Министерство образования и науки Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания 4 для студентов заочной формы обучения

Направления подготовки:

09.03.03 – Прикладная информатика
38.03.02 – Менеджмент
38.03.01 – Экономика

Составители:
Э. Н. Осипова
Л. И. Король

Санкт-Петербург
2018

РЕКОМЕНДОВАНО
на заседании кафедры
31.01.2018г., протокол № 5

Рецензент О. Б. Тёрушкина

Учебное электронное издание сетевого распространения
Издано в авторской редакции
Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением для воспроизведения файлов формата PDF
Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=2018 293, по паролю. – Загл. с экрана.
Дата подписания к использованию 29. 06 .2018 г. Рег. № 293/18
ФГБОУВО «СПбГУПТД»
Юридический и почтовый адрес: 191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18.
http://sutd.ru

ЛИТЕРАТУРА

Учебники

[1]. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер и др. – М.: ЮНИТИ, 2010.

[2]. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Т. 1, 2 / Д. Т. Письменный – М.: АЙРИС ПРЕСС, 2011.

Сборники задач

[3]. Кремер, Н. Ш. Практикум по высшей математике для экономистов / Н. Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ, 2005.

[4]. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М.: ФМ, 2006.

[5]. Берман. Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – СПб.: ПРОФЕССИЯ, 2005.

[6]. Данко, Д. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 1, 2 / Д. Е. Данко и др. – М.: ВШ, 2002.

[7]. Письменный, Д. Т. Сборник задач по высшей математике, 2 курс / Д. Т. Письменный. – М.: АЙРИС ПРЕСС, 2007.

[8]. Письменный. Д. Т. Сборник задач по высшей математике, 1 курс / Д. Т. Письменный. – М.: АЙРИС ПРЕСС, 2008.

Основные темы и рекомендуемая литература для их изучения

№ п/п	Тема	Литература
01	Дифференциальные уравнения первого порядка	[1, гл. 12 (12.1 – 12.6)] [2, гл. X]
01	Дифференциальные уравнения второго порядка	[1, гл. 12 (12.7 – 12.9)] [2. гл. X]
01	Числовые ряды	[1, гл. 12 (12.1 – 12.6)] [2, гл. XIII]
01	Функциональные ряды	[1, гл. 12 (12.7 – 12.8)] [2, гл. XIV]

Контрольная должна быть выполнена в отдельной тетради с соблюдением правил, обязательных для выполнения всех работ по математике. Если работа присылается on line, то она представляется в сканированном виде с рукописного оригинала. Страницы должны быть отсканированы вертикально и подряд. **Работы, выполненные в текстовых редакторах, не принимаются.**

Контрольная работа должна быть представлена на проверку не позднее, чем за две недели до начала экзаменационной сессии.

Если все задания выполнены без ошибок, то студент допускается к защите контрольной работы, которая происходит во время экзаменационной сессии перед экзаменом по математике.

Если в работе есть ошибки, то их нужно исправить в этой же тетради и прислать на повторную проверку.

Прежде чем приступать к выполнению контрольных работ, студенту необходимо изучить соответствующий теоретический материал по указанным выше учебникам. По каждой теме дается список вопросов, на которые необходимо ответить при подготовке к экзамену.

Если в процессе изучения теорем или при решении задач возникают вопросы, то можно обратиться к преподавателям кафедры математики для получения консультации.

Во время экзаменационной сессии для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия, которые носят обзорный характер.

При выполнении контрольной работы обратите внимание на оформление:

НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ ДОЛЖНЫ БЫТЬ УКАЗАНЫ:

Фамилия, имя, отчество.

Номер студенческого билета (или зачетной книжки).

Название дисциплины и номер контрольной работы по этой дисциплине.

Номер варианта.

Номер варианта, который должен выполнять студент, соответствует последней цифре номера студенческого билета (или зачетной книжки).

В каждом задании 20 вариантов примеров. Если год Вашего поступления в Университет – чётный, то Вы выбираете пример из первых десяти вариантов, а если – нечётный, то выбираете свой вариант из номеров с одиннадцатого по двадцатый.

Например, год поступления 2015, вариант 3, следовательно, должны быть выбраны примеры 1.13, 2.13 и т. д.

Например, год поступления 2014, вариант 3, следовательно, должны быть выбраны примеры 1.03, 2.03 и т. д.

Вопросы для самопроверки

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Дайте определения дифференциального уравнения первого порядка и его общего и частного решений (интеграла). Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка и укажите ее геометрический смысл.

2. Дайте геометрическое истолкование дифференциального уравнения второго порядка, выясните геометрический смысл общего и частного решений.

3. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

4. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод нахождения его общего решения.

5. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Изложите метод вариации произвольных постоянных. Приведите пример.

2. Дифференциальные уравнения второго порядка

1. Изложите метод решения дифференциального уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

2. Изложите метод решения дифференциального уравнения вида $y'' = f(x, y')$.

3. Изложите метод решения дифференциального уравнения вида $y'' = f(y, y')$.

3. Ряды

1. Дайте определение сходящегося и расходящегося рядов. Докажите необходимый признак сходимости ряда.

2. Сформулируйте теорему о сравнении рядов с положительными членами. Приведите пример.

3. Сформулируйте признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами. Приведите пример.

4. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.

6. Дайте определение абсолютно сходящегося ряда. Приведите пример абсолютно и условно сходящихся рядов.

7. Дайте определение области сходимости функционального ряда. Выведите формулу для вычисления радиуса сходимости.

8. Ряды Тейлора и Маклорена. Условие разложимости функции в ряд Тейлора.

9. Разложите функции $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = e^x,\ y = \ln(1+x),$

$y = (1+x)^m$ в ряды Маклорена.

Методические указания

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$$

Решение. Данное уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными, так как коэффициенты при dx и dy зависят каждый от двух переменных, но расположенных в разных сомножителях. Разделим обе части уравнения на произведение $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ (считая, что $1-x^2 \neq 0$, $1-y^2 \neq 0$), тогда получим $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$.

Это – дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Находим общее решение $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = C$, где C – произвольная постоянная,

например, можно вместо «С» написать(- $\frac{1}{2}$C), тогда

$$-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-y^2} = -\frac{1}{2}C.$$

Умножим обе части на $\left(-\frac{1}{2}\right)$, тогда решение будет иметь вид $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$.

Ответ: $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$ – общее решение данного уравнения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения первого порядка

$$y'-\frac{2}{x}y=x.$$

Решение. Определим вид этого уравнения. Уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)$ называется линейным. В нашем случае $p(x)=-\frac{2}{x}$; $q(x)=x$. Пусть $y=u\cdot v$, причём $u(x)$ и $v(x)$ пока неизвестны, тогда $y'=u'v+v'u$. Подставим эти значения в данное уравнение, тогда получим

$$u'v+v'u-\frac{2}{x}uv=x.$$

Группируем члены: $u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=x$.

Пусть $$v'-\frac{2}{x}v=0 \qquad (1),$$

тогда остаётся $$u'\cdot v=x. \qquad (2).$$

Находим сначала v из (1): $\frac{dv}{dx}=\frac{2}{x}v$; $\frac{dv}{v}=\frac{2}{x}dx$; $\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x}$;

$$\ln v=2\ln x\Rightarrow v=x^2+C.$$

Возьмём любое частное решение,(например, при C=0 $v=x^2$) и подставим его в (2), получим

$$u'\cdot x^2=x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{x};\quad du=\frac{dx}{x};\quad u=\int\frac{dx}{x}+C\Rightarrow u=\ln|x|+C.$$

Окончательно получаем $y=vu=(\ln x+C)\cdot x^2$ – искомое общее решение.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $x\cdot y'-y=x\cdot e^{-\frac{y}{x}}$.

Решение. Все слагаемые при dx и dy являются многочленами первой степени относительно двух переменных «x» и «y», следовательно, оно однородное. Такое уравнение можно привести к виду $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Для этого все члены уравнения разделим на «*x*», т. е. на «*x*» в степени однородности,

получим $y' - \dfrac{y}{x} = e^{-\frac{y}{x}}$ – это однородное уравнение. Введём новую переменную

$t = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = t \cdot x \Rightarrow y' = t' \cdot x + t \cdot 1$ (производную t*x* вычисляем как производную произведения).

Подставим в уравнение вместо y и y' найденные выражения, получим

$$t' \cdot x + t - t = e^{-t} \Rightarrow t' \cdot x = e^{-t} \Rightarrow \frac{dt}{dx}x = e^{-t} \Rightarrow x \cdot dt = e^{-t} \cdot dx \Rightarrow$$

$$e^{t}dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int e^{t} \cdot dt = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow e^{t} = \ln x + C.$$

C – любая постоянная. Возьмём вместо C – lnC, тогда получим

$e^{t} = \ln x + \ln C \Rightarrow e^{t} = \ln(Cx) \Rightarrow t = \ln(\ln(Cx)) \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \ln(\ln(Cx)) \Rightarrow y = x \cdot \ln(\ln(Cx))$ – общее решение.

