

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна**

Региональный институт непрерывного профессионального образования

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

Контрольная работа

Методические указания для студентов направлений подготовки бакалавриата

29.03.01 – «Технология изделий легкой промышленности»,

29.03.05 – «Конструирование изделий легкой промышленности»

для всех форм обучения

Составители:

Т. С. Грибкова

А. Г. Усов

Санкт-Петербург

2020

УТВЕРЖДЕНО

На заседании методической комиссии
Регионального института непрерывно-
го
профессионального образования
протокол №5 от 20.02.2020

Рецензент Е. С. Цобкалло

Методические указания предназначены для выполнения контрольной работы по технической механике по следующим разделам: статика, кинематика, динамика.

В каждом разделе приведены десять заданий с десятью вариантами. Для каждого задания авторы привели краткое изложение соответствующих теоретических основ и пример выполнения задания контрольной работы.

Данные методические указания будут полезны для повышения качества обучения студентов в области технической механики.

Методические указания разработаны для студентов заочной формы обучения, по направлениям подготовки 29.03.01 – «Технология изделий легкой промышленности», 29.03.05 – «Конструирование изделий легкой промышленности» и могут быть полезны для студентов всех форм обучения и направлений.

Учебное электронное издание сетевого распространения
Издано в авторской редакции

Системные требования:

Электронное устройство с программным обеспечением для воспроизведения
файлов формата DOC

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=2020_, по паролю. –
Загл. с экрана

Дата подписания к использованию __. __ 2020. Рег. № __/20

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
СТАТИКА.	
Тема 1. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ	5
Задание 1	5
КИНЕМАТИКА.	
Тема 2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ	13
Задание 2	13
Тема 3. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ	21
Задание 3	21
Тема 4. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХА- НИЗМОВ	28
Задание 4	28
4.1. Построение планов механизмов	28
4.1.1. Механизм с группой 3- й модификации 1- го вида	29
4.1.2. Механизм с группой 3- й модификации 2- го вида	30
4.2. Кинематический анализ механизмов с группами Ассур 3-й модификации	32
4.2.1. Механизм с группой 3-й модификации 1-го вида	34
4.2.2. Механизм с группой 3-й модификации 2-го вида	44
ДИНАМИКА.	
Тема 5. ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	59
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	69

ВВЕДЕНИЕ

Главными задачами изучения курса технической механики является изучение основных законов и теорем механики, а также развитие у студентов умения применять их к решению практических задач.

Следует иметь в виду, что для понимания теорем и выводов теоретической механики необходимы сведения из высшей математики (аналитическая геометрия, основы дифференциальной геометрии, дифференциальное и интегральное исчисление). Недостаточные знания этих разделов математики могут привести к сложностям при изучении механики и трудностям при решении практических задач.

В процессе изучения технической механики студенты выполняют контрольную работу в соответствии с указаниями, полученными на лекциях.

Выбор варианта

Шифром, по которому выбирается тот или иной вариант контрольной работы, является **номер зачетной книжки** или студенческого билета. **Выбор номера схемы** на рисунке или в таблице следует производить по **последней цифре шифра**, а **исходные данные** в таблицах – по **предпоследней цифре**.

Оформление работы

Контрольная работа выполняется на листах формата А4 или в тетради с указанием на обложке название дисциплины, фамилии и инициалов студента, номера зачетной книжки, а также дата выполнения и подпись исполнителя.

При оформлении контрольной работы изложение каждого задания должно начинаться с новой страницы. Условие задания должно быть переписано полностью, вместе с заданным рисунком и данными из таблицы. Далее кратко записываются данные задачи и указываются искомые величины. Решение каждой задачи должно сопровождаться подробными пояснениями, указывающими, на основании каких положений механики проводится решение задачи.

С левой стороны листа следует оставить поле шириной не менее 25 мм.

Исправление ошибок в работах после рецензирования производится в тексте работы на оставшихся свободных листах. При этом необходимо приводить подробные пояснения по всем замечаниям, сделанным рецензентом.

При защите контрольной работы, которая производится до сдачи зачета или экзамена, студент в беседе с преподавателем должен показать хорошие знания теоретического материала и умение самостоятельно решать аналогичные задачи.

При составлении данных методических указаний использовались учебно-методического пособие Е. В. Поляковой, А. Г. Усова, В. А. Чайкина «Теоретическая механика», СПб., издательство СПГУТД, 2013 г. и методические указания Т.С. Грибковой, А.В. Орестовой «Кинематический анализ плоских рычажных механизмов», СПб., издательство СПГУТД, 2015 г.

СТАТИКА

Тема 1. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Задание 1

Найти реакции связей (опор), наложенных на основное тело конструкции – балку или сварной стержень.

Исходные данные приведены в *таблице 1.1*. Схемы конструкций приведены ниже (размеры, м).

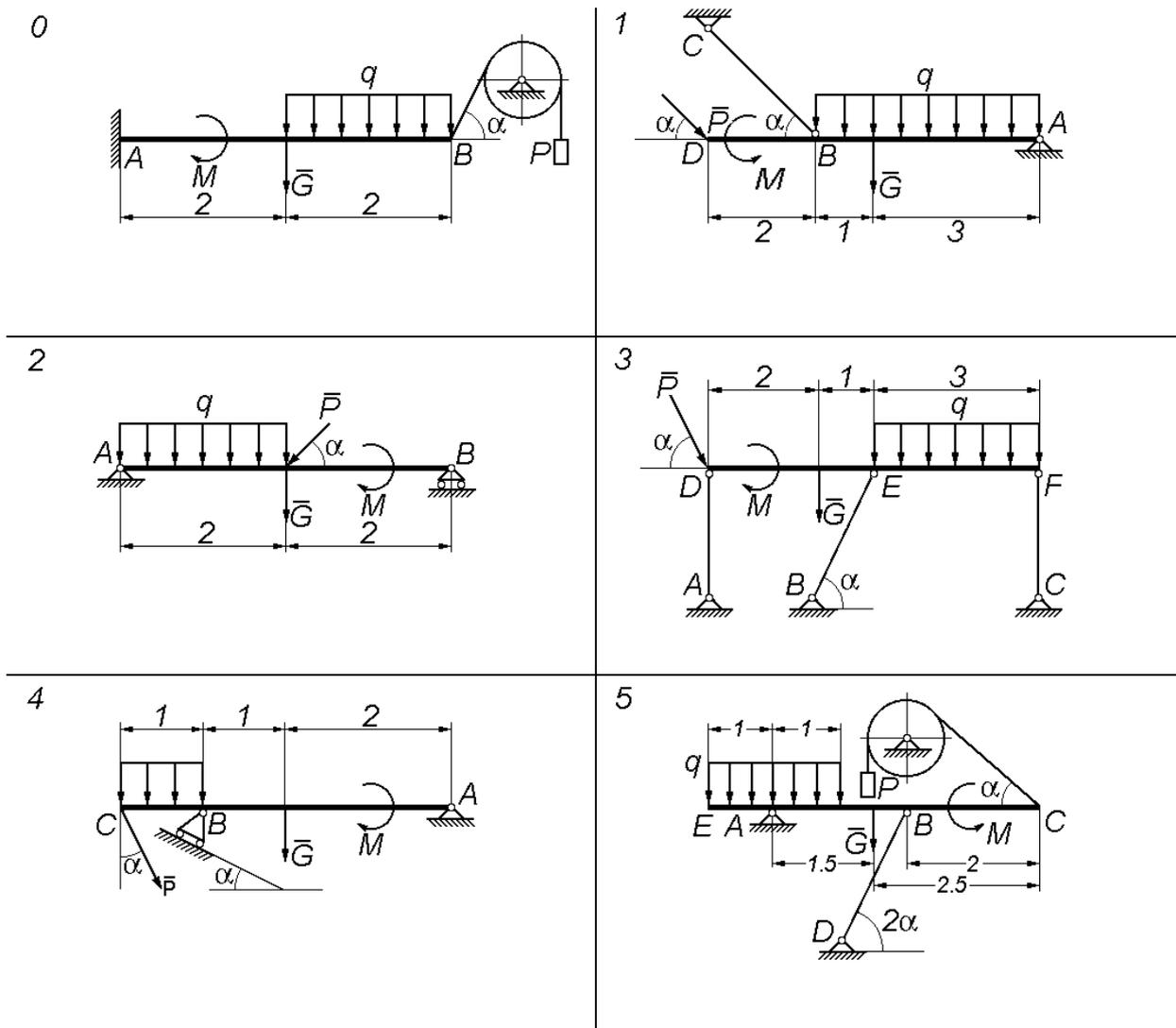


Рис. 1.1

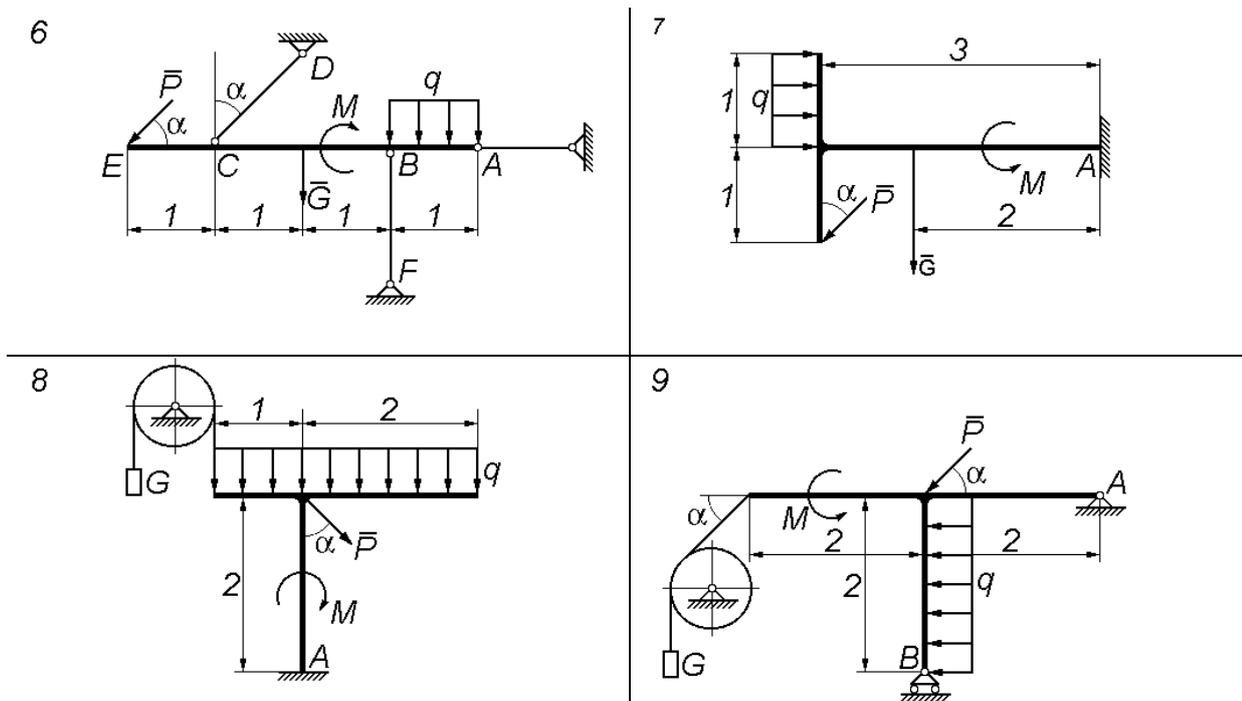


Рис. 1.1. Продолжение

Таблица 1.1

Номер варианта исходных данных	Заданные величины				
	G , кН	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	α , град
0	10	5	20	1	30
1	12	4	10	2	15
2	8	6	5	4	45
3	14	3	8	3	60
4	16	8	12	2	30
5	6	7	4	3	60
6	10	6	8	0,5	15
7	6	12	15	4	45
8	4	8	9	1.5	30
9	20	10	6	5	60

Основные теоретические положения, используемые при решении задач

Тела, ограничивающие перемещения данного тела, являются по отношению к нему связями. В точках контакта тела со связью возникают силы их взаимодействия. Силы, которыми связи действуют на данное тело, называются реакциями связей. При решении задач, кроме активных сил, действующих на данное тело, необходимо учитывать и эти контактные силы (реакции связей).

Реакции связей в задачах статики определяют, решая уравнения равновесия, составляемые для отдельных тел или конструкций. Эти уравнения будут

указаны ниже. Но направления реакций связей во многих случаях могут и должны быть определены предварительно (до составления уравнений равновесия) из рассмотрения свойств связей.

В вариантах предлагаемых заданий используются виды связей (опор), которые приведены ниже.

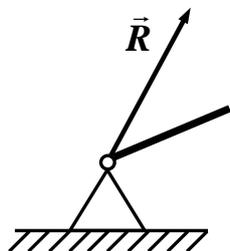


Рис. 1.2

Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора

Эта опора изображается, как показано на рисунке 1.2. Она препятствует любому поступательному движению (тела) балки, но дает ему возможность свободно поворачиваться вокруг оси шарнира. Реакция \vec{R} цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.

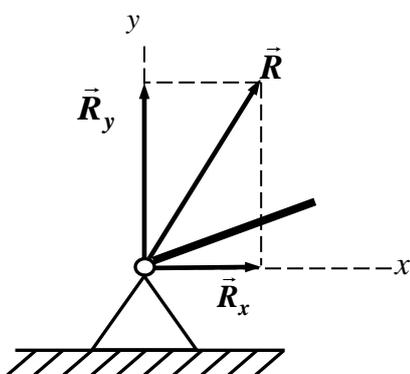


Рис. 1.3

При решении задач реакция \vec{R} заменяется двумя взаимно перпендикулярными составляющими, например, \vec{R}_x и \vec{R}_y (рис. 1.3). Определив в ходе решения задачи составляющие \vec{R}_x и \vec{R}_y , находят модуль и направление реакции \vec{R} . Если знак величины какой-либо силы окажется отрицательным, то это означает, что направление силы противоположно тому, которое было предварительно указано на рисунке.

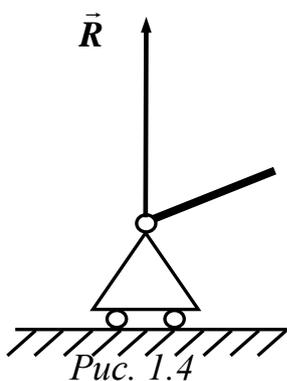


Рис. 1.4

Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора (рис. 1.4), нижняя обойма которой поставлена на катки, не препятствует перемещению балки параллельно опорной плоскости, если не учитывать сил трения. Линию действия реакции такой опоры следует считать проходящей через центр шарнира перпендикулярно к опорной плоскости. Таким образом, не известен только модуль этой реакции.

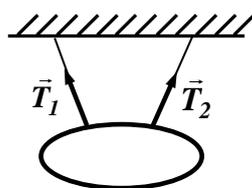


Рис. 1.5

Если на твердое тело наложена гибкая связь (нить, канат, трос, цепь и др.), то реакция связи, приложенная к телу в точке его крепления к связи, направлена вдоль связи от тела, как показано на рисунке 1.5.

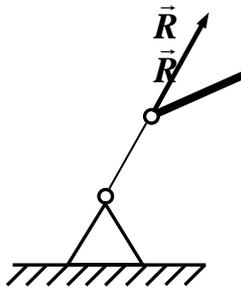


Рис. 1.6

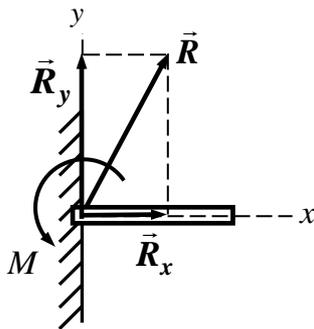


Рис. 1.7

Опорой конструкции может служить *невесомый стержень с двумя концевыми шарнирами* (рис. 1.6). Невесомым называют стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Реакция \vec{R} прямолинейного стержня направлена вдоль оси стержня.

В случае *заделки* одного тела в другое (рис. 1.7) реакцию опоры (стены) следует представить, как состоящую из силы \vec{R} , разложенной на составляющие \vec{R}_x и \vec{R}_y , а также из момента M .

Во всех вариантах задания присутствует прямолинейный участок конструкции, находящийся под действием распределенной нагрузки постоянной интенсивности q (рис. 1.8). Такую нагрузку

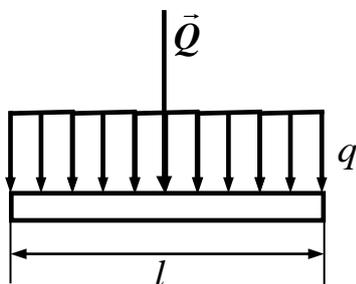


Рис. 1.8

следует заменить ее равнодействующей \vec{Q} , направленной перпендикулярно нагруженному отрезку (длиной l) и приложенной в его середине. Модуль равнодействующей определяется выражением

$$Q = q \cdot l. \quad (1.1)$$

Среди всевозможных уравнений равновесия тела под действием произвольной плоской системы сил не может быть более трех независимых. Из них можно определить не более трех неизвестных (реакций). При правильном выполнении настоящего задания число искомых реакций равно трем.

При решении задач можно пользоваться любой из указываемых ниже трех форм системы уравнений равновесия тела (конструкции) под действием произвольной плоской системы сил.

При составлении уравнений равновесия в первой форме требуют, чтобы суммы проекций всех сил на произвольно выбранные оси декартовых координат x , y и сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки O равнялись нулю, т. е. записывают уравнения:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.2)$$

При составлении уравнений равновесия во второй форме можно ограничиться составлением одного уравнения равновесия в проекциях, например, на ось x , и добавить два уравнения моментов относительно двух произвольных точек A и B , взятых так, чтобы ось x не была перпендикулярна прямой AB :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.3)$$

Третья форма уравнений равновесия получится, если составить три уравнения моментов относительно произвольно выбранных точек A , B и C , не лежащих на одной прямой:

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.4)$$

Задание рекомендуется выполнять в следующем порядке:

- 1) выделить и изобразить на рисунке некоторое тело (конструкцию), из уравнений равновесия которого можно определить искомые реакции связей (опор);
- 2) изобразить на рисунке задаваемые внешние силы, приложенные к этому телу (конструкции); при этом следует заменить распределенные нагрузки их равнодействующими;
- 3) изобразить на рисунке реакции связей, наложенных на выбранное тело (конструкцию);
- 4) выбрать и указать на рисунке направления осей декартовых координат и точку (или точки), относительно которой будет составлено уравнение моментов;
- 5) составить уравнения равновесия тела;
- б) решая уравнения равновесия, определить неизвестные величины.

Уравнения равновесия можно составлять в любой из указанных форм (уравнения (1.2), (1.3) или (1.4)). Следует стремиться к получению таких уравнений равновесия, в каждое из которых входила бы только одна неизвестная величина. В этом случае вместо совместного решения системы уравнений можно каждую из неизвестных величин непосредственно определить из соответствующего уравнения. Для этого оси координат целесообразно направить так, чтобы некоторые неизвестные силы оказались перпендикулярными к этим осям. Тогда величины этих неизвестных сил в соответствующее уравнение проекций не войдут. Если центр моментов, то есть точку, относительно которой должно быть составлено уравнение моментов, выбрать в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил, то из соответствующего уравнения моментов непосредственно определяется величина третьей неизвестной силы. Если, однако, при этом центр моментов оказывается расположенным так, что вычис-

ление плеча искомой силы представляет значительные трудности, то лучше составить такое уравнение моментов (относительно другого центра), в которое войдут величины двух неизвестных сил, а затем совместно решить полученную систему уравнений.

