В.Е. Головко   И.В. Клюшкин

Теоретическая механика

ТЕОРИЯ И ЗАДАНИЯ
для самостоятельной работы студентов
заочной формы обучения

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург
2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

В.Е. Головко, И.В. Клюшкин

Теоретическая механика

ТЕОРИЯ И ЗАДАНИЯ
для самостоятельной работы студентов
заочной формы обучения

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург
2018

УДК 531(07)
ББК 22.21я7
Г - 612

Теоретическая механика. Теория и задания для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения: учебное пособие / сост.: В.Е. Головко, И.В.Клюшкин; ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2018. – 74 с.

В учебном пособии изложен курс теоретической механики. Содержание данного учебного пособия соответствует современному уровню развития науки. В учебном пособии приведены цели и задачи теоретической механики, дана сводка основных понятий. Настоящее учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения.

Рецензенты:

д-р.техн.наук, профессор кафедры системного анализа Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета) В.А. Холоднов;

д-р.техн.наук, профессор кафедры процессов и аппаратов химической технологии Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна В.С Куров.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом в качестве учебного пособия.

Введение

Все, что можно наблюдать во внешнем мире - это различные формы движения и взаимодействия материи. Среди многообразных форм простейшей является механическая форма движения. Механическое движение - это изменение положения материального тела по отношению к другим телам с течением времени.

Необходимо иметь в виду, что для теоретического изучения процессов движения материальных тел, в которых механическое движение является определяющим, для понимания закономерностей этой формы движения, следует выделять изучаемые явления из всеобщей мировой связи и рассматривать их изолированно.

Теоретическая механика - это наука об общих законах движения реальных тел, ставящая своей главной задачей познание количественных закономерностей, наблюдаемых в природе, и «конструируемых» человеком механических движений.

В курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику.

Для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса, начиная со статики, широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) сумму векторов, вычислять скалярные и векторные произведения двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике - дифференцировать векторы.

Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики надо совершенно свободно уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых второго порядка, изучаемой в аналитической геометрии.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения второго порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

Изучать материал рекомендуется по темам или по главам учебника. Сначала следует прочитать весь материал темы, особенно не задерживаясь на том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, теорем и т.п., - в точных формулировках, как правило, бывает существенно каждое слово, и очень полезно понять, почему данное положение сформулировано именно так. Однако не следует стараться заучивать формулировки, важно понять их смысл и уметь изложить его своими словами.

Необходимо также понять ход всех доказательств и разобраться в их деталях. Доказательства надо уметь производить самостоятельно, что не трудно сделать, поняв идею доказательства; пытаться просто их заучить не следует, никакой пользы это не принесет.

Закончив изучение темы, полезно составить краткий конспект, по возможности, не заглядывая в учебник.

Особое внимание следует уделять приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив теоретический материал темы, надо сначала обязательно разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению. Затем постарайтесь решить самостоятельно одну - две задачи из сборника задач И.В. Мещерского [3] и после этого решите соответствующую задачу из контрольного задания.

Закончив изучение темы, нужно проверить и дать ответ на вопросы рабочей программы курса по этой теме. Дополнительные вопросы для самопроверки составить и записать (в отдельной тетради) самостоятельно, что очень полезно для лучшего усвоения темы.

В начале изучения очередной темы желательно выписать последовательно все перечисленные в программе вопросы по этой теме, оставив справа широкую полосу (поле). При этом, если, например, в программе сказано «Условия равновесия плоской и пространственной систем сходящихся сил», то следует записать раздельно вопросы «Условия равновесия плоской системы сходящихся сил» и «Условия равновесия пространственной системы сходящихся сил» и т.п.

Затем по мере изучения материала темы (чтения учебника) следует в правой колонке указать страницу учебника, на которой излагается соответствующий вопрос, а также номер формулы или уравнение (уравнения), которые выражают ответ на вопрос математически. В результате в данной тетради будет полный перечень вопросов для самопроверки, который можно использовать и при подготовке к экзамену. Кроме того, ответив на вопрос или написав соответствующую форму (уравнение), вы можете по учебнику быстро проверить, правильно ли это сделано, если в правильности своего ответа сомневаетесь. Наконец, по тетради с такими вопросами вы можете установить, весь ли предусмотренный программой материал вами изучен.

Следует иметь в виду, что в разных учебниках материал может излагаться в разной последовательности. Поэтому ответ на какой-нибудь вопрос данной темы может оказаться в другой главе учебника. Например, в статике теорема о приведении системы сил к центру может быть дана сразу для пространственной системы сил, а может быть дана сначала для плоской системы сил, а потом для произвольной и т.п.

Таким образом, изучив материал по одному из рекомендованных учебников, вы можете сначала получить ответы только на часть вопросов какой-нибудь темы, а ответы на остальные вопросы этой темы получить позже. Конечно, на изучении курса в целом это никак не скажется.

Указания по выполнению контрольных заданий приводятся ниже. Их надо прочесть обязательно и ими руководствоваться. Кроме того, к каждой задаче даются конкретные методические указания по ее решению, и приводится пример решения.

Контрольные задания

Содержание заданий, выбор вариантов, порядок выполнения работ, пояснения к тексту задач.

У студентов-заочников, обучающихся по направлениям подготовки: «Технологические машины и оборудование», «Химическая технология», «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии», «Автоматизация технологических процессов и производств», «Электроэнергетика и электротехника», предусмотрена контрольная работа, которая состоит из задач: С1, С2 (статика); К1, К2, К3 (кинематика); Д1, Д2, Д3 (динамика).

Студенты решают задачи в соответствии с направлением, по которому обучаются:

«Технологические машины и оборудование» - С1, С2; К1, К2, К3; Д1, Д2, Д3;

«Автоматизация технологических процессов и производств» и «Электроэнергетика и электротехника» - С1, С2; К1, К2; Д1, Д3;

«Химическая технология», «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии» - С1; К1; Д1.

К каждой задаче (кроме задачи Д1) дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например: рис. С1.4 - это рис. 4 к задаче С1 и т.д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто: рис. 4 и т.д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра в зачетной книжке, а номер условия в таблице - по последней.

Например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условие 6 из таблицы.

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, страницы которой нумеруются. На обложке указывается название дисциплины, фамилия и инициалы студента, учебный шифр и специальность.

На первой странице тетради записываются номера решаемых задач.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно видеть все силы или векторы скорости и ускорения и др. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы измерения получаемых величин *нужно обязательно*.

Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и *подробно излагать весь ход расчетов*. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, будут возвращаться для переделки.

На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные ошибки должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть, что большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам С1 – С2 и Д1 – Д3 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, перпендикулярные строкам – вертикальными, и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок принимаем, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) считаются идеальными. Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т.п. обозначает параметры тела 1, P_2, l_2, r_2 - тела 2 и т.д. Аналогично в кинематике и в динамике v_B, a_B обозначают скорость и ускорение точки B, v_C, a_C - точки C; ω_2, ε_2 - угловую скорость и угловое ускорение тела 2 и т.д.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи. Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т.е. к номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются под рубрикой "Указания"; затем даётся пример решения аналогичной задачи.

Цель примера - разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчёты опускаются.

При выполнении задания все преобразования и числовые расчёты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями, в конце должны быть даны ответы.

Статика

Система сходящихся сил

Системой сходящихся сил называется такая система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке.

Сходящиеся силы находятся в равновесии, если их равнодействующая равна нулю:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = 0, \qquad (1)$$

Если все силы лежат в одной плоскости, то проектируя уравнение (1) на оси координат, расположенные в этой плоскости, получаем условия равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \ \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0. \qquad (2)$$

Если же имеет место пространственная система сил, то всесилы проектируются на три взаимноперпендикулярные оси, и условия равновесия пространственной системы сходящихся сил имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \ \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \ \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0. \qquad (3)$$

Произвольная система сил

При приведении произвольной системы сил к центру получаем главный вектор, равный геометрической сумме сил, входящих в систему:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \qquad (4)$$

и главный момент для плоской системы, равный алгебраической сумме моментов всех сил, относительно произвольного центра:

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_{iO} \ , \tag{5}$$

а для пространственной системы сил – геометрической сумме моментов:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iO} \ . \tag{6}$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\vec{R}^* = 0; M_O = 0. \tag{7}$$

При проектировании уравнений (7) на две взаимно перпендикулярные оси получаем три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{iO} = 0. \tag{8}$$

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\vec{R}^* = 0; \vec{M}_O = 0. \tag{9}$$

При проектировании уравнения (9) на три взаимно перпендикулярные оси получаем шесть уравнений равновесия:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Статически определимые и статически неопределимые задачи

При исследовании равновесия произвольной системы сил на плоскости могут встретиться два принципиально различных случая:

1) количество неизвестных в задаче не превосходит числа уравнений статики для данной системы. В этом случае задача является статически определимой.

