1 ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1 Основные понятия

В реальных условиях все измерения имеют погрешности, которые можно разделить на две группы: систематические и случайные.

Систематические погрешности возникают, в основном, из-за ограниченной точности измерительных приборов, а также вследствие закономерных воздействий на процесс измерений. К закономерному искажению экспериментальных результатов приведет, например, наличие массивного металлического тела недалеко от места проведения измерений с помощью компаса; влияние параллакса на считывание результатов измерений со шкалы и т.д.

Случайные погрешности появляются вследствие случайного характера самой измеряемой величины и из-за незакономерных воздействий, искажающих результаты измерений. Со случайным характером измеряемой величины мы встретимся, например, измеряя температуру воздуха в лаборатории, так как температура воздуха испытывает небольшие колебания даже при постоянных условиях.

Случайные погрешности приводят к получению разных результатов при повторных измерениях, проведенных в одинаковых условиях. При этом характерно примерно симметричное распределение данных около среднего значения измеряемой величины.

1.2 Прямые и косвенные измерения

Измерения физических величин делятся на прямые и косвенные.

При прямых измерениях значение величины определяют непосредственно с помощью прибора (например, длину ребра куба с помощью линейки).

При косвенных измерениях искомую величину рассчитывают по формуле, в которую входят результаты прямых измерений и заданные значения вспомогательных величин и констант. Примером косвенных измерений может служить определение объема куба путем возведения в кубическую степень длины его ребра, измеренной с помощью линейки.

1.3 Абсолютная и относительная погрешности

Из-за наличия погрешностей результаты измерений (как прямых, так и косвенных) всегда отличаются от истинного значения измеряемой величины. В качестве одной из характеристик серии измерений обычно используют среднее арифметическое значение

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \tag{1}$$

где x_i — результат i-го измерения, а N — количество проведенных измерений.

Абсолютная погрешность Δ показывает — на сколько среднее значение (1), рассчитанное по данным конкретной серии измерений, отличается от истинного значения (измеряется в тех же единицах, что и сама измеряемая величина).

Предназначение относительной погрешности показать — на сколько процентов мы ошиблись при проведении измерений. Поэтому за 100% следовало бы принять истинное значение измеряемой величины. Но истинное значение всегда неизвестно. Поэтому за 100% обычно принимают известную величину, которая наиболее близка к истинному значению: среднее арифметическое в серии (1). Таким образом, относительная погрешность находится по формуле:

$$\eta = \frac{\Delta}{\bar{x}} \times 100\%. \tag{2}$$

Результат вычисления относительной погрешности округляется до двух значащих цифр.

Относительную погрешность, выраженную в процентах, достаточно записать двумя значащими цифрами.

1.4 Систематическая погрешность при прямых измерениях

В качестве систематической погрешности прямых измерений $\Delta_{сист}$ будем рассматривать систематическую погрешность прибора. Для приборов со шкалой (кроме электроизмерительных) — линеек, штангенциркулей, секундомеров, оптических измерительных приборов и т.п., систематическая погрешность $\mathit{\Delta}_{сист}$ равна наименьшему делению шкалы прибора. Для цифровых приборов $\mathit{\Delta}_{сист}$ совпадает с единицей наименьшего учитываемого разряда по индикатору прибора. При отсутствии случайной погрешности (нет разброса значений в серии измерений) $\mathit{\Delta}_{сист}$ ограничивает сверху разность между измеренным и истинным значениями, а значит, является абсолютной погрешностью $\mathit{\Delta}$.

1.5 Вероятность случайного события

Вероятностью случайного события называют долю опытов, которая приводит к желаемому результату, если общее число опытов является достаточно большим (строго говоря, стремится к бесконечности). Другими словами, если при общем достаточно большом числе опытов N интересующее нас событие наблюдалось в N_1 случаях, то вероятность этого события

$$P \approx \frac{N_1}{N}.$$

Предположим, мы бросаем монету и нас интересует выпадение «решки». Если монету бросить 10 раз, то «решка» в принципе может выпасть любое количество раз от 1 до 10. Если же монету бросить тысячу раз, то число выпадений «решки» будет близко к пятистам, то есть отношение N_1/N будет мало отличаться от 0,5. И чем больше N — тем ближе отношение N_1/N к 0,5. Именно это и означает, что вероятность выпадения «решки» равна 0,5.

1.6 Случайная погрешность, доверительный интервал

Как уже отмечалось ранее, случайная погрешность приводит к тому, что результаты измерений физической величины, проведенных при одинаковых условиях, оказываются разными. Более того, средние арифметические значения, рассчитанные по данным разных серий, также не совпадают друг с другом.

Понятно, что чем длиннее серия, тем более достоверную информацию об измеряемой физической величине мы получаем. Поэтому под истинным значением физической величины при этих условиях понимают предел, к которому стремится среднее арифметическое значение (1) при стремлении числа опытов в серии N к бесконечности. Понятно, что в принципе невозможно провести столь длинную серию измерений, которая гарантировала бы совпадение среднего арифметического с истинным значением измеряемой величины.

Поэтому цель экспериментатора оценить — на сколько среднее арифметическое, рассчитанное по результатам конкретной серии измерений, отличается от истинного значения. Делается это путем расчета доверительного интервала (рис. 1), которым называется интервал, с заданной вероятностью содержащий истинное значение.

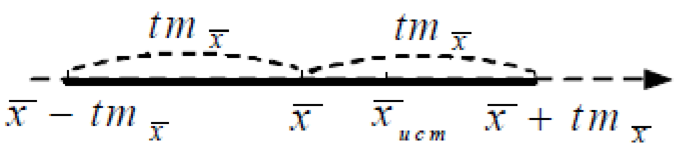

Рис. 1.1. Доверительный интервал измерения

Приведем алгоритм расчета доверительного интервала по разработанному в математической статистике методу Стьюдента для нормального закона распределения случайной величины (распределение Гаусса):

1. Для проведенной серии из N измерений по формуле (1) рассчитывается среднее арифметическое значение$\bar{x}_N$.

2. Вычисляется среднее квадратичное отклонение среднего арифметического

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_N)^2}{N(N-1)}}. \qquad (3)$$

Задается доверительная вероятность P, с которой истинное значение попадет в рассчитываемый доверительный интервал.

4. По таблице1 находится коэффициент Стьюдента $t = f\,(N, P)$, который зависит от количества измерений N в проведенной серии и от заданного значения доверительной вероятности P.

5. Рассчитывается полуширина доверительного интервала $t * m_{\bar{x}}$, которая в обе стороны откладывается от среднего арифметического значения (на рис.1 доверительный интервал выделен жирной линией).

При заданной доверительной вероятности P полуширина доверительного интервала ограничивает сверху абсолютное значение разности среднего и истинного значений (рис. 1). Поэтому абсолютная случайная погрешность — это полуширина доверительного интервала:

$$\Delta_{\text{случ}} = t * m_{\bar{x}}. \qquad (4)$$

Если число опытов в серии $N \geq 32$, то при коэффициенте надежности P=0,68 коэффициент Стьюдента $t \approx 1$, то есть $\Delta_{\text{случ}} \approx m_{\bar{x}}$.

Таблица 1. Коэффициент Стьюдента находится на пересечении строки с заданным значением N и столбца с заданной величиной P.

N-1	*P*							
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
2	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	63,7	636,6
3	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	9,9	31,6
4	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	5,8	12,9
5	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	4,6	8,6
6	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	4,0	6,9
7	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,7	6,0
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,5	5,4
9	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	3,4	5,0
10	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	3,3	4,8
20	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,9	3,9
30	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,8	3,7
31	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,6	3,3

1.7 Методика обработки результатов прямых измерений

1. Установить систематическую погрешность измерительного прибора $\Delta_{\text{сист}}$ и записать ее.

2. Провести серию измерений. Если все показания прибора совпадают между собой, то случайной погрешности нет, и результат измерений следует представить в виде

$$x = x_{\text{изм}} \pm \varDelta_{\text{сист}},$$

где $x_{\text{изм}}$ —показание прибора. а $\varDelta_{\text{сист}}$ - погрешность округления (половина единицы последнего заданного десятичного знака).

Например, если показания измерителя линейных размеров составляет $l_{\text{изм}}$=0,8 мм, то $\Delta_{\text{сист}}$= 0,05 мм; если же $l_{\text{изм}}$= 0,81 мм, то $\varDelta_{\text{сист}}$ = 0,005 мм, а результат измерения будет, соответственно, записан в виде:

l = (0,8$\pm$0,05) мм или l=(0,81 $\pm$ 0,005) мм.

3. Если не все результаты измерений совпадают между собой, то нужно рассчитать случайную погрешность, последовательно применяя формулы (1), (3) и (4). Используемое при этом значение коэффициента Стьюдента (таблица 1) должно соответствовать количеству измерений N в серии и выбранному значению доверительной вероятности P, которое обычно превышает или равняется 0,95. Результат измерений следует представить в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta, \tag{5}$$

где

$$\varDelta = \sqrt{\varDelta_{\text{сист}}^2 + \varDelta_{\text{случ}}^2} \tag{6}$$

- абсолютная погрешность измерения величины x.