2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка это равенство, содержащее независимую переменную (аргумент) «x», неизвестную функцию от этого аргумента «y», а также её производные y', y''.

В некоторых случаях дифференциальное уравнение второго порядка можно привести к уравнению первого порядка (понизить порядок уравнения).

Вот основные случаи:

1) $F(x, y'') = 0$ - уравнение не содержит y, y'.

Такое уравнение приводят к виду $y'' = f(x)$ и затем дважды интегрируют обе части равенства

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' = 30x$.

Решение.

$$y'' = 30x \Rightarrow y'' \cdot dx = 30x \cdot dx \Rightarrow \int y'' \cdot dx = \int 30x \cdot dx \Rightarrow y' = 15x^2 + C \Rightarrow$$

$$y' \cdot dx = (15x^2 + C) \cdot dx \Rightarrow \int y' \cdot dx = \int (15x^2 + C) \cdot dx \Rightarrow y = 5x^3 + Cx + C_2.$$

$y = 5x^3 + Cx + C_2$ – общее решение данного уравнения.

2) $F(x,y',y'')=0$ – уравнение не содержит переменную «у».

Введём новую переменную $z=y'$, тогда $y''=z'$ и уравнение примет вид $F(x,z,z')=0$, т. е. получили уравнение первого порядка с неизвестной функцией «*z*», зависящей от аргумента «*x*».

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''+y'\frac{1}{x}-4=0.$

Решение. Пусть $z=y'$, тогда $y''=z'$ и уравнение примет вид $z'+z\cdot\frac{1}{x}-4=0$. Это линейное уравнение первого порядка. Решаем его, сделав замену $y=u\cdot v$, тогда

$$u'v+uv'+uv\frac{1}{x}-4=0\Rightarrow u'v+u(v'+v\frac{1}{x})-4=0.$$

Пусть $v'+v\frac{1}{x}=0\Rightarrow\begin{cases}v'+v\frac{1}{x}=0\\ u'v=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v=\frac{1}{x}\\ u=\int 4xdx=2x^2+C\end{cases}\Rightarrow z=(2x^2+C)\frac{1}{x}=2x+\frac{C}{x}.$

Вспомним, что $z=y'$, тогда $y'=2x+\frac{C}{x}$. Получили уравнение первого порядка, следовательно, понизили порядок уравнения. Теперь остаётся его решить. Это уравнение с разделёнными переменными, поэтому можно интегрировать обе части: $\int y'dx=\int(2x+\frac{C}{x})\cdot dx\Rightarrow y=x^2+C\ln x+C_2$ – общее решение.

3) $F(y,y',y'')=0$ - уравнение не содержит переменную «х», тем не менее «у» и её производные от неё зависят.
Делаем замену $y'=p(y)\Rightarrow y''=p'_y\cdot y'_x=p'_y\cdot p$.

Подставим в уравнение вместо y' и y'' найденные значения и получим уравнение с аргументом «у» и неизвестной функцией «р», которую нужно найти, при этом получим уравнение первого порядка вида: $F(y,p,p'_y\cdot p)=0$.

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $y\cdot y''-(y')^2=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y_0\big|_{x_0=0}=7;\quad y'_0\big|_{x_0=0}=63$.

Решение. Введём новую переменную «р», зависящую от «у»: р$=y'$, тогда $y''=p'_y\cdot p$. Подставим эти выражения в уравнение вместо y и y', получим $y\cdot p'_y\cdot p-p^2=0\Rightarrow p(y\cdot p'_y-p)=0.$

Возможны два случая:

1) $p=0\Rightarrow y'=0\Rightarrow y=\text{const}$. Это решение не является общим, так как общее решение уравнения второго порядка должно содержать две произвольных постоянных. Его называют – особое решение.

2) $y\cdot p'_y - p = 0$. Получили уравнение первого порядка, т. е. понизили порядок данного уравнения.

Решаем полученное уравнение первого порядка.

Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому

$$y\cdot p'_y - p = 0 \Rightarrow y\cdot p'_y\cdot dy - p\cdot dy = 0 \Rightarrow y\cdot dp = p\cdot dy \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p = \ln y + \ln C \Rightarrow p = C\cdot y.$$

$$p = C\cdot y \Rightarrow y' = C\cdot y \Rightarrow y'\cdot dx = C\cdot y\cdot dx \Rightarrow dy = C\cdot y\cdot dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = C\cdot dx \Rightarrow$$

$$\ln y = Cx + C_2 \Rightarrow y = e^{Cx+C_2}.$$

$y = e^{Cx+C_2}$ – общее решение данного уравнения.