2) количество неизвестных больше числа уравнений статики. В этом случае задача является статически неопределимой;

Степенью статической неопределимости называют разность числа неизвестных и числа уравнений статики.

Вопросы по теме:

1. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая, силы внешние и внутренние, связи и реакции связей.

2. Аксиомы статики.

3. Основные виды связей и их реакции.

4. Равнодействующая и главный вектор систем сил. Формулы для аналитического определения равнодействующей и главного вектора.

5. Геометрическое и аналитическое условия равновесия плоской и пространственной системы сходящихся сил.

6. Момент силы относительно центра как вектор и как векторное произведение. Правило знаков для момента.

7. Пара сил и факторы, определяющие вращательный эффект пары сил.

8. Теорема о сумме моментов пары сил относительно любого центра.

9. Теорема о параллельном переносе силы.

10. Основная теорема статики о приведении системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент системы сил.

11. Вычисление главного вектора и главного момента плоской системы сил (формулы для определения).

12. Частные случаи приведения плоской системы сил к одной силе, паре сил и случай равновесия.

13. Условия и уравнения равновесия произвольной системы сил и системы параллельных сил, расположенных в одной плоскости.

14. Равновесие системы тел (на примере задачи С1), равновесие при наличии сил трения.

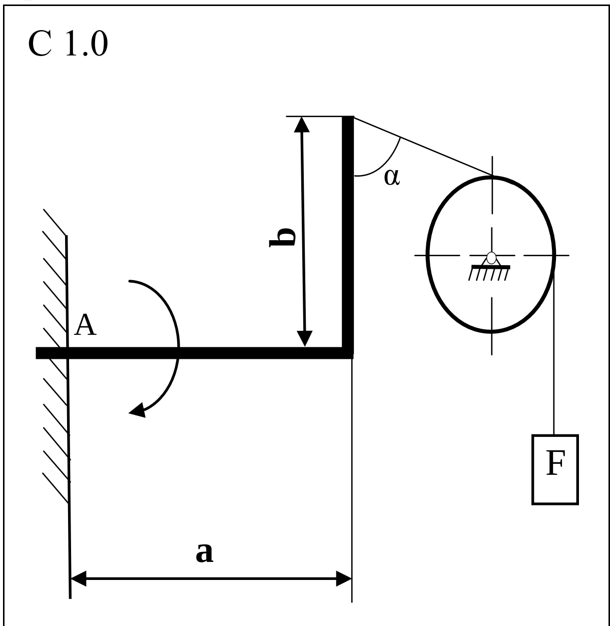
15. Момент силы относительно оси.

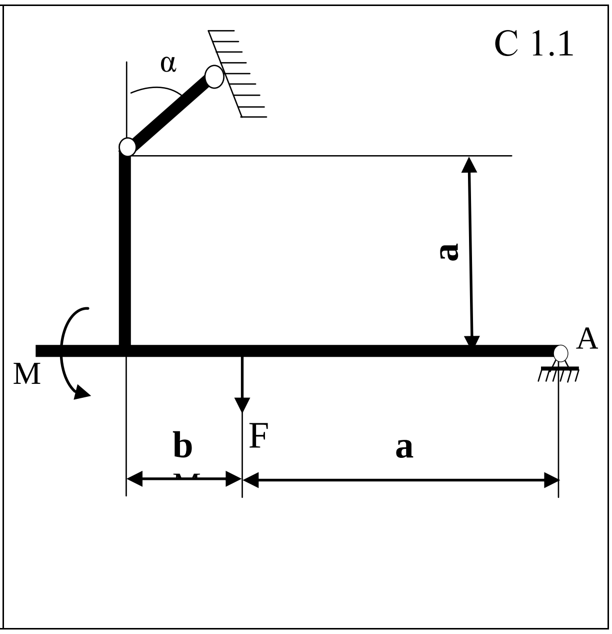
Задачи к контрольной работе

Статика

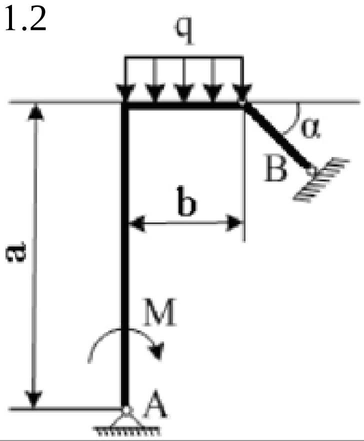
Задача С1

Определить опорные реакции рамы при действии заданной нагрузки. Весом рамы пренебречь. Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 1.1.

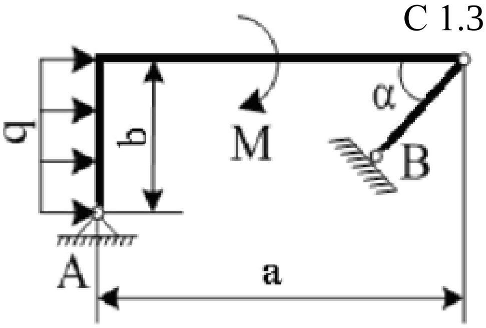




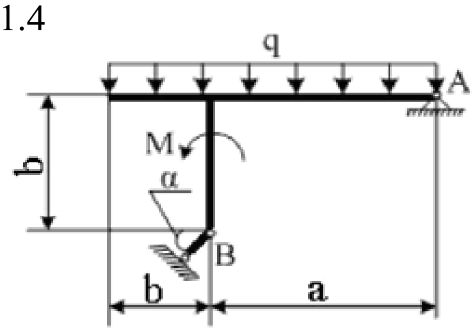
C 1.2



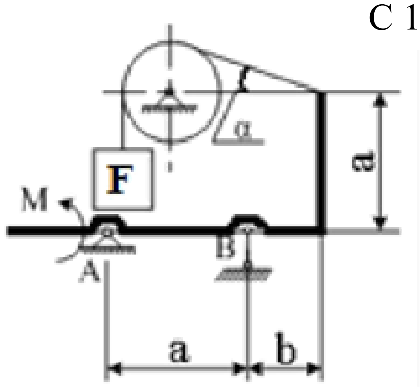
C 1.3



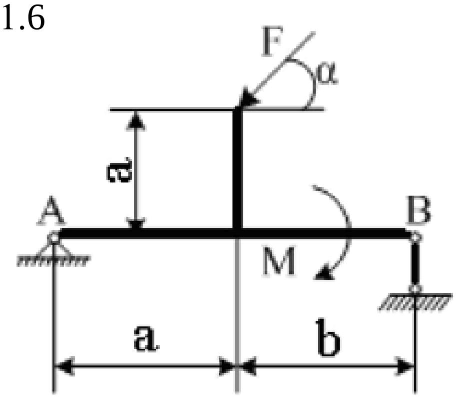
C 1.4



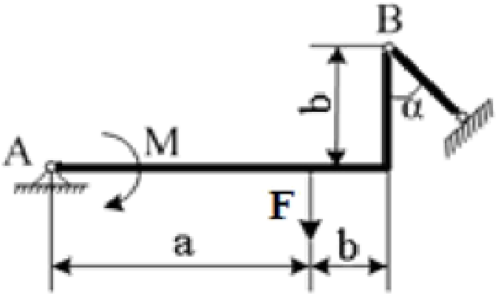
C 1.5



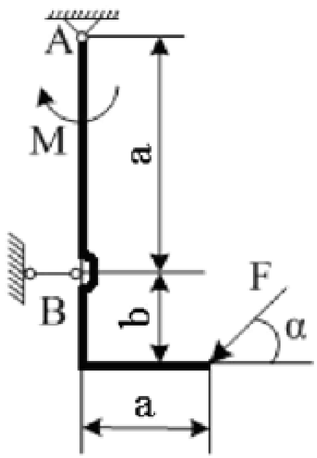
C 1.6



C 1.7



C 1.8



C 1.9

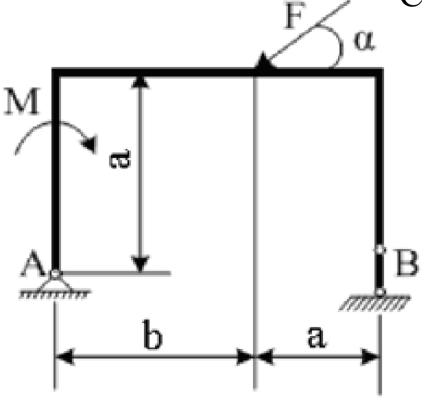


Таблица С1

№	F	q	M	α	a	b
	кН	кН/м	кНм	град.	м	м
0	10	40	40	10	1	3
1	50	20	60	30	2	4
2	20	45	50	20	4	2
3	40	25	10	50	2	4
4	30	10	70	10	3	2
5	50	30	20	40	3	1
6	20	50	70	50	2	3
7	40	15	90	20	4	3
8	10	35	30	40	1	4
9	30	5	80	30	4	1

Задача С1

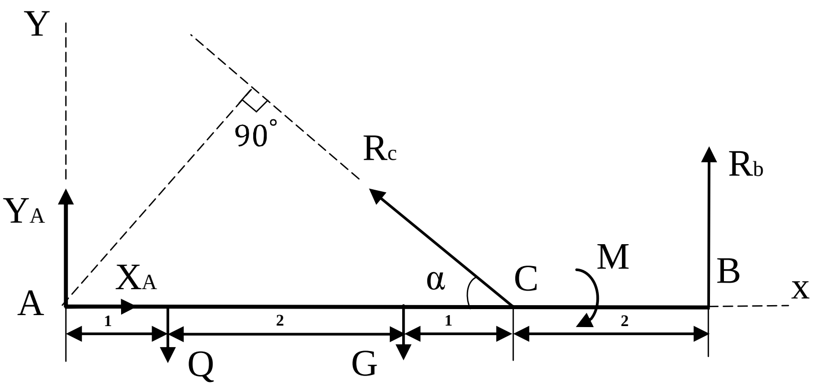


Рис. С 1

Дано:

схема конструкции (рис. С 1);

G=10 кН;

P=5 кН;

M=8 кН*М;

q=0.5 кН/м;

α=30°.