Выполняя задание, следует придерживаться следующей формы

Задание 1

Вариант схемы 4, вариант исходных данных 3.

Условие задачи

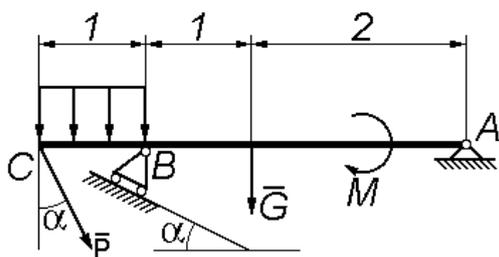


Рис. 1.9

Найти реакции связей (опор), наложенных на основное тело конструкции – балку или сварной стержень. Схема конструкции показана на рисунке 1.9 (размеры, м).

Дано: $G = 14$ кН, $P = 4$ кН,

$M = 7$ кН·м, $q = 3$ кН/м, $\alpha = 60^\circ$.

Найти: реакции опор балки.

Решение.

На балку действуют (рис. 1.10) следующие активные силы: сила тяжести \vec{G} , приложенная в ее середине, сила \vec{P} , направленная под углом $\alpha = 60^\circ$ к вертикали, равнодействующая \vec{Q} распределенной нагрузки, равная $Q = q \cdot |CB| = 3$ кН, приложенная в середине участка CB и направленная вертикально вниз, и, наконец, пара сил с моментом M .

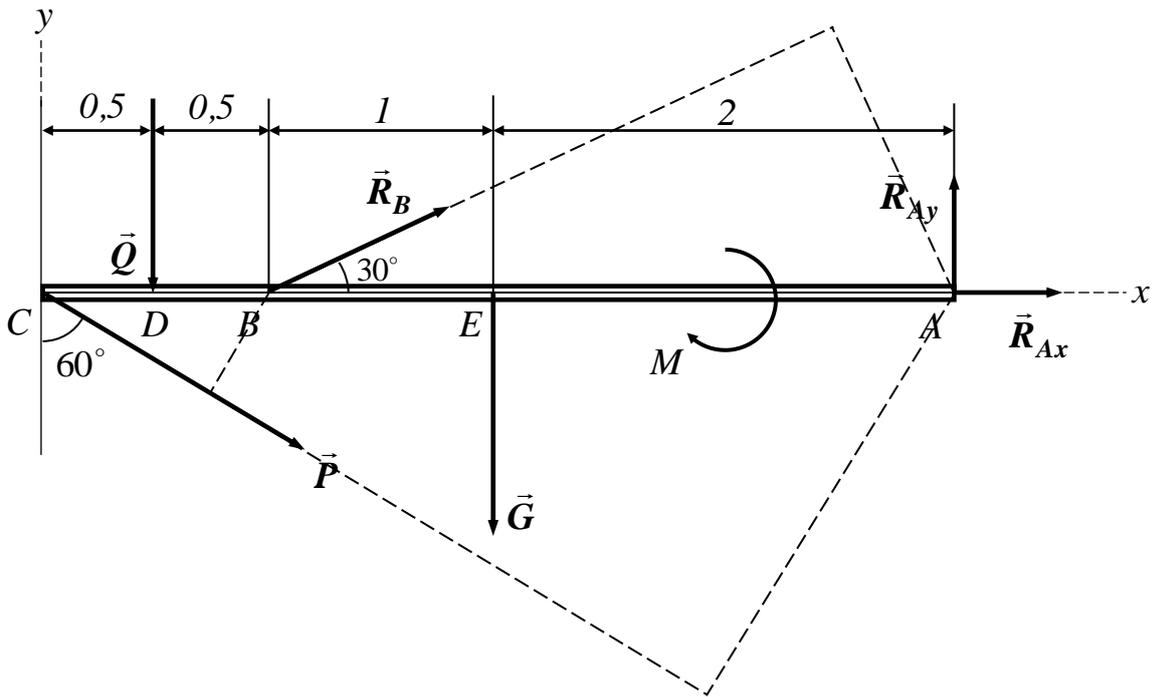


Рис. 1.10

Реакцию \vec{R}_B опоры B направляем перпендикулярно опорной плоскости, неизвестную по направлению реакцию \vec{R}_A представляем двумя взаимно перпендикулярными составляющими \vec{R}_{Ax} и \vec{R}_{Ay} .

Уравнение равновесия балки в проекциях на ось x имеет вид

$$P \cdot \sin 60^\circ + R_B \cdot \cos 30^\circ + R_{Ax} = 0. \quad (1.5)$$

Уравнение моментов относительно центра A имеет вид

$$P \cdot |CA| \cdot \sin 30^\circ + Q \cdot |DA| - R_B \cdot |BA| \cdot \sin 30^\circ + G \cdot |EA| - M = 0. \quad (1.6)$$

Уравнение моментов относительно центра B имеет вид

$$P \cdot |CB| \cdot \sin 30^\circ + Q \cdot |DB| - G \cdot |BE| - M + R_{Ay} \cdot |BA| = 0. \quad (1.7)$$

Решая эту систему уравнений равновесия, определим неизвестные величины. Уравнение моментов (1.7) позволяет вычислить реакцию R_{Ay} :

$$R_{Ay} = \frac{-P \cdot |CB| \cdot \sin 30^\circ - Q \cdot |DB| + G \cdot |BE| + M}{|BA|} \approx 5,83 \text{ кН}. \quad (1.8)$$

Из уравнения моментов (1.6) находим реакцию R_B :

$$R_B = \frac{P \cdot |CA| \cdot \sin 30^\circ + Q \cdot |DA| + G \cdot |EA| - M}{|BA| \cdot \sin 30^\circ} \approx 26,33 \text{ кН}. \quad (1.9)$$

Подставив полученное значение R_B в уравнение (1.5), определяем неизвестную реакцию R_{Ax} :

$$R_{Ax} = -P \cdot \sin 60^\circ - R_B \cdot \cos 30^\circ \approx -26,27 \text{ кН}. \quad (1.10)$$

Для проверки вычислений составим уравнение равновесия балки в проекциях на ось y , направленную, как показано на *рисунке 1.9*. Справедливость проведенных расчетов подтверждается выполнением этого уравнения, т. е. равенством

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P \cdot \cos 60^\circ - Q + R_B \cdot \sin 30^\circ - G + R_{Ay} \approx 0. \quad (1.11)$$

Модуль полной реакции R_A определяется по формуле

$$R_A = \sqrt{(R_{Ax})^2 + (R_{Ay})^2} \approx 26,91 \text{ кН}. \quad (1.12)$$

Ответ: $R_B \approx 26,33 \text{ кН}$, $R_{Ax} \approx -26,27 \text{ кН}$, $R_{Ay} \approx 5,83 \text{ кН}$, $R_A \approx 26,91 \text{ кН}$.

КИНЕМАТИКА

Тема 2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Задание 2

По заданным уравнениям движения точки M в декартовых координатах $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ найти:

- 1) уравнение траектории движения точки;
- 2) скорость и ускорение точки в произвольный момент времени t , а также в момент времени $t = t_1$;
- 3) касательное и нормальное ускорения точки в момент времени t_1 ;
- 4) радиус кривизны траектории в точке, совпадающей с положением точки M в момент времени $t = t_1$.

Кроме того, построить, выбрав соответствующие масштабы для длин, скоростей и ускорений:

- 1) траекторию точки;
- 2) положение точки на траектории в момент времени $t = t_1$;
- 3) скорость и ускорение точки, а также касательное и нормальное ускорения для момента времени $t = t_1$.

Уравнения движения точки и момент времени $t = t_1$ выбрать по последней цифре шифра, величины коэффициентов a и b , приведенных в таблице 3.1, – по предпоследней цифре.

Уравнения движения точки и значение времени t к заданию 3:

0.	$x = a \sin(\pi/4)$	$y = b \cos(\pi/4)$	$t_1 = 3 \text{ с}$
1.	$x = a \sin(\pi/6)$	$y = 4 + b \cos(\pi/6)$	$t_1 = 1 \text{ с}$
2.	$x = 10at$	$y = bt^2$	$t_1 = 0,5 \text{ с}$
3.	$x = 1 - a \cos t$	$y = b \sin t$	$t_1 = \pi/4 \text{ с}$
4.	$x = a \cos 3t - 1$	$y = 3 + b \sin 3t$	$t_1 = \pi/18 \text{ с}$
5.	$x = a - \sin t$	$y = b + 2 \cos t$	$t_1 = \pi/3 \text{ с}$
6.	$x = at$	$y = at - bt^2$	$t_1 = 0,2 \text{ с}$
7.	$x = a \cos(2\pi/3)$	$y = 2 + b \sin(2\pi/3)$	$t_1 = 2 \text{ с}$
8.	$x = a + 2 \sin(\pi/4)$	$y = b + 2 \sin(\pi/4)$	$t_1 = 1 \text{ с}$
9.	$x = at^2 + bt$	$y = 2bt$	$t_1 = 0,3 \text{ с}$

Таблица 2.1

Заданная величина, м	Номер варианта исходных данных									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	2	3	1	4	5	6	3	2	1	4
b	6	1	2	5	4	3	2	5	3	2

Основные теоретические положения, используемые при решении задач

Положение точки M в выбранной системе отсчета можно задать тремя ее координатами, например, прямоугольными декартовыми координатами x , y , z . При движении точки ее координаты являются функциями времени

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (2.1)$$

Если точка движется в одной плоскости, к примеру, Oxy , будем иметь два уравнения движения

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \quad (2.2)$$

Приведенные уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки (параметр – время t). Для того чтобы получить уравнение траектории в виде уравнения, связывающего координаты точки, например, в виде $y = \varphi(x)$, необходимо из уравнений движения исключить время t .

Проекция скорости на оси прямоугольных декартовых координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени, т. е.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}. \quad (2.3)$$

Модуль скорости v определяется равенством

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (2.4)$$

Вектор скорости точки \vec{v} направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

Проекция ускорения точки на оси прямоугольных декартовых координат равны первым производным от соответствующих проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}. \quad (2.5)$$

Модуль ускорения a вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}. \quad (2.6)$$

В соответствии с содержанием данного задания ограничимся рассмотрением движений точки по плоскости. Выберем на плоской траектории точки начало O и положительное направление отсчета дуговой координаты s . Проведем через рассматриваемую точку M касательную и нормаль к траектории. Введем в рассмотрение единичные векторы (орты) касательной $\vec{\tau}$ и главной нормали \vec{n} , направив орт $\vec{\tau}$ в сторону возрастания дуговой координаты, а орт \vec{n} – в сторону вогнутости кривой (рис. 2.1).

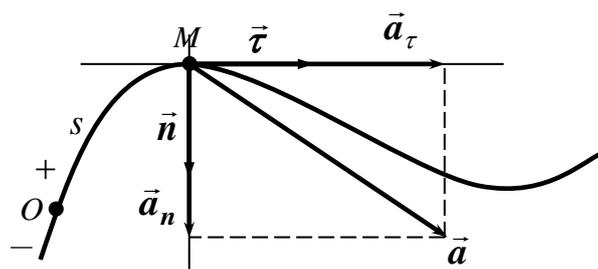


Рис. 2.1

Ускорение точки может быть представлено в виде геометрической суммы двух составляющих. Составляющая, направленная по касательной к траектории, называется касательным или тангенциальным ускорением. Это ускорение может быть представлено формулой

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau}, \quad (2.7)$$

где $v_\tau = \frac{ds}{dt}$ – проекция скорости на положительное направление касательной к траектории в рассматриваемой точке.

Составляющая ускорения, направленная по главной нормали, называется нормальным ускорением. Нормальное ускорение определяется формулой

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}, \quad (2.8)$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

Таким образом, ускорение может быть представлено в виде

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (2.9)$$

Касательное ускорение характеризует быстроту изменения величины скорости точки. Оно направлено:

- в сторону скорости при ускоренном движении;
- в сторону, противоположную вектору скорости, при замедленном движении.

Нормальное ускорение всегда направлено в сторону вогнутости траектории, к центру ее кривизны, и характеризует быстроту изменения скорости по направлению.

Ускорение направлено в сторону вогнутости траектории (рис. 2.1) или (если $a_n = 0$) по касательной к ней.

Так как векторы \vec{a}_τ и \vec{a}_n взаимно перпендикулярны, то модуль ускорения может быть представлен в виде

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}. \quad (2.10)$$

При решении задач удобно использовать следующие соотношения:

$$a_\tau = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}, \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}, \quad \rho = \frac{v^2}{a_n} \quad (2.11)$$

Знак скалярного произведения $\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x a_x + v_y a_y$ определяет характер движения точки: положительное значение будет получено при совпадении направлений векторов \vec{v} и \vec{a}_τ , движение точки в этом случае является ускоренным; отрицательное значение указанного скалярного произведения соответствует замедленному движению точки; нулевое значение – равномерному.

При выполнении задания следует придерживаться следующей формы.

Задание 2

Вариант данных 1.

Условие задачи

По заданным уравнениям движения точки M в декартовых координатах $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ найти:

- 1) уравнение траектории движения точки;
- 2) скорость и ускорение точки в произвольный момент времени t , а также в момент времени $t = t_1$;
- 3) касательное и нормальное ускорения точки в момент времени t_1 ;
- 4) радиус кривизны траектории в точке, совпадающей с положением точки M в момент времени $t = t_1$.

Кроме того, построить, выбрав соответствующие масштабы для длин, скоростей и ускорений:

- 1) траекторию точки;
- 2) положение точки на траектории в момент времени $t = t_1$;
- 3) скорость и ускорение точки, а также касательное и нормальное ускорения для момента времени $t = t_1$.

Дано:

$$x = 3 \sin(\pi/6) \text{ м}, \quad y = 2 + 4 \cos(\pi/6) \text{ м}, \quad t_1 = 1 \text{ с.}$$

Решение.

1. Получим уравнение траектории движения точки в координатной форме, исключив время t из уравнений движения. Выражая $\sin(\pi/6)$ и $\cos(\pi/6)$ из заданных уравнений движения, имеем

$$\sin(\pi/6) = \frac{x}{3}, \quad \cos(\pi/6) = \frac{y-2}{4}. \quad (2.12)$$

Воспользовавшись тем, что $\sin^2(\pi/6) + \cos^2(\pi/6) = 1$, получаем уравнение траектории в виде

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{4}\right)^2 = 1. \quad (2.13)$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение эллипса с полуосями 3 и 4 с центром в точке $(0,2)$ (рис. 3.2).

2. Выясним, где находится точка на траектории в момент времени t_1 :

$$x|_{t=1} = 3 \sin(\pi/6) = 1,5 \text{ м}, \quad (2.14)$$

$$y|_{t=1} = 2 + 4 \cos(\pi/6) = 2 + 2\sqrt{3} \approx 5,5 \text{ м}.$$

Таким образом, точка в момент времени $t = t_1 = 1 \text{ с}$ имеет координаты $M_1(1,5; 5,5)$. Ее положение на траектории указано на рисунке 2.2.

3. Определим скорость и ускорение точки M в произвольный момент времени t , а также в момент времени t_1 .

Проекции скорости на оси x, y равны первым производным от соответствующих координат точки по времени

$$v_x = \dot{x} = \frac{\pi}{2} \cos(\pi/6), \quad v_y = \dot{y} = -\frac{2\pi}{3} \sin(\pi/6). \quad (2.15)$$

Модуль скорости v равен

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\pi}{6} \sqrt{9 \cos^2(\pi/6) + 16 \sin^2(\pi/6)} = \\ &= \frac{\pi}{6} \sqrt{9 + 7 \sin^2(\pi/6)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Для момента времени t_1 будем иметь

$$\begin{aligned} v_x|_{t=1} &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,36 \text{ м/с}, & v_y|_{t=1} &= -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \approx -1,05 \text{ м/с}, \\ v|_{t=1} &\approx 1,72 \text{ м/с}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

По найденным проекциям построим вектор скорости $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ в точке M_1 (рис. 2.2).

Проведя построение, полезно убедиться в том, что вектор скорости \vec{v} в соответствии с теоретическими положениями направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

Находим проекции ускорения точки на оси координат:

$$a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x = -\frac{\pi^2}{12} \sin(\pi/6), \quad a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y = -\frac{\pi^2}{9} \cos(\pi/6). \quad (2.18)$$

Модуль ускорения a вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{\pi^2}{108} \sqrt{81 \sin^2(\pi/6) + 144 \cos^2(\pi/6)} = \\ &= \frac{\pi^2}{108} \sqrt{81 + 63 \cos^2(\pi/6)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Для момента времени $t = t_1 = 1\text{с}$ будем иметь

$$\begin{aligned} a_x|_{t=1} &= -\frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{1}{2} \approx -0,41\text{м/с}^2, \quad a_y|_{t=1} = -\frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,95\text{м/с}^2, \\ a|_{t=1} &\approx 1,03\text{м/с}^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

По найденным проекциям ускорения строится вектор ускорения $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ в точке M_1 (рис.2.2).

Следует удостовериться, что вектор ускорения \vec{a} направлен в сторону вогнутости траектории.

4. Найдем касательное и нормальное ускорения точки в момент времени t_1 , используя соотношения

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}, \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \quad (2.21)$$

и результаты предыдущих вычислений.

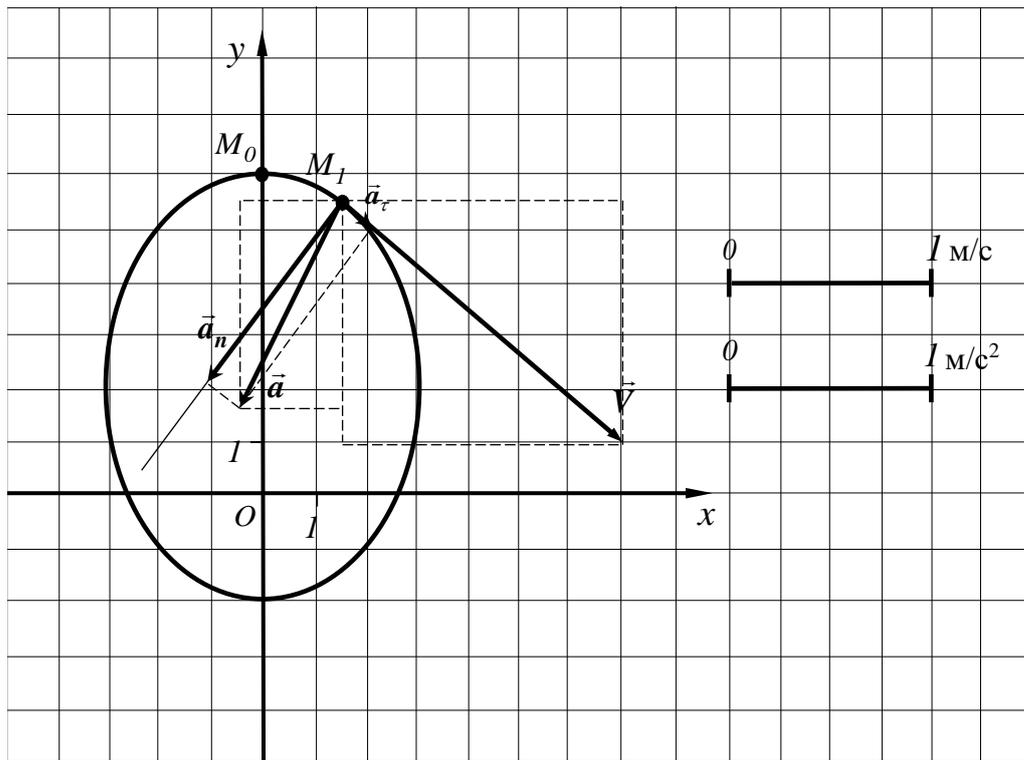


Рис. 2.2

Будем иметь

$$a_{\tau}|_{t=1} \approx \frac{1,36 \cdot (-0,41) + (-1,05) \cdot (-0,95)}{1,72} \approx 0,26 \text{ м/с}^2, \quad (2.22)$$

$$a_n|_{t=1} \approx \sqrt{1,03^2 - 0,26^2} \approx 1 \text{ м/с}^2.$$

По знаку касательного ускорения заключаем, что в данный момент времени движение точки является ускоренным.

5. Определим радиус кривизны траектории в точке M_1 , для чего воспользуемся равенством

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}. \quad (2.23)$$

В результате получим $\rho \approx \frac{1,72^2}{1} \approx 2,96 \text{ м}$.

6. Векторы скорости, ускорения, касательного, нормального ускорений точки в соответствующем масштабе показаны на рисунке 2.2. Результаты вычислений для заданного момента времени приведены в таблице 2.2

Таблица 2.2

Координаты, м		Скорость, м/с			Ускорение, м/с ²					Рад. крив., м
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
1,5	5,5	1,36	-1,05	1,72	-0,41	-0,95	1,03	0,26	1,00	2,96

Тема 3. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Задание 3

По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза 1 определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки M механизма в момент времени t_1 , когда путь, пройденный грузом, равен S .

Показать на рисунке векторы скорости и ускорения точки.

Схемы механизмов представлены на *рисунке 3.1*.

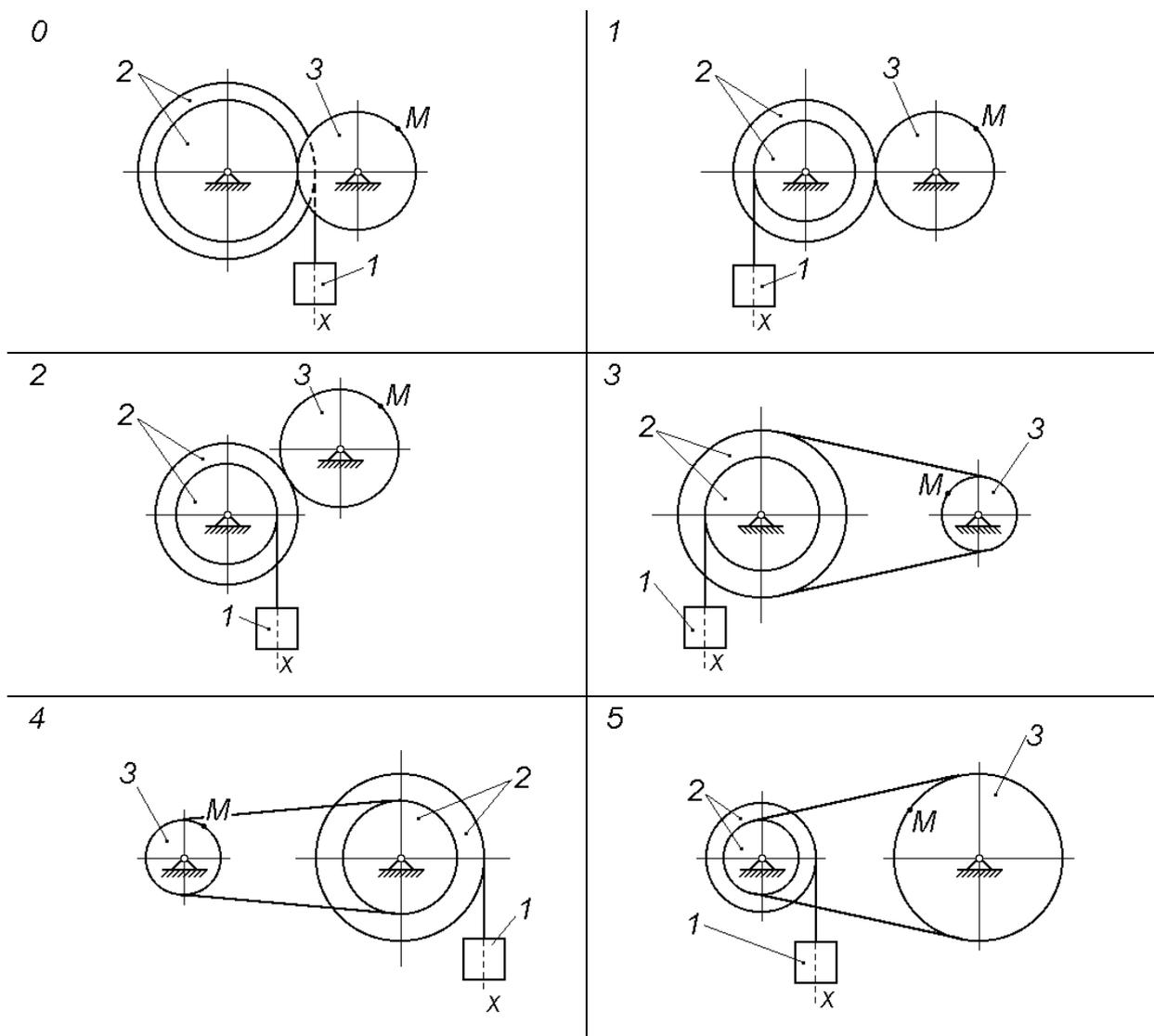


Рис. 3.1

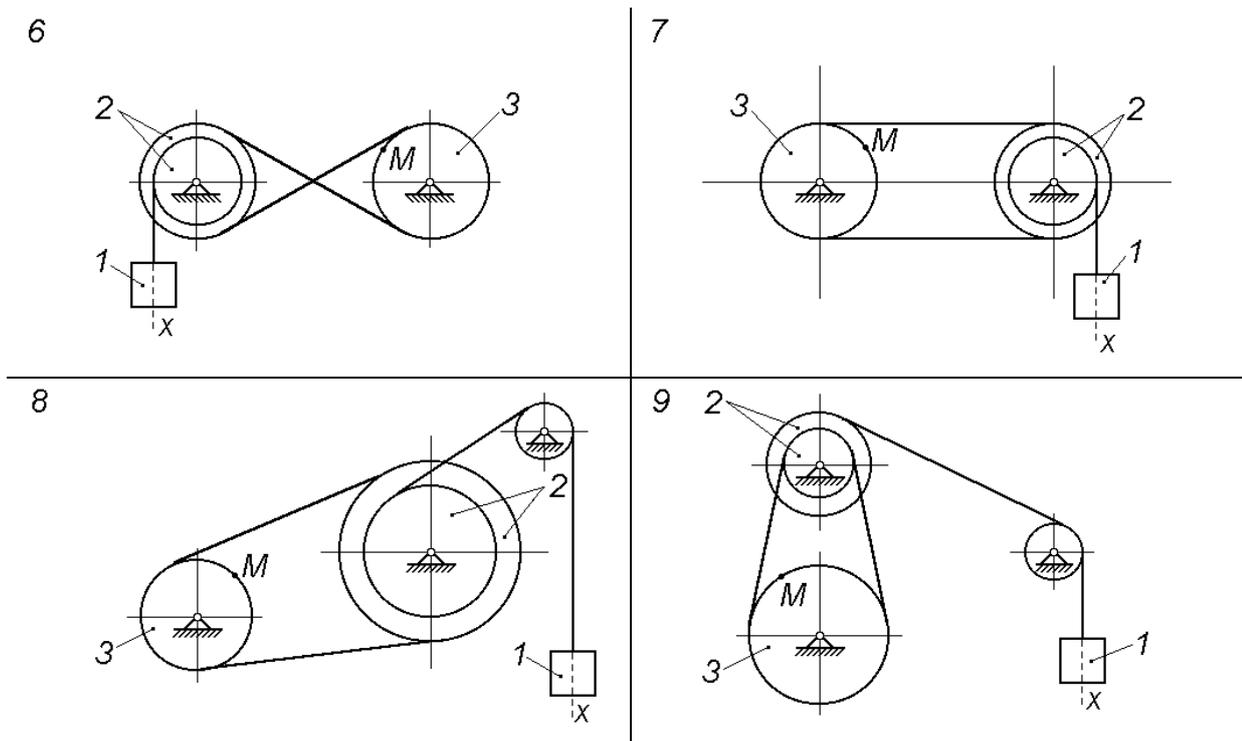


Рис. 3.1. Продолжение

Исходные данные приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Номер варианта исходных данных	Заданные величины				
	R_2 , см	r_2 , см	R_3 , см	$x = x(t)$, см, t - с	S , м
0	60	45	36	$10 + 100 t^2$	0,5
1	100	60	75	$18 + 70 t^2$	0,2
2	100	60	30	$5 + 60 t^2$	0,5
3	40	25	20	$5 + 40 t^2$	0,3
4	20	15	10	$2 + 50 t^2$	0,1
5	15	10	20	$5 + 80 t^2$	0,2
6	20	10	30	$4 + 90 t^2$	0,5
7	40	30	20	$10 + 40 t^2$	0,3
8	30	15	40	$5 + 60 t^2$	0,2
9	25	20	50	$6 + 30 t^2$	0,3

Примечание. Для определения момента времени t_1 необходимо учесть, что путь S , пройденный телом за время $t = t_1$, заданный в условии задания, равен

$$S = x(t_1) - x(t_0),$$

где $t_0 = 0$.

Основные теоретические положения, используемые при решении задач

Вращательное движение твердого тела полностью определяется заданием угла его поворота как функции времени: $\varphi = \varphi(t)$. Угол поворота обычно измеряют в радианах. Главными кинематическими характеристиками вращательного движения в целом являются угловая скорость и угловое ускорение.

Угловая скорость тела в данный момент времени равна первой производной по времени от угла поворота

$$\tilde{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (3.1)$$

Введенная таким образом угловая скорость $\tilde{\omega}$ будет положительной, если в рассматриваемый момент времени тело вращается в направлении, соответствующем произвольно выбираемому положительному направлению отсчета угла φ , т. е. если в данный момент угол φ возрастает. Если в данный момент тело движется так, что угол φ убывает, то величина $\tilde{\omega}$ будет отрицательной. Абсолютное значение угловой скорости будем обозначать через ω : $\omega = |\tilde{\omega}| = |\dot{\varphi}|$. Если угол поворота измеряется в радианах, а время – в секундах, то единицей измерения угловой скорости будет рад/с (или, короче, c^{-1}).

Угловое ускорение тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (3.2)$$

Если знаки $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\varepsilon}$ одинаковы, тело вращается ускоренно; если разные – замедленно. Абсолютное значение углового ускорения будем обозначать через ε : $\varepsilon = |\tilde{\varepsilon}| = |\ddot{\varphi}|$. Единицей измерения углового ускорения является рад/с² (или, короче, c^{-2}).

Кинематические характеристики движения отдельных точек твердого тела определяются характеристиками движения тела в целом и положением точек в теле.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси любая его точка описывает окружность с центром на оси вращения, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси. Радиус окружности представляет собой расстояние h от точки до оси вращения.

Величина скорости точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению угловой скорости ω тела на расстояние h от этой точки до оси вращения

$$v = \omega \cdot h. \quad (3.3)$$

Из формулы (3.3) следует, что модули скоростей точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения. На *рисунке 4.2* показана эпюра скоростей точек, лежащих на отрезке OM .

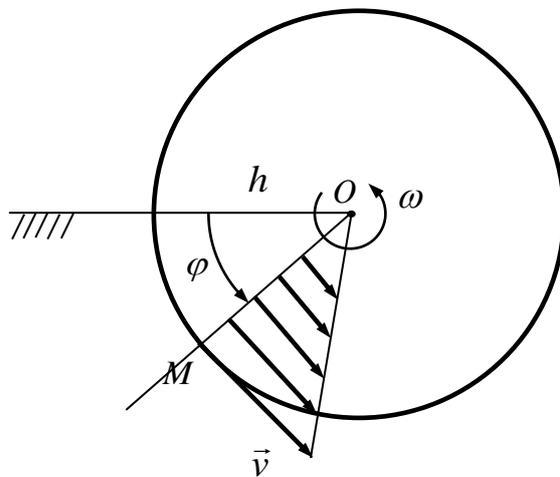


Рис. 3.2

Направление касательной к траектории любой точки тела считается положительным, если оно соответствует принятому в качестве положительного направлению отсчета угла φ . Проекция ускорения точки M на положительное направление касательной к траектории определяется равенством

$$a_\tau = \tilde{\varepsilon} \cdot h. \quad (3.4)$$

Модуль касательного ускорения

$$|a_\tau| = \varepsilon \cdot h. \quad (3.5)$$

Модуль нормального ускорения точки M равен

$$a_n = \omega^2 \cdot h. \quad (3.6)$$

Касательное ускорение \vec{a}_τ точки M направлено по касательной к описываемой этой точкой окружности:

- в ту же сторону что и скорость (*рис. 3.3, а*), если вращение ускоренное (при этом знаки $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\varepsilon}$ одинаковы);
- в сторону, противоположную скорости (*рис.3.3, б*), если вращение замедленное (при этом знаки $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\varepsilon}$ разные).

Нормальное ускорение \vec{a}_n точки всегда направлено от этой точки к оси вращения тела (к центру O описываемой точкой окружности), поэтому ускорение \vec{a}_n называют также центростремительным (или осестремительным).

Ускорение точки M является геометрической суммой своих нормальной и касательной составляющих, т. е.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (3.7)$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.8)$$

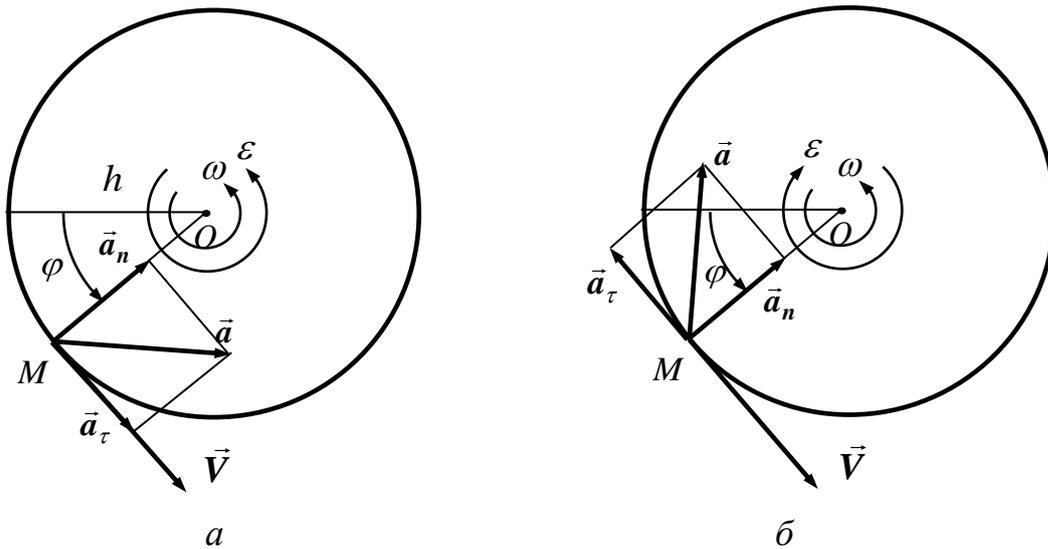


Рис. 3.3

При выполнении задания следует придерживаться следующей формы.
Задание 3

Схема 1, вариант данных 5. Условие задачи

По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза 1 определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки M механизма в момент времени t_1 , когда путь, пройденный грузом, равен S .

Показать на рисунке векторы скорости и ускорения точки (рис.3.4).

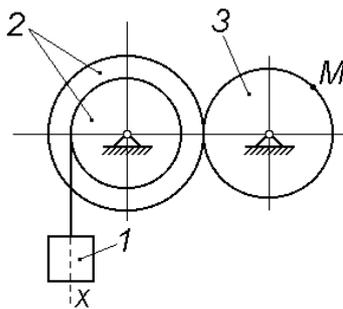


Рис. 3.4

Решение.

Для определения момента времени t_1 необходимо учесть, что путь

$S = 0,2 \text{ м} = 20 \text{ см}$, пройденный грузом 1 за время $t = t_1$, определяется выражением

$$S = x(t_1) - x(t_0), \quad (3.9)$$

где $t_0 = 0$. Поэтому с учетом данных задачи получим следующее уравнение относительно неизвестного момента времени t_1 :

$$20 = 18 + 80t_1^2 - 18 = 80t_1^2. \quad (3.10)$$

Отсюда $t_1 = 0,5$ с.

Скорость груза 1 в прямолинейном поступательном движении определяется как первая производная по времени от координаты $x(t)$

$$v_1 = \dot{x} = \frac{d}{dt}(18 + 80t^2) = 160t. \quad (3.11)$$

Обозначим через A точку схода нити с колеса 2 (рис. 3.5). Очевидно, что скорость этой точки совпадает со скоростью груза 1, так как нить предполагается нерастяжимой: $v_A = v_1$. С другой стороны, рассматривая точку A как точку, лежащую на ободе колеса радиуса r_2 , заключаем, что ее скорость $v_A = \omega_2 \cdot r_2$. Следовательно,

$$v_1 = \omega_2 \cdot r_2, \quad (3.12)$$

и, значит,

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}. \quad (3.13)$$

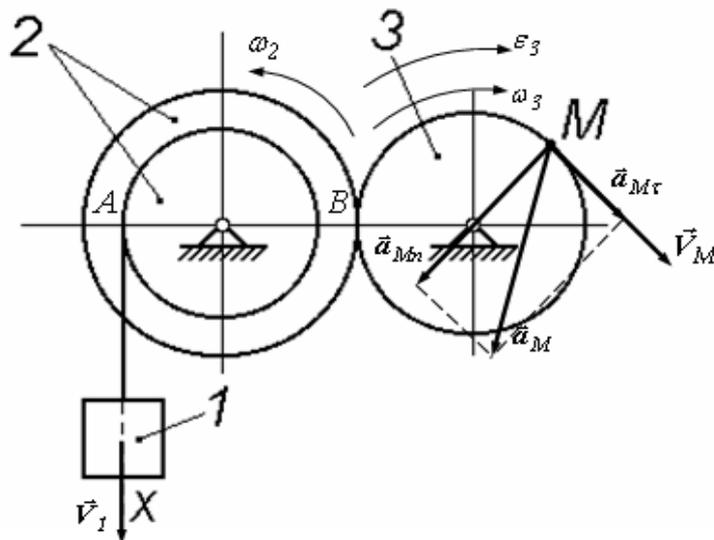


Рис. 3.5

Для получения соотношения, связывающего угловые скорости колес 2 и 3, учтем, что точки касания этих колес (иначе, точки их зацепления, совмещенные в полюсе B) имеют равные скорости, так как отсутствует скольжение между колесами. Скорость той из этих точек, которая принадлежит ободе колеса 2, равна

$$v_B = \omega_2 \cdot R_2. \quad (3.14)$$

Скорость другой точки, лежащей на ободу колеса 3, равна

$$v_B = \omega_3 \cdot R_3. \quad (3.15)$$

Таким образом,

$$\omega_2 \cdot R_2 = \omega_3 \cdot R_3. \quad (3.16)$$

Выражая ω_3 из последнего уравнения и учитывая (3.13), будем иметь

$$\omega_3 = \frac{R_2}{R_3} \omega_2 = \frac{R_2}{R_3 r_2} v_1. \quad (3.17)$$

Подставляя сюда заданные в условии величины и учитывая равенство (3.11), получаем

$$\omega_3 = 4,8t. \quad (3.18)$$

Угловое ускорение колеса 3 равно

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 4,8 \text{ рад/с}^2. \quad (3.19)$$

Угловое ускорение положительно, как и угловая скорость этого колеса.

