

## Контрольная работа № 1

### ВЛИЯНИЕ НЕЙТРАЛЬНОЙ АТМОСФЕРЫ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

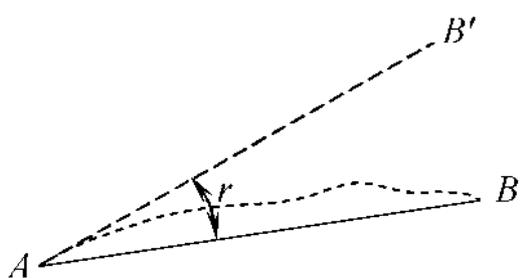
#### Показатель преломления и его градиент

#### в качестве «геодезических» параметров атмосферы

Современные методы геодезических измерений основаны на определении тем или иным способом двух геометрических характеристик *траектории распространения электромагнитного излучения*. При угловых измерениях объектом измерений служит *направление распространения излучения*, при линейных - *дальность*.

Согласно принципу Ферма электромагнитное излучение распространяется по кратчайшему *оптическому* пути. Т.е. по тому пути, прохождение которого займет наименьшее время. При распространении в однородных средах излучение распространяется по прямой с неизменной скоростью. В неоднородной атмосфере плотность меняется от точки к точке. В соответствии с принципом Ферма луч отклоняется в направлении менее плотных слоев, где скорость выше, а время распространения меньше. Явление преломления электромагнитных лучей в атмосфере называют **атмосферной угловой рефракцией**. Явление изменения скорости распространения излучения, влияющее на точность линейных измерений, назовем **дальномерной рефракцией**.

При *угловых* измерениях в неоднородной атмосфере на протяжении дистанции луч неоднократно меняет свое направление и представляет собой пространственную кривую, получившую название рефракционной кривой. Наблюдатель видит объект по касательной к последнему элементу рефракционной кривой в точке наблюдения  $A$  (Рисунок 1). Угол между направлением на истинное  $B$  и кажущееся  $B'$  положение объекта наблюдений называют **углом рефракции**. Угол рефракции  $r$  используют в качестве основной количественной характеристики угловой рефракции. Геодезиста интересуют



**Рисунок 1** - Угол рефракции

проекции угла рефракции на горизонтальную и вертикальную плоскость - углы горизонтальной (боковой) и вертикальной рефракции.

В *свето-* и *радиодальнометрии* определяют *время t* распространения излучения по дистанции. В случае, когда

источник излучения является объектом наблюдений (спутниковое позиционирование), расстояние  $D$  получают как произведение скорости  $v$  на время:

$$D = v \cdot t \quad (1)$$

В электронной тахеометрии, когда источник и приемник излучения находятся на одном конце дистанции, а на другом располагается отражатель:

$$D = \frac{v \cdot \tau}{2} \quad (2)$$

Дальномерная рефракция приводит к ошибке определения результирующей для дистанции скорости, используемой в формулах (1), (2).

И дальномерная и угловая рефракция имеют одинаковую природу: возникают вследствие изменения плотности атмосферы. Плотность среды характеризует ее показатель преломления  $n$ :

$$n = \frac{c}{v} \quad (3)$$

где  $c$  - скорость света в вакууме, равная 299 792 458 м/с,

$v$  - скорость излучения в среде с показателем преломления  $n$ .

В вакууме показатель преломления равен единице. В газообразных средах он больше единицы на величину порядка  $(100-300) \cdot 10^{-6}$ , поэтому чаще используют понятие индекса преломления  $N$ , который представляет собой отличие показателя преломления от единицы, увеличенное в миллион раз:

$$N = (n - 1) \cdot 10^6.$$

Индекс преломления выражают в N-единицах:

$$1 \text{ N-ед.} = 10^{-6}.$$

Изменение показателя преломления характеризуется его *градиентом* (скоростью изменения в пространстве). На практике под градиентом  $grad\ n$  показателя преломления понимают отношение приращения показателя преломления  $\Delta n$  к величине конечного отрезка  $\Delta y$ , на котором это приращение произошло:

$$grad\ n \approx \frac{\Delta n}{\Delta y}. \quad (4)$$

Угол рефракции связан с градиентом показателя преломления формулой вида:

$$r'' = -\frac{\rho''}{D} \int_0^D grad\ n \cdot x \cdot dx, \quad (5)$$

где  $\rho''$  - число секунд в радиане,

$x$  - расстояние от объекта наблюдений до текущей точки траектории.