Определить: реакцию опоры А и реакцию стержню CD.

Решение. Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к балке АВ. Отбрасываем связи: шарнирно-неподвижную опору А, стержень CD и нить. Действие связей на балку заменяем их реакциями (рис.С 2).

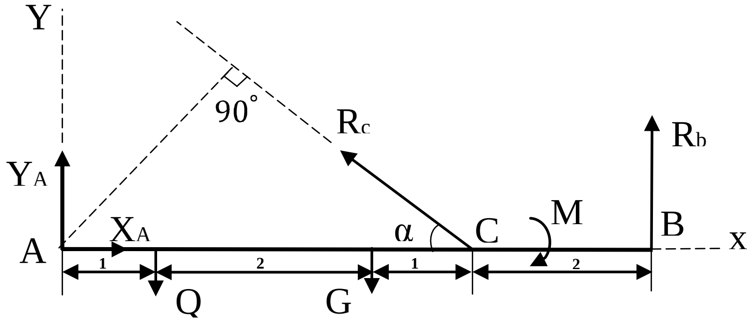


Рис. С 2

Так как направление реакции

шарнирно-неподвижной опоры А неизвестно, то определяем её составляющие X_A и Y_A.

Покажем также реакцию $\bar{R}_C$ стрежня CD и реакцию R_B нити, модуль которой равен P. Равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q заменяем силой Q, равной Q=2q=2*0.5=1 кН и приложенной в центре тяжести опоры этой нагрузки.

Для плоской системы сил, приложенных к балке, составляем три уравнения равновесия:

$\Sigma M_{iA}=0;\quad -Q*1-G*3+R_C*4*sin30-M+R_B*6=0 \quad (1)$

$\Sigma X_i=0;\quad X_A-R_C*cos30=0 \quad (2)$

$\Sigma Y_i=0;\quad Y_A-Q-G+R_C*cos60+R_B=0 \quad (3)$

Из уравнения (1):

$$R_C=\frac{Q*1+G*3+M-R_B*6}{4*sin30°}=\frac{1*1+10*3+8-5*6}{4*0.5}=4.5\ кН$$

Из уравнения (2):

$$X_A=R_C*cos30°=4.5*0.866=3.9\ кН$$

Из уравнения (3):

$$Y_A=Q+G-R_C cos60°-R_B=1+10-4.5*0.5-5=3.75\ кН$$

Значения X_A, Y_A, R_C получаются положительными. Это указывает на то, что принятые направления этих сил совпадают с их действительными направлениями.

Задача С2

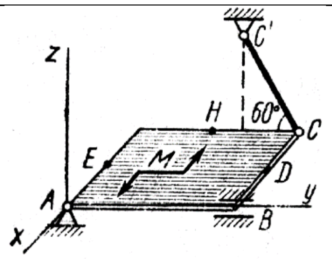
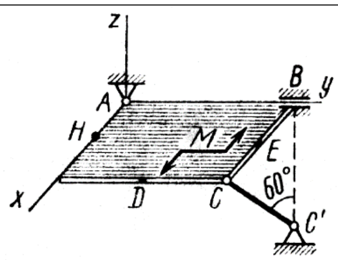
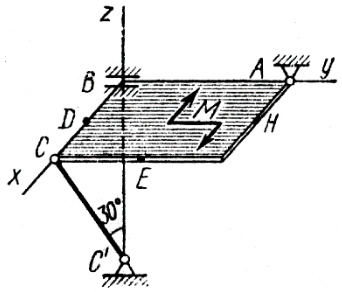
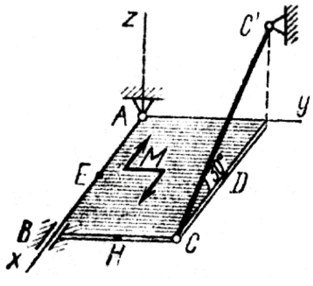
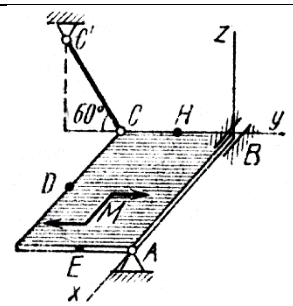
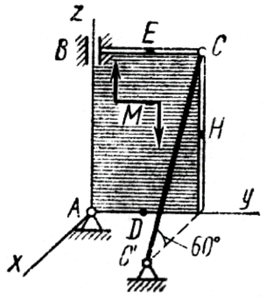
Однородная прямоугольная плита весом Р=3 кН со сторонами АВ=3*l*, ВС=2*l*закреплена в точке А сферическим шарниром, а точке В - цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем СС′ (рис. С 2.0 – С 2.9).

На плиту действует пара сил с моментом М=5 кНм, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Величины этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С 2; при этом силы $\vec{F_1}$ и $\vec{F_4}$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости *xy*, сила $\vec{F_2}$ - в плоскости, параллельной *xz*, и сила $\vec{F_3}$ - в плоскости, параллельной *yz*. Точки приложения сил (D, E, H) находятся в середине сторон плиты.

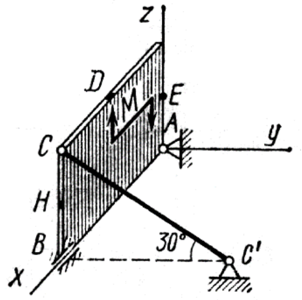
Определить: реакции связей в точках A, B и C. При подсчётах принять l=0,8 м.

Указания. Задача С2 - на равновесие тела под действием пространственной системы сил. При её решении учесть, что реакция сферического шарнира (или подпятника) имеет три составляющие, а реакции цилиндрического шарнира (подшипника) - две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, при вычислении моментов силы $\vec{F}$ тоже часто удобно разложить её на составляющие $\vec{F'}$ и $\vec{F''}$, параллельные координатным осям: тогда по теореме Вариньона:

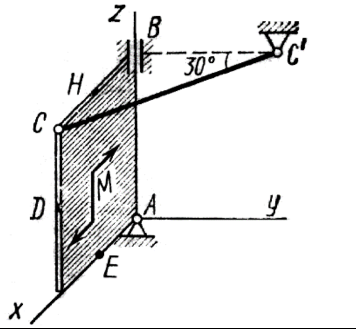
$$m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F'}) + m_x(\vec{F''})$$

С 2.0 	С 2.1 
С 2.2 	С 
С 2.4 	С 2.5 

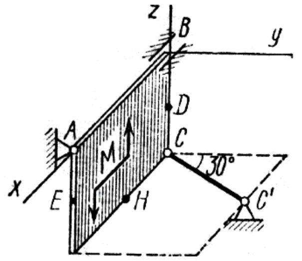
С 2.6



С 2.7



С 2.8



С 2.9

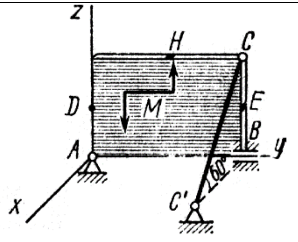
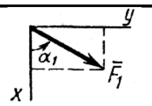
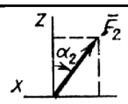
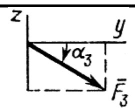
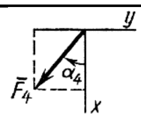


Таблица С2

Сила								
Номер условия	F_1=4 кН		F_2=6 кН		F_3=8 кН		F_4=10 кН	
	точка прилож.	α^o_1	точка прилож.	α^o_2	точка прилож.	α^o_3	точка прилож.	α^o_4
0	D	60	—	—	E	0	—	—
1	H	90	D	30	—	—	—	—
2	—	—	E	60	—	—	D	90
3	—	—	—	—	E	30	H	0
4	E	0	—	—	H	60	—	—
5	—	—	D	60	H	0	—	—
6	—	—	H	30	—	—	D	90
7	E	30	H	90	—	—	—	—
8	—	—	—	—	D	0	E	60
9	—	—	E	90	D	30	—	—

Пример С2. Вертикальная прямоугольная плита весом Р (рис. С2) закреплена сферическим шарниром в точке А, цилиндрическим (подшипником) - в точке В и невесомым стержнем DD′, лежащим в плоскости, параллельной плоскости *yz*. На плиту действуют сила F_1 (в плоскости *xz*), сила F_2 (параллельная оси у) и пара сил с моментом М (в плоскости плиты).