Отметим, что запись (5) означает, что истинное значение измеряемой величины с выбранной доверительной вероятностью P попадает в интервал с верхней границей $\bar{x} + \varDelta$ и нижней границей $\bar{x} - \varDelta$.

1.8 Задача №1

Для измерения длины, высоты и других линейных размеров тел применяют масштабные линейки, рулетки, а для точных измерений — штангенциркуль, микрометр и оптические приборы для линейных измерений.

Рассмотрим результаты измерений диаметра (d) и высоту (a) диска микрометром.

Случайная погрешность здесь обусловлена погрешностью изготовления диска. Поэтому один и тот же параметр нужно измерять в разных точках диска.

Результаты измерений представлены в таблице 1.

Таблица 1.

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7
диаметр диска d, мм	30,02	29,84	29,75	30,12	30,07	30,81	29,90
высота диска a, мм	7,01	7,01	6,98	7,02	6,99	6,97	7,00

Обработка результатов прямых измерений

1. Определим систематическую погрешность микрометра (по паспортным данным): $\Delta_{\text{сист}} = \pm 0{,}02$ мм.
2. Рассчитаем по формуле (1) среднее значение измеряемой величины d и a:

$$\bar{d} = \frac{30{,}02+29{,}84+29{,}75+30{,}12+30{,}07+30{,}81+29{,}90}{7} = 30{,}0729 \text{ мм},$$

аналогично $\bar{a} = 6{,}9971$ мм.

3. Рассчитаем по формуле (3) средние квадратичные отклонения средних значений:

$$m_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\begin{gathered}(30{,}02-30{,}07286)^2+(29{,}84-30{,}07286)^2+\\+(29{,}75-30{,}07286)^2+(30{,}12-30{,}07286)^2+\\+(30{,}07-30{,}07286)^2+(30{,}81-30{,}07286)^2+\\+(29{,}90-30{,}07286)^2\end{gathered}}{7(7-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}70686}{42}} = 0{,}1324 \text{ мм},$$

аналогично $m_{\bar{a}} = 0{,}0068$ мм.

4. Рассчитаем по формуле (4) случайные погрешности с доверительной вероятностью P=0,95:

$$\Delta_{\text{случ } d} = t * m_{\bar{d}} = 2{,}6*0{,}1324 = 0{,}344355 \text{ мм},$$

аналогично $\Delta_{\text{случ } a} = 0{,}017684$ мм.

5. Рассчитаем по формуле (6) абсолютную погрешность Δ_d:

$$\Delta_d = \sqrt{0{,}02^{\ 2} + 0{,}344355^2}=0{,}344936 \text{ мм}$$

аналогично $\Delta_a = 0{,}026697$ мм.

6. Рассчитаем по формуле (2) относительную погрешность η:

$$\eta_d = \frac{0{,}344936}{30{,}07286} \times 100\% = 1{,}147\ \%,$$

аналогично $\eta_a = 0{,}3815$ %.

7. Запишем результат измерения внешнего диаметра d и высоту a диска в виде (5).

При записи доверительного интервала в численном значении абсолютной погрешности следует оставлять одну или две значащие цифры, а у среднего значения точность представления не должна быть выше, чем у абсолютной погрешности.

Поскольку использованный прибор не измеряет тысячные доли миллиметра, то численное значение Δ следует округлить до сотых, то есть принять, что Δ = 0,34 мм. Ну а раз погрешность не содержит тысячных долей миллиметра, то и среднее значение не должно их содержать. Поэтому результат измерений следует представить в виде:

d = (30,07 ± 0,34) мм;

a = (7,00±0,03) мм.

1.9 Варианты исходных данных к задаче №1

Погрешность СИ $\Delta_{\text{сист}} = \pm 0{,}01$ мм.

Результаты измерений формируются индивидуально для каждого студента в соответствие с двумя последними цифрами номера зачетной книжки (табл. 2).

Таблица 2.

Предпоследняя цифра шифра	Диаметр диска d_i, мм	Последняя цифра шифра	Высота диска a_i, мм
0	30.03; 29.97; 30.01; 30.04; 29.83; 29.93; 30.05; 30.01; 29.91; 29.98	0	7.01; 6.96; 7.01; 6.04; 6.83; 6.93; 7.05; 7.01; 6.91; 6.97
1	35.01; 35.96; 35.01; 35.05; 34.81; 34.92; 35.05; 35.01; 34.91; 34.97	1	8.01; 7.96; 8.01; 8.05; 7.89 7.92; 8.04; 8.01; 7.91; 8.97

2	40.01; 39.97; 40.01; 40.05; 39.8; 39.97; 40.05; 40.01; 39.93; 39.95	2	9.01; 8.97; 9.01; 9.05; 8.8; 39.97; 9.03; 9.01; 8.99; 8.96
3	44.91; 44.97; 45.02; 45.05; 44.8; 44.97; 45.04; 45.02; 44.93; 44.95	3	7.01; 6.96; 7.01; 6.04; 6.83; 6.93; 7.05; 7.01; 6.91; 6.97
4	49.91; 50.04; 50.02; 50.05; 49.8; 49.97; 50.04; 50.02; 49.93; 49.95	4	8.01; 7.96; 8.01; 8.05; 7.89 7.92; 8.04; 8.01; 7.91; 8.97
5	54.81; 55.04; 55.01; 55.03; 54.79; 54.97; 55.03; 55.02; 54.93; 54.95	5	9.01; 8.97; 9.01; 9.05; 8.8; 39.97; 9.03; 9.01; 8.99; 8.96
6	59.91; 60.02; 60.01; 59.95; 59.79; 59.97; 60.03; 60.02; 59.93; 59.95	6	7.01; 6.96; 7.01; 6.04; 6.83; 6.93; 7.05; 7.01; 6.91; 6.97
7	65.01; 64.93; 65.01; 64.95; 64.78; 64.99; 65.04; 65.02; 64.93; 64.95	7	8.01; 7.96; 8.01; 8.05; 7.89 7.92; 8.04; 8.01; 7.91; 8.97
8	70.02; 69.97; 70.01; 69.96; 69.79; 69.99; 70.04; 70.01; 69.95; 69.95	8	9.01; 8.97; 9.01; 9.05; 8.8; 39.97; 9.03; 9.01; 8.99; 8.96
9	75.03; 74.98; 75.01; 74.99; 74.89; 74.99; 75.04; 75.01; 77.98; 74.95	9	7.01; 6.96; 7.01; 6.04; 6.83; 6.93; 7.05; 7.01; 6.91; 6.97

2 ОБРАБОТКА КОСВЕННЫХ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При косвенных измерениях искомую величину рассчитывают по формуле, в которую входят результаты прямых измерений и заданные значения вспомогательных величин и констант. Примером косвенных измерений может служить определение объема куба путем возведения в кубическую степень длины его ребра, измеренной с помощью линейки.

В рамках практического занятия №1 были вычислены абсолютные ошибки (Δd, Δa) прямых измерений диаметра (d) и высоты (a) диска, а также средние значения этих величин.

Необходимо определить абсолютную (Δ_V) и относительную (η_V) погрешность результата косвенных измерений объема диска, описываемых функциональной зависимостью:

$$V = \frac{\pi a d^2}{4}. \qquad (1)$$

Формулы расчета ошибок косвенных измерений и некоторых часто применяемых функциональных зависимостей приведены в таблице 1.

Таблица 1

№ п.п.	Операция (функция) P =	Абсолютная ошибка ΔP результата P, формула ΔP =	Относительная ошибка результата (ΔP/|P|) =
1	A+B	ΔA+ΔB	(ΔA+ΔB)/|A+B|
2	A-B	ΔA+ΔB	(ΔA+ΔB)/|A-B|
3	AB	AΔB+BΔA	(ΔA/|A|) + (ΔB/|B|)
4	ABC	ABΔC+BCΔA+ ACΔB	(ΔA/|A|) + (ΔB/|B|) + (ΔC/|A|)
5	A/B	$(B\Delta A + A\Delta B)/B^2$	(ΔA/|A|) + (ΔB/|B|)
6	A^k	$kA^{k-1}\Delta A$	k(ΔA/|A|)
7	$A^{1/k}$	$(1/k)\, A^{(1/k)-1}\, \Delta A$	(1/*k*)(ΔA/|A|)
8	*sin*A	|*cosA*|ΔA	|*ctg*A|ΔA
9	*cos*A	|*sinA*|ΔA	|*tg*A|ΔA
10	*tg*A	$\Delta A/cos^2 A$	2ΔA/|*sin*2A|
11	*ctg*A	$\Delta A/sin^2 A$	2ΔA/|cos2A|
12	*ln*A	ΔA/|A|	ΔA/(|A*ln*A|)
13	e^A	$e^A\, \Delta A$	ΔA

Примечание: A, B, C – исходные данные (аргументы в функции);

ΔA, ΔB, ΔC – ошибки исходных данных; P, ΔP - результат и его ошибка

При выводе формул:

• *предположение о том, что ошибки исходных данных ΔA, ΔB, ΔC малы, по сравнению с их величинами A, B, C (составляют не более 10%);*

• *произведениями, квадратами и более высокими степенями ошибок пренебрегают - как величинами второго порядка малости;*

• *рассматривается самое неблагоприятное сочетание знаков ошибок исходных данных, т. е. определяется величина максимально возможной (предельной) ошибки результата P.*

2.1 Задача №2

Исходные данные:

Диаметр диска: d = (30,07 ± 0,34) мм

Высота диска: a = (7,00±0,03) мм.