В формуле (5) под  $grad\ n$  при измерениях *вертикального* угла подразумевают проекцию градиента показателя преломления на ось, лежащую в вертикальной плоскости и нормальную к траектории в текущей точке луча, при измерениях *горизонтальных* углов градиент показателя преломления проецируют на горизонтальную плоскость.

При линейных измерениях в **неоднородной** атмосфере стоит задача определения **среднеинтегрального** (результатирующего для трассы) значения показателя преломления ( $n$ ):

$$\langle n \rangle = \frac{1}{D} \int_0^D n \, dx, \quad (6)$$

где  $n$  - значение показателя преломления в текущей точке траектории.

## Требования к точности определения показателя преломления и его градиента при геодезических измерениях

**Линейные измерения.** В соответствии с формулами (1) и (2):

$$D = \frac{v \cdot \tau}{2} = \frac{c \cdot \tau}{2 \langle n \rangle}. \quad (7)$$

В формуле (7) с целью упрощения точностных расчетов показатель преломления вдоль визирного луча будем считать постоянным, т.е.

$\langle n \rangle = n = const$ . Представив зависимость (7) в дифференциальном виде, можно получить представление о характере влияния изменений  $\Delta n$  показателя преломления на измеренную дальность  $D$ , для простоты и наглядности прочие аргументы функции (7) будем считать постоянными:

$$\Delta D = -\frac{D}{n} \Delta n. \quad (8)$$

Воспользовавшись формулой средней квадратической ошибки функции общего вида, получим формулу, связывающую средние квадратические ошибки определения показателя преломления  $m_n$  и расстояния  $m_D$ :

$$m_D = \sqrt{\left(\frac{dD}{dn}\right)^2 m_n^2} = D \cdot m_n. \quad (9)$$

$$m_n = \frac{m_D}{D}. \quad (10)$$

**Угловые измерения.** Будем считать градиент показателя преломления в плоскости измерений в направлении, нормальном к визирному лучу, постоянным, т.е.  $grad n = const$ , что позволит преобразовать формулу (5):

$$r'' = -\frac{\rho''}{D} \int_0^D grad n \cdot x \cdot dx = -\frac{\rho''}{D} grad n \int_0^D x \cdot dx = -\frac{\rho''}{D} grad n \frac{D^2}{2}.$$

В окончательном виде имеем:

$$r'' = -\frac{\rho'' D}{2} \text{grad } n. \quad (11)$$

В соответствии с формулой средней квадратической ошибки функции общего вида и зависимостью (11):

$$m_{r''} = \sqrt{\left(\frac{dr''}{d(\text{grad } n)}\right)^2} m_{\text{grad } n}^2 = \frac{\rho'' D}{2} m_{\text{grad } n}, \quad (12)$$

где  $m_{r''}$  и  $m_{\text{grad } n}$  - средние квадратические ошибки определения угла рефракции и градиента показателя преломления. Тогда:

$$m_{\text{grad } n} = \frac{2m_{r''}}{\rho'' D}. \quad (13)$$

Формула (13) позволяет оценить требования к точности определения градиента показателя преломления в зависимости от требований к точности угловых геодезических измерений.

### **Показатель преломления и его градиент как функции метеопараметров**

В оптическом диапазоне показатель преломления является функцией температуры, давления, влажности воздуха и длины волны излучения. При измерениях в широком диапазоне световых волн формула для определения эффективного группового индекса преломления имеет вид:

$$N = (n - 1)10^6 = 83,11 \frac{p}{T} - 11,4 \frac{e}{T}, \quad (17)$$

где  $T$ ,  $p$  и  $e$  - температура, давление и влажность (парциальное давление водяного пара) воздуха в К и гПа.