Начальные условия подставляем в систему

$$\begin{cases} y = e^{Cx+C_2} \\ y' = C\cdot e^{Cx+C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = e^{C\cdot 0+C_2} \\ 63 = C\cdot e^{C\cdot 0+C_2} \end{cases} \begin{cases} 7 = e^{C_2} \\ 63 = C\cdot e^{C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \ln 7 \\ 63 = C\cdot 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 9 \\ C_2 = \ln 7. \end{cases}$$

Подставим найденные значения постоянных в общее решение, тогда получим частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям:

$$y = e^{Cx+C_2} = e^{Cx}\cdot e^{C_2} \Rightarrow y_* = 7e^{9x}.$$

3. Ряды

Знакоположительные ряды

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \ldots + \frac{n!}{n^n} + \ldots$$

Решение. Для этого ряда $U_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Используем признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами.

$$U_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Найдем отношение $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{1\cdot 2\ldots n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\ldots n}\frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Здесь использовано определение $n!$ (n-факториал): $n! = 1\cdot 2\ldots n$.

Зная, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e$, вычислим

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}\ .$$

Так как $\mathrm{q} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$, то ряд сходится.

Знакочередующиеся ряды. Знакопеременные ряды

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{\ln n} + \ldots$$

Решение. По теореме Лейбница ряд сходится, если выполнены два условия:

1) $U_n > U_{n+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0.$

Проверим, выполнены ли эти условия для нашего ряда:

$$U_n = \frac{1}{\ln n}; \quad U_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+1)};$$

$$\ln n < \ln(n+1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Первое условие выполнено.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Второе условие выполнено, следовательно, ряд сходится.

Проверим, есть ли абсолютная сходимость, т. е. сходится ли ряд.

$$\sum_{n=2}^{\infty}|U_n| = \sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{1}{\ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots$$

Используем признак сравнения сходимости рядов с положительными членами и сравним наш ряд с гармоническим рядом $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, который расходится.

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ тоже расходится и, следовательно, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ сходится условно.

4. Функциональные ряды

Степенные ряды

Литература: [1, гл. XVI, § 13, упр. 30, 31, 35–37].

Пример 3. Определить интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}x^n + \ldots \quad .$$

Решение. Коэффициенты ряда $a_n = \frac{1}{1+n}$; $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$.

Ищем радиус сходимости

$$\mathrm{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+2}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Исследуем отдельно точки $x = \pm 1$.

1) $x = 1$. В этой точке ряд равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{1+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots \quad .$$

Используем интегральный признак сходимости. Заменим $n \to x$. Тогда

$$U(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \int_1^{\infty} U(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x) \Big|_1^{\infty} = \infty,$$

ряд расходится.

2) $x = -1$. В этой точке ряд равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{1+n} + \ldots \quad ,$$

т. е. ряд знакочередующийся. По теореме Лейбница он сходится, действительно, здесь

$$U_n = \frac{1}{1+n}; \quad U_{n+1} = \frac{1}{1+(1+n)} = \frac{1}{2+n}.$$

1) $\frac{1}{1+n} > \frac{1}{2+n}$, т. е. $U_n > U_{n+1}$.

2) $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0.$

Ряд сходится. Интервал сходимости $-1 \le x < 1$ или $x \in [-1{,}1)$.

Контрольная работа 4

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.
Найти общее решение дифференциального уравнения

№	Уравнение
1.01	$y' - \dfrac{y}{x+3} = x+3.$
1.02	$xy' - y = 3x\cos^2\dfrac{y}{x}.$
1.03	$y' + y = \left(1+\dfrac{3}{x}\right)e^{-x}.$
1.04	$x^2y' = y^2 + xy + 9x^2.$
1.05	$y' + ytgx = \dfrac{3\cos x}{\sin^2 3x}.$
1.06	$3xy' = 3y + \sqrt{x^2 - y^2}.$
1.07	$y' - \dfrac{y}{x+2} = 3(x+2).$
1.08	$3xy' - 3y = 2x\cos^2\dfrac{3y}{x}.$
1.09	$y' + 5ytg5x = \dfrac{2\cos 5x}{\sin^2 2x}.$
1.10	$2xy' = 2y + \sqrt{25x^2 - y^2}.$