Значит, вращение колеса 3 является ускоренным.

Скорость точки M , ее касательное, нормальное и полное ускорения рассчитываются по формулам

$$v_M = \omega_3 \cdot R_3 = 240t;$$

$$a_{M\tau} = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 240 \text{ см/с}^2, \quad a_{Mn} = \omega_3^2 \cdot R_3 = 1152t^2, \quad (3.20)$$

$$a_M = \sqrt{(a_{M\tau})^2 + (a_{Mn})^2}.$$

Результаты вычислений для момента времени $t_1 = 0,5$ с приведены ниже в *таблице 3.2*.

Векторы скорости, касательного, нормального и полного ускорений точки M показаны на *рисунке 3.5*.

Таблица 3.2

$v_M, \text{ см/с}$	$a_{M\tau}, \text{ см/с}^2$	$a_{Mn}, \text{ см/с}^2$	$a_M, \text{ см/с}^2$
120	240	288	374,89

Тема 4. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Задание 4

Задание содержит расчетную и графическую части по разделу кинематический анализ плоских рычажных механизмов.

Выполнение работы закрепляет знания, полученные при изучении высшей математики, физики, инженерной графики и технической механике.

Выполняя работу, студент знакомится с этапами исследования машин, с методами и методиками расчетов, справочной и технической литературой, получает навыки выполнения расчетов аналитическим и графоаналитическим методами.

В настоящих методических указаниях используется графоаналитический метод определения кинематических параметров механизмов – «Метод планов скоростей и ускорений». Данный метод обычно применяется как оценочный при определении кинематических параметров исследуемого механизма, а также для отладки компьютерных программ при использовании аналитического метода кинематического анализа механизмов.

Для выполнения работы **схему механизма и вариант параметров механизма выбирается по двум последним цифрам номера зачетной книжки. Схема механизма по предпоследней цифре, а параметры механизма – по последней цифре.**

Графическая часть работы выполняется на миллиметровке.

При кинематическом анализе решаются следующие задачи:

- Определение положений звеньев механизма при заданном положении входного звена.
- Определение линейных скоростей точек механизма и угловых скоростей звеньев.
- Определение линейных ускорений точек механизмов и угловых ускорений звеньев.
- Определение функций положений звеньев, первых и вторых передаточных функций механизма.

4.1. ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНОВ МЕХАНИЗМОВ

В работе рассматривается механизм, содержащий одну группу Ассур 2-го класса, 3-й модификации, 1-го и 2-го видов. Данные механизмы позволяют студенту освоить методику кинематического анализа плоских рычажных механизмов различных видов.

Кинематическое исследование начинают с построения планов положений механизма.

Планом механизма называют масштабное графическое изображение кинематической схемы механизма, соответствующее заданному положению входного звена. Для построения планов положений механизма выбирают систему координат.

Начало координат обычно совмещают с осью вращения входного звена (кривошипа). За нулевое положение выбирают положение входного звена, совпадающее с положительным направлением оси абсцисс ($\varphi_1 = 0$).

В данной работе студент строит одно положение механизма для заданного угла поворота входного звена φ_1 .

Рассмотрим построение планов механизмов 2-го класса с группой Ассура 3-й модификации.

4.1.1. Механизм с группой 3-й модификации 1-го вида

Механизм состоит из входного звена (кривошипа O_1A) и присоединенной к нему и к стойке группы Ассура 2-го класса 3-й модификации 1-го вида (диада ВПВ). В данном механизме группа присоединяется ползуном к входному звену, а другой внешней вращательной парой к стойке (рис. 4.1). При работе механизма ползун вращает звено O_2B относительно стойки O_2 . Звено O_2B в таком механизме называется **кулисой**. Данный механизм называется **кривошипно-кулисным с вращательным движением кулисы**.

План положений механизма строится в масштабе K_L м/мм, представляющий собой отношение действительной величины звена в метрах к чертежной величине в миллиметрах.

Траекторией точки A , принадлежащей **кривошипу**, является окружность с радиусом O_1A . Если строится несколько положений механизма и угловая скорость входного звена постоянная ($\omega_1 = \text{const}$), то данная окружность делится на равные части. Нулевому положению точки A соответствует положение кривошипа при $\varphi_1 = 0$. Последующие положения соответствуют направлению угловой скорости звена.

Чтобы получить положения кулисы O_2B , необходимо провести прямые через соответствующие точки A и центр вращения кулисы O_2 . Траектория точки B , принадлежащая кулисе, есть дуга с радиусом O_2B .

Максимальный угол размаха β_{max} кулисы O_2B определяется построением крайних положений механизма, которые соответствуют тем положениям кривошипа, когда кривошип и кулиса составляют прямой угол, т. е. 90° . Эти положения показаны на *рис. 4.1, б*.

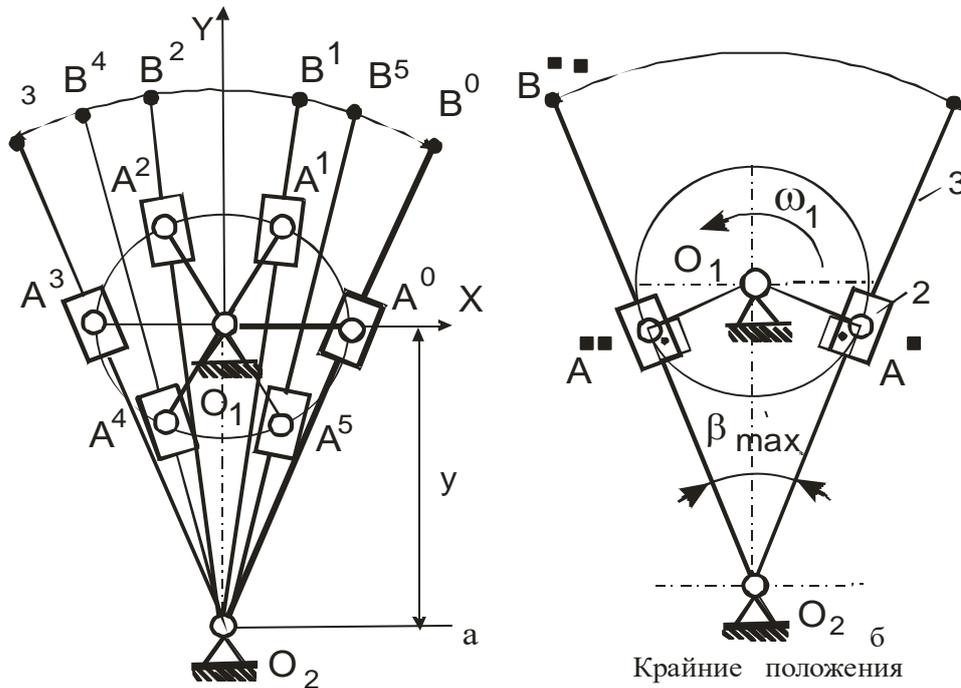


Рис. 4.1. План положений механизма с группой Асура 3-й модификации 1-го вида

4.1.2. Механизм с группой 3-й модификации 2-го вида

Механизм состоит из входного звена (кривошипа O_1A) и присоединенной к нему и к стойке группы Асура 2-го класса 3-й модификации 2-го вида (диада ВПВ). В данном механизме группа присоединяется шатуном к входному звену, а ползуном к стойке (рис.4.2). Траекторией точки A , принадлежащей кривошипу, является окружность с радиусом O_1A . Данную окружность делим на равные части. Нулевому положению точки A соответствует положение кривошипа при $\varphi_1 = 0$. Последующие положения соответствуют направлению угловой скорости звена.

Чтобы получить положения шатуна, а также ползуна, необходимо провести прямые через соответствующие точки A и неподвижную точку B .

Для определения положения точки C необходимо от точки A отложить расстояние AC на соответствующем положении шатуна. Соединив последовательно точки C , получим траекторию, которая является *шатунной кривой*.

Максимальный угол размаха β_{max} шатуна AC определяется построением крайних положений механизма, которые соответствуют тем положениям кривошипа, когда кривошип и шатун составляют прямой угол, т. е. 90° . Построение крайних положений механизма второго вида показано на рис. 4.2, б.

Траекторией точки A , принадлежащей **кривошипу**, является окружность с радиусом O_1A . Данную окружность делим на равные части. Нулевому положению точки A соответствует положение кривошипа при $\varphi_1 = 0$. Последующие положения соответствуют направлению угловой скорости звена.

Чтобы получить положения шатуна, а также ползуна, необходимо провести прямые через соответствующие точки A и неподвижную точку B .

Для определения положения точки C необходимо от точки A отложить расстояние AC на соответствующем положении шатуна. Соединив последовательно точки C , получим траекторию, которая является **шатунной кривой**.

Максимальный угол размаха β_{max} шатуна AC определяется построением крайних положений механизма, которые соответствуют тем положениям кривошипа, когда кривошип и шатун составляют прямой угол, т. е. 90° . Построение крайних положений механизма второго вида показано на *рис. 4.2, б*.

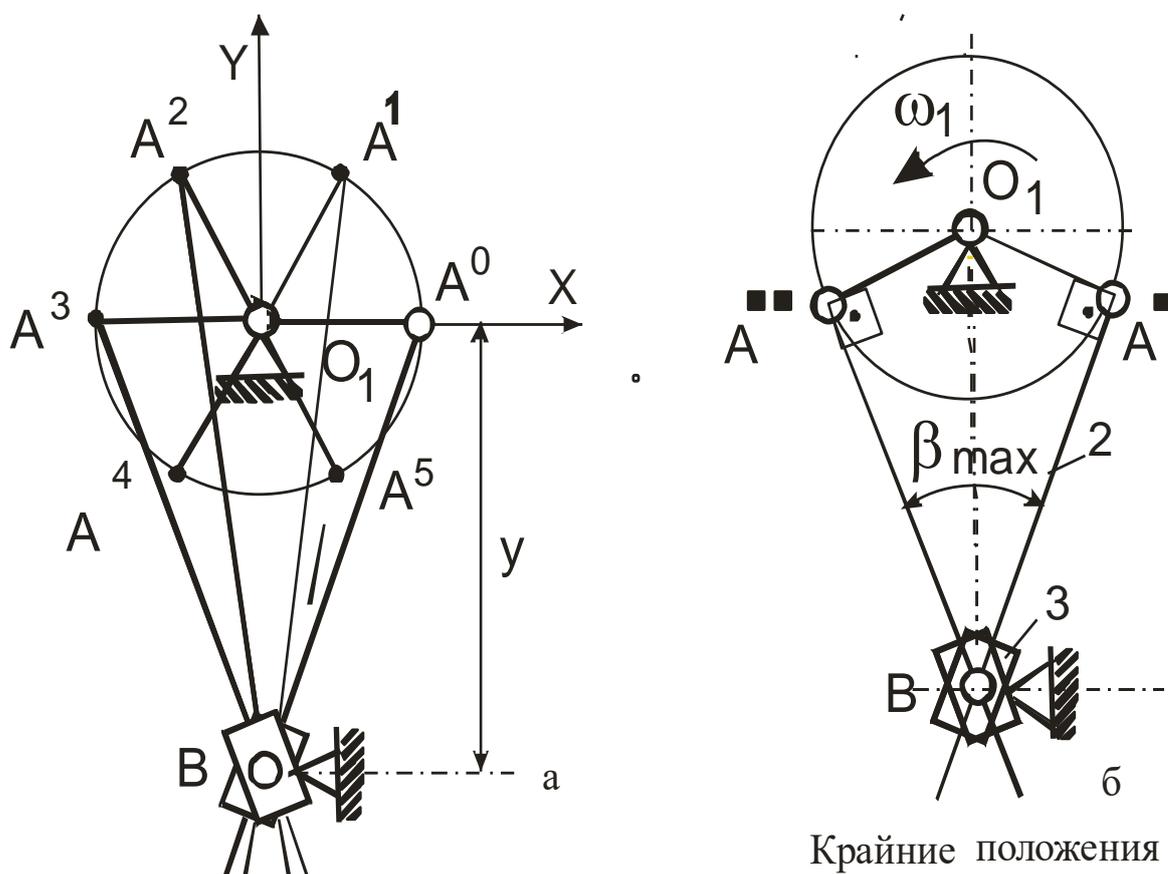


Рис. 4.2. План положений механизма с группой Асура 3-й модификации 2-го вида

4.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ С ГРУППАМИ АССУРА 3-Й МОДИФИКАЦИИ

Выбор масштаба K_V для планов скоростей и масштаба K_a для планов ускорений

При выборе масштабов K_V и K_a необходимо выбирать длину векторов $(\overline{P_V a})$, и $(\overline{P_a a})$ соответствующих скорости и ускорения точки A , таким образом, чтобы масштаб был точной величиной и для удобства вычислений имел не более двух значащих цифр.

Масштаб плана скоростей

Определим скорость точки A , принадлежащей кривошипу:

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1 A, \text{ мс}^{-1}.$$

Отложим на чертеже от произвольно выбранной точки P_V , которая называется полюсом плана скоростей, вектор $(\overline{P_V a})$, соответствующий скорости точки A . Тогда масштаб плана скоростей определится следующим образом:

$$K_V = \frac{V_A}{(\overline{P_V a})}, \text{ мс}^{-1} / \text{мм}.$$

Например, угловая скорость входного звена $\omega_1 = 75,398 \text{ с}^{-1}$, длина кривошипа $O_1 A = 0,05 \text{ м}$.

Тогда

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1 A = 75,398 \cdot 0,05 = 3,769 \text{ мс}^{-1}.$$

Если выбрать длину вектора $(\overline{P_V a})^* = 100 \text{ мм}$, то масштаб плана скоростей будет равен

$$K_V^* = \frac{V_A}{(\overline{P_V a})^*} = \frac{3,769}{100} = 0,03769 \text{ мс}^{-1} / \text{мм}.$$

Чтобы получить масштаб удобный для расчетов округлим масштаб до величины $K_V = 0,04$ и пересчитаем соответствующую ему длину вектора $(\overline{P_V a})$:

$$(\overline{P_V a}) = \frac{V_A}{K_V} = \frac{3,769}{0,04} = 94,225 \approx 94 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем масштаб плана скоростей равным:

$$\boxed{K_V = 0,04 \text{ мс}^{-1} / \text{мм}.$$

Величина вектора скорости точки A на плане скоростей $(\overline{P_V a}) = 94 \text{ мм}$.

Масштаб плана ускорений

Определим ускорение точки A при ($\omega_1 = const$).

В курсовом проекте (работе) принято, что входное звено механизма вращается с постоянной угловой скоростью ($\omega_1 = const$). Тогда $\varepsilon_1 = 0$ и полное ускорение входного звена механизма равно нормальному ускорению

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}^n_{A_1O_1} = \omega_1^2 \mathbf{O}_1A.$$

Отложим на чертеже от произвольно выбранной точки P_a , которая называется полюсом плана ускорений, вектор $(\overline{P_a a})$, соответствующий ускорению точки A . Тогда масштаб плана ускорений определится следующим образом:

$$K_a = \frac{\mathbf{a}_A}{(\overline{P_a a})}, \text{ мс}^{-2} / \text{мм}.$$

Например, $\omega_1 = 75,398 \text{ с}^{-1}$, $O_1A = 0,05 \text{ м}$,

$$\mathbf{a}_A = \omega_1^2 \cdot O_1A = 75,398^2 \cdot 0,05 = 284,2 \text{ мс}^{-2}.$$

Выберем предварительно длину вектора $(\overline{P_a a})^* = 100 \text{ мм}$.

Масштаб плана ускорений будет равен

$$K_a^* = \frac{\mathbf{a}_A}{(\overline{P_a a})^*} = \frac{284,2}{100} = 2,842 \text{ мс}^{-2} / \text{мм}.$$

Округлим масштаб до величины $K_a = 3$ и пересчитаем длину вектора $(\overline{P_a a})$:

$$(\overline{P_a a}) = \frac{\mathbf{a}_A}{K_a} = \frac{284,2}{3} = 94,7 \approx 95 \text{ мм}.$$

Теперь масштаб плана ускорений будет равен

$$\boxed{K_a = 3 \text{ мс}^{-2} / \text{мм}.$$

Размер вектора ускорения точки A на плане ускорений $(\overline{P_a a}) = 95 \text{ мм}$.

Кинематический анализ механизма начинают с входного звена.

В точке A вращательной парой соединяются кривошип и ползун (звено 2), поэтому $\overline{V}_{A_2} = \overline{V}_{A_1} = \overline{V}_{A_{1,2}}$. В точке A поступательной парой соединяются ползун (звено 2) и кулиса (звено 3), следовательно, $\overline{V}_{A_3} \neq \overline{V}_{A_2}$.

Перепишем запись структурного анализа с учетом нумерации звеньев **$A_{1,2} - 2 - A_3 - 3 - O_2$** .

Задача кинематического анализа механизма – определить для заданного положения механизма:

- скорость $V_{A_{1,2}}$ и ускорение $a_{A_{1,2}}$ точки $A_{1,2}$;
- скорость V_{A_3} и ускорение a_{A_3} точки A_3 ;
- скорость V_B и ускорение a_B точки B ;
- угловую скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 ползуна 2;
- угловую скорость ω_3 и угловое ускорение ε_3 кулисы 3.

Следует заметить, что скорость и ускорение точки B могут быть определены только после определения скорости и ускорения точки A_3 .

Входное звено

$V_A = \omega_1 \cdot O_1A$, мс^{-1} . Вектор $\overline{V}_A = (\overline{P_V a})$ направляется перпендикулярно к O_1A по направлению ω_1 .

Присоединенная группа $A_{1,2} - 2 - A_3 - 3 - O_2$ (диада ВПВ)

Движение кулисы 3 можно представить как переносное вращательное движение вместе с точкой A_2 (полюсом) и относительного поступательного движения по отношению к полюсу A_2 со скоростью $\overline{V}_{A_3 A_2}$:

$$\overline{V}_{A_3} = \overline{V}_{A_2} + \overline{V}_{A_3 A_2}, \quad (4.2)$$

где $\overline{V}_{A_3 A_2}$ – относительная скорость точки A_3 по отношению к полюсу A_2 .