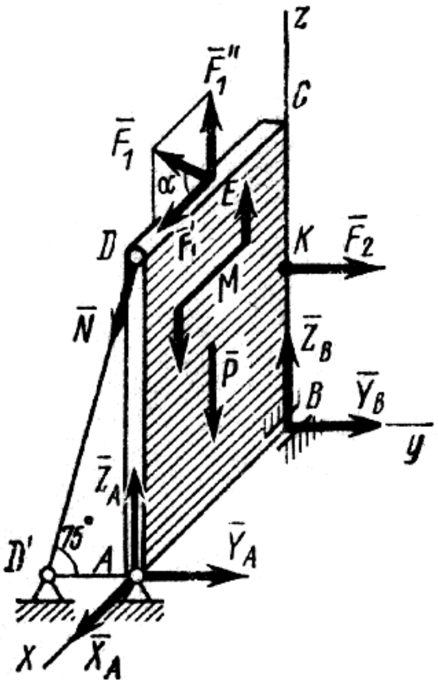


Рис. С2

Дано: P=5 кН, M= 3 кНм, F_1=6 кН, F_2=7,5 кН, α=30°, AB=1 м, BC= 2 м, CE=0,5 AB, BK==0,5 BC.

Определить: реакции опор A, B и стержня *DD'*.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На неё действуют заданные силы P, F_1, F_2 и пара сил с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие X_A,Y_A,Z_A, цилиндрического (подшипника) - на две составляющие Y_B,Z_B (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию N стержня направим вдоль стержня, предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$\sum F_{KX} = 0,\ X_A + F_1 \cos\alpha = 0,$ (1)

$\sum F_{KY} = 0,\ Y_A + Y_B + F_2 - N\cos 75° = 0,$ (2)

$\sum F_{KZ} = 0,\ Z_A + Z_B - P - N\sin 75° + F_1 \sin\alpha = 0,$ (3)

$\sum m_X (F_X) = 0,\ - F_2 BK + N\cos 75° BC = 0,$ (4)

$\sum m_Y (F_Y) = 0,\ P\ AB/2 + F_1 \cos\alpha\ BC - F_1 \sin\alpha AB/2 - Z_A\ AB +$
$+ N\sin 75°\ AB + M = 0,$ (5)

$\sum m_Z (F_Z) = 0,\ Y_A\ AB - N\cos 75°\ AB = 0.$ (6)

Для определения момента силы F_1 относительно оси *y* раскладываем F_1 на составляющие F'_1 и F''_1, параллельные осям *x* и *z* ($F'_1 = F_1\cos\alpha$, $F''_1 = F_1\sin\alpha$) и применяем теорему Вариньона (см. указания). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции N. Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив затем эти уравнения, найдём, чему равны искомые реакции. Ответ: $X_A = -5{,}2$ кН, $Y_A = 3{,}8$ кН, $Z_A = 28{,}4$ кН, $Y_B = -7{,}5$ кН, $Z_B = -12{,}4$ кН, $N = 14{,}5$ кН. Знаки указывают, что силы X_A, Y_B и Z_B направлены противоположно показанным на рис. С2.

Кинематика

Три способа задания движения точки

Естественный способ задания движения точки

Если траектория точки известна, то, выбрав на ней начало отсчёта O, положение точки M на траектории можно определить криволинейной координатой S. При движении точки по траектории криволинейная координата непрерывно изменяется, т.е. координата S является функцией времени (рис. К1).

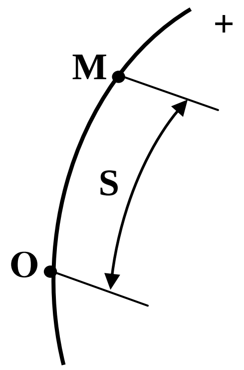


Рис. К1

Чтобы задать движение точки естественным способом, необходимо:

1) задать траекторию точки;

2) задать начало отсчёта на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчёта криволинейных координат;

3) задать криволинейную координату S как функцию времени

$$S = S(t). \qquad (1)$$

Уравнение (1) описывает движение точки в естественной форме.

Координатный способ задания движения точки

Положение точки M в системе отсчёта OXYZ определяется тремя координатами: x, y, z (рис. К2).

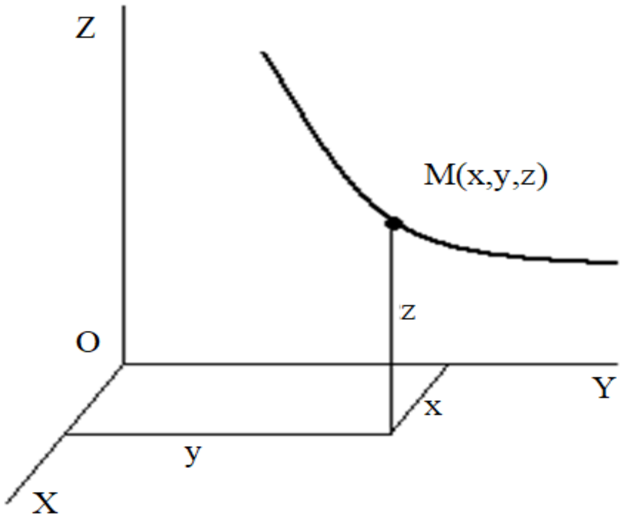


Рис. К2

При движении точки M её координаты изменяются с течением времени. Поэтому, чтобы задать движение точки координатным способом, необходимо:

1) задать систему отсчёта;
2) задать координаты точки как функции времени

$$x = x(t); \;\; y = y(t); \;\; z = z(t). \qquad (2)$$

Уравнения (2) характерезуют движение точки в декартовых координатах.

Движение точки M в одной плоскости описывается двумя уравнениями, а прямолинейное движение - одним.

Векторный способ задания движения точки

Положение точки М в пространстве однозначно определяется заданием радиус-вектора $\bar{r}$, проведённого из начала координат в точку М (рис. К3).

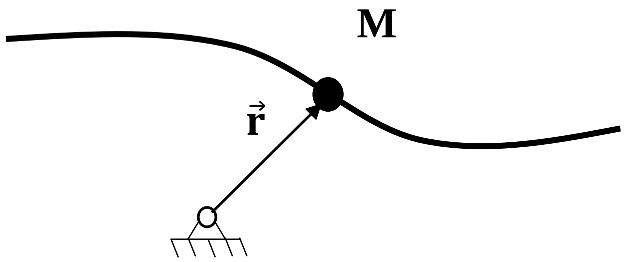


Рис. К3

При движении точки М радиус-вектор $\bar{r}$ изменяется, то есть $\bar{r}$ - это вектор-функция времени. Чтобы задать движение точки векторным способом, необходимо:

1) задать неподвижную точку в пространстве;
2) задать радиус-вектор точки как векторную функцию времени

$$\bar{r} = \bar{r}(t)\,. \tag{3}$$

Уравнение (3) характерезует движение точки в векторной форме.

Определение скорости и ускорения точки

Скоростью точки называется вектор, характеризующий быстроту и направление движения точки в данной системе отсчёта, всегда направленный по касательной к траектории точки.

При естественном способе задания движения точки алгебраическая величина скорости равна производной от криволинейной координаты точки по времени:

$$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}.$$

При $V>0$ точка движется в сторону увеличения значений криволинейной координаты. При $V<0$ точка движется в сторону уменьшения криволинейной координаты точки.

При задании движения точки координатным способом проекции скорости точки на оси координат равны производным от соответствующих координат точки по времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{X}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{Y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{Z}.$$

Модуль и направление скорости определяются по формулам:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

$$\cos a = \cos(\overline{V}, \overline{i}) = \frac{V_x}{V};$$

$$\cos \beta = \cos(\overline{V}, \overline{j}) = \frac{V_y}{V};$$

$$\cos \gamma = \cos(\overline{V}, \overline{k}) = \frac{V_z}{V}.$$

При векторном способе задания движения точки вектор скорости точки в данный момент времени равен производной от радиус-вектора точки $\bar{r}$ по времени:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}\,.$$

Ускорением точки называется вектор, характеризующий быстроту изменения скорости. Ускорение точки есть производная от скорости по времени.