1. Пользуясь формулами таблицы 1 выведем формулу расчета абсолютной погрешности Δ_v косвенного измерения V (1) диска:

   — применим формулу (3) таблицы 1:

   $$\Delta_V = \frac{\pi}{4}[a(\Delta d^2) + d^2\Delta\mathrm{a}],$$

   — далее применим формулу (6) таблицы 1:

   $$\Delta_V = \frac{\pi}{4}[a(\Delta d^2) + d^2\Delta\mathrm{a}] = \frac{\pi}{4}[a(2d\Delta d) + d^2\Delta\mathrm{a}].$$

2. Подставим численные значения *a, d, Δa, Δd* в полученное выражение:

$$\Delta_V = \frac{\pi}{4}[7.00(2 * 30{,}7 * 0{,}34) + 30{,}7^2 * 0{,}03] = 138{,}1 \text{ мм}^3.$$

3. Определим относительную погрешность измерения объема диска:

   — по формуле (1): $V = \frac{3.14 * 30.7^2 * 7}{4} = 4967{,}52 \text{ мм}^3$;

   — относительная погрешность:

$$\eta_V = \frac{\Delta_V}{V} * 100\% = \frac{138{,}1}{4967{,}528} * 100 = 2{,}8\%.$$

2.2 Варианты исходных данных к задаче №2

Исходными данными к практической задаче №2 являются результаты обработки прямых измерений, полученных при решении практической задачи №1.

3 ОСНОВЫ РАСЧЕТА ЕМКОСТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

3.1 Расчет емкостного преобразователя перемещения

Емкостной преобразователь перемещения изображен на рис.3.1.

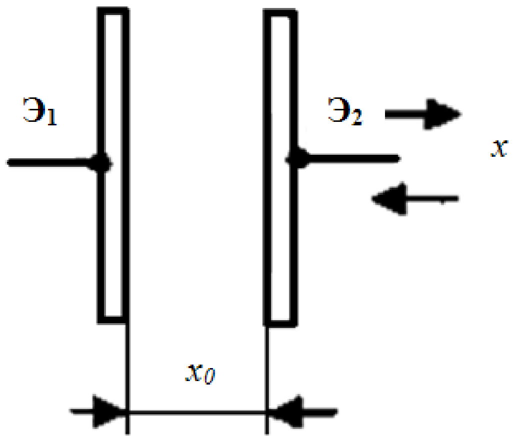

Рис.3.1. Схема емкостного преобразователя перемещения

При расчетах емкостных преобразователей с изменением воздушного зазора x между электродами электрода Э1 и Э2 можно воспользоваться следующими соотношениями.

1. Электрическая емкость преобразователя

$$C_x = \frac{\varepsilon_0 * \varepsilon * F}{x}, \tag{1}$$

где ε_0- диэлектрическая постоянная, $\varepsilon_0 = 8{,}842 * 10^{-12}$ Ф/м; ε -относительная диэлектрическая проницаемость среды (для воздуха $\varepsilon_в$=1); F -площадь перекрытия пластин (электродов).

2. Чувствительность преобразователя:

$$S_x = \frac{dC_x}{dx} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon F}{x^2}. \tag{2}$$

3. Электрическое сопротивление преобразователя:

$$X_c = \frac{1}{2\pi f C_x} = \frac{x}{2\pi f \varepsilon_0 \varepsilon F'}. \tag{3}$$

3.2 Расчет емкостного преобразователя толщины

Емкостной преобразователь толщины диэлектрической ленты изображен на рис.3.2.

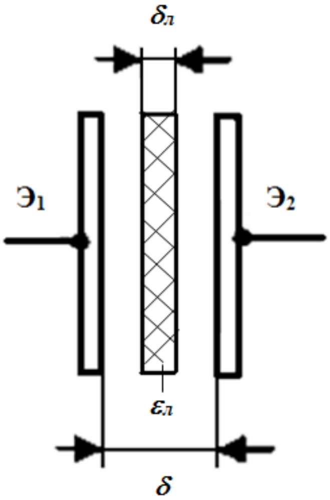

Рис.3.2. Схема емкостного преобразователя толщины диэлектрической ленты

При расчетах емкостных преобразователей для измерения толщины диэлектрической ленты можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$C_\delta = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon F}{\delta - \delta_л (1 - 1/\varepsilon_л)}; \quad (4)$$

$$S_\delta = \frac{\varepsilon_0 F(\varepsilon_л - 1)}{\varepsilon_л (\delta - \delta_л (1 - 1/\varepsilon_л))^2}; \quad (5)$$

$$X_c = \frac{1}{2\pi f C_\delta}. \quad (6)$$

где C_δ, S_δ, X_c - значение емкости, чувствительность и электрическое сопротивление преобразователя; F - площадь пластин преобразователя; $\delta, \delta_л$ - зазор между пластинами и толщина диэлектрической ленты, соответственно; $\varepsilon_л$– относительная диэлектрическая проницаемость ленты; f - частота напряжения питания.

3.3 Задача №3

Рассчитать емкостной преобразователь перемещения со следующими параметрами: диаметр пластин D=2 см, начальный зазор $\delta_0 = 0{,}5$ мм, максимальное перемещение подвижной пластины x_m=10 мм, частота питающего напряжения f=0,5 МГц. Построить графики C_x, S_x, Xc в зависимости от текущего значения x с шагом порядка 1 мм.

Подставляя в (1) исходные данные, получим (для x=x_m):

$$C_x = \frac{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi D^2}{4}}{x} = \frac{8.842 * 10^{-12} * 1 * \pi * \frac{(2 * 10^{-2})^2}{4}}{10 * 10^{-3}} =$$

$$= 0.278 * 10^{-12}\ \text{Ф} = 0.278\ \text{пФ}.$$

По формуле (2) определяем чувствительность преобразователя

$$S_x = \frac{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi D^2}{4}}{x^2} = \frac{8.842 * 10^{-12} * 1 * \pi * \frac{(2 * 10^{-2})^2}{4}}{(10 * 10^{-3})^2} = 27.8 * \frac{10^{-12}\ \text{Ф}}{\text{м}} =$$

$$= 27{,}8 \frac{\text{пФ}}{\text{м}} = 0{,}0278\ \text{пФ/мм}.$$

Электрическое сопротивление преобразователя определяем по формуле (3):

$$X_c = \frac{x}{2\pi f \varepsilon_0 \varepsilon \pi D^2/4} = \frac{10 * 10^{-3}}{2\pi * 0.5 * 10^6 * 8.842 * 10^{-12} * 1 * \pi * (2 * 10^{-2})^2/4}$$

$$= 1146 * 10^3\text{Ом} = 1146\ \text{кОм}.$$

Аналогично произведем расчет для других значений x, результаты расчетов сведем в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты расчетов

x, мм	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_x, пФ	5,556	2,778	1,389	0,926	0,695	0,556	0,463	0,397	0,347	0,309	0,278
S_x, пФ/мм	11,11	2,778	0,695	0,309	0,174	0,111	0,077	0,057	0,043	0,034	0,028
X_c, кОм	57,295	115	229	344	458	573	688	802	917	1031	1146

По данным таблицы 1 построены графики зависимостей C_x, S_x, X_c от x, представленные на рис. 3.3.а, б, в.