При построении векторного уравнения (4.2) вектор относительной скорости $\overline{V}_{A_3 A_2}$ не может быть построен, так как для него известна только линия действия $\overline{V}_{A_3 A_2} \parallel AO_2$, но неизвестна величина и направление.

В точке O_2 вращательной парой соединяются кулиса и стойка. Движение кулисы рассматриваем как сложное движение, состоящего из переносного по-

ступательного движения вместе с (полюсом) точкой O_2 , скорость которой равна нулю: $\bar{V}_{O_2} = 0$, и относительного вращательного движения вокруг полюса O_2 со скоростью $\bar{V}_{A_3 O_2}$.

Тогда в соответствии с теоремой сложения скоростей для точки A_3 получаем

$$\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{O_2} + \bar{V}_{A_3 O_2} \quad (4.3)$$

где $\bar{V}_{A_3 O_2}$ – относительная скорость точки A_3 по отношению к полюсу O_2 .

При построении векторного уравнения (4.3) вектор относительной скорости $\bar{V}_{A_3 O_2}$ не может быть построен, так как для него известна только линия действия, $\bar{V}_{A_3 O_2} \perp A_3 O_2$, но неизвестна величина и направление (ω_3 – неизвестна).

Объединяем уравнения (2.2) и (2.3) в систему

$$\begin{cases} \bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{A_2} + \bar{V}_{A_3 A_2}, & \bar{V}_{A_3 A_2} \parallel A O_2; \\ \bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{O_2} + \bar{V}_{A_3 O_2}, & \bar{V}_{A_3 O_2} \perp A O_2. \end{cases} \quad (4.4)$$

Эту систему будем решать графически. Цель построения – определить скорость точки A_3 .

Необходимо обратить внимание на связь структурной записи кинематической цепи и способа составления системы уравнений.

Для точки A_3 , стоящей в центре записи структурного анализа, составляются два векторных уравнения, для которых в качестве полюсов принимаются точки A_2 и O_2 , стоящие по краям кинематической цепи.

Построение плана скоростей производится в следующей последовательности:

1. Выберем масштаб K_V плана скоростей.
2. Выберем полюс плана скоростей P_V – общее начало векторов абсолютных скоростей точек механизма.
3. Из полюса P_V построим вектор скорости точки $A_{1,2}$ в масштабе K_V :

$$\left(\overline{P_V a_{1,2}} \right) = \frac{V_{A_{1,2}}}{K_V}, \text{ мм.}$$

Конец вектора обозначим буквой $\mathbf{a}_{1,2}$

4. Согласно первому уравнению системы (4.4), из конца вектора \overline{V}_{A_2} , т. е. через точку $\mathbf{a}_{1,2}$, проведем линию действия относительной скорости $\overline{V}_{A_3A_2}$ параллельно звену AO_2 ($\overline{V}_{A_3A_2} \parallel AO_2$).

5. Согласно второму уравнению системы (4.4), из полюса P_V , так как $\overline{V}_{O_2} = 0$, проведем линию действия относительной скорости $\overline{V}_{A_3O_2}$ перпендикулярно звену AO_2 ($\overline{V}_{A_3O_2} \perp AO_2$).

6. Отметим точку пересечения двух линий действия относительных скоростей и обозначим её \mathbf{a}_3 .

7. Проведем из полюса P_V вектор в точку \mathbf{a}_3 – это вектор абсолютной скорости \overline{V}_{A_3} точки A_3 . Проведем вектор из точки \mathbf{a}_2 в точку \mathbf{a}_3 – это вектор относительной скорости $\overline{V}_{A_3A_2}$ точки A_3 по отношению к точке A_2 .

Чтобы получить модули скоростей в размерности мс^{-1} необходимо измерить вектор в мм и умножить на масштаб K_V .

$$V_{A_3} = V_{A_3O_2} = (\overline{P_V a_3}) K_V, \text{ мс}^{-1}; \quad (4.5)$$

$$V_{A_3A_2} = (\overline{a_3 a_2})_V K_V, \text{ мс}^{-1}. \quad (4.6)$$

Скорость точки B , принадлежащей кулисе AO_2 , может быть получена с применением теоремы подобия:

$$\frac{O_2A}{O_2B} = \frac{(\overline{P_V a_3})}{(\overline{P_V b})}; \text{ отсюда } (\overline{P_V b}) = (\overline{P_V a_3}) \frac{O_2B}{O_2A}, \text{ мм}. \quad (4.7)$$

Расстояние O_2A является переменной величиной и его можно определить как $O_2A = O_2A \cdot K_L$, м. Здесь O_2A – отрезок на плане положений, в мм; K_L – масштаб плана положений механизма, м/мм.

Отложим на плане скоростей от полюса P_V отрезок $(\overline{P_V b})$ по линии действия вектора $(\overline{P_V a_3})$. Этот отрезок представляет собой вектор \overline{V}_B в масштабе K_V :

$$V_B = \bar{V}_B \cdot K_V = (\overline{P_V b}) K_V, \text{ мс}^{-1}. \quad (4.8)$$

Определение величины и направления угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость звена определяется по формуле

$$\omega_i = \frac{V_i}{R_i}, \text{ с}^{-1}, \quad (4.9)$$

где V_i – линейная скорость точки,

R_i – радиус кривизны траектории точки.

Звено 1 – входное звено O_1A (кривошип)

Угловая скорость кривошипа определяется по заданной частоте вращения n_1 , $\omega_1 = 2\pi n_1, \text{ с}^{-1}$. Направление угловой скорости кривошипа ω_1 задается.

Звено 2 – ползун

Величина и направление угловой скорости ползуна равны угловой скорости кулисы

$$\curvearrowright \omega_2 = \curvearrowright \omega_3.$$

Звено 3-кулиса O_2A

Величина угловой скорости кулисы определяется по формуле

$$\curvearrowright \omega_3 = \frac{V_{A_3O_2}}{AO_2} = \frac{(\overline{P_V a_3}) K_V}{AO_2}, \text{ с}^{-1}, \quad (4.10)$$

где $(\overline{P_V a_3})$ – длина отрезка на плане скоростей, мм;

K_V – масштаб плана скоростей, $\text{мс}^{-1}/\text{мм}$;

AO_2 – переменная длина от O_2 до A , измеренная на кулисе, м.

Направление угловой скорости ω_3 определяется следующим образом. Так как звено 3 вращается вокруг неподвижной точки O_2 то для определения направления ω_3 необходимо перенести с плана скоростей вектор $\bar{V}_{A_3O_2}$ в точку A и проследить какому направлению угловой скорости соответствует вектор скорости $\bar{V}_{A_3O_2}$. На *рис. 4.3, а* этой скорости соответствует вращение звена

AO_2 против часовой стрелки. Следовательно, ω_3 будет направлена против часовой стрелки.

Составление векторных уравнений и расчетных зависимостей для построения планов ускорений

Входное звено O_1A – (кривошип).

Полное ускорение точки A_1 равно при ($\omega_1 = const$):

$$\mathbf{a}_{A_1} = \mathbf{a}_{A_1O_1}^n = \omega_1^2 O_1A \quad (4.11)$$

С учетом масштаба K_a величина вектора $\bar{\mathbf{a}}_{A_1}$ равна

$$\bar{\mathbf{a}}_{A_1} = \left(\overline{P_a a_1} \right) = \frac{\mathbf{a}_{A_1}}{K_a}, \text{ мм.} \quad (4.12)$$

Вектор ускорения $\bar{\mathbf{a}}_{A_1}$ направлен по звену O_1A от точки A к точке O_1 .

Присоединенная группа $A_{1,2} - 2 - A_3 - 3 - O_2$

В точке A вращательной парой соединяются звено 1 и звено 2, поэтому ускорения $\mathbf{a}_{A_1} = \mathbf{a}_{A_2} = \mathbf{a}_{A_{1,2}}$. Кулиса 3 соединяется вращательной парой O_2 со стойкой, поэтому $\mathbf{a}_{O_2} = 0$. В точке A ползун 2 поступательной парой присоединяется к кулисе 3, поэтому $\mathbf{a}_{A_3} \neq \mathbf{a}_{A_2}$. Подлежит определению ускорение \mathbf{a}_{A_3} .

Движение кулисы BO_2 рассматриваем как сложное движение, состоящее из переносного вращательного движения вместе с ползуном 2, для которого ускорение точки A_2 известно ($\bar{\mathbf{a}}_{A_2} = \bar{\mathbf{a}}_{A_1}$), и относительного поступательного движения по отношению к полюсу A_2 с ускорением $\bar{\mathbf{a}}_{A_3A_2}$, для которого неизвестны величина и направление.

Если при движении точки на плоскости имеет место вращательное переносное движение и относительное поступательное, то возникает дополнительное ускорение, которое называется *кориолисовым*.

Тогда, в соответствии с теоремой сложения ускорений при сложном движении для точки A_3 имеем:

$$\bar{\mathbf{a}}_{A_3} = \bar{\mathbf{a}}_{A_2} + \bar{\mathbf{a}}_{A_3A_2}^k + \bar{\mathbf{a}}_{A_3A_2}. \quad (4.13)$$

Движение коромысла BO_2 рассматриваем как сложное движение, состоящее из переносного движения вместе с точкой (полюсом) O_2 , ускорение кото-

рой равно нулю ($\bar{a}_{O_2} = 0$), и относительного вращательного движения вокруг полюса O_2 с ускорением $\bar{a}_{A_3O_2}$.

Тогда в соответствии с теоремой сложения ускорений при сложном движении для точки A_3 получаем

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{A_3O_2}, \quad (4.14)$$

где $\bar{a}_{A_3O_2}$ – относительное ускорение точки A_3 по отношению к полюсу O_2 .

При построении векторного уравнения (4.14) векторы относительных ускорений $\bar{a}_{A_3O_2}$ и $\bar{a}_{A_3A_2}$ не могут быть построены, так как для них неизвестны величина и направление. Разложим относительные ускорения на нормальные и касательные составляющие и объединим в систему уравнения (4.13) и (4.14):

$$\begin{cases} \bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{A_2} + \bar{a}_{A_3A_2}^k + \bar{a}_{A_3A_2}^n + \bar{a}_{A_3A_2}^\tau, & \bar{a}_{A_3A_2}^\tau \parallel A_3O_2; \\ \bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{A_3O_2}^n + \bar{a}_{A_3O_2}^\tau, & \bar{a}_{A_3O_2}^\tau \perp A_3O_2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Для первого уравнения системы (4.15) величины кориолисова и нормального ускорений определяются по известным зависимостям, а касательное ускорение известно по линии действия.

Величина кориолисова ускорения для плоского движения определяется по формуле

$$a^k = 2\omega_{\text{пер}} V_{\text{отн}}. \quad (4.16)$$

Для данного случая $\omega_{\text{пер}} = \omega_2$ и $V_{\text{отн}} = V_{A_3A_2}$. Следовательно,

$$a_{A_3A_2}^k = 2\omega_2 V_{A_3A_2}. \quad (4.17)$$

Чтобы определить размер вектора $\bar{a}_{A_3A_2}^k$ в миллиметрах, необходимо разделить его модуль на масштаб K_a :

$$\bar{a}_{A_3A_2}^k = \frac{\bar{a}_{A_3A_2}^k}{K_a} = \frac{2\omega_2 V_{A_3A_2}}{K_a} = \frac{2\omega_2 (\overline{a_{3a_2}})_V K_V}{K_a}, \text{ мс}^{-2} \quad (4.18)$$

где ω_2 – угловая скорость ползуна, которая известна по величине и направлению (в данном случае направлена против часовой стрелки);

$(\overline{a_3 a_2})_V$ – вектор на плане скоростей, мм.

Вектор $\overline{a}^k_{A_3 A_2}$ будет направлен в ту сторону, в которую будет направлен вектор относительной скорости $\overline{V}_{A_3 A_2} = (\overline{a_3 a_2})_V$ при повороте его на 90° по направлению угловой скорости переносного движения – ω_2 .

Вектор нормального ускорения $\overline{a}^n_{A_3 A_2} = 0$, так как относительное движение кулисы по ползуну прямолинейное. Линия действия касательного ускорения $\overline{a}^\tau_{A_3 A_2}$ направлена по касательной к траектории относительного движения, $\overline{a}^\tau_{A_3 A_2} \parallel AO_2$.

Для второго уравнения системы (4.15) величина нормального ускорения определяется по зависимости (4.19) или (4.20), а касательное ускорение известно по линии действия:

$$a^n_{A_3 O_2} = \omega_3^2 AO_2, \text{ мс}^{-2} \quad (4.19)$$

$$a^n_{A_3 O_2} = \frac{V_{A_3 O_2}^2}{AO_2} = \frac{[(\overline{P_V a_3}) K_V]^2}{AO_2 K_L}, \text{ мс}^{-2}. \quad (4.20)$$

Чтобы определить размер вектора этого ускорения необходимо разделить его модуль на масштаб K_a :

$$\overline{a}^n_{A_3 O_2} = \frac{a^n_{A_3 O_2}}{K_a}, \text{ мм}. \quad (4.21)$$

Ускорение $\overline{a}^n_{A_3 O_2}$ направляется по звену AO_2 от A к O_2 . Касательное ускорение $\overline{a}^\tau_{A_3 O_2} \perp AO_2$.

Построение плана ускорений производится в следующей последовательности:

1. Выберем полюс плана ускорений P_a – общее начало векторов абсолютных ускорений точек механизма.

2. Из полюса P_a строим вектор $(\overline{P_a a})$ равный $\overline{a}_{A_{1,2}} = \frac{a_{A_{1,2}}}{K_a}$. Конец вектора обозначим буквой $a_{1,2}$.

3. Согласно первому уравнению системы (4.15), из конца вектора $\overline{a}_{A_{1,2}}$ строим вектор $\overline{a}_{A_3 A_2}^k$, величина которого определяется выражением (2.18), и, учитывая, что $\overline{a}_{A_3 A_2}^n = 0$, через конец вектора $\overline{a}_{A_3 A_2}^k$ проводим линию действия вектора $\overline{a}_{A_3 A_2}^\tau \parallel AO_2$.

4. Согласно второму уравнению системы (4.15), из полюса P_a (первый вектор уравнения $\overline{a}_{O_2} = 0$), строим вектор $\overline{a}_{A_3 O_2}^n$, который направлен по звену от A к O_2 ($\overline{a}_{A_3 O_2}^n \parallel AO_2$), величина которого определяется выражением (4.21). Через конец этого вектора проводим линию действия касательного ускорения $\overline{a}_{A_3 O_2}^\tau \perp AO_2$.

5. Точку пересечения касательных $\overline{a}_{A_3 A_2}^\tau$ и $\overline{a}_{A_3 O_2}^\tau$ обозначим a_3 .

6. Проведем из полюса P_a вектор в точку a_3 – это вектор абсолютного ускорения точки A_3 .

Чтобы получить значение этих ускорений в размерности мс^{-2} , необходимо измерить соответствующий вектор в миллиметрах и умножить на масштаб K_a :

$$a_{A_3} = \overline{a}_{A_3} K_a = (\overline{P_a a_3}) K_a, \text{ мс}^{-2}; \quad (4.22)$$

$$a_{A_3 O_2} = a_{A_3}, \text{ мс}^{-2};$$

$$a_{A_3 A_2} = a_{A_3 A_2}^\tau = \overline{a}_{A_3 A_2}^\tau K_a, \text{ мс}^{-2}. \quad (4.24)$$

Ускорение точки B , принадлежащей кулисе AO_2 , определяется по теореме подобия:

$$\frac{O_2 A}{O_2 B} = \frac{(\overline{P_a a_3})}{(\overline{P_a b})}; \text{ отсюда } (\overline{P_a b}) = (\overline{P_a a_3}) \frac{O_2 B}{O_2 A}, \text{ мм.} \quad (4.25)$$

Отложим на плане ускорений от полюса P_a отрезок $(\overline{P_a b})$ по линии

действия вектора ($\overline{P_a a_3}$). Этот отрезок представляет собой вектор $\overline{a_B}$ в масштабе K_a :

$$\mathbf{a}_B = \overline{\mathbf{a}_B} K_a = (\overline{P_a b}) K_a, \text{ мс}^{-2}. \quad (4.26)$$

Определение величины и направления угловых ускорений звеньев механизма

Определение углового ускорения звена производится по формуле

$$\varepsilon_i = \dot{\omega}_i = \frac{\mathbf{a}_i^\tau}{R_i}, \quad (4.27)$$

где \mathbf{a}_i^τ – касательное (тангенциальное) ускорение движущейся точки;

R_i – радиус кривизны траектории точки.

Звено 1 – кривошип

Угловое ускорение кривошипа равно нулю, $\varepsilon_1 = 0$, так как кривошип вращается с постоянной угловой скоростью.

Звено 2 – ползун

Угловое ускорение ползуна равно угловому ускорению кулисы $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

Звено 3 – кулиса

Величина углового ускорения кулисы определяется по формуле

$$\varepsilon_3 = \frac{\mathbf{a}_{A_3 O_2}^\tau}{AO_2} = \frac{\overline{\mathbf{a}_{A_3 O_2}^\tau} \cdot K_a}{AO_2 K_L}, \text{ с}^{-2}, \quad (4.28)$$

где $\overline{\mathbf{a}_{A_3 O_2}^\tau}$ – длина отрезка на плане ускорений, мм;

K_a – масштаб плана ускорений, $\text{мс}^{-2}/\text{мм}$;

AO_2 – переменный размер кулисы от O_2 до A , мм;

K_L – масштаб схемы механизма, $\text{м}/\text{мм}$.

Направление углового ускорения ε_3 определяется следующим образом.

Перенесем с плана ускорений вектор $\overline{\mathbf{a}_{A_3 O_2}^\tau}$ в точку A и проследим, какому

направлению углового ускорения соответствует вектор ускорения $\overline{a}^{\tau}_{A_3O_2}$. На рис. 4.1, б этому касательному ускорению соответствует вращение звена AO_2 против часовой стрелки. Следовательно, ε_3 будет направлено против часовой стрелки.

4.2.2. Механизм с группой 3-й модификации 2-го вида

Рассматривается кинематический анализ механизма, в котором шатун 2 присоединяется вращательной парой A к кривошипу 1. Ползун 3 присоединяется вращательной парой B к стойке (рис. 4.4)

Данный механизм при структурном анализе распадается на следующие группы Ассура.

Стойка – O_1-1 → 1-й класс,

$A_{вр} - 2 - B_{пост} - 3 - B_{вр}$, 2-й кл., 3-я мод. 2-й вид (диада **ВПВ).**

Перепишем запись структурного анализа с учетом нумерации звеньев

$A_{1,2} - 2 - B_2 - 3 - B_{3,0}$

Задача кинематического анализа механизма определить для заданного положения механизма следующие параметры:

- скорость $V_{A_{1,2}}$ и ускорение $a_{A_{1,2}}$ точки $A_{1,2}$;
- скорость V_{B_2} и ускорение a_{B_2} точки B_2 ;
- скорость V_C и ускорение a_C точки C ;
- угловую скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 шатуна AC ;
- угловую скорость ω_3 и угловое ускорение ε_3 ползуна.

