Расчетно-графическая работа № 2
Исследование функции и построение ее графика

План исследования:

1. **<u>ООФ.</u>** Исследовать область определения функции, найти точки разрывов функции, исследовать функцию на вертикальные асимптоты. На вертикальные асимптоты функцию необходимо исследовать в точках разрывов и на концах области определения, если область определения ограничена.

2. **<u>Особенности и симметрия функции.</u>** Исследовать функцию на четность-нечетность (и симметрия), периодичность. Если функция периодическая, то ее исследование можно проводить на отрезке, длина которого равно периоду. После завершения исследования построить график функции с учетом периода.

3. Точка пересечения функции с осью Oy (при $x = 0$).

4. **<u>Нули функции и интервалы знакопостоянства</u>**. Найти точки пересечения с осью Ox (при $y = 0$) и определить знаки функции в каждом из получившихся интервалов, учитывая, в том числе, и точки разрывов функции.

5. **<u>Монотонность и экстремумы</u>**. Найти первую производную функции и определить критические точки функции первого рода, рассмотрев ситуации $y' = 0$, $y' = \infty$ и y' не существует; определить знаки производной и поведение (возрастание-убывание) функции на каждом интервале. Изобразить на схеме поведение функции, указав для каждой критической точки вид экстремума (*max*, *min*, острый, гладкий), положение касательной в точке экстремума и схематический рисунок. Найти координаты $(x; y)$ точек экстремума.

6. **<u>Выпуклость-вогнутость и точки перегибов.</u>** Найти вторую производную функции и определить критические точки функции второго рода, рассмотрев ситуации $y'' = 0$, $y'' = \infty$ и y'' не существует; определить знаки второй производной и поведение (выпуклость-вогнутость) функции на каждом интервале. Изобразить на схеме поведение функции. Найти точки перегиба графика функции и их координаты.

7. **<u>Наклонные или горизонтальные асимптоты.</u>** Исследовать функцию на существование наклонных асимптот. При исследовании обязательно указывать, при каких значениях x ($x \to +\infty$; $x \to -\infty$ или $x \to \pm\infty$) данная прямая является асимптотой функции. При отсутствии наклонных асимптот необходимо исследовать поведение функции при $x \to \pm\infty$.

8. **<u>Дополнительные точки.</u>** В том, и только в том случае, когда исследуемая функция не имеет критических точек в пп. 4, 5 и 6, необходимо найти несколько дополнительных точек для построения графика функции — по одной дополнительной точке для каждой ветви графика.

   <u>Замечание</u>: дополнительных точек не должно быть много, так как график функции должен быть построен по ее исследованию, а не по точкам. Функции, построенные по точкам, на проверку не принимаются.

9. **<u>Эскиз графика функции</u>**. Построить эскиз графика функции, учитывая результаты исследований, критические точки и асимптоты. Для облегчения решения задачи можно изобразить итоговую схему поведения функции.

***<u>Замечание 1</u>*:** при оформлении работы каждый пункт должен быть оформлен отдельно и содержать вывод, причем пп.4, 5 и 6 — в виде схемы.

***<u>Замечание 2</u>*:** все критические точки, положение касательной в точках экстремума, асимптоты и т.д. должны быть отмечены на графике.

Пример. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ и построить ее график.

1. **ООФ**. $x \in \boldsymbol{R}$, функция непрерывна, вертикальных асимптот не имеет.

2. **Четность-нечетность, периодичность.** Данная функция непериодична. Исследуем ее на четность-нечетность. Найдем $f(-x)$:

$$f(-x) = \sqrt[3]{6 \cdot (-x)^2 - (-x)^3} = \sqrt[3]{6x^2 + x^3}\ , \quad \Rightarrow \ f(-x) \neq f(x), \ f(-x) \neq -f(x)$$

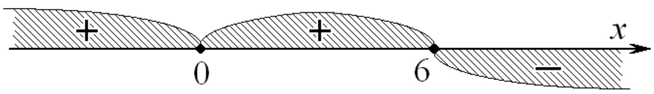
$\Rightarrow$ функция общего вида, симметрией не обладает.

3. **Пересечение с Oy.** $f(0) = \sqrt[3]{6 \cdot 0^2 - 0^3} = 0 \ \Rightarrow$ имеем точку $(0; 0)$.