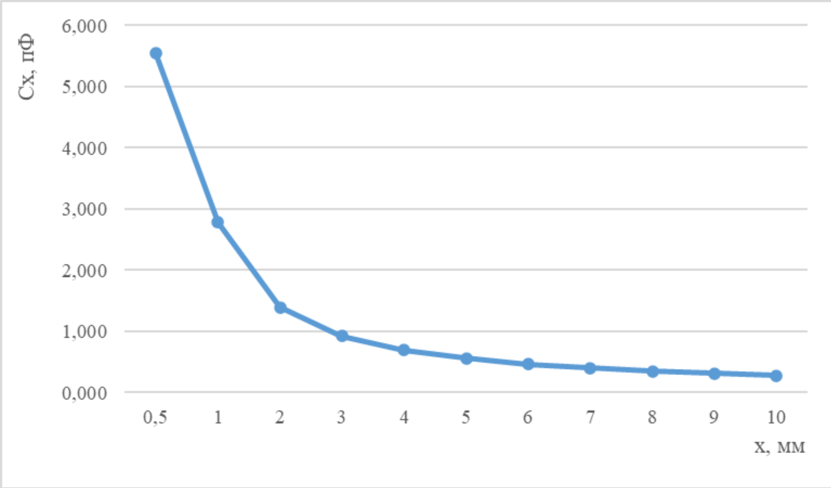

Рис. 3.3.а. График зависимости $C_x = f(x)$

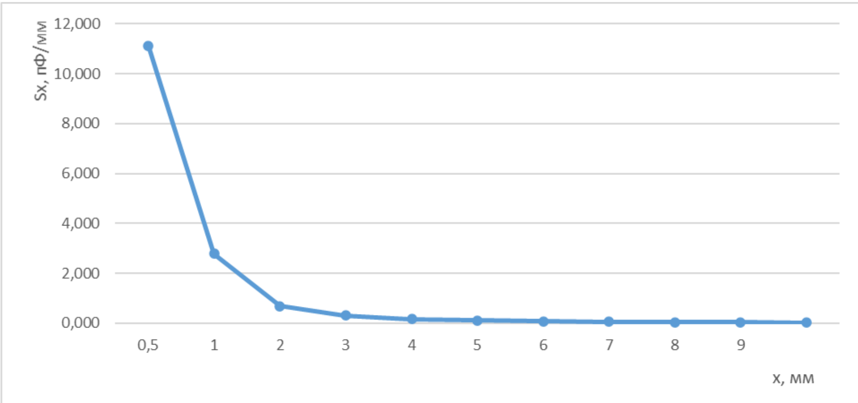

Рис. 3.3.б. График зависимости $Sx = f(x)$

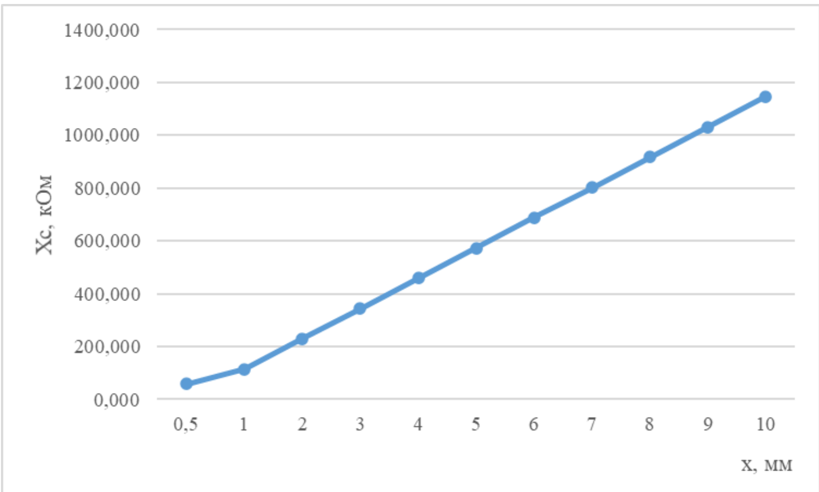

Рис. 3.3.в. График зависимости $X_c = f(x)$

3.4 Варианты исходных данных к задаче №3

Максимальное перемещение подвижной пластины x_m=10 мм, частота питающего напряжения f=0,5 МГц.

Остальные исходные данные для задачи формируются индивидуально для каждого студента в соответствие с двумя последними цифрами номера зачетной книжки (табл. 2).

Таблица. 2

Предпоследняя цифра шифра	Диаметр пластины D, см	Последняя цифра шифра	Начальный зазор δ_0, мм
0	2,0	0	0,6
1	2,1	1	0,61
2	2,2	2	0,62
3	2,3	3	0,63
4	2,4	4	0,64
5	2,5	5	0,65
6	2,6	6	0,66
7	2,7	7	0,67
8	2,8	8	0,68
9	2,9	9	0,69

4 ОСНОВЫ РАСЧЕТА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

4.1 Расчет плотности и величины заряда на гранях пьезоэлементов

Рассмотрение физической природы пьезоэффекта показывает, что при напряженном состоянии материала заряды принципиально могут возникать между тремя парами граней. Таким образом, поляризационный заряд является вектором и описывается тремя компонентами. Напряженное состояние характеризуется тензором второго ранга с девятью компонентами.

Пьезоэлектрический модуль, определяющий зависимости заряда от напряженного состояния, является тензором третьего ранга и определяется 27 компонентами.

Однако, при статическом равновесии, тензор механических напряжений содержит только 6 независимых компонентов, которые обозначаются: $\sigma_{11}=\sigma_1$; $\sigma_{22}=\sigma_2$; $\sigma_{33}=\sigma_3$; $\sigma_{44}=\sigma_4$; $\sigma_{55}=\sigma_5$; $\sigma_{66}=\sigma_6$;

Это позволяет перейти к упрощенной форме записи пьезомодуля, представив его в виде матрицы, содержащей 18 компонент вместо 27:

$$d_i = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix}$$

По таблице пьезомодулей можно рассчитать плотность заряда на всех трех гранях, при действии любого механического напряжения.

При сжатии по оси X (рис. 4.а) на грани, перпендикулярной к этой оси, возникает заряд, плотность которого $\delta_1=d_{11}\sigma_1$.

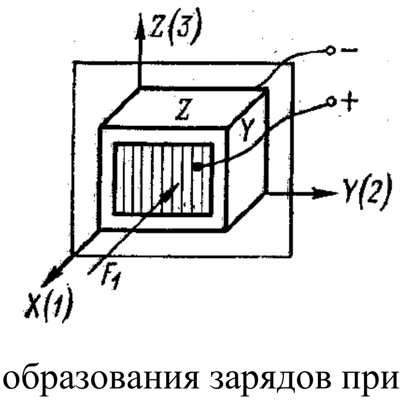

Рис. 4.а. Схема образования зарядов при сжатии по оси X

При сжатии по оси Y (рис. 4.б) плотность заряда $\delta_1=d_{12}\sigma_2$.

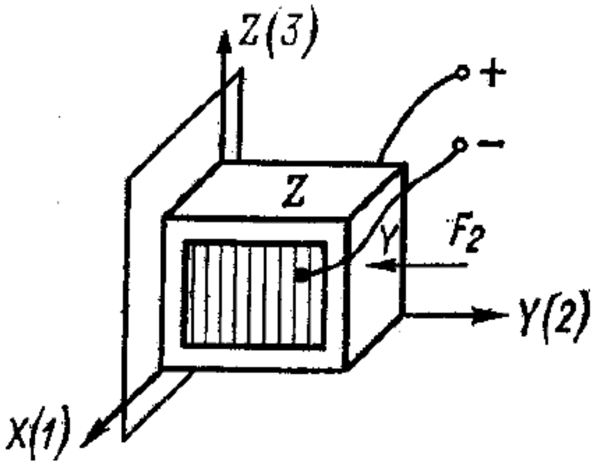

Рис. 4.б. Схема образования зарядов при сжатии по оси Y

При всестороннем сжатии (рис.4.1.в) заряд $\delta_1 = d_{11}\sigma_1 + d_{12}\sigma_2 + d_{13}\sigma_3$.

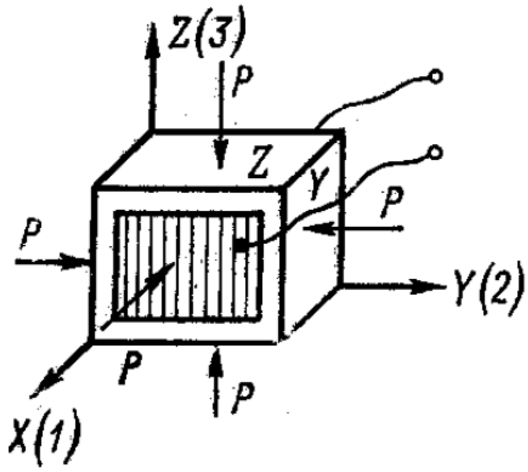

Рис. 4.1.в. Схема образования зарядов при всестороннем сжатии

При сдвиге (рис.4.1.г) $\delta_1 = d_{14}\sigma_4$.