При естественном способе задания движения точки вектор ускорения имеет две составляющие:

$$\bar{a} = \overline{a_\tau} + \overline{a_n}\,,$$

где a_τ - касательное ускорение, которое характеризует быстроту изменения скорости по величине, направлено по касательной к траектории.

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Если $\frac{d^2S}{dt^2}$ и $\frac{dS}{dt}$ имеют одинаковые знаки, скорость и касательное ускорение направлены в одну сторону, точка совершает ускоренное движение.

Если $\frac{d^2S}{dt^2}$ и $\frac{dS}{dt}$ имеют разные знаки, скорость и касательное ускорение направлены в противоположные стороны, точка совершает замедленное движение.

a_n – нормальное ускорение, характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \quad ,$$

где ρ – радиус кривизны траектории в данной точке.

Нормальное ускорение всегда положительно и направлено к центру кривизны траектории.

Учитывая, что касательное ускорение и нормальное ускорение перпендикулярны друг другу (рис. К4), модуль полного ускорения можно вычислить:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \; .$$

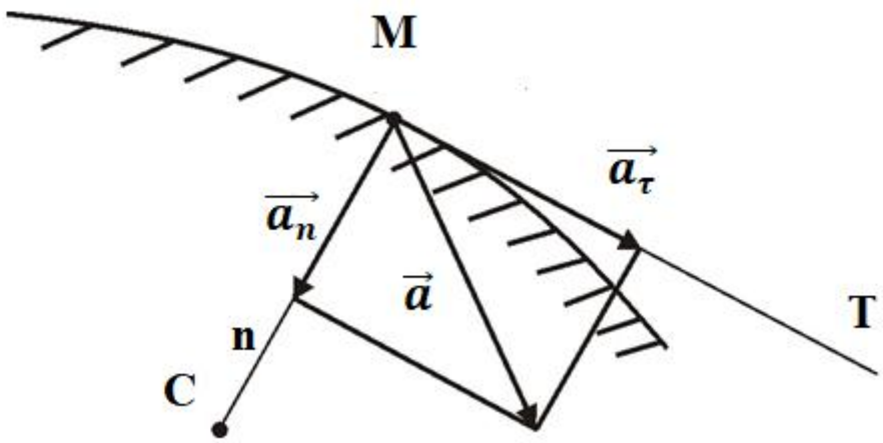


Рис. К4

При координатном способе задания движения точки проекции вектора ускорения на координатные оси определяются первыми производными по времени от соответствующих проекций скорости или вторыми производными по времени от соответствующих координат точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x};$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y};$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}.$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направление вектора ускорения определяется направляющими косинусами:

$$\cos a = \cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a};$$

$$\cos \beta = \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a};$$

$$\cos \gamma = \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

При векторном способе задания движения точки вектор ускорения в данный момент времени равен производной от вектора скорости точки по времени или второй производной от радиус-вектора точки $\bar{r}$:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Движение твердого тела

При изучении кинематики твёрдого тела сначала устанавливаются кинематические характеристики движения всего тела, а затем изучается движение его точек в отдельности.

Различают пять видов движения твёрдого тела:

1) поступательное движение;
2) вращательное движение вокруг неподвижной оси;

3) плоское или плоскопараллельное движение;

4) движение тела вокруг неподвижной точки (сферическое движение);

5) общий случай движения.

Поступательное и вращательное движение тела вокруг неподвижной оси – это простейшие виды движения.

Остальные – это составные виды движения, состоящие из различных совокупностей простейших видов движения.

Поступательное движение твёрдого тела

Поступательным называется такое движение твёрдого тела, при котором любая прямая, проведённая в этом теле, перемещается параллельно своему первоначальному положению.

При поступательном движении скорости всех точек тела геометрически равны, ускорения всех точек геометрически равны, траектории всех точек тождественны и параллельны.

Свойства поступательного движения позволяют свести его изучение к изучению движения отдельной точки тела.

Вращение тела вокруг неподвижной оси

Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором все его точки, лежащие на одной прямой, называемой осью вращения, остаются неподвижными, остальные точки описывают окружности с центрами, находящимися на оси вращения, и с радиусами, равными по длине расстоянию от точки до оси вращения. Эти окружности лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Для определения положения вращающегося тела зададимся направлением оси вращения Z и проведём через неё полуплоскости (рис.К5):

- неподвижную полуплоскость Н;

- подвижную полуплоскость П, связанную с телом и вращающуюся вместе с ним.

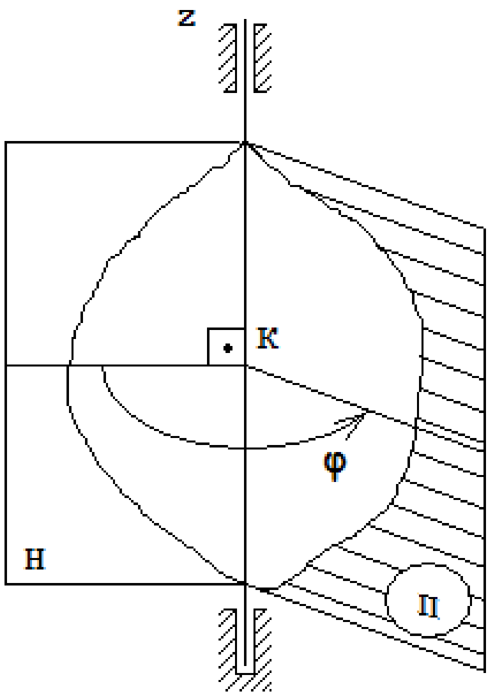


Рис. К5

Угол φ между полуплоскостями, отсчитываемый от неподвижной полуплоскости Н к подвижной полуплоскости П, называется углом поворота тела.

Угол поворота тела считается положительным, когда он отложен против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси вращения Z.

Угол поворота тела обычно измеряется в радианах. Часто угол поворота тела выражается через число оборотов N тела. Поскольку один оборот соответствует 2π радиан, то получается:

$$\varphi = 2\pi N \text{ рад.}$$

При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени: $\varphi = \varphi(t)$ - это уравнение вращательного движения тела.

Основными кинематическими характеристиками являются угловая скорость и угловое ускорение тела.

Угловой скоростью называется вектор, характеризующий быстроту и направление вращения тела. Обозначается $\bar{\omega}$, основная размерность:

$$[\omega] = \text{рад/с} = \frac{1}{c} = \text{с}^{-1};$$

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{\pi N}{30} \quad (\text{с}^{-1}).$$

Угловая скорость тела в данный момент времени численно равна первой производной от угла поворота тела по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Знак угловой скорости определяет направление вращения тела.

Если $\frac{d\varphi}{dt} = \omega > 0$, то тело вращается против хода часовой стрелки при взгляде с положительного направления оси Z, если $\frac{d\varphi}{dt} = \omega < 0$, то тело вращается по ходу часовой стрелки.

Условно угловая скорость изображается вектором, направленным по оси вращения, так, чтобы смотря навстречу вектору, видеть, что тело вращается против хода часовой стрелки (рис. К6).

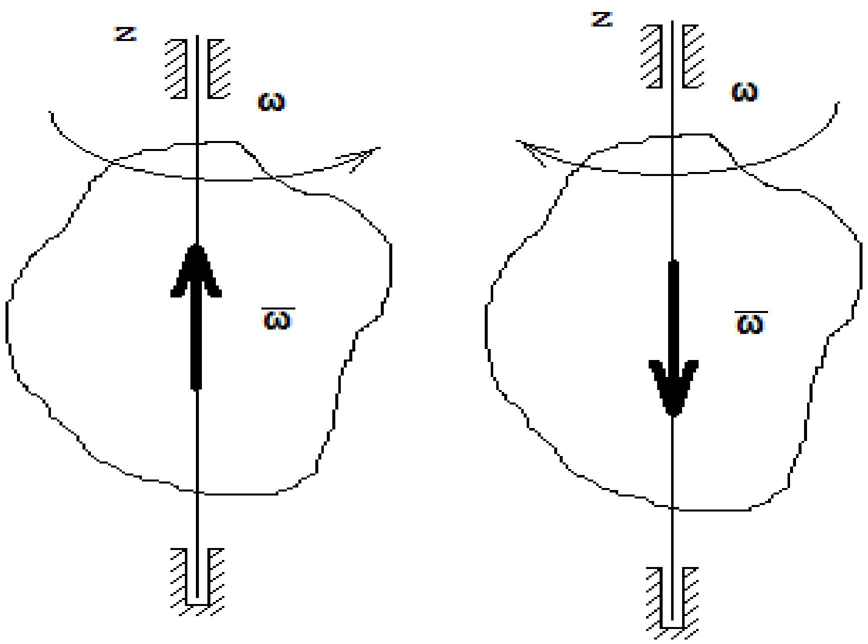


Рис. К6

Угловым ускорением называется вектор, характеризующий изменение с течением времени угловой скорости тела.