Следует заметить, что скорость и ускорение точки C могут быть определены только после определения скорости и ускорения точки B_2

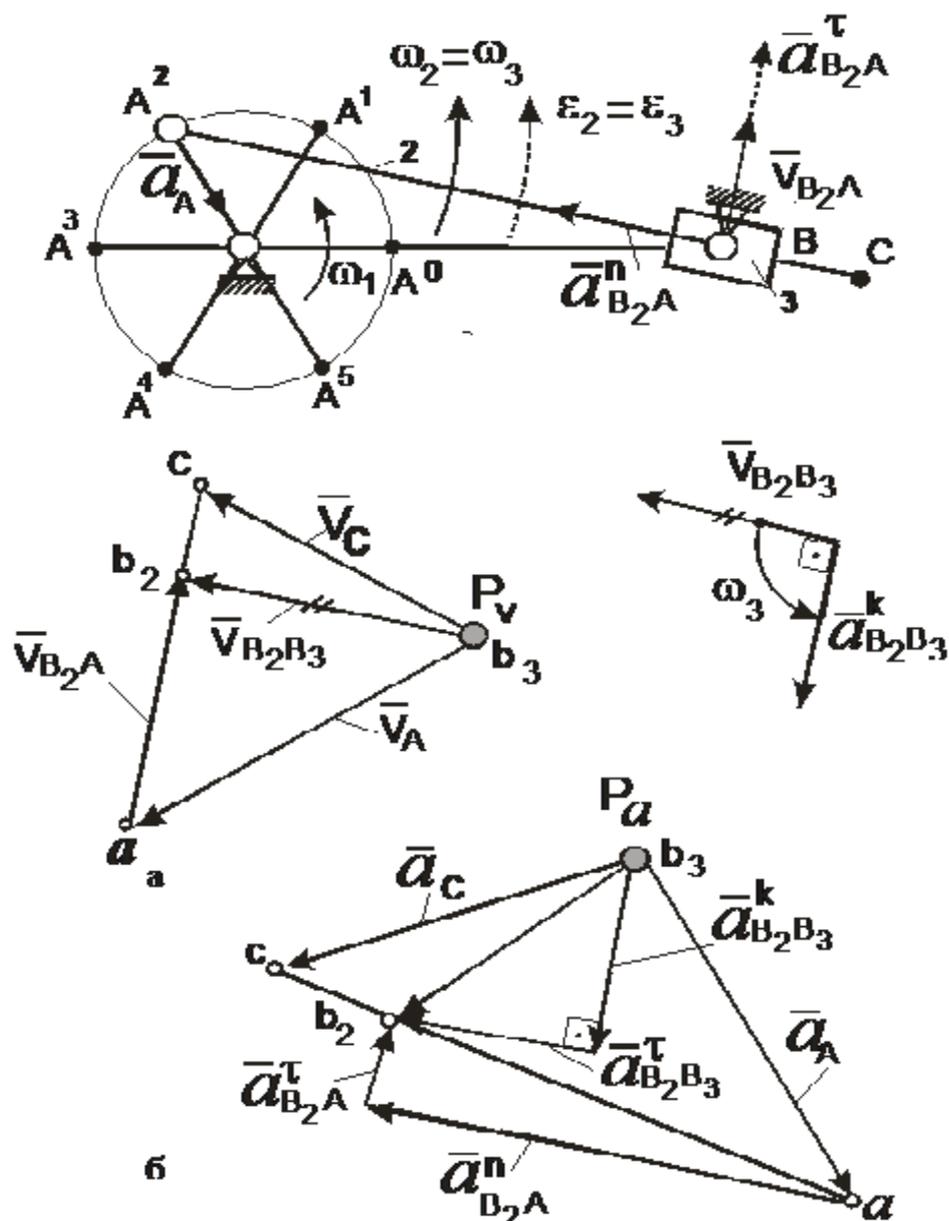


Рис. 4.4. Построение плана скоростей и плана ускорений для механизма с группой Ассур 3-й модификации 2-го вида

Построение плана скоростей механизма (рис. 4.4, а)

Кинематический анализ механизма начинают с входного звена и далее в порядке присоединения групп Ассур.

Входное звено O_1A – (кривошип)

Точка A_1 принадлежит кривошипу (звено 1), и ее скорость определяется по зависимости

$$V_{A_1} = \omega_1 O_1A, \text{ мс}^{-1}. \quad (4.29)$$

Вектор этой скорости направлен в сторону угловой скорости ω_1 по касательной к траектории, т. е. перпендикулярно к радиусу $O_1 A$.

С учетом масштаба K_V величина вектора \overline{V}_A равна

$$\overline{V}_A = (\overline{P_V a}) = \frac{V_A}{K_V}, \text{ мм.} \quad (4.30)$$

Присоединенная группа $A_2 - 2 - B_2 - 3 - B_{3,0}$

В точке A вращательной парой соединяются кривошип (звено 1) и шатун (звено 2), поэтому $\overline{V}_{A_2} = \overline{V}_{A_1} = \overline{V}_A$. В точке B вращательной парой соединяются ползун (звено 3) и стойка (звено 0). Скорость точки B_0 , принадлежащей стойке, равна нулю: $\overline{V}_{B_3} = \overline{V}_{B_0} = 0$.

В точке B поступательной парой соединяются шатун (звено 2) и ползун (звено 3), следовательно: $\overline{V}_{B_2} \neq \overline{V}_{B_3}$. Скорость точки B_2 подлежит определению.

Движение шатуна рассматриваем как сложное движение, состоящее из переносного поступательного движения вместе с точкой (полюсом) A_2 , скорость которой известна, и относительного вращательного движения вокруг полюса A_2 со скоростью $\overline{V}_{B_2 A}$.

Тогда в соответствии с теоремой сложения скоростей при сложном движении для точки B_2 имеем:

$$\overline{V}_{B_2} = \overline{V}_A + \overline{V}_{B_2 A}, \quad (4.31)$$

где $\overline{V}_{B_2 A}$ – относительная скорость точки B_2 по отношению к полюсу A .

При построении векторного уравнения (4.31) вектор относительной скорости $\overline{V}_{B_2 A}$ не может быть построен, так как для него известна только линия действия $\overline{V}_{B_2 A} \perp BA$, но неизвестны величина и направление (ω_2 – неизвестна).

Движение шатуна 2 можно представить как переносное вращательное движение вместе с ползуном 3 и относительное поступательное движение по отношению к ползуну со скоростью $\overline{V}_{B_2 B_3}$:

$$\overline{V}_{B_2} = \overline{V}_{B_3} + \overline{V}_{B_2 B_3}, \quad (4.32)$$

где $\overline{V}_{B_2B_3}$ – относительная скорость точки B_2 по отношению к точке B_3 , принадлежащей ползуну.

При построении векторного уравнения (4.32) вектор относительной скорости $\overline{V}_{B_2B_3}$ не может быть построен, так как для него известна только линия действия $\overline{V}_{B_2B_3} \parallel AB$, но неизвестны величина и направление.

Объединяем уравнения (4.31) и (4.32) в систему

$$\begin{cases} \overline{V}_{B_2} = \overline{V}_A + \overline{V}_{B_2A}, & \overline{V}_{B_2A} \perp BA; \\ \overline{V}_{B_2} = \overline{V}_{B_3} + \overline{V}_{B_2B_3}, & \overline{V}_{B_2B_3} \parallel BA. \end{cases} \quad (4.33)$$

Эту систему будем решать графически. Цель построения – определить скорость точки B_2 .

Построение плана скоростей производится в следующей последовательности:

1. Выберем полюс плана скоростей P_V — общее начало векторов абсолютных скоростей точек механизма.

2. Из полюса P_V построим вектор скорости точки A в масштабе K_V :

$$\left(\overline{P_V a} \right) = \frac{V_A}{K_V}, \text{ мм.} \quad (4.34)$$

Конец вектора обозначим буквой a .

3. Согласно первому уравнению системы (4.33), из конца вектора \overline{V}_A , т. е. через точку a , проведем линию действия относительной скорости \overline{V}_{B_2A} перпендикулярно звену AB , $\overline{V}_{B_2A} \perp BA$.

4. Согласно второму уравнению системы (4.50), из полюса P_V (так как $\overline{V}_{B_3} = 0$) проведем линию действия относительной скорости $\overline{V}_{B_2B_3}$ параллельно звену AB ($\overline{V}_{B_2B_3} \parallel AB$).

5. Отметим точку пересечения двух линий действия относительных скоростей и обозначим ее b_2 .

6. Проведем из полюса P_V вектор в точку b_2 – это вектор абсолютной скорости точки B_2 . Проведем вектор из точки b_3 , которая находится в полюсе

P_V , в точку b_2 – это вектор относительной скорости точки B_2 по отношению к точке B_3 .

Чтобы получить модули этих скоростей в размерности мс^{-1} , необходимо измерить вектор в мм и умножить на масштаб K_V :

$$V_{B_2} = (\overline{P_V b_2}) K_V, \text{ мс}^{-1}; \quad (4.35)$$

$$V_{B_2 B_3} = \overline{V}_{B_2 B_3} K_V = (\overline{b_2 b_3})_V K_V, \text{ мс}^{-1}. \quad (4.36)$$

Скорость точки C , принадлежащей кулисе AC , может быть получена по теореме подобия плана скоростей:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{(\overline{ab_2})_{\lambda_V}}{(\overline{ac})_{\lambda_V}}; \text{ отсюда } (\overline{ac})_{\lambda_V} = (\overline{ab_2})_{\lambda_V} \frac{AC}{AB}. \quad (4.37)$$

Отложим на плане скоростей от a отрезок $(\overline{ac})_{\lambda_V}$, на отрезке $(\overline{ab_2})_{\lambda_V}$ и обозначим конец отрезка точкой c . Из полюса P_V проведем вектор в точку c . Это вектор – абсолютная скорость точки C в масштабе K_V .

Чтобы получить модуль этой скорости в размерности мс^{-1} , необходимо измерить вектор $(\overline{P_V c})$ в миллиметрах и умножить на масштаб K_V :

$$V_C = \overline{V}_C K_V = (\overline{P_V c}) K_V, \text{ мс}^{-1}. \quad (4.38)$$

Определение величины и направления угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость звена определяется по формуле

$$\omega_i = \frac{V_i}{R_i}, \text{ с}^{-1},$$

где V_i – линейная скорость точки,

R_i – радиус кривизны траектории точки.

Звено 1 – входное звено O_1A (кривошип).

Угловая скорость кривошипа определяется по следующей зависимости

$$\omega_1 = 2\pi n_1, \text{ с}^{-1},$$

где n_1 – угловая скорость кривошипа, с^{-1} .

Направление угловой скорости кривошипа ω_1 задается.

Звено 2 – шатун AB .

Величина угловой скорости звена AB определяется по формуле

$$\omega_2 = \frac{V_{B2A}}{BA} = \frac{(\overline{b2a})_V \cdot K_V}{BA}, \text{ с}^{-1}, \quad (4.39)$$

где $(\overline{b2a})_V$ – длина отрезка на плане скоростей, мм;

K_V – масштаб плана скоростей, $\text{мс}^{-1}/\text{мм}$;

BA – длина шатуна, измеренная на плане положений от точки A до точки B , м.

Для определения направления угловой скорости ω_2 остановим на механизме точку A , перенесем с плана скоростей вектор \overline{V}_{B2A} в точку B и проследим какому направлению угловой скорости ω_2 соответствует вектор скорости \overline{V}_{B2A} . Этой скорости на *рис. 5.4, а* соответствует вращение звена BA против часовой стрелки. Следовательно, ω_2 будет направлена против часовой стрелки.

Звено 3-ползун.

Угловая скорость ползуна по величине и направлению равна угловой скорости звена 2, $\omega_3 = \omega_2$.

Составление векторных уравнений и расчетных зависимостей для построения планов ускорений

Построение планов ускорений производится так же как и план скоростей в порядке наложения групп Ассура.

Входное звено O_1A – (кривошип)

Полное ускорение точки A при $\omega_1 = \text{const}$ определяется по зависимости

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{AO_1}^n = \omega^2 O_1A.$$

Вектор ускорения $\overline{\mathbf{a}}_A$ направлен параллельно звену O_1A от точки A к точке O_1 . С учетом масштаба K_a величина вектора $\overline{\mathbf{a}}_A$ равна

$$\overline{\mathbf{a}}_A = (\overline{P_a a}) = \frac{\mathbf{a}_A}{K_a}, \text{ мм.}$$

Присоединенная группа $A_{1,2} - 2 - B_2 - 3 - B_{3,0}$

В точке A шарнирно соединяются звено 1 и звено 2, поэтому ускорения $a_{A1} = a_{A2} = a_A$. Ползун 3 соединяется вращательной парой B со стойкой, поэтому $a_{B3} = a_{B0} = 0$. В точке B шатун 2 поступательной парой присоединяется к ползуну 3, поэтому $a_{B2} \neq a_{B3}$. Подлежит определению a_{B2} .

Движение кулисы BA рассматриваем как сложное движение, состоящее из переносного движения вместе с точкой (полюсом) A , ускорение которой известно, и относительного вращательного движения вокруг полюса A .

Тогда в соответствии с теоремой сложения ускорений при сложном движении для точки B_2 получаем

$$\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_A + \bar{a}_{B_2A}, \quad (4.40)$$

где \bar{a}_{B_2A} – относительное ускорение точки B_2 вокруг полюса A .

При построении векторного уравнения (4.40) вектор относительного ускорения \bar{a}_{B_2A} не может быть построен, так как для него неизвестны величина и направление.

Движение шатуна BA рассматриваем как сложное движение, состоящее из переносного вращательного движения вместе с ползуном 3, для которого ускорение точки B_3 известно ($a_{B3} = a_{B0} = 0$) и относительного ускорения $\bar{a}_{B_2B_3}$ при поступательном движении шатуна по отношению к ползуну 3, для которого неизвестны величина и направление.

Если при движении точки на плоскости имеет место вращательное переносное движение и относительное поступательное, то возникает дополнительное ускорение, которое называется *кориолисовым*.

В соответствии с теоремой сложения ускорений при сложном движении для точки B_2 имеем

$$\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{B_3} + \bar{a}_{B_2B_3}^k + \bar{a}_{B_2B_3}. \quad (4.41)$$

Разложим относительные ускорения \bar{a}_{B_2A} и $\bar{a}_{B_2B_3}$ на нормальные и касательные составляющие и объединим в систему уравнения (4.40) и (4.41):

$$\begin{cases} \bar{a}_{B_2} = \bar{a}_A + \bar{a}_{B_2A}^n + \bar{a}_{B_2A}^\tau, & \bar{a}_{B_2A}^\tau \perp AB; \\ \bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{B_3} + \bar{a}_{B_2B_3}^k + \bar{a}_{B_2B_3}^n + \bar{a}_{B_2B_3}^\tau, & \bar{a}_{B_2B_3}^\tau \parallel AB. \end{cases} \quad (4.42)$$

Величины нормальных ускорений и кориолисово ускорение определяются по известным зависимостям, а касательные ускорения известны по линии действия:

$$a_{B_2A}^n = \omega_2^2 BA \text{ или } a_{B_2A}^n = \frac{V_{B_2A}^2}{BA} = \frac{\left[(\overline{b_2a}) K_V \right]^2}{BA \cdot K_L}, \text{ мс}^{-2}. \quad (4.43)$$

Чтобы определить размер вектора этого ускорения необходимо модуль ускорения $a_{B_2A}^n$ разделить на масштаб K_a :

$$\bar{a}_{B_2A}^n = \frac{a_{B_2A}^n}{K_a}, \text{ мм}. \quad (4.44)$$

Ускорение $\bar{a}_{B_2A}^n$ направляется по звену BA от B к A . Касательное ускорение $\bar{a}_{B_2A}^\tau \perp BA$.

Вектор нормального ускорения $\bar{a}_{B_2B_3}^n = 0$, так как относительное движение шатуна и ползуна – прямолинейное. Линия действия касательного ускорения $\bar{a}_{B_2B_3}^\tau$ направлена по касательной к траектории относительного движения ($\bar{a}_{B_2B_3}^\tau \parallel AB$).

Величина кориолисова ускорения для плоского движения определяется по формуле (4.16):

$$a^k = 2\omega_{\text{пер}} V_{\text{отн}}.$$

Для данного случая $\omega_{\text{пер}} = \omega_3$ и $V_{\text{отн}} = V_{B_2B_3}$.

Следовательно, $a_{B_2B_3}^k = 2\omega_3 V_{B_2B_3}$, мс⁻².

Чтобы определить размер вектора $\bar{a}_{B_2B_3}^k$ в миллиметрах, необходимо его модуль разделить на масштаб K_a :

$$\bar{a}_{B_2 B_3}^k = \frac{\bar{a}_{B_2 B_3}^k}{K_a} = \frac{2\omega_3 (\overline{b_2 b_3})_V K_V}{K_a}, \text{ мм} \quad (4.45)$$

где ω_3 — известна по величине и направлению (в данном случае, направлена против часовой стрелки);

$(\overline{b_2 b_3})_V$ — вектор на плане скоростей, мм.

Вектор $\bar{a}_{B_2 B_3}^k$ будет направлен в ту сторону, в которую будет направлен вектор относительной скорости $\bar{V}_{B_2 B_3} = (\overline{b_2 b_3})_V$ при повороте его на 90° по направлению угловой скорости переносного движения ω_3 .

Построение плана ускорений производится в следующей последовательности:

1. Выберем полюс плана ускорений P_a — общее начало векторов абсолютных ускорений точек механизма.

2. Из полюса P_a построим вектор ускорения точки A в масштабе K_a ,

$$(\overline{P_a a}) = \frac{a_A}{K_a}, \text{ мм. Конец вектора обозначим } a$$

3. Из точки a строим вектор $\bar{a}_{B_2 A}^n$, величина которого определяется выражением (4.44) и, который направлен по звену 2 от B к A : $\bar{a}_{B_2 A}^n \parallel BA$. Через конец этого вектора проводим линию действия касательного ускорения $\bar{a}_{B_2 A}^\tau \perp BA$.

4. Согласно второму уравнению системы (4.42), из полюса P_a (первый вектор уравнения $\bar{a}_{B_3} = 0$), строим вектор кориолисова ускорения $\bar{a}_{B_2 B_3}^k$, известный по величине (4.45) и направлению, и через его конец проводим линию действия касательного ускорения $\bar{a}_{B_2 B_3}^\tau \parallel AB$.

5. Отметим точку пересечения двух линий действия касательных ускорений $\bar{a}_{B_2 A}^\tau$ и $\bar{a}_{B_2 B_3}^\tau$ и обозначим ее b_2 ;

6. Проведем из полюса P_a вектор в точку b_2 — это вектор абсолютного ускорения \bar{a}_{B_2} точки B_2 .

Вектор относительного ускорения $\overline{a}_{B_2A} = \overline{a}_{B_2A}^n + \overline{a}_{B_2A}^\tau$. Вектор относительного ускорения $\overline{a}_{B_2B_3} = \overline{a}_{B_2B_3}^\tau$.