При спутниковых измерениях используют радиоволны. Зависимость индекса преломления от метеопараметров в радиодиапазоне описывает формула Фрума-Эссена:

$$N = (n - 1)10^6 = 73,63 \frac{P}{T} - 12,92 \frac{e}{T} + 371914 \frac{e}{T^2}. \quad (18)$$

Изменение метеопараметров приведет к изменению показателя преломления:

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial N}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial N}{\partial e} \Delta e. \quad (19)$$

Точность определения показателя преломления в точке зависит от точности измерения температуры, давления и влажности воздуха. Воспользуемся формулой средней квадратической ошибки функции общего вида для того чтобы выразить ошибку определения индекса преломления через ошибки определения аргументов  $T$ ,  $p$  и  $e$ :

$$m_N = \sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)^2 m_T^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial p}\right)^2 m_p^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial e}\right)^2 m_e^2}. \quad (20)$$

В таблице (1) приведены значения частных производных функций (17) и (18), вычисленные для нормальных условий ( $T$  - 293,15 К,  $p$  - 1013,25 гПа,  $e$  - 13,33 гПа).

**Таблица 1** - Значения частных производных показателя преломления в оптическом и радио- диапазонах

<b>Производная</b>	<b>Оптический диапазон</b>	<b>Радиодиапазон</b>
$dn/ dT$	$-1 \cdot 10^{-6}/\text{К}$	$-1,3 \cdot 10^{-6}/\text{К}$
$dn/ dp$	$0,3 \cdot 10^{-6}/\text{гПа}$	$0,3 \cdot 10^{-6} \text{ гПа}$
$dn/ de$	$-0,04 \cdot 10^{-6}/\text{гПа}$	$4,3 \cdot 10^{-6} \text{ гПа}$

Заменив приращения в формуле (19) градиентами, получим приближенную формулу, выражающую градиент показателя преломления световых волн через градиенты метеопараметров при нормальных условиях (воспользуемся второй колонкой Таблицы 1):

$$\text{grad } n = -1 \cdot 10^{-6} \text{ grad } T + 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ grad } p - 0,04 \cdot 10^{-6} \text{ grad } e. \quad (21)$$

Выразим среднюю квадратическую ошибку определения градиента показателя преломления  $m_{grad n}$  через ошибки градиентов метеопараметров:

$$m_{grad n} = \sqrt{\left(\frac{\partial(\text{grad } n)}{\partial(\text{grad } T)}\right)^2 m_{grad T}^2 + \left(\frac{\partial(\text{grad } n)}{\partial(\text{grad } p)}\right)^2 m_{grad p}^2 + \left(\frac{\partial(\text{grad } n)}{\partial(\text{grad } e)}\right)^2 m_{grad e}^2}. \quad (22)$$

Частные производные в формуле (22) равны коэффициентам при аргументах линейной функции (21):

$$m_{grad n} = \sqrt{(-1 \cdot 10^{-6})^2 m_{grad T}^2 + (0,3 \cdot 10^{-6})^2 m_{grad p}^2 + (-0,04 \cdot 10^{-6})^2 m_{grad e}^2}. \quad (23)$$

### Задание контрольной работы № 1

Исходные данные к задачам Контрольной работы № 1 помещены в Таблицу .

При формировании индивидуальных исходных данных следует использовать свой порядковый номер  $-ij$ . Если порядковый номер однозначный, в качестве первого знака используйте 0. Например, для порядкового номера 1 в качестве первого знака используется 0, например,  $ij = 01$

. Согласно таблице при решении

Если  $ij = 01$ , то  $i=0, j=1$ . Согласно таблице при решении

задач следует использовать  $D=1,2$  км;  $M=50000$ ;

$\Delta T=+4$  °C;  $e=9$  гПа;  $z=85$ °

### Линейные измерения

*Задача 1.* С какой средней квадратической ошибкой  $m_n$  следует определять показатель преломления, если расстояние  $D$  требуется измерить с относительной ошибкой  $1/M$ , а измерения выполняют светодальномером.