Обозначается $\overline{\varepsilon}$, основная размерность $[\varepsilon]$ = рад/с^2 = $^1/_{с^2}$= с$^{-2}$:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Угловое ускорение тела в данный момент времени численно равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Знак углового ускорения даёт возможность установить, является ли вращение тела в данный момент времени ускоренным или замедленным.

Если знаки угловой скорости и углового ускорения одинаковы, тело вращается ускоренно, если различны – замедленно.

Вектор углового ускорения, как и вектор угловой скорости, направлен вдоль оси вращения.

При ускоренном вращении направления $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ совпадают, при замедленном – противоположны (рис. К7).

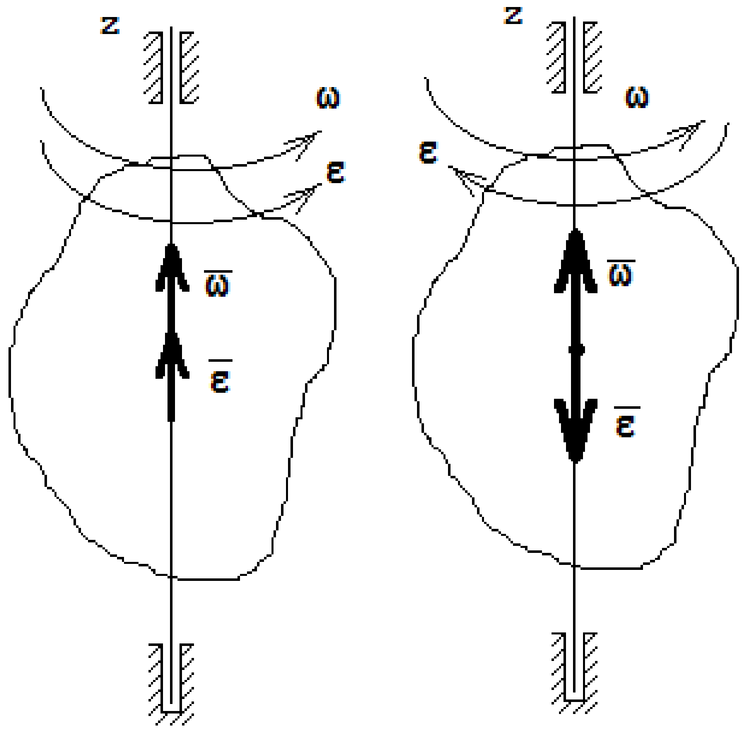


Рис. К7

Скорость точки вращающегося тела называется вращательной или линейной скоростью этой точки.

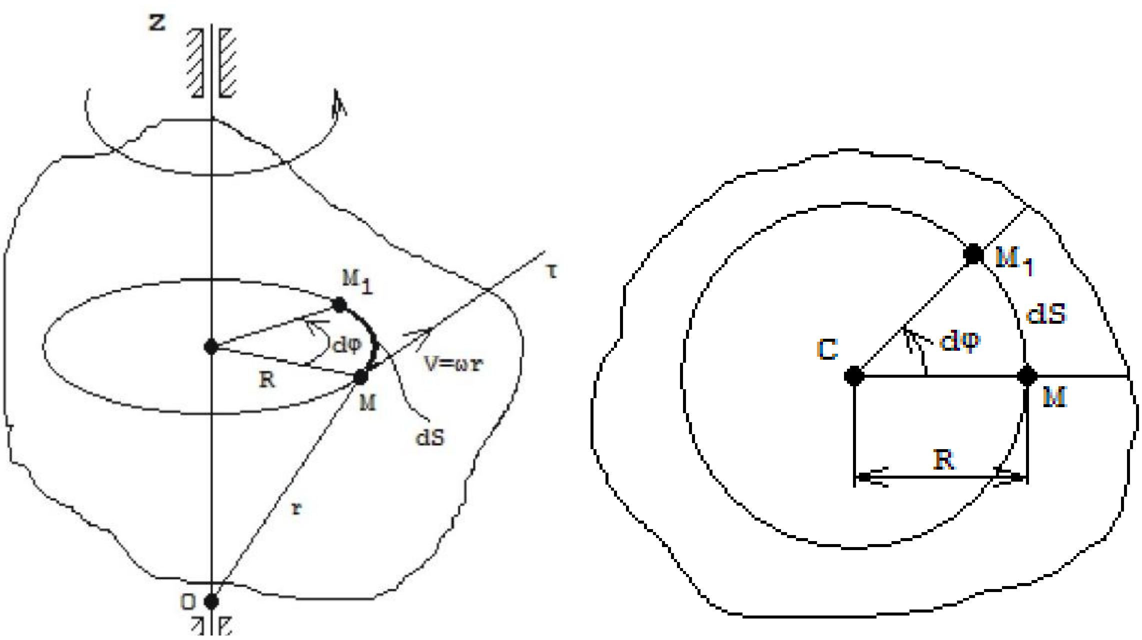
Скорость точки вращающегося тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние до этой точки от оси вращения (радиус вращения):

$$V = \omega R.$$

Вектор V направлен по касательной к траектории точки в сторону вращения тела:

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}.$$

Вращательная скорость точки вращающегося тела равна векторному произведению вектора угловой скорости на радиус-вектор этой точки, проведённый из любой точки оси вращения (рис. К8).



а) б)

Рис. К8

Ускорение точки М вращающегося тела определяется по его составляющим: касательному ускорению, которое в этом случае называется вращательным и обозначается $\vec{a}^{\text{вр}}$, и нормальному ускорению, которое в этом случае называется центростремительным и обозначается $\vec{a}^{\text{ц}}$ (рис. К9):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{a}^{\text{вр}} + \vec{a}^{\text{ц}}.$$

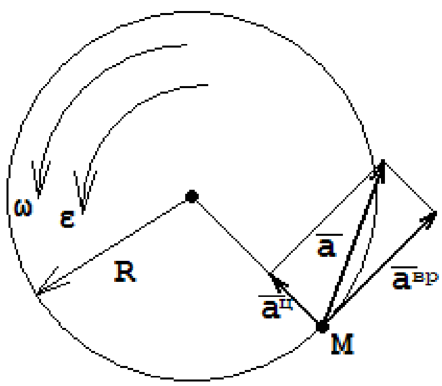


Рис. К9

Величина вращательного ускорения точки равна произведению углового ускорения точки на расстояние от оси вращения до этой точки (на радиус вращения):

$$a^{\text{вр}} = \varepsilon R.$$

Вращательное ускорение направлено перпендикулярно к радиусу вращения.

В случае ускоренного вращения направление вращательного ускорения совпадает с направлением вращательной скорости и противоположно ему в случае замедленного вращения тела.

Модуль центростремительного ускорения тела равен произведению квадрата угловой скорости тела на радиус вращения тела:

$$a^{\text{ц}} = \omega^2 R.$$

Направлено центростремительное ускорение всегда к центру окружности, описываемой точкой.

Модуль полного ускорения определяется по формуле:

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ .$$

Направление полного ускорения точки $\vec{a}$ определяется углом между $\vec{a}$ и $\vec{a}^{\text{ц}}$ (радиусом окружности, описываемой точкой):

$$tg(\vec{a}, \vec{a}^{\text{ц}}) = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Вопросы по теме:

1. Предмет кинематики, механическое движение. Задачи кинематики.
2. Векторный способ задания движения точки.
3. Координатный способ задания движения точки.
4. Естественный способ задания движения точки.

5. Касательное и нормальное ускорение точки.

6. Поступательное движение твердого тела.

7. Вращательное движение и уравнение вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела и их векторное изображение.

8. Скорость и ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Скорость точки вращающегося тела как векторное произведение (формула Эйлера).

9. Плоскопараллельное (или плоское) движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости.

10. Определение скорости точки плоской фигуры как суммы скорости полюса и скорости данной точки при вращении плоской фигуры вокруг полюса.

11. Теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки. Мгновенный центр скоростей (МЦС).

12. Частные случаи определения МЦС (векторы скоростей взаимно параллельны, качение без скольжения). Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью МЦС.

13. Абсолютное и относительное движение точки. Переносное движение.

14. Теорема о сложении скоростей при сложном движении.

15. Теорема о сложении ускорений при переносном поступательном движении.

16. Теорема о сложении ускорений при переносном вращательном движении.

Задачи к контрольной работе

Кинематика

Задача К1

В соответствии с заданными уравнениями движения определить траекторию движения точки, а для момента времени t_1 – положение точки на траектории. Найти ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорение, а также радиус кривизны траектории. Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. К2.1. Координаты даны в метрах, время - в секундах.