Чтобы получить модули этих ускорений в размерности мс^{-2} необходимо измерить соответствующие векторы в миллиметрах и умножить на масштаб K_a :

$$a_{B_2} = \overline{a}_{B_2} K_a = (P_a b_2) \cdot K_a, \text{мс}^{-2}; \quad (4.46)$$

$$a_{B_2A} = \overline{a}_{B_2A} \cdot K_a, \text{мс}^{-2}; \quad (4.47)$$

$$a_{B_2B_3} = \overline{a}_{B_2B_3} \cdot K_a, \text{мс}^{-2}. \quad (4.48)$$

Ускорение точки C , принадлежащей звену AC , определяется с применением теоремы подобия:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{(\overline{ab_2})_a}{(\overline{ac})_a}; \text{ отсюда } (\overline{ac})_a = (\overline{ab_2})_a \frac{AC}{AB}. \quad (4.49)$$

Отложим на плане ускорений от точки a отрезок $(\overline{ac})_a$ по линии действия вектора $(\overline{ab_2})_a$ и соединим полученную точку c с полюсом P_a . Этот отрезок представляет собой вектор \overline{a}_C в масштабе K_a .

$$\overline{a}_C = \overline{a}_C \cdot K_a = (\overline{P_a c}) K_a, \text{мс}^{-2}. \quad (4.50)$$

Определение величины и направления угловых ускорений звеньев механизма

Определение углового ускорения звена производится по формуле

$$\varepsilon_i = \dot{\omega}_i = \frac{a_i^\tau}{R_i},$$

где a_i^τ – касательное (тангенциальное) ускорение движущейся точки;

R_i – радиус кривизны траектории точки в её относительном движении.

Звено 1 – кривошип)

Угловое ускорение кривошипа равно нулю, так как $\omega_1 = const$, $\varepsilon_1 = 0$.

Звено 2 – шатун

Величина углового ускорения кулисы ε_2 определяется по формуле

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{B_2A}^\tau}{BA} = \frac{\bar{a}_{B_2A}^\tau \cdot K_a}{BA \cdot K_L}, \text{ с}^{-2}, \quad (4.51)$$

где $\bar{a}_{B_2A}^\tau$ – длина вектора на плане ускорений, мм;

K_a – масштаб плана ускорений, $\text{мс}^{-2}/\text{мм}$;

BA – переменный размер кулисы от B до A , мм;

K_L – масштаб схемы механизма, м/мм.

Направление углового ускорения ε_2 определяется следующим образом.

Остановим на механизме точку A , перенесем с плана ускорений вектор $\bar{a}_{B_2A}^\tau$ в точку B и проследим, какому направлению углового ускорения ша-

туна соответствует вектор ускорения $\bar{a}_{B_2A}^\tau$. На рис. 4.2 этому касательному

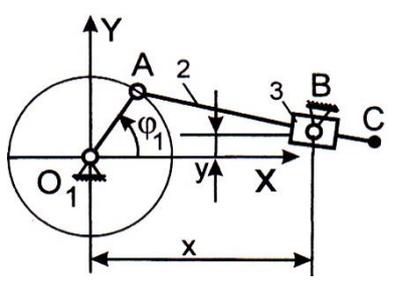
ускорению соответствует вращение звена BA против часовой стрелки. Следовательно, угловое ускорение ε_2 будет направлено против часовой стрелки.

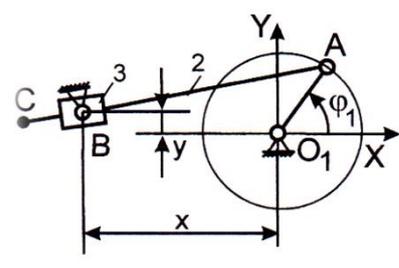
Звено 3 – ползун

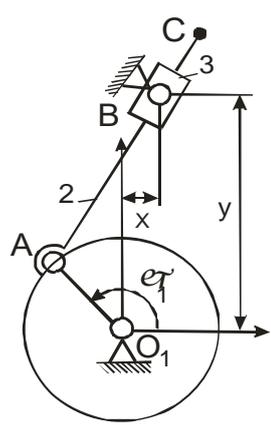
Угловое ускорение ползуна по величине и направлению равно угловому ускорению звена 2, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$.

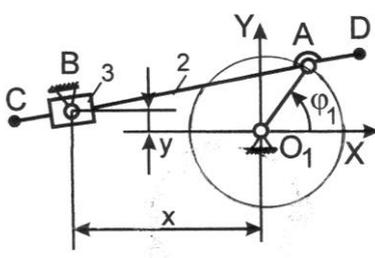
Варианты заданий

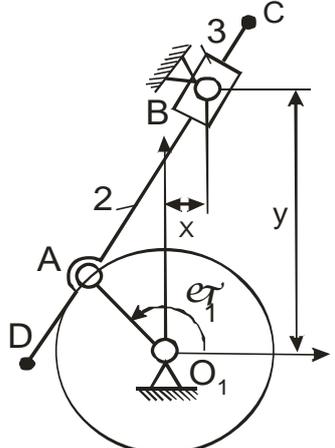
№ схемы	Вариант	Параметры механизма					
		φ_1 гр	ω с ⁻¹	O_1A м	O_2B м	x м	y м
	1	60	40	0,04	0,24	0,005	-0,10
	2	60	40	0,04	0,24	-0,005	-0,11
	3	60	40	0,04	0,25	0,006	-0,12
	4	120	40	0,05	0,25	-0,006	-0,14
	5	120	50	0,05	0,24	0,007	-0,12
	6	120	50	0,05	0,25	-0,007	-0,13
	7	120	50	0,06	0,25	0,008	-0,15
	8	180	60	0,06	0,26	0,008	-0,12
	9	180	60	0,06	0,26	0,009	-0,13
	10	180	60	0,06	0,26	0,009	-0,14
		φ_1 гр	ω с ⁻¹	O_1A м	O_2B м	x м	y м
	1	60	40	0,04	0,25	-0,005	0,10
	2	60	40	0,04	0,25	-0,005	0,11
	3	60	40	0,04	0,25	-0,006	0,12
	4	120	40	0,05	0,35	-0,006	0,14
	5	120	50	0,05	0,25	0,007	0,12
	6	120	50	0,05	0,25	0,007	0,13
	7	120	50	0,06	0,25	0,008	0,15
	8	300	60	0,06	0,25	-0,008	0,12
	9	300	60	0,06	0,24	-0,009	0,13
10	300	60	0,06	0,24	-0,009	0,14	
		φ_1 гр	ω с ⁻¹	O_1A м	AC м	x м	y м
	1	60	40	0,04	0,24	-0,005	-0,10
	2	60	40	0,04	0,24	-0,005	-0,11
	3	60	40	0,04	0,25	-0,006	-0,12
	4	120	40	0,05	0,25	0,006	-0,14
	5	120	50	0,05	0,24	0,007	-0,12
	6	120	50	0,05	0,25	0,007	-0,13
	7	120	50	0,06	0,25	0,008	-0,15
	8	180	60	0,06	0,26	0,008	-0,12
	9	180	60	0,06	0,26	0,009	-0,13
10	180	60	0,06	0,26	0,009	-0,14	

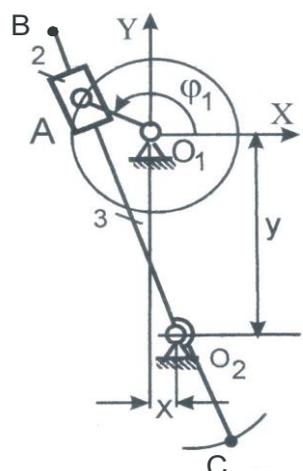
4		Параметры механизма					
		Вариант	φ_1 гр	ω с ⁻¹	O_1A м	AC м	x м
1	60	40	0,04	0,22	0,14	0,005	
2	60	40	0,04	0,22	0,14	-0,005	
3	60	40	0,04	0,24	0,15	0,006	
4	120	40	0,05	0,24	0,15	-0,006	
5	120	50	0,05	0,26	0,16	-0,007	
6	120	50	0,05	0,25	0,16	-0,007	
7	120	50	0,06	0,27	0,17	-0,008	
8	240	60	0,06	0,27	0,17	0,008	
9	240	60	0,06	0,28	0,18	0,009	
10	240	60	0,06	0,28	0,18	0,009	

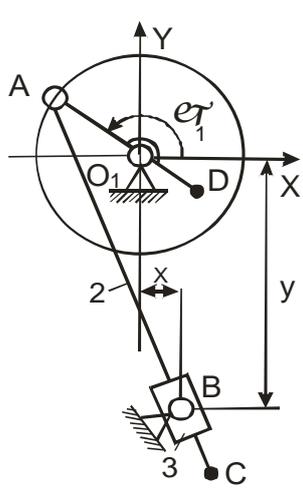
5		Параметры механизма					
		Вариант	φ_1 , град	ω с ⁻¹	O_1A м	AC м	x м
1	60	40	0,04	0,22	-0,14	0,005	
2	60	40	0,04	0,22	-0,14	-0,005	
3	60	40	0,04	0,24	-0,15	0,006	
4	120	40	0,05	0,24	-0,15	-0,006	
5	120	50	0,05	0,26	-0,16	-0,007	
6	120	50	0,05	0,25	-0,16	-0,007	
7	120	50	0,06	0,27	-0,17	-0,008	
8	300	60	0,06	0,27	-0,17	0,008	
9	300	60	0,06	0,28	-0,18	0,009	
10	300	60	0,06	0,28	-0,18	-0,009	

6		Параметры механизма					
		Вариант	φ_1 град	ω с ⁻¹	O_1A м	AC м	x м
1	0	40	0,04	0,24	-0,005	0,14	
2	0	40	0,04	0,24	-0,005	0,14	
3	0	40	0,04	0,25	-0,006	0,15	
4	180	40	0,05	0,25	0,006	0,15	
5	180	50	0,05	0,26	0,007	0,16	
6	180	50	0,05	0,26	0,007	0,16	
7	240	50	0,06	0,27	0,008	0,17	
8	240	60	0,06	0,27	0,008	0,17	
9	300	60	0,06	0,28	-0,009	0,18	
10	300	60	0,06	0,28	-0,009	0,18	

7		Вариант	Параметры механизма					
			φ_1 , град	ω с ⁻¹	O_1A м	AC м	AD м	x м
1	60	40	0,04	0,02	0,16	-0,16	,008	
2	60	40	0,04	0,02	0,16	-0,16	-0,01	
3	60	40	0,04	0,02	0,17	-0,17	,008	
4	120	40	0,05	0,02	0,17	-0,17	-0,01	
5	120	50	0,05	0,02	0,18	-0,18	-0,01	
6	120	50	0,05	0,03	0,18	-0,18	-0,01	
7	120	50	0,06	0,03	0,19	-0,19	-0,01	
8	300	60	0,06	0,04	0,19	-0,17	0,01	
9	300	60	0,06	0,06	0,20	-0,18	,008	
10	300	60	0,06	0,06	0,20	-0,18	0,01	

8		Вариант	Параметры механизма					
			φ_1 , град	ω с ⁻¹	O_1A м	AC м	AD м	x м
1	0	40	0,04	0,24	0,02	-0,005	0,12	
2	0	40	0,04	0,24	0,02	-0,005	0,12	
3	0	40	0,04	0,25	0,02	-0,006	0,14	
4	180	40	0,05	0,25	0,03	0,006	0,14	
5	180	50	0,05	0,26	0,03	0,007	0,16	
6	180	50	0,05	0,26	0,03	0,007	0,16	
7	240	50	0,06	0,27	0,04	0,008	0,17	
8	240	60	0,06	0,27	0,04	0,008	0,17	
9	300	60	0,06	0,28	0,04	0,009	0,18	
10	300	60	0,06	0,28	0,04	-0,009	0,18	

9		Вариант	Параметры механизма					
			φ_1 , град	ω с ⁻¹	O_1A м	O_2B м	O_2C м	x м
1	60	40	0,04	0,25	0,02	-0,005	-0,1	
2	60	40	0,04	0,25	0,03	-0,005	-0,11	
3	60	40	0,04	0,25	0,04	-0,006	-0,12	
4	120	40	0,05	0,25	0,02	0,006	-0,14	
5	120	50	0,05	0,25	0,03	0,007	-0,12	
6	120	50	0,05	0,25	0,04	0,007	-0,13	
7	120	50	0,06	0,25	0,02	0,008	-0,15	
8	300	60	0,06	0,25	0,03	-0,008	-0,12	
9	300	60	0,06	0,25	0,04	-0,009	-0,13	
10	300	60	0,06	0,25	0,03	-0,009	-0,14	

0		φ_1	ω	O_1A	AC	O_1D	X	Y
		град	c^{-1}	м	м	м	м	м
1	0	40	0,04	0,25	0,02	0,005	-0,12	
2	0	40	0,04	0,25	0,03	-0,005	-0,12	
3	0	40	0,04	0,26	0,04	0,006	-0,14	
4	180	40	0,05	0,26	0,02	-0,006	-0,14	
5	180	50	0,05	0,27	0,03	0,007	-0,16	
6	240	50	0,05	0,27	0,04	-0,007	-0,15	
7	240	50	0,06	0,28	0,02	0,008	-0,17	
8	300	60	0,06	0,28	0,03	-0,008	-0,17	
9	300	60	0,06	0,28	0,04	0,009	-0,18	
10	300	60	0,06	0,28	0,03	-0,009	-0,18	

ДИНАМИКА

Тема 5. ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание 5

Материальная точка движется из положения A внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости, как показано на приводимых ниже схемах. Пройдя путь h_0 , точка отделяется от пружины. Найти скорость точки в положениях B , C и D и давление точки на стенку трубки в положении C . Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. Исходные данные приведены в таблице 5.1.

В задании приняты следующие обозначения:

m – масса материальной точки;

v_A – начальная скорость точки;

τ – время движения точки на участке BD ;

f – коэффициент трения скольжения на стенке трубки;

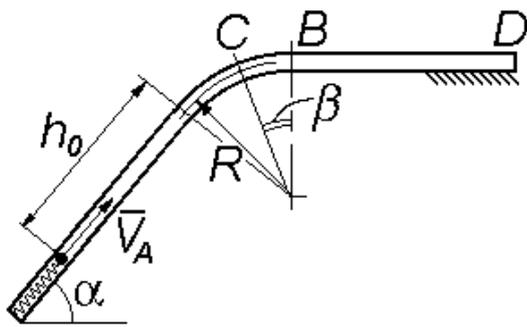
h_0 – начальная деформация пружины;

c – коэффициент жесткости пружины.

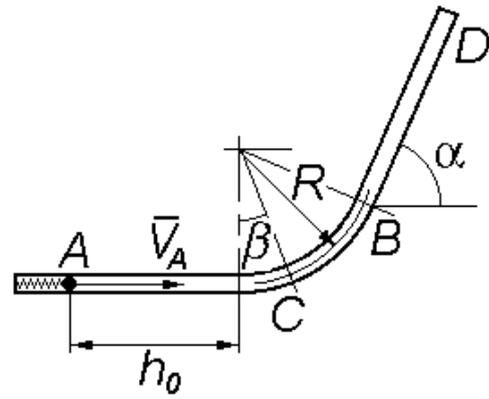
Таблица 5.1

Номер варианта исходных данных	Заданные величины								
	m , кг	v_A , м/с	τ , с	R , м	f	α , град	β , град	h_0 , см	c , Н/см
0	0,1	8,0	0,8	0,5	0,10	60	15	4	0,6
1	0,2	9,0	0,25	0,4	0,15	75	60	10	3,0
2	0,3	10,0	0,2	0,5	0,20	30	15	30	2,4
3	0,4	9,0	0,3	0,3	0,45	60	45	16	1,8
4	0,5	8,0	0,5	0,4	0,40	75	30	20	1,0
5	0,6	11,0	0,2	0,3	0,25	45	30	8	1,2
6	0,7	12,0	0,4	0,3	0,35	60	30	2	0,3
7	0,8	10,0	1,5	0,3	0,30	75	45	25	6,0
8	0,9	15,0	0,1	0,4	0,05	75	15	32	1,5
9	1,0	12,0	0,3	0,6	0,50	45	15	15	4,5

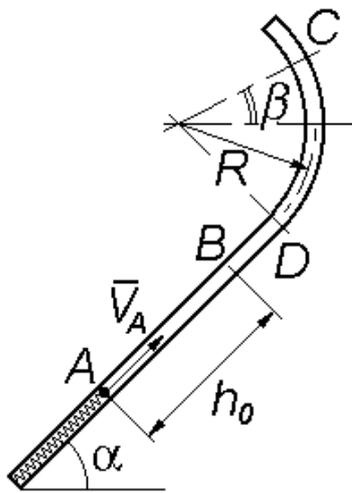
0,5



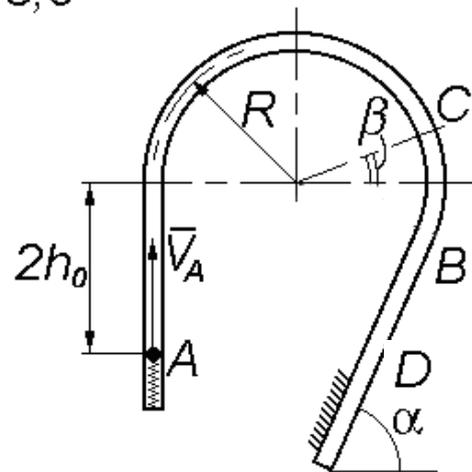
1,6



2,7



3,8



4,9

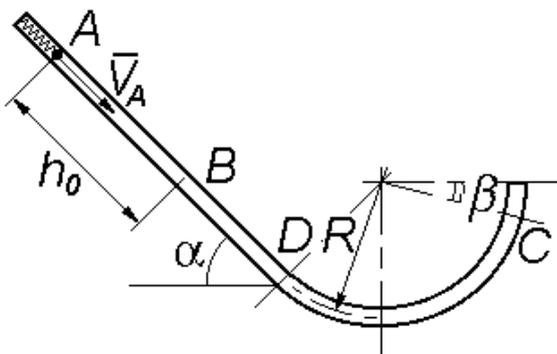


Рис. 5.1

Основные теоретические положения, используемые при решении задач

Количеством движения материальной точки называется векторная величина \vec{K} , равная произведению массы точки на вектор ее скорости, т. е.

$$\vec{K} = m\vec{v}. \quad (5.1)$$

Направление вектора \vec{K} совпадает с направлением скорости точки. Проекция количества движения материальной точки на оси декартовых координат $Oxyz$ имеют вид

$$K_x = mv_x, \quad K_y = mv_y, \quad K_z = mv_z. \quad (5.2)$$

Импульс силы \vec{F} за конечный промежуток времени (t_1, t_2) определяется выражением

$$\vec{S}^{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \quad (5.3)$$

Проектируя обе части равенства (5.3) на оси декартовых координат, получим

$$S_x^{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \quad S_y^{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt, \quad S_z^{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt. \quad (5.4)$$

Если сила \vec{F} постоянна по величине и направлению, то равенство (5.3) принимает вид

$$\vec{S}^{t_1, t_2} = \vec{F}(t_2 - t_1). \quad (5.5)$$

Отметим, что сумма импульсов нескольких сил равна импульсу суммы (главного вектора) этих сил.

Сформулируем теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме.