№	Уравнение
1.11	$y' + 3y = \left(3+\dfrac{2}{x}\right)e^{-3x}.$
1.12	$3x^2y' = y^2 + 3xy + 4x^2.$
1.13	$y' + 3ytg3x = \dfrac{2\cos 3x}{\sin^2 2x}.$
1.14	$2xy' = 2y + \sqrt{9x^2 - y^2}.$
1.15	$y' - \dfrac{y}{x+2} = 5(x+2).$
1.16	$5xy' - 5y = 2x\cos^2\dfrac{5y}{x}.$
1.17	$y' + 5y = \left(5+\dfrac{2}{x}\right)e^{-5x}.$
1.18	$5x^2y' = y^2 + 5xy + 4x^2.$
1.19	$y' - \dfrac{y}{x+5} = 3(x+5).$
1.20	$3xy' - 3y = 5x\cos^2\dfrac{3y}{x}.$

2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям

№		№	
2.01	$y'' = 5 \cdot y' \cdot ctg5x;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/10} = 12; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/10} = 35$	2.11	$y'' + 4 \cdot y' \cdot tg4x = 0;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/4} = 5; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/4} = 4$
2.02	$y'' + 7 \cdot y' \cdot tg7x = 0;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/7} = 4; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/7} = 7$	2.12	$y'' = 7 \cdot y' \cdot ctg7x;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/14} = 9; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/14} = 14$
2.03	$y'' = 4 \cdot y' \cdot ctg4x;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/8} = 9; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/8} = 20$	2.13	$y'' + 5 \cdot y' \cdot tg5x = 0;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/5} = 2; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/5} = 5$
2.04	$y'' + 6 \cdot y' \cdot tg6x = 0;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/6} = 4; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/6} = 6$	2.14	$y'' = 3 \cdot y' \cdot ctg3x;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/6} = 10; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/6} = 21$
2.05	$y'' = 3 \cdot y' \cdot ctg3x;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/6} = 7; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/6} = 12$	2.15	$y'' + 8 \cdot y' \cdot tg8x = 0;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/8} = 5; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/8} = 8$
2.06	$y'' + 9 \cdot y' \cdot tg9x = 0;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/9} = 2; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/9} = 9$	2.16	$y'' = 4 \cdot y' \cdot ctg4x;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/8} = 11; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/8} = 28$
2.07	$y'' = 2 \cdot y' \cdot ctg2x;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/4} = 11; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/4} = 18$	2.17	$y'' + 2 \cdot y' \cdot tg2x = 0;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/2} = 4; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/2} = 2$
2.08	$y'' + 3 \cdot y' \cdot tg3x = 0;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/3} = 7; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/3} = 3$	2.18	$y'' = 8 \cdot y' \cdot ctg8x;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/16} = 13; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/16} = 40$

Окончание таблицы

№		№	
2.09	$y'' = 7 \cdot y' \cdot \mathrm{ctg} 7x;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/14} = 10; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/14} = 21$	2.19	$y'' + 3 \cdot y' \cdot \mathrm{tg} 3x = 0;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/3} = 5; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/3} = 3$
2.10	$y'' + 4 \cdot y' \cdot \mathrm{tg} 4x = 0;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/4} = 8; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/4} = 4$	2.20	$y'' = 9 \cdot y' \cdot \mathrm{ctg} 9x;$ $y_0\big\|_{x_0=\pi/18} = 12; \quad y'_0\big\|_{x_0=\pi/18} = 27$

3. Найти интервал и радиус сходимости степенного ряда

№		№	
3.01	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k \cdot x^k}{k^2}$	3.11	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{2^k \cdot k^5}$
3.02	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{4^k \cdot k^{\frac{1}{5}}}$	3.12	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k \cdot x^k}{k^{\frac{1}{4}}}$
3.03	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{7^k \cdot k^3}$	3.13	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k \cdot x^k}{k^7}$
3.04	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k^{\frac{1}{4}}} \cdot x^k$	3.14	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{4^k \cdot k^{\frac{1}{3}}}$
3.05	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{6^k \cdot x^k}{k^5}$	3.15	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{5^k \cdot k^6}$
3.06	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{7^k \cdot k^{\frac{1}{2}}}$	3.16	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k^{\frac{1}{7}}} \cdot x^k$
3.07	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{7^k \cdot k^4}$	3.17	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k \cdot x^k}{k^7}$

Окончание таблицы

№		№	
3.08	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k^{\frac{1}{3}}} \cdot x^k$	3.18	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{3^k \cdot k^{\frac{1}{2}}}$
3.09	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6^k \cdot x^k}{k^2}$	3.19	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{2^k \cdot k^6}$
3.10	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{3^k \cdot k^{\frac{1}{5}}}$	3.20	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k}{k^{\frac{1}{3}}} \cdot x^k$