№	$x = x(t)$; (x-см, t-с)	$y = y(t)$; (y-см, t-с)
1	$x = at^2 + bt + c$	$y = et + f$
2	$x = bt$	$y = dt^2 + ft + e$
3	$x = c\cos(\pi t)$	$y = e\sin(\pi t)$
4	$x = at + b$	$y = -\dfrac{e}{t+f}$
5	$x = a\cos\left(\dfrac{\pi t}{b}\right)$	$y = d\sin\left(\dfrac{\pi t}{b}\right)$
6	$x = at^2 + b$	$y = et + d$
7	$x = t^2 - bt + c$	$y = t + e$
8	$x = a\cos\left(\dfrac{\pi t}{c}\right)$	$y = f\sin\left(\dfrac{\pi t}{c}\right)$
9	$x = -ct - b$	$y = -\dfrac{f}{t+e}$
10	$x = a\cos\left(\dfrac{\pi t}{c}\right) + b$	$y = e\sin\left(\dfrac{\pi t}{c}\right)$

Таблица К1

№	a	b	c	d	e	f	t_1
0	4	1	5	9	6	2	0,3
1	9	5	7	1	3	4	0,6
2	8	9	4	3	5	1	0,8
3	5	7	1	6	9	8	0,1
4	7	4	8	2	1	3	0,7
5	9	6	3	5	4	7	0,9
№	a	b	c	d	e	f	t_1
6	3	8	2	4	6	5	0,2
7	1	2	6	7	8	9	0,4
8	2	3	9	8	7	4	0,5
9	6	9	4	3	2	8	0,8

Пример К1

Движение точки задано уравнениями : $x = 3t, y = \frac{3}{t}$ (см).

Определить: в моменты времени $t_1 = 1c$ и $t_2 = 2c$ скорость точки, ускорение точки, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны траектории. Определить и построить траекторию точки.

Решение. Для определения уравнения точки исключаем параметр t из уравнений движения: $t = \frac{x}{3}$. Подставляем это значение в уравнение координаты у: $y = \frac{9}{x}$ – уравнение гиперболы.

Точка движется по ветви гиперболы, расположенной в верхнем правом квадрате, так как при подстановке времени $t > 0$ в уравнения движения обе координаты принимают положительное значение. Движение точки происходит сверху вниз.

Траекторию строим по координатам (см. таблицу)

Время t,c	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	∞
Xсм	0	1	1,5	3	6	9	∞
Yсм	∞	9	6	3	1,5	1	0

Определяем скорость точки по её проекциям на координатные оси:

$$V_x = \dot{x} = 3\frac{см}{с};$$

$$V_y = \dot{y} = -\frac{3}{t^2}\frac{см}{с}.$$

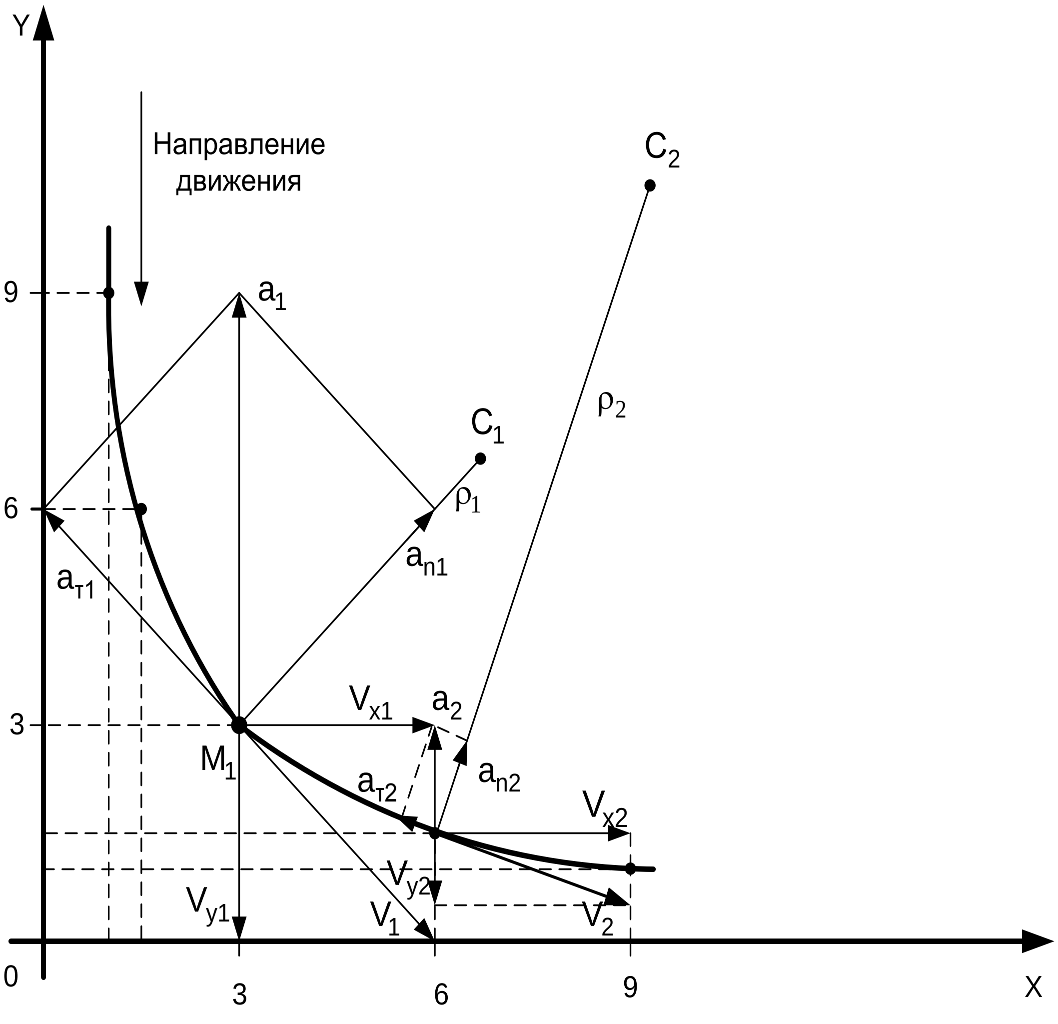
Проекции скорости и их значения для точек в заданный момент времени:

При $t_1 = 1с$; $V_{x1} = 3\frac{см}{с}$; $V_{y1} = -\frac{3}{1^2} = -3\frac{см}{с}$;

$$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = \sqrt{3^2 + \ -3\ ^2} = 4,2\left(\frac{см}{с}\right).$$

При $t_2 = 2с$; $V_{x2} = 3\left(\frac{см}{с}\right)$; $V_{y2} = -\frac{3}{2^2} = -\frac{3}{4}\left(\frac{см}{с}\right)$;

$$V_2 = \sqrt{V_{x2}^2 + V_{y2}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = 3,1\left(\frac{см}{с}\right).$$



Определяем проекции ускорения точки на координатные оси:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = 0$$

$$a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{t^2}\right) = \frac{6}{t^3}\left(\frac{см}{c^2}\right).$$

Проекции ускорения и их значения для точек в заданный момент времени:

При $t_1 = 1c$: $a_{x1} = 0$; $a_{y1} = \frac{6}{1^3} = 6\left(\frac{см}{c^2}\right)$; $a_1 = \left|a_{y1}\right| = 6\left(\frac{см}{c^2}\right)$.

При $t_2 = 2c$: $a_{x2} = 0$; $a_{y2} = \frac{6}{2^3} = \frac{3}{4}\left(\frac{см}{c^2}\right)$; $a_2 = \left|a_{y2}\right| = \frac{3}{4}\left(\frac{см}{c^2}\right)$.

Для определения касательного и нормального ускорений переходим к естественному способу задания движения точки.

Касательное ускорение

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}.$$

При $t_1 = 1c$; $a_{\tau 1} = \frac{3\cdot 0 + \;\; -3 \;\; \cdot 6}{4,2} = -\frac{18}{4,2} = -4,2\left(\frac{см}{c^2}\right)$;

$$a_{\tau 2} = \frac{3\cdot 0 - 0,75\cdot 0,75}{3,1} = -0,18\left(\frac{см}{c^2}\right).$$

Нормальные ускорения: $a_n = \sqrt{a^2 - a_{\tau 2}^2}$.

При $t_1 = 1c$; $a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{6^2 - \;\; -4,2 \;\;^2} = 4,2\left(\frac{см}{c^2}\right)$.

При $t_2 = 2c$; $a_{n2} = \sqrt{a_2^2 - a_{\tau 2}^2} = \sqrt{0,75^2 - \;\; -0,18 \;\;^2} = 0,71\left(\frac{см}{c^2}\right)$.

Определяем радиус кривизны траектории в заданные моменты времени:

$$a_n = \frac{a^2}{\rho};\ \rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

При $t_1 = 1c$; $\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{4,2^2}{4,2} = 4,2 \;\; см$.

При $t_2 = 2c$; $\rho_2 = \dfrac{V_2^2}{a_{n2}} = \dfrac{3{,}1^2}{0{,}71} = 13{,}5\ \text{см}$.