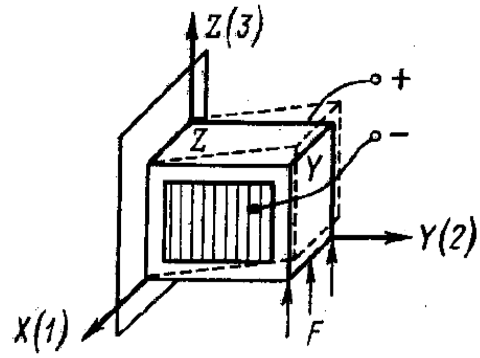

Рис. 4.г. Схема образования зарядов при сдвиге

При продольном пьезоэффекте заряд не зависит от размеров пьезоэлементов. Так при сжатии по оси X заряд

$$q_1 = \delta_1 S_1 = \frac{S_1 d_{11} F_1}{S_1} = d_{11} F_1.$$

При поперечном пьезоэффекте заряд может быть увеличен соответствующим выбором относительных размеров пьезоэлемента, то есть длин ребер x и y:

$$q_1 = \delta_1 S_1 = \frac{S_1 d_{11} F_2}{S_2} = \frac{d_{12} F_2 z y}{z x} = \frac{d_{12} F_2}{x}.$$

В общем виде плотность заряда определяется формулой

$$\delta_i = d_{ij} \sigma_j,$$

(i=1, 2, 3; j=1, 2, .., 6).

Индекс пьезомодуля d_{ij} означает, что рассматривается заряд на грани i при действии напряжения вдоль оси j. При определении знаков заряда за положительное направление поля принимается направление поля вне пьезоэлемента, совпадающее с положительным направлением соответствующей оси.

Обратный пьезоэффект так же определяется по матрице пьезомодулей. При приложении электрического поля напряженностью E_1 между гранями 1-1, или X-X, происходит деформация элемента в направлении оси X, равная

$$\varepsilon_1 = d_{11} E_1.$$

Симметрия структуры веществ приводит к сокращению числа независимых компонент в матрицах пьезомодулей, большая часть компонент оказывается равной 0. Значения пьезомодулей d_{ij} для кварца и титаната бария приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения пьезомодулей

Материал	Значения пьезомодулей $d_{ij}, 10^{-12}$ Кл/Н					
Кварц	-2,31	2,31	0	-0,67	0	0
	0	0	0	0	0,67	4,62
	0	0	0	0	0	0

4.2 Расчет пьезоэлектрического преобразователя

Эквивалентная схема преобразователя, соединенного кабелем с измерительной цепью представлена на рис. 4.2, на котором C_0 – емкость между гранями пьезоэлектрика (емкость преобразователя); $C_к$ – емкость кабеля между жилой и экраном; $C_{вх}$ –входная емкость измерительной цепи; R_0 -сопротивление преобразователя; $R_к$ – сопротивление изоляции кабеля; $R_{вх}$ - входное сопротивление измерительной цепи.

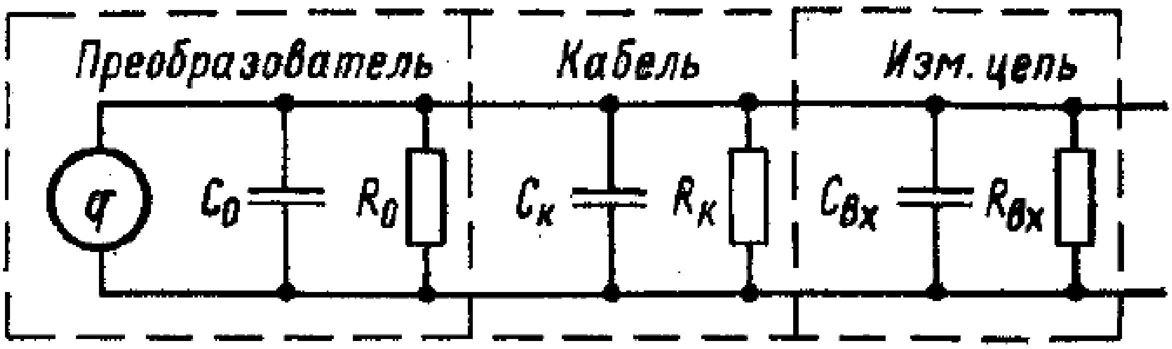

Рис. 4.2. Эквивалентная схема пьезоэлектрического преобразователя

Эквивалентную схему можно упростить (рис. 4.3), где

$$R=R_0 \| \mathrm{R_к} \| R_{вх},\ C=C_0+C_к+C_{вх}.$$

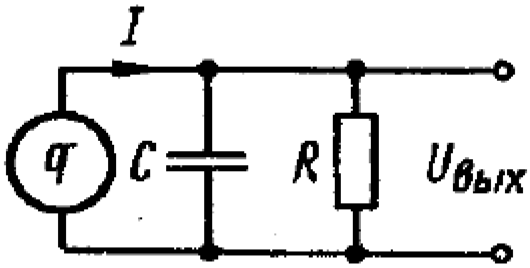

Рис. 4.3. Упрощенная эквивалентная схема пьезоэлектрического преобразователя

При синусоидальной силе: $f=F_m \sin(\omega t)$ мгновенный ток равен

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(d_{11}F_m \sin \omega t)}{dt}.$$

Выходное напряжение преобразователя с подключенной к нему измерительной цепью

$$\dot{U}_{\text{вых}} = \dot{I}\left[\frac{R/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)}\right],$$

где $\dot{I} = j\omega d_{11}\dot{F}$;

$$\dot{U}_{\text{вых}} = d_{11}\dot{F}\left[\frac{j\omega R}{1 + j\omega RC}\right].$$

Как видно из последнего выражения амплитуда напряжения и сдвиг фаз между напряжением и измеряемой силой зависят от частоты

$$U_{\text{вых\_}m} = \frac{d_{11}F_m}{C}\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}};\ \varphi = \frac{\pi}{2} + arctg(\omega RC).$$

Из приведенного выражения следует, что напряжение на входе усилителя не будет зависеть от частоты только при высоких частотах ω>1/(RC)и будет равно

$$\dot{U}_{\text{в вых}} = \frac{d_{11}\dot{F}}{C}.$$

Отсюда видно, что выходное напряжение преобразователя зависит от емкости входной цепи. Поэтому если в характеристиках преобразователя указывается его чувствительность по напряжению, то обязательно должна быть указана и емкость, соответствующая этой чувствительности.

4.3 Задача №4

Определить плотность и величину заряда, образующегося на гранях пьезоэлемента из кварца с габаритными размерами: x=5 мм, y=10 мм, z=5 мм при

а) сжатии вдоль оси X с F_1=2 Н;

б) сжатии вдоль оси Y с F_2=2 Н;

в) всестороннем сжатии с P=2 Н;

г) сдвиге с F=2 Н.

Случай а). При продольном пьезоэффекте заряд не зависит от размеров пьезоэлементов.

Величину заряда определим по формуле:

$$q_1 = d_{11}F_1 = -2.31 * 10^{-12} * 2 = -4.62 * 10^{-12} \text{ Кл.}$$

Плотность заряда:

$$\delta_1 = \frac{q_1}{S_1} = \frac{q_1}{yz} = \frac{-4.62 * 10^{-12}}{10 * 10^{-3} * 5 * 10^{-3}} = -92.4 * 10^{-9} \text{ Кл}/_{\text{м}^2}.$$

Случай б). При поперечном пьезоэффекте

величину заряда определим по формуле:

$$q_1 = \frac{d_{12}F_2y}{x} = \frac{2.31 * 10^{-12} * 2 * 10 * 10^{-3}}{5 * 10^{-3}} = 9.24 * 10^{-12} \text{ Кл.}$$

Плотность заряда:

$$\delta_1 = \frac{q_1}{S_1} = \frac{q_1}{yz} = \frac{9.24 * 10^{-12}}{10 * 10^{-3} * 5 * 10^{-3}} = 184.8 * 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Случай в).

Плотность заряда определим по формуле:

$$\delta_1 = d_{11}\sigma_1 + d_{12}\sigma_2 + d_{13}\sigma_3 = \frac{d_{11}P}{yz} + \frac{d_{12}P}{xz} + \frac{d_{13}P}{xy} =$$

$$= \frac{(-2.31 * 10^{-12} * 2)}{10 * 10^{-3} * 5 * 10^{-3}} + \frac{2.31 * 10^{-12} * 2}{5 * 10^{-3} * 5 * 10^{-3}} + 0 =$$

$$= 92.4 * 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Величина заряда:

$$q_1 = \delta_1 S_1 = \delta_1 yz = 92.4 * 10^{-9} * 10 * 10^{-3} * 5 * 10^{-3} = 4.62 * 10^{-12} \text{ Кл.}$$

Случай г). Плотность заряда определим по формуле:

$$\delta_1 = d_{14}\sigma_4 = \frac{d_{14}F}{xz} = \frac{-0.67 * 10^{-12} * 2}{5 * 10^{-3} * 5 * 10^{-3}} = -53.6 * 10^{-3} \text{ Кл/м}^2.$$

Величина заряда:

$$q_1 = \delta_1 S_1 = \delta_1 yz = -53.6 * 10^{-9} * 10 * 10^{-3} * 5 * 10^{-3} = -2.68 * 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

4.4 Варианты исходных данных к задаче №4

Сжатие вдоль оси *X* F_1=2 Н; сжатие вдоль оси *Y* F_2=2 Н; всестороннее сжатие *P*=2 Н; сдвиг *F*=2 Н.