4. **Нули функции и интервалы знакопостоянства**.

$$\sqrt[3]{6x^2 - x^3} = 0 \ \Rightarrow \ x^2(6 - x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0, \ x = 6.$$

$\Rightarrow$ имеем две точки, в которой значение функции равно нулю: $(0; 0)$ и $(6; 0)$. Определим знаки функции в остальных точках области определения:



5. **Монотонность и экстремумы**. Вычислим первую производную функции:

$$f'(x) = \frac{12x - 3x^2}{3\sqrt[3]{x^4(6-x)^2}} = \frac{4 - x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}\ .$$

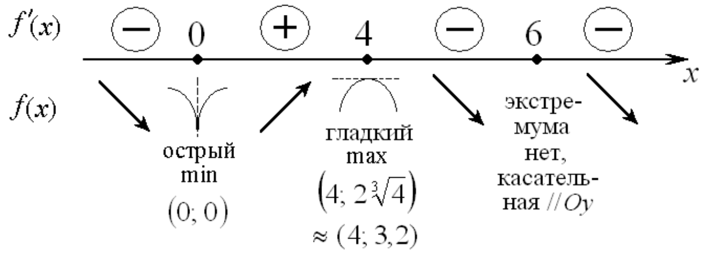
Найдем точки функции, подозрительные на экстремум:

1) $f'(x) = 0 \ \Rightarrow \ 4 - x = 0 \ \Rightarrow \ x = 4$ — точка, в которой возможен гладкий экстремум;

2) $f'(x) = \infty \ \Rightarrow \ x\,(6 - x)^2 = 0 \ \Rightarrow \ x = 0; \ x = 6$ — точки, в которых возможен острый экстремум;

3) $f'(x)$ не существует — таких точек нет.

Найденные точки отметим на схеме, вычислим знаки производной в полученных интервалах, определим участки возрастания и убывания функции и точки экстремумов:



6. **Выпуклость-вогнутость и точки перегиба.**

Вычислим вторую производную функции:

$$y'' = \frac{-\sqrt[3]{x(6-x)^2} - (4-x)\dfrac{(6-x)^2 - 2(6-x)x}{\sqrt[3]{x^2(6-x)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(6-x)^4}} = \frac{3x(6-x) + (4-x)(6-x)(6-3x)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4(6-x)^5}} = \frac{-8}{\sqrt[3]{x^4(6-x)^5}}\ .$$

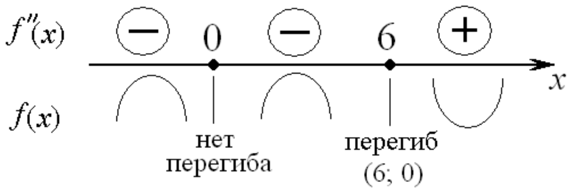
Точки, в которых возможен перегиб графика функции:

1) $f''(x) = 0$ — таких точек нет;

2) $f''(x) = \infty \ \Rightarrow \ x = 0, \ x = 6$;

3) $f''(x)$ не существует — таких точек нет.

Найденные точки отметим на схеме, вычислим знаки второй производной в полученных интервалах, определим участки выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба:



7. **Наклонные асимптоты.** $y = kx + b$,

$$\text{где} \quad k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{n\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{6x^2-x^3}}{x} = \lim_{n\to\pm\infty}\frac{x\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{x}-1}}{x} = -1\,;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] = \lim_{n\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x\right) = \lim_{n\to\pm\infty}\frac{6x^2}{\sqrt[3]{\left(6x^2-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x^2} =$$

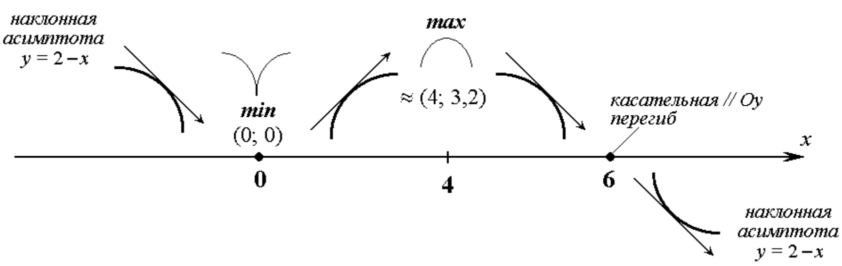
$$= \lim_{n\to\pm\infty}\frac{6x^2}{x^2\cdot\sqrt[3]{\frac{36}{x^2}-\frac{12}{x}+1}-x^2\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{x}-1}+x^2} = \frac{6}{3} = 2$$

$\Rightarrow$ функция имеет наклонную асимптоту $y = 2 - x$ при $x \to \pm\infty$.

8. **Дополнительные точки** — не требуются.

9. **Эскиз графика функции.**

Прежде чем строить график функции, составим итоговую схему, на которой объединим результаты, полученные в пп.1−8:



Эскиз графика функции: