	$5\sqrt{2}$	-30	$\sqrt{2}$	30	5	IO	5	5	
I6	$20\sqrt{2}$	0	$5\sqrt{2}$	-45	IO	5	IO	IO	
I7	$4\sqrt{2}$	90	$\sqrt{2}$	0	I	2	I	I	
I8	$2\sqrt{2}$	-45	$\sqrt{2}$	45	2	I	2	2	
I9	$20\sqrt{2}$	45	$5\sqrt{2}$	0	4	2	2	4	
20	$10\sqrt{2}$	-30	$2\sqrt{2}$	30	2	5	2	2	
2I	$20\sqrt{2}$	90	$4\sqrt{2}$	0	–	5	5	IO	
22	$20\sqrt{2}$	-45	$2\sqrt{2}$	30	–	4	5	IO	
23	$10\sqrt{2}$	45	$5\sqrt{2}$	-45	–	5	5	5	
24	$5\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	-90	–	I	I	I	

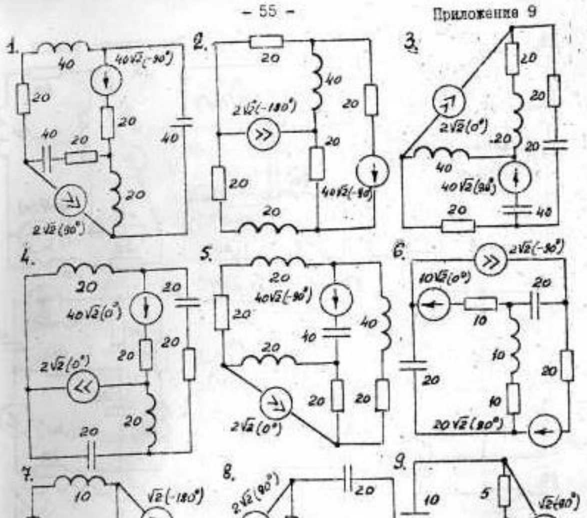
Приложение 8



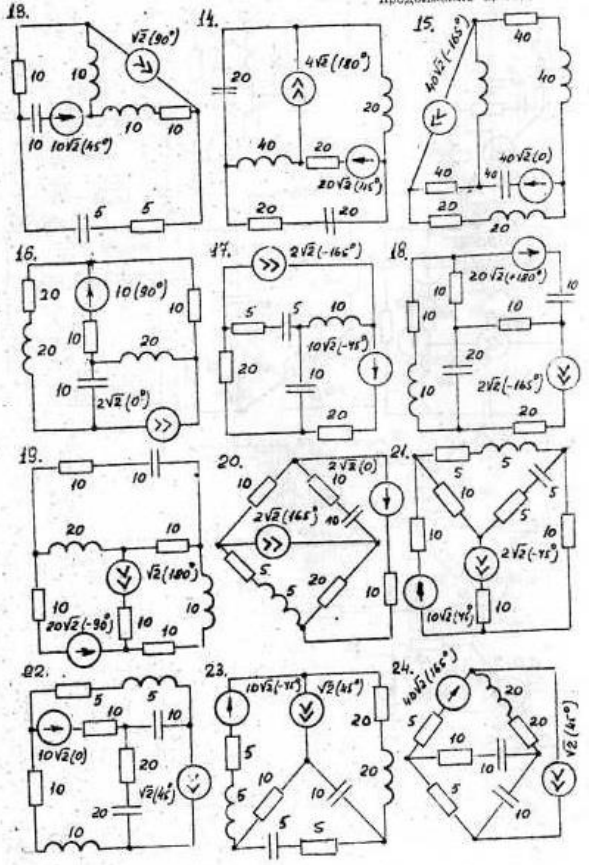
Продолжение прил.8



Приложение 9



Продолжение прил.9



Оглавление

Задание I. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ I
Задача I.I. Анализ цепей методом преобразований I
Задача I.2. Анализ цепей по уравнениям токов ветвей и уравнениям напряжений ветвей 5
Задача I.3. Анализ цепей методом токов связей (контурных токов) 9
Задача I.4. Анализ цепей методом узловых напряжений .. I3
Задача I.5. Анализ цепей методом эквивалентного источника I7
Задача I.6. Формирование матричных уравнений цепи 20
Задания 2. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ В ГАРМОНИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ 26
Задача 2.I. Определение токов и напряжений ветвей с использованием законов Кирхгофа в комплексной форме 26
Задача 2.2. Анализ пассивных цепей в гармоническом режиме 30
Задача 2.3. Анализ цепей в гармоническом режиме общими методами 34
Задача 2.4. Расчет пассивных цепей в вещественной форме методом преобразований 38
Приложение I 43
Приложение 2 45
Приложение 3 47
Приложение 4 49
Приложение 5 50
Приложение 6 .... 5I
Приложение 7 52
Приложение 8 53
Приложение 9 58