Остальные исходные данные для задачи формируются индивидуально для каждого студента в соответствие с двумя последними цифрами номера зачетной книжки (табл. 2).

Предпоследняя цифра шифра	Габаритные размеры x, мм/ y, мм	Последняя цифра шифра	Габаритные размеры z, мм
0	4/8	0	4
1	5/10	1	5
2	4/10	2	4
3	5/8	3	4
4	6/10	4	5
5	8/5	5	4
6	4/8	6	4
7	5/10	7	5
8	4/10	8	4
9	5/8	9	4

5 ОСНОВЫ РАСЧЕТА РЕЗИСТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

5.1 Расчет резистивных преобразователей линейного перемещения

Резистивный преобразователь линейного перемещения изображен на рис. 5.1.

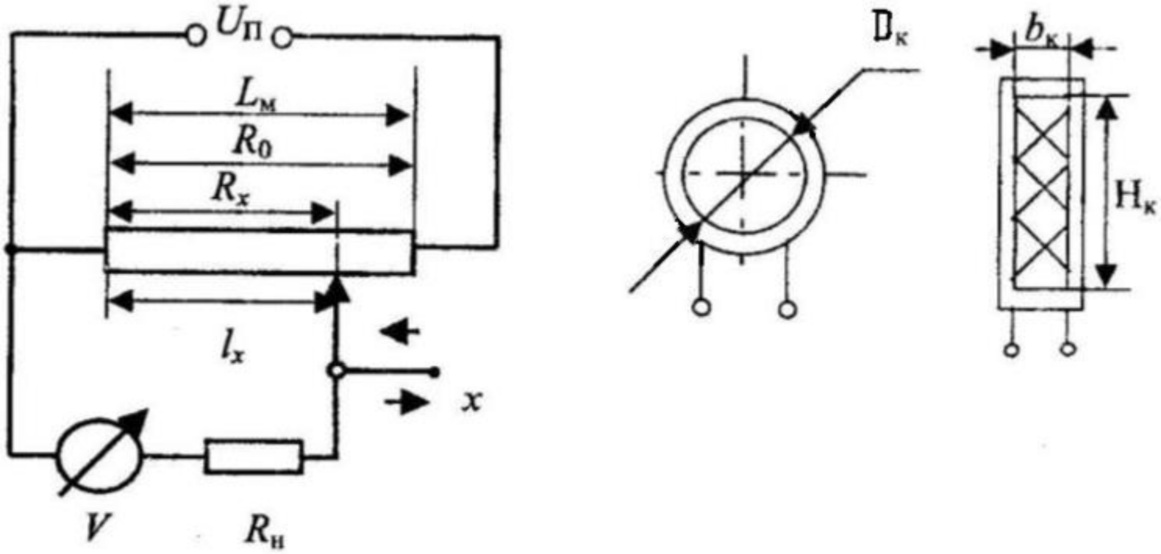

Рис. 5.1. Схема резистивного преобразователя линейного перемещения

Целью расчетов таких преобразователей является определение геометрических размеров, выбор материалов моточных данных и погрешностей. Существуют различные подходы к расчетам в зависимости от поставленной задачи. Один из вариантов расчета заключается в следующем. Задается напряжение источника питания $U_п$, В; полное сопротивление R_0, Ом; максимальное перемещение движка $L_м$, мм; плотность тока в проводе j, А/мм^2; материал проводника с ρ, Ом*мм^2/м; сопротивление нагрузки реостата Rн, Ом. Методика расчета заключается в следующем

1. Определяется диаметр голого провода по формуле:

$$d_0 \geq 2 * \sqrt{\frac{U_П}{\pi * j * R_0}},\ \text{мм} \tag{1}$$

Диаметр провода с изоляцией d_1 определяется из таблицы 1

Таблица 1 – Диаметры проводов с изоляцией

d_0	d_1	d_0	d_1	d_0	d_1
0,06	0,075	0,12	0,140	0,18	0,205
0,07	0,085	0,13	0,150	0,19	0,215
0,08	0,095	0,14	0,160	0,20	0,225
0,09	0,105	0,15	0,170	0,25	0,280
0,10	0,120	0,16	0,185	0,31	0,340
0,11	0,030	0,17	0,195	0,35	0,385

2. Определяется сечение голого провода:

$$q_0 = 0.25\pi d^2, \text{мм}^2 \tag{2}$$

3. Длина провода рассчитывается по формуле:

$$l_n = \frac{R_0 q_0}{\rho}, \text{м} \tag{3}$$

4. Определяется число витков намотки преобразователя:

$$w = \frac{L_\text{м}}{d_1}. \tag{4}$$

5. Средняя длина витка:

$$l_\text{в} = \frac{l_n}{w} * 10^3, \text{мм}. \tag{5}$$

6. Диаметр цилиндрического каркаса преобразователя:

$$D_\text{к} = \frac{l_\text{в}}{\pi} - d_1, \text{мм} \tag{6}$$

7. Размеры пластинчатого каркаса (сечение узкое прямоугольное) с шириной каркаса $b_\text{к}$, мм и высотой $H_\text{к}$, мм:

$$H_\text{к} = \frac{l_\text{в}}{2} - b_\text{к}. \tag{7}$$

8. Погрешность ступенчатости (разрешающая способность):

$$\delta_\text{р} = \frac{U_\text{п}}{w}, \text{В} \tag{8}$$

9. Относительная погрешность

$$\gamma = \frac{\delta_\text{р}}{U_\text{п}} * 100\%. \tag{9}$$

Для расчета электрической части такого преобразователя с целью определения выходного напряжения (для потенциометрической схемы включения (рис.1.1)) $U_п$, абсолютной и относительной погрешности нелинейности статистической характеристики рекомендуется следующая последовательность расчетов и расчетные формулы (при этом указывается сопротивление нагрузки $R_н$ – внутреннее сопротивление вольтметра).

1. Выходное напряжение на нагрузке $U_{вн}$ определяется по формуле:

$$U_{вн} = U_п \frac{m}{1+km(1-m)}, \text{В}, \quad (10)$$

где $m = \frac{R_x}{R_0}; k = \frac{R_0}{R_н};\ R_0$ – полное сопротивление преобразователя; R_x - сопротивление участка, пропорциональное перемещению движка x.

2. Абсолютная погрешность нелинейности рассчитывается по формуле:

$$\Delta U_x = U_{вн} - U_{вн.xx}, \text{В}, \quad (11)$$

3. Относительная приведенная погрешность нелинейности определяется по формуле:

$$\delta_н = \frac{\Delta U_x}{U_п} = -\frac{km^2(1-m)}{1+km(1-m)} * 100\% \,. \quad (12)$$

5.2 Задача №5

Требуется рассчитать резистивный преобразователь линейного перемещения. Заданы: напряжение источника питания $U_п$=10 В, сопротивление преобразователя R_0=1000 Ом, максимальное перемещение движка $L_м$=50 мм, плотность тока в проводе j=2 А/мм^2, материал проводника - константан ρ=0,48 Ом*мм^2/м. Подставляя исходные данные в формулы (1) - (9), получим:

$$d_0 \geq 2 * \sqrt{\frac{U_П}{\pi * j * R_0}} \approx 0{,}08 \text{ мм};\ q_0 = 0.25 * 3.14 * 0.08^2 = 0.00503 \text{ мм}^2;$$

$$l_n = \frac{1000 * 0.00503}{0.48} \approx 10.5 \text{ м}; w = \frac{50}{0.095} = 526 \text{ витков};$$

$$l_в = \frac{10{,}5}{526} \approx 0{,}0200 \text{ м} = 20 \text{ мм};$$

$$D_к = \frac{20}{3{,}14} - 0{,}095 = 6{,}27 \text{ мм}; H = \frac{20}{2} - 1 = 9 \text{ мм};$$

(здесь ширина каркаса b = 1 мм);

$$\delta_р = \frac{10}{526} = 0{,}019 \text{ В}; \ \gamma = \frac{0{,}019}{10} 100\% = 0{,}19\%.$$

Результаты расчетов сведены в таблицу 2.

Таблица 2 – Результаты расчетов

d_0	q_0	l_n	w	$l_в$	$D_к$	H	$\delta_р$	γ
мм	$мм^2$	м	витки	мм	мм	мм	В	%
0,08	$5{,}03 \cdot 10^{-3}$	10,5	526	20	6,27	9	0,019	0,19

5.3 Варианты исходных данных к задаче №5

Напряжение источника питания $U_п$=10 В, сопротивление преобразователя R_0=1000 Ом, , материал проводника - константан.

Остальные исходные данные для задачи формируются индивидуально для каждого студента в соответствие с двумя последними цифрами номера зачетной книжки (табл. 2).