*Задача 2.* В условиях предыдущей задачи оценить требования к точности измерения температуры  $m_T$ , давления  $m_p$  и влажности  $m_e$  воздуха.

*Задача 3.* К какой ошибке  $\Delta_D$  определения расстояния  $D$  приведет неучет изменения температуры на  $\Delta T$ , если значения других метеопараметров были постоянными, т.е.  $\Delta p = \Delta e = 0$ .

*Задача 4.* Сравнить ошибки определения расстояния  $D$  свето-  $\Delta_{D_{\text{св}}}$  и радиодальномером  $\Delta_{D_{\text{радио}}}$ , обусловленные неучетом влияния влажности, если на момент измерений на высоте измерений абсолютная влажность была равна  $e = \Delta e$ .

**Таблица 2 - Исходные данные к контрольной работе № 1**

Варианты	$i$	$j$	$i$	$j$	$i$	$j$
	Целые км в расстоянии $D$	Десятые доли км в расстоянии $D$	$M$	$\Delta T,$ $^{\circ}\text{C}$	$e,$ в гПа	$z,^{\circ}$
0	1	0	50000	+2	9	80
1	1	2	100000	+4	11	85
2	2	4	150000	+6	13	90
3	2	6	200000	+8	15	95
4	3	8	500000	+10	17	100
5	3	0	50000	-2	9	80
6	4	2	100000	-4	11	85
7	4	4	150000	-6	13	90
8	5	6	200000	-8	15	95
9	5	8	500000	-10	17	100

### Угловые измерения

**Задача 5.** К какой ошибке определения превышения  $\Delta_h$  приведет угол вертикальной рефракции  $\gamma=10''$  на трассе протяженностью  $D$ , если измеренное зенитное расстояние равно  $z$ ? Считать, что ошибка определения зенитного расстояния  $\Delta_z=r$ . Сравнить полученное значение с предельной случайной средней квадратической ошибкой нивелирования I, II, III и IV классов

(предельную ошибку принять равной утроенной случайной средней квадратической ошибке (Таблица 3)).

**Задача 6.** В условиях предыдущей задачи определить соответствующее значение вертикального градиента показателя преломления.

*Задача 7.* Используя исходные данные *Задачи 5* и результаты, полученные в *Задаче 6*, вычислить вертикальный градиент температуры, который мог привести к формированию угла рефракции  $r$ , если градиент давления равен его нормальному значению 0,12 гПа/м, а градиент влажности пренебрежимо мал.

*Задача 8.* Вычислить углы горизонтальной рефракции для визирных линий длиной  $D$ , расположенных на расстояниях 0,5; 1,0 и 3,0 м от нагретой бетонной стены, если горизонтальные температурные градиенты равны

$$\left(\text{grad}_{\text{гор}} T\right)_{0,5} = 1 \text{ }^\circ/\text{м}; \left(\text{grad}_{\text{гор}} T\right)_{1,0} = 0,1 \text{ }^\circ/\text{м}; \left(\text{grad}_{\text{гор}} T\right)_{3,0} = 0,01 \text{ }^\circ/\text{м},$$

а горизонтальные градиенты давления и влажности пренебрежимо малы.

На каком расстоянии от стены (из трех указанных выше) следует располагать визирную линию, если измерения выполняют в полигонометрии IV класса (предельная ошибка угловых измерений - 5")?

**Таблица 3** - Точность нивелирования I, II, III и IV классов

Класс нивелирования	Случайная средняя квадратическая ошибка, мм/км	Допустимые невязки в полигонах и по линиям, мм
I	0,8	$3 \text{ мм}\sqrt{L}$
II	2,0	$5 \text{ мм}\sqrt{L}$
III	5,0	$10 \text{ мм}\sqrt{L}$
IV	10,0	$20 \text{ мм}\sqrt{L}$

$L$  - длина нивелирной линии в км.