Теорема. Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов сил, приложенных к точке, за тот же промежуток времени (или импульсу их равнодействующей), т. е.

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum_{i=1}^n \vec{S}^{t_1, t_2}(\vec{F}_i), \quad (5.6)$$

где \vec{K}_1 соответствует начальному моменту времени t_1 , а \vec{K}_2 – конечному моменту времени t_2 .

В проекциях на оси декартовых координат теорема имеет вид

$$\begin{aligned} mv_{2x} - mv_{1x} &= \sum_{i=1}^n S_x^{t_1, t_2}(\vec{F}_i), \\ mv_{2y} - mv_{1y} &= \sum_{i=1}^n S_y^{t_1, t_2}(\vec{F}_i), \\ mV_{2z} - mV_{1z} &= \sum_{i=1}^n S_z^{t_1, t_2}(\vec{F}_i). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Кинетическая энергия материальной точки равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (5.8)$$

Кинетическая энергия является скалярной неотрицательной величиной, не зависящей от направления движения точки.

Работой постоянной силы на прямолинейном перемещении называется скалярное произведение векторов силы и перемещения, т.е. работа равна произведению модуля силы на модуль перемещения и косинус угла между ними (рис. 5.2):

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\Delta r \cdot \cos(\hat{\vec{F}}, \Delta\vec{r}), \quad (5.9)$$

где $\Delta\vec{r}$ – вектор перемещения точки при переходе из начального положения M_1 в конечное положение M_2 .

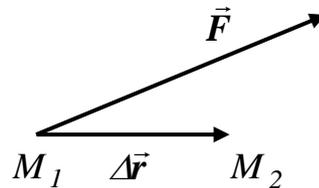


Рис. 5.2

Элементарная работа силы равна скалярному произведению векторов силы и элементарного перемещения:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.10)$$

Элементарное перемещение $d\vec{r}$ направлено по касательной к траектории в данной точке (рис. 5.3).

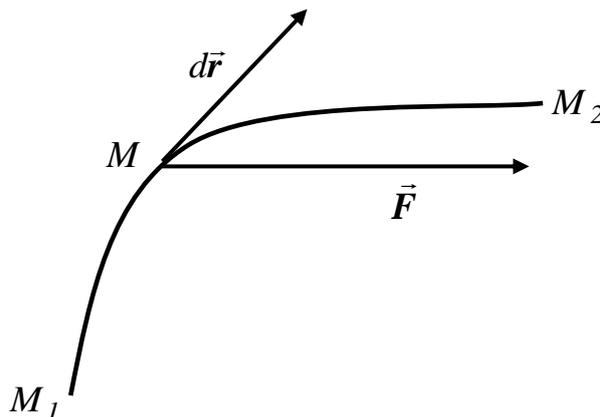


Рис. 5.3

Работа силы на конечном перемещении по произвольной траектории равна криволинейному интегралу, взятому вдоль дуги кривой от M_1 до M_2 , от элементарной работы

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} F \cdot dr \cdot \cos(\vec{F}, \hat{d\vec{r}}). \quad (5.11)$$

Работа равнодействующей сил, приложенных к точке, на некотором перемещении равна сумме работ сил на том же перемещении.

В ряде случаев работу сил можно определить, используя заготовленные выражения. Некоторые из этих частных случаев приведены ниже.

Работа силы тяжести материальной точки равна взятому с обратным знаком произведению силы тяжести на разность высот конечного и начального положений (рис. 5.4):

$$A_{1,2}^{m\vec{g}} = -mg(z_2 - z_1), \quad (5.12)$$

или

$$A_{1,2}^{m\vec{g}} = \pm mg \cdot h, \quad (5.13)$$

где $h = |z_2 - z_1|$ – «перепад высот» начального и конечного положений точки. Знак «+» берут в случае, когда начальное положение точки выше конечного, и точка приближается к земной поверхности. В противном случае, когда материальная точка отдаляется от земной поверхности, в равенстве (5.13) следует взять знак «-».

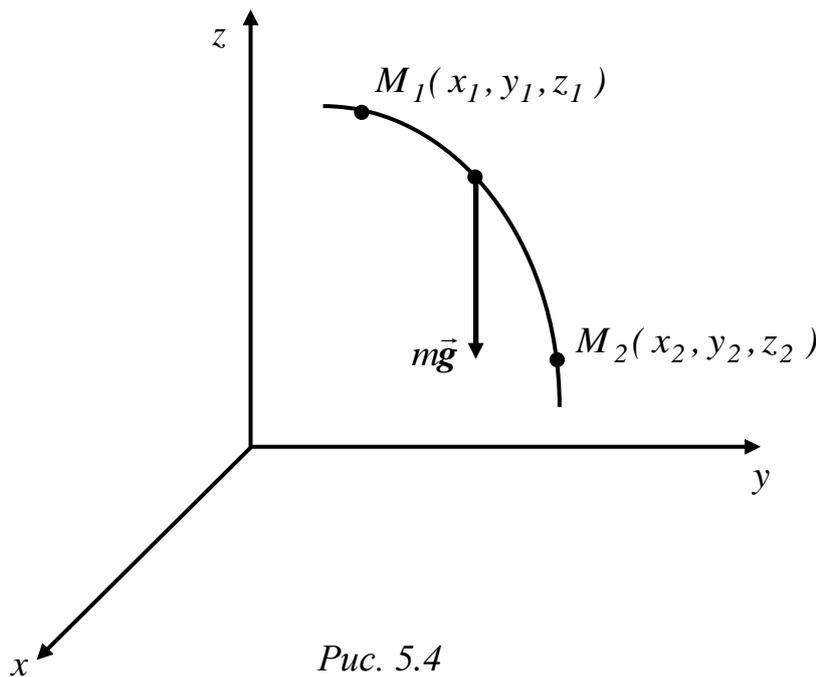


Рис. 5.4

Таким образом, работа силы тяжести материальной точки зависит от высот ее начального и конечного положений и не зависит от формы кривой, по которой перемещается точка.

Работа упругой силы, подчиненной закону Гука, вычисляется по формуле

$$A_{1,2}^{\vec{F}_{уп}} = -\frac{c}{2} (\Delta l_2^2 - \Delta l_1^2), \quad (5.14)$$

где c – коэффициент жесткости пружины, Δl_1 и Δl_2 – ее начальная и конечная деформации.

Работа силы упругости отрицательна, если деформирование пружины происходит так, что модуль этой силы возрастает; иначе работа силы упругости положительна.

Сформулируем *теорему об изменении кинетической энергии материальной точки* в интегральной форме. *Изменение кинетической энергии точки на некотором ее перемещении равно сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении, т. е.*

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^n A_{i,2}(\vec{F}_i) = A_{1,2}. \quad (5.15)$$

В данном задании при изучении движения материальной точки на участке BD , время движения по которому задано в условии, следует применять теорему об изменении количества движения точки в форме (5.6), (5.7). На остальных участках движения материальной точки нужно воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии точки (5.15), используя выражения (5.9), (5.13), (5.14) для вычисления работ сил.

Выполняя задание, следует иметь в виду, что работа нормальной реакции поверхности на любом перемещении точки равна нулю, так как эта реакция все время перпендикулярна (ортогональна) элементарному перемещению точки.

Предполагается, что сочленение (сопряжение) прямолинейных и криволинейных участков движения точки осуществляется таким образом, что прямолинейная траектория располагается на касательной к криволинейному участку, проведенной в точке сочленения, т. е. траектория является гладкой линией, линией с непрерывно меняющейся касательной.

Проводя расчеты, необходимо перевести значения параметров h_0 и c в систему единиц СИ.

Выполняя задание, следует придерживаться следующей формы:

Задание 5

Схема 10, вариант данных 11.

Условие задачи

Тело, принимаемое за материальную точку, скользит из положения A внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости, как показано на приводимых ниже схемах. Пройдя путь h_0 , тело отделяется от пружины. Найти скорость тела в положениях B , C и D и давление тела на стенку трубки в положении C . Трением на криволинейных участках траектории пренебречь.

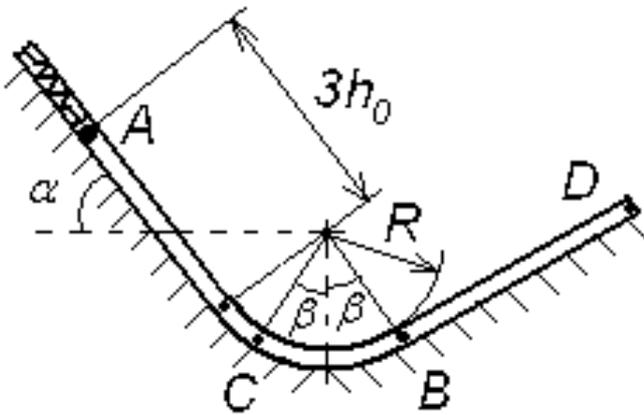
В задании приняты следующие обозначения:

m – масса тела;

v_A – начальная скорость тела;

τ – время движения тела на участке BD ;

f – коэффициент трения скольжения тела по стенке трубки;
 h_0 – начальная деформация пружины;
 c – коэффициент жесткости пружины.



Дано:

$m = 0,2 \text{ кг}; v_A = 1 \text{ м/с};$
 $\tau = 0,2 \text{ с}; R = 0,4 \text{ м}; f = 0,2;$
 $\alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ;$
 $h_0 = 0,2 \text{ м}; c = 100 \text{ Н/м}.$

Найти:

$v_C; v_B; v_D; N_C.$

Рис. 5.5

Решение.

1. Выделим следующие участки движения материальной точки: AP , PQ , QB и BD (рис. 5.6).

На участке AP длиной h_0 на точку действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция \vec{N} , сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{упр}$.

На участке PQ длиной $2h_0$ на точку действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

На участке QB на точку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и нормальная реакция \vec{N} . Трением на криволинейном участке траектории пренебрегаем.

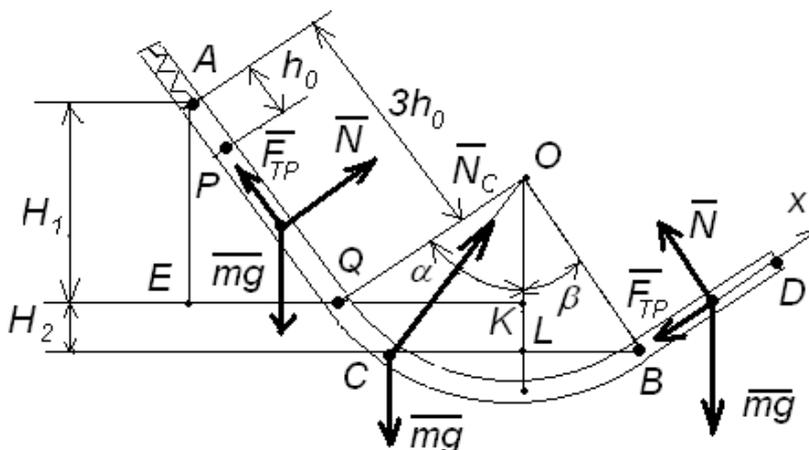


Рис. 5.6

На участке BD на точку действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция \vec{N} и сила трения \vec{F}_{mp} .

2. Рассмотрим перемещение материальной точки из положения A в положение C и применим теорему об изменении кинетической энергии, записав ее в виде

$$T_C - T_A = \sum_{i=1}^n A_{A,C}(\vec{F}_i) = A_{A,C}. \quad (4.16) \quad (5.16)$$

Указанное перемещение состоит из участков AP , PQ и QC , на каждом из которых на материальную точку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и нормальная реакция \vec{N} . На прямолинейном участке AQ длиной $3h_0$ действует сила трения \vec{F}_{mp} , а на участке AP длиной h_0 на точку действует также сила упругости пружины $\vec{F}_{упр}$.

Работа $A_{A,C}$ равна сумме работ этих сил:

$$A_{A,C} = A_{A,C}(m\vec{g}) + A_{A,C}(\vec{N}) + A_{A,Q}(\vec{F}_{mp}) + A_{A,P}(\vec{F}_{упр}). \quad (5.17)$$

Для определения работы силы тяжести воспользуемся равенством (4.13):

$$A_{A,C}(m\vec{g}) = mg(H_1 + H_2) = mg(AE + KL). \quad (5.18)$$

Отрезок AQ гладко сопряжен с дугой QB окружности, т. е. касается этой окружности в точке Q и перпендикулярен к радиусу OQ . Углы AQE и QOK равны, так как имеют взаимно перпендикулярные стороны.

Тогда

$$\begin{aligned} |AE| &= |AQ| \sin \alpha = 3h_0 \sin \alpha; \\ |KL| &= |OC| \cos \beta - |OQ| \cos \alpha = R(\cos \beta - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Следовательно,

$$A_{A,C}(m\vec{g}) = mg(3h_0 \sin \alpha + R(\cos \beta - \cos \alpha)). \quad (5.20)$$

Как уже было отмечено, работа нормальной реакции равна нулю:

$$A_{A,C}(\vec{N}) = 0. \quad (5.21)$$

Работу силы трения определим в соответствии с соотношением (5.9):

$$A_{A,Q}(\vec{F}_{mp}) = -F_{mp}|AQ| = -3f \cdot N \cdot h_0. \quad (5.22)$$

Для нахождения нормальной реакции N запишем основное уравнение динамики точки

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} + \vec{F}_{упр} \quad (5.23)$$

в проекциях на нормаль к траектории. Будем иметь

$$N = mg \cos \alpha. \quad (5.24)$$

Следовательно,

$$A_{A,Q}(\vec{F}_{\text{тр}}) = -3fmgh_0 \cos \alpha. \quad (5.25)$$

Работа силы упругости определяется соотношением (4.14):

$$A_{A,P}(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{c}{2}(\Delta l_2^2 - \Delta l_1^2), \quad (5.26)$$

где $\Delta l_1 = -h_0$, $\Delta l_2 = 0$.

Окончательно будем иметь

$$A_{A,P}(\vec{F}_{\text{упр}}) = \frac{c}{2}h_0^2. \quad (5.27)$$

С учетом выражений (5.20), (5.21), (5.25), (5.27) равенство (5.16) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = mg(3h_0 \sin \alpha + R(\cos \beta - \cos \alpha)) - \\ - 3fmgh_0 \cos \alpha + \frac{c}{2}h_0^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Определим из уравнения (5.28) неизвестную скорость V_C :

$$v_C = \sqrt{2g(3h_0 \sin \alpha + R(\cos \beta - \cos \alpha)) - 6fmgh_0 \cos \alpha + \frac{c}{m}h_0^2 + v_A^2}. \quad (5.29)$$

Подстановка исходных данных дает

$$v_C = \sqrt{9,81(3 \cdot 0,2 \cdot \sqrt{3} + 0,4 \cdot (\sqrt{3} - 1) - 3 \cdot 0,04) + \frac{4}{0,2} + 1} \approx 5,73 \text{ м/с}. \quad (5.30)$$

3. Определим нормальную реакцию в точке C , записав основное уравнение динамики

$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N}_C \quad (5.31)$$

в проекциях на нормаль к траектории:

$$m \frac{v_C^2}{R} = -mg \cdot \cos \beta + N_C. \quad (5.32)$$

Получим

$$N_C = m \frac{v_C^2}{R} + mg \cdot \cos \beta \approx 18,11 \text{ Н}. \quad (5.33)$$

4. Рассмотрим перемещение материальной точки из положения C в положение B и применим теорему об изменении кинетической энергии, записав ее в виде

$$T_B - T_C = \sum_{i=1}^n A_{C,B}(\vec{F}_i) = A_{C,B}. \quad (5.34)$$

На материальную точку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и нормальная реакция \vec{N} . Так как трением на этом участке пренебрегаем, то

$$A_{C,B} = A_{C,B}(m\vec{g}) = 0. \quad (5.35)$$

В силу (5.34)

$$v_B = v_C \approx 5,73 \text{ м/с}. \quad (5.36)$$

5. Рассмотрим движение материальной точки на участке BD . Так как время движения на этом участке задано, целесообразно применить теорему об изменении количества движения точки (5.7) в проекциях на ось Bx :

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = \sum_{i=1}^n S_x^{0,\tau}(\vec{F}_i). \quad (5.37)$$

Найдем сумму проекций импульсов:

$$\sum_{i=1}^n S_x^{0,\tau}(\vec{F}_i) = S_x^{0,\tau}(m\vec{g}) + S_x^{0,\tau}(\vec{N}) + S_x^{0,\tau}(\vec{F}_{mp}); \quad (5.38)$$

$$S_x^{0,\tau}(m\vec{g}) = -mg \cdot \sin \beta \cdot \tau; \quad (5.39)$$

$$S_x^{0,\tau}(\vec{N}) = 0; \quad S_x^{0,\tau}(\vec{F}_{тр}) = -F_{mp} \cdot \tau = -fmg \cdot \cos \beta \cdot \tau. \quad (5.40)$$

С учетом (5.38) – (5.40) выражение (5.37) примет вид

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = -mg(\sin \beta + f \cos \beta)\tau, \quad (5.41)$$

откуда

$$v_{Dx} = -g(\sin \beta + f \cos \beta)\tau + v_{Bx}. \quad (5.42)$$

Подстановка численных значений дает

$$v_{Dx} \approx -9,81(0,5 + 0,2 \cdot 0,866) \cdot 0,2 + 5,73 = 4,41 \text{ м/с}. \quad (5.43)$$

Ответ: $v_C = v_B \approx 5,73 \text{ м/с}$, $v_D \approx 4,41 \text{ м/с}$, $N_C \approx 18,11 \text{ Н}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарг, С. М.* Краткий курс теоретической механики: учебник для студентов высших технических учебных заведений / С. М. Тарг. – 20-е изд. – М.: Высшая школа, 2010. – 415 с.
2. *Яблонский, А. А.* Курс теоретической механики: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим специальностям / А. А. Яблонский. – 15-е изд. – М.: КноРус, 2010. – 603 с.
3. *Бухгольц, Н. Н.* Основной курс теоретической механики: учебное пособие для студентов математических, физических и технических специальностей / Н. Н. Бухгольц. – 10-е изд. – СПб: Лань, 2009. – 467 с.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений / [А. А. Яблонский и др.]; Под общ. ред. А. А. Яблонского. – Изд. 17-е, стер. – М.: Интеграл-Пресс, 2010. – 382 с.
5. *Полякова, Е. В.* Теоретическая механика. Расчетно-графические работы: учебно-методическое пособие / Е. В. Полякова, П. А. Дятлова, В. А. Чайкин, А. Г. Усов. – СПб: Изд. СПГУТД, 2007. – 82 с.
6. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин: учебник для студентов высших технических учебных заведений / И.И. Артоболевский. – М.: Альянс, 2008.
7. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин. – М.:Альянс, 2011. 640 с.
8. *Фролов К. В., С. А. Попов, А. К. Мусатов и др.* Теория механизмов и машин. – М.: Высшая школа, 2005. – 496 с.:
9. *Кинематический анализ плоских рычажных механизмов/ Орестова А. В., Грибкова Т. С.– СПб СПГУТД, 2007 г.*
10. *Коловский М.З., Евграфов А.Н., Семенов Ю.А., Слоущ А.В.* Теория механизмов и машин, учеб. пособие. – М.: Академия, 2008.