Таблица 2

Предпоследняя цифра шифра	Максимальное перемещение движка $L_м$, мм	Последняя цифра шифра	Плотность тока в проводе j, $A/мм^2$
0	51	0	2
1	52	1	2,1
2	53	2	2,2
3	54	3	2,3
4	55	4	2,4
5	56	5	2,5
6	57	6	2
7	58	7	2,1
8	59	8	2,2
9	60	9	2,3

6 ОСНОВЫ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

6.1 Расчет электрического сигнала преобразователя температуры

Преобразование температуры в электрический сигнал производится, как правило, с помощью термоэлектрических преобразователей (термопар) в термо-ЭДС или терморезистивных преобразователей в изменение электрического сопротивления.

Развиваемое значение термо-ЭДС на зажимах термопары определяется как разность термо-ЭДС горячего (рабочего) и холодного спая (свободных концов):

$$E_{\text{тп}} = E_{\text{гс}} - E_{\text{хс}}.$$

В таблице 1 приведены зависимости термо-ЭДС $E_{\theta\,0}$ от температуры $E_{\theta\,0} = f(\theta)$ для различного вида термопар при температуре холодного спая равной нулю ($\theta_{\text{хс}}$=0°C). В общем случае эти зависимости нелинейные, поэтому каждый участок зависимости аппроксимируется прямой со свои углом наклона, тангенс которого определяется выражением:

$$\frac{E_{\text{тв}} - E_{\text{тн}}}{\theta_{\text{тв}} - \theta_{\text{тн}}},$$

где $E_{\text{тв}}$, $E_{\text{тн}}$, $\theta_{\text{тв}}$, $\theta_{\text{тн}}$ – соответственно верхние и нижние значения термо-ЭДС и температуры участка зависимости.

Таблица 1 – Термоэлектродвижущая сила термопар, мВ

°C	медь-копель МК	железо-копель ЖК	хромель-копель ХК	хромель-алюмель ХА	платинородий-платина ПП
-20	-0,86	-1,05	-1,27	-0,77	-0,109
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
20	0,89	1,09	1,31	0,8	0,115
100	4,75	5,75	6,95	4,1	0,640
200	10,29	12,00	14,65	8,13	1,421
300	16,48	18,10	22,90	12,21	2,31
400	23,13	24,55	31,48	16,39	3,243
500	30,15	30,90	40,15	20,64	4,210
600	34,47	37,40	49,00	24,90	5,212
700	-	44,10	57,75	29,14	6,249
800	-	51,15	66,40	33,31	7,320
900	-	-	-	37,36	8,426
1000	-	-	-	41,31	9,566

1100	-	-	-	45,14	10,741
1200	-	-	-	48,85	11,950
1300	-	-	-	52,41	13,153
1400	-	-	-	-	14,356
1500	-	-	-	-	16,760

Градуировка термопар осуществляется при температуре свободных концов (холодного спая) равной нулю ($\theta_{хс}$=0°С). Если при эксплуатации термопары температура холодного спая будет отличаться от 0 °С на величину +θ_{Δ}, то измеренная ЭДС будет меньше, и необходимо ввести поправку в показания преобразователя. Однако из-за нелинейности зависимости поправка $\Delta\theta$ к показаниям измерителя термо-ЭДС (указателя) $\theta`_{x}$, градуированного непосредственно в градусах, не будет равна θ_{Δ}.

Можно поступить следующим образом. Вначале определяется поправка по термо-ЭДС ΔE, которой соответствует значение температуры свободных концов $\theta_{хс}$=θ_{Δ} для участка зависимости, в котором находится значение $\theta_{хс}$:

$$\Delta E = E_{\text{тн}} + \frac{E_{\text{тв}} - E_{\text{тн}}}{\theta_{\text{тв}} - \theta_{\text{тн}}}(\theta_{\Delta} - \theta_{\text{тн}}).$$

Далее аналогичным образом определяют значение термо-ЭДС, соответствующее показаниям указателя, для своего участка зависимости:

$$E'_x = E_{\text{тн}} + \frac{E_{\text{тв}} - E_{\text{тн}}}{\theta_{\text{тв}} - \theta_{\text{тн}}}(\theta'_x - \theta_{\text{тн}}).$$

Затем вносят поправку к значению термо-ЭДС:

$$E_x = E'_x + \Delta E.$$

Наконец определяют «истинное» значение измеряемой температуры для соответствующего участка зависимости:

$$\theta_x = \theta_{\text{тн}} + \frac{\theta_{\text{тв}} - \theta_{\text{тн}}}{E_{\text{тв}} - E_{\text{тн}}}(E_x - E_{\text{тн}}).$$

Если указатель проградуирован в единицах ЭДС (В), то необходимость определения значения отпадает.

Без введения поправки методическая погрешность в абсолютном выражении составит: $\Delta_{\text{мет}} = \theta_x - \theta'_x$, в относительном выражении:

$$\delta_{\text{мет}} = \frac{\Delta_{\text{мет}}}{\theta_x} 100\ \%.$$

6.2 Задача №6

Определить значение термо-ЭДС термопары ХА (хромель-алюмелевой) $E_{\text{тп}}$ при измерении температуры θ_x=517 °С, если температура холодного спая $\theta_{\text{хс}}$=40 °С.

Решение:

1. Определяем значение термо-ЭДС E_x, соответствующее температуре θ_x=517 °С:

$$E_x = E_{\text{тс}} = E_{\text{тн}} + \frac{E_{\text{тв}} - E_{\text{тн}}}{\theta_{\text{тв}} - \theta_{\text{тн}}}(\theta_x - \theta_{\text{тн}}) =$$

$$= 20.64 + \frac{24.90 - 20.64}{600 - 500}(517 - 500) = 21.364\ \text{мВ}.$$

2. Определяем значение термо-ЭДС E_{xc}, соответствующее температуре свободных концов θ_{xc}= 40 °С:

$$E_{x\text{с}} = E_{\text{тн}} + \frac{E_{\text{тв}} - E_{\text{тн}}}{\theta_{\text{тв}} - \theta_{\text{тн}}}(\theta_{x\text{с}} - \theta_{\text{тн}}) = 0{,}80 + \frac{4{,}1 - 0{,}80}{100 - 20}(40 - 20) = 1{,}625\ \text{мВ}.$$

3. Результирующая термо-ЭДС термопары:

$$E_{\text{тп}} = E'_x = E_x - E_{xc} = 21{,}364 - 1{,}625 = 19{,}74\ \text{мВ}.$$

6.3 Варианты исходных данных к задаче №6

Термопара ХК. Остальные исходные данные для задачи формируются индивидуально для каждого студента в соответствие с двумя последними цифрами номера зачетной книжки (табл. 2).

Таблица 2

Предпоследняя цифра шифра	Температура θ_x, °С	Последняя цифра шифра	Температура холодного спая $\theta_{\text{хс}}$, °С
0	100	0	20
1	150	1	25
2	200	2	30
3	250	3	35
4	300	4	40
5	350	5	45
6	400	6	50
7	450	7	55
8	500	8	60
9	550	9	65

7 ОСНОВЫ РАСЧЕТА ТЕНЗОРЕЗИСТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

7.1 Расчет тензорезистивного преобразователя массы

Тензорезистивный преобразователь массы изображен на рис.7.1.

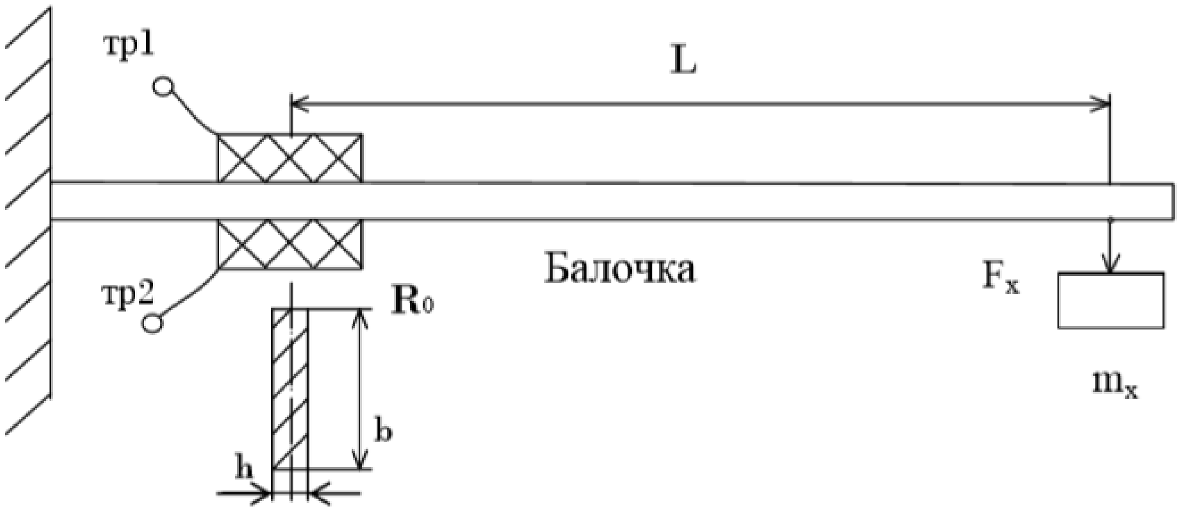

Рис.7.1. Схема тензорезистивного преобразователя массы

Целью расчетов тензорезистивных преобразователей массы является расчет механической части - измерительной консольной балочки, с помощью которой измеряемая масса преобразуется в относительную механическую деформацию; деформация преобразуется в изменение сопротивления тензорезистора и далее с помощью измерительной мостовой схемы изменение сопротивления преобразуется в электрическое напряжение. Один из вариантов расчетов проводится в следующем порядке.

1. Выбирается тип тензорезисторов и их основные параметры: коэффициент тензочувствительности k, сопротивление R_0, допустимый ток I_{max} и база lq.
2. Производится пересчет массы m_x (кг) в силу F_x (H) (g – ускорение свободного падения):

$$F_x = gm_x.$$

3. Выбирается материал измерительной балочки (обычно высококачественная сталь с допустимым механическим напряжением $\sigma_{доп}$=10 Н/мм^2 и модулем упругости E=2,1·10^5 (Н/мм^2).
4. Задаются механические параметры балочки: b - ширина, мм, h -толщина, мм.
5. Рассчитывается момент сопротивления изгибу балочки $W=b\cdot h^2/6$, мм^3.
6. Определяется длина балочки L (от середины тензорезистора в месте приклейки до точки приложения массы) по формулам:

$$\delta = \frac{F * L}{W}; L = \frac{\sigma_{\text{доп}} * W}{F_{x\,max}}, \text{мм.}$$

7. Рассчитывается относительная максимальная деформация:

$$\varepsilon_{\delta\,max} = \frac{\sigma_{\text{доп}}}{E}.$$

8. Рассчитывается относительное максимальное изменение сопротивления тензорезистора:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = k * \varepsilon_{\delta\,max}.$$

9. Определяется напряжение питания мостовой измерительной схемы с двумя активными плечами:

$$U_{\text{п}} = 2 * I_{max} * R_0, \text{В.}$$

10. Выходное напряжение мостовой схемы (для случая равноплечего моста) при двух активных плечах:

$$U_{\text{м вых}\,max} = \frac{U_{\text{п}}}{2}\frac{\Delta R}{R_0}, \text{В.}$$

11. Для расчета выходного напряжения моста в зависимости от текущего значения массы следует воспользоваться формулой:

$$U_{\text{м вых}} = g\frac{U_{\text{п}}}{2}k\frac{1}{E}\frac{L}{W}m_x, \text{В.}$$

7.2 Задача №7

Дано: $m_{x\,max}$ = 15 кг; материал балочки – сталь; размеры прямоугольной балочки: b = 40 мм (ширина), h = 4 мм (толщина) в месте расположения тензодатчика; тензодатчик типа 2ПКП-20-20 (база 20 мм, R_0=200 Ом, I_{max}=30 мА, k=2).

Расчет производится в следующей последовательности:

1. Определяем силу $F_{x\,max}$, действующую на балочку под весом $m_{x\,max}$ = 15 кг, $F_{x\,ma}x = g \cdot m_x$ = 9,81·15 = 147,15 Н.
2. В качестве материала балочки выбираем высококачественную сталь с параметрами $\sigma_{доп}$= 100 кгН/мм^2 и Е = 2,1·10^5 Н/мм^2.
3. Рассчитываем момент сопротивления изгибу балочки по формуле:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{40 * 4^2}{6} = 106.7 \text{ мм}^3.$$

4. Определяем длину балочки по формуле:

$$L = \frac{\sigma_{\text{доп}} W}{F_{x\,max}} = \frac{100 * 106.7}{147.15} = 72.5 \text{ мм}.$$

5. Определяем относительную максимальную деформацию балочки:

$$\varepsilon_{\delta\,max} = \frac{\sigma_{\text{доп}}}{E} = \frac{100}{2.1 * 10^5} = 47.6 * 10^{-5}.$$

6. Рассчитываем максимальное относительное изменение сопротивления преобразователя

$$\frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon_{\delta\,max} = 2 * 47.6 * 10^{-5} = 9.52 * 10^{-4}.$$

7. Определяем напряжение питания $U_{\text{п}}$ равноплечего моста с двумя активными плечами (полумост) по формуле:

$$U_g = 2 * I_{max} * R_0 = 2 * 30 * 10^{-3} * 200 = 12 \text{ В}.$$

8. Напряжение на выходе моста $U_{\text{м}\,max}$:

$$U_{\text{м}\,max} = \frac{U_{\text{п}}}{2}\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{12}{2} * 9.52 * 10^{-4} = 57.1 * 10^{-4} \text{ В} = 5.71 \text{ мВ}.$$

9. Для расчетов текущих значений $U_{\text{м вых}}$ в зависимости от массы m_x для удобства расчетов можно воспользоваться формулой:

$$U_{\text{м вых}} = g\frac{U_{\text{п}}}{2}k\frac{L}{EW}m_x = 9.81 * \frac{12}{2} * 2 * \frac{72.5 * 10^{-3}}{2.1 * 10^5 * 106.7 * 10^{-3}} * m_x.$$

10. Результаты расчетов целесообразно свести в таблицу 1, задаваясь шагом дискретизации Δm_x = 2 кг в пределах от 0 до $m_{x\,max}$ = 15 кг.

Таблица 1. Результаты расчетов

m_x, кг	0	2	4	6	8	10	12	14	15
$U_{\text{м}}$ вых, мВ	0	0,76	1,52	2,28	3,04	3,8	4,56	5,32	5,7

11. По результатам расчетов построить график зависимости $U_{м\ вых} = f(m_x)$.

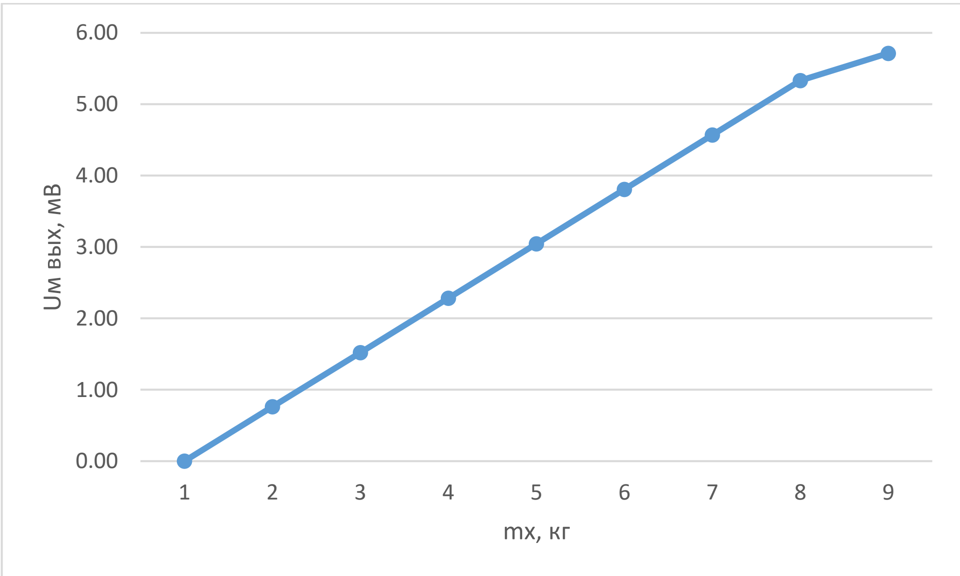

Рис.2. Зависимость выходного напряжения от нагрузки

Чувствительность преобразователя:

$$S = \frac{\Delta U_{\text{м вых}}}{\Delta m_x} = \frac{1.52}{4} = 0.38\ \frac{\text{мВ}}{\text{кг}} = const.$$

7.3 Варианты исходных данных к задаче №7

Материал балочки – сталь; толщина прямоугольной балочки в месте расположения тензодатчика h = 4 мм; тензодатчик типа 2ПКП-20-20 (база 20 мм, R_0=200 Ом, I_{max}=30 мА, k=2). Остальные исходные данные для задачи формируются индивидуально для каждого студента в соответствие с двумя последними цифрами номера зачетной книжки (табл. 2).

Таблица 2

Предпоследняя цифра шифра	Масса $m_{x\ max}$, кг	Последняя цифра шифра	Широина балочки b, мм
0	10	0	40
1	11	1	45
2	12	2	50
3	13	3	55
4	14	4	60
5	10	5	65
6	11	6	70
7	12	7	65
8	13	8	60
9	14	9	55