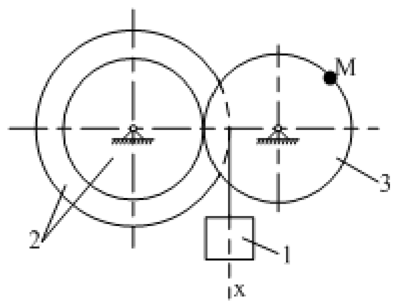
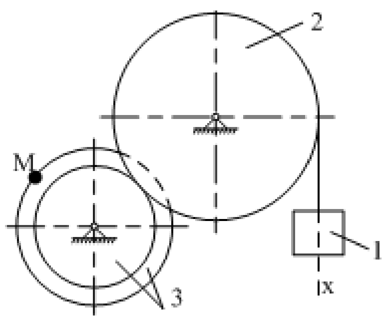
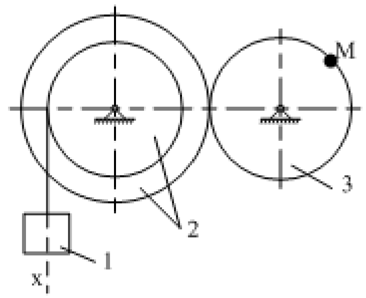
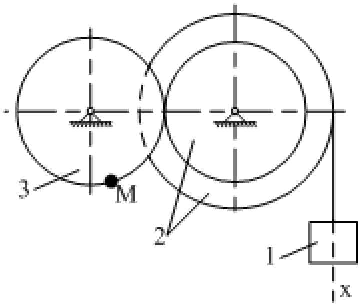
Все результаты решения показаны на чертеже.

Ответ: при $t_1 = 1c$: $V_1 = 4{,}2\left(\dfrac{\text{см}}{c}\right)$, $a_1 = 6\left(\dfrac{\text{см}}{c^2}\right)$, $a_{\tau 1} = -4{,}2\left(\dfrac{\text{см}}{c^2}\right)$, $a_{n1} = 4{,}2\left(\dfrac{\text{см}}{c^2}\right)$, $\rho_1 = 4{,}2\ \text{см}$; при $t_2 = 2c$: $V_2 = 3{,}1\left(\dfrac{\text{см}}{c}\right)$, $a_2 = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\text{см}}{c^2}\right)$, $a_{\tau 2} = -0{,}18\left(\dfrac{\text{см}}{c^2}\right)$, $a_{n2} = 0{,}71\left(\dfrac{\text{см}}{c^2}\right)$, $\rho_2 = 13{,}5\ \text{см}$.

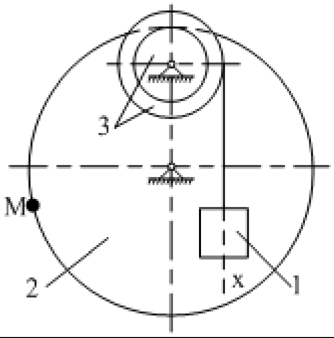
Задача К2

Для представленных на схемах грузоподъемных механизмов определить угловую скорость и угловое ускорение тела 3, необходимые для того, чтобы перемещать груз со скоростью V и ускорением а. Определить и показать на рисунке скорость и ускорение точки М барабана.

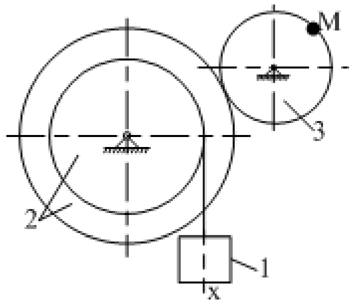
Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. К2.

К 2.0 	К 2.1 
К 2.2 	К 2.3 

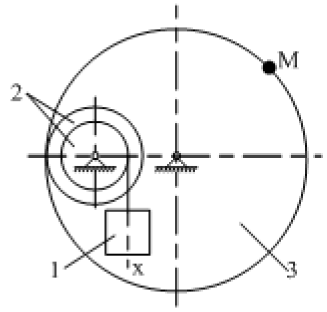
К 2.4



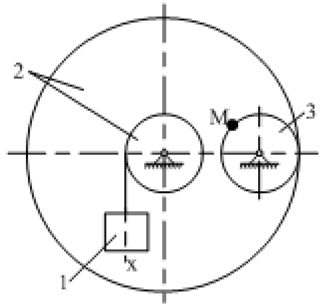
К 2.5



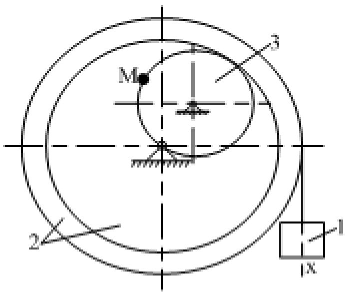
К 2.6



К 2.7



К 2.8



К 2.9

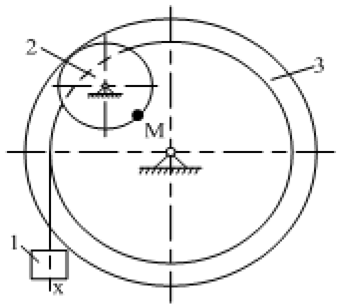


Таблица К2

№	V_1	a_1	R_2	r_2	R_3	r_3
	м/с	м/с^2	м	м	м	м
0	0,10	0,75	0,40	0,15	0,60	0,35
1	0,25	0,70	0,80	0,20	0,70	0,25
2	0,35	0,90	0,60	0,50	0,50	0,30
3	0,50	0,55	0,55	0,35	0,45	0,20
4	0,40	0,75	0,75	0,20	0,75	0,55
5	0,15	0,80	0,65	0,50	0,80	0,45
6	0,30	0,45	0,45	0,35	0,65	0,30
7	0,55	0,60	0,55	0,40	0,40	0,15
8	0,45	0,75	0,70	0,20	0,50	0,20
9	0,20	0,50	0,50	0,25	0,75	0,60

Пример К2. Зубчатая передача приводится в движение грузом 1, подвешенным к колесу 2. На одной оси с колесом 2 укреплено колесо 3, которое сцепляется с колесом 4 (рис. К 2).

Определить скорость и ускорение точки М на ободе колеса 4 в момент времени t=1c. Груз движется по закону: $x = 5t^2 + 10t \ \ см$. Радиусы колёс соответственно: $r_2 = 10 \ \ см$, $r_3 = 6 \ \ см$, $r_4 = 8 \ \ см$.

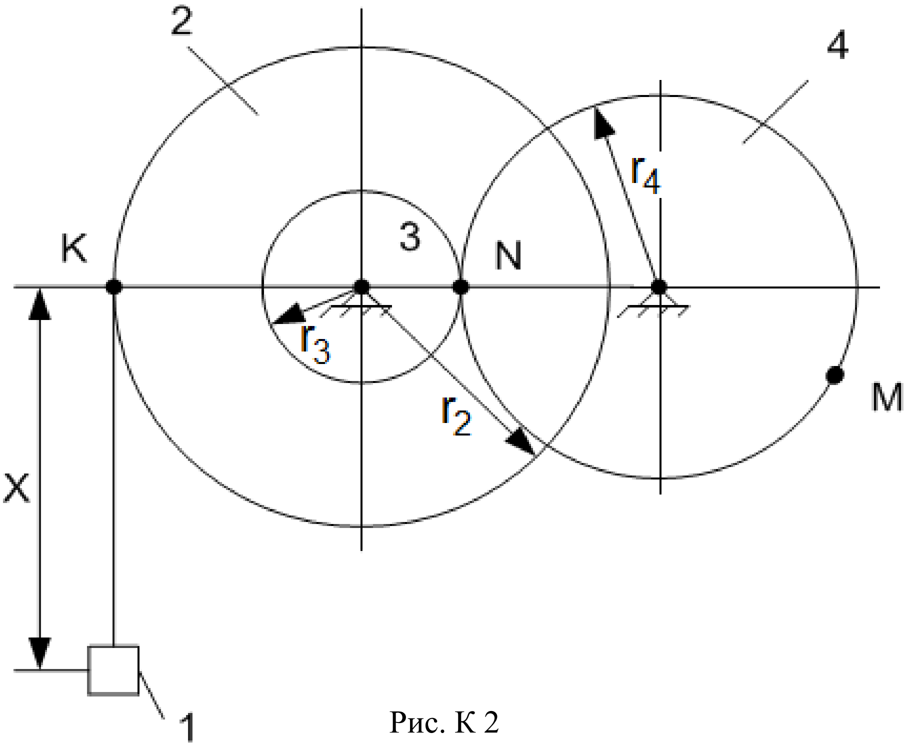


Рис. К 2

Решение. Скорость и ускорение груза 1 будут совпадать со скоростью и вращательным ускорением точки К на ободе колеса 2, с которого сходит нить, к которой подвешен груз:

$$V_k = V_1 = \dot{x} = 10t + 10; \quad a_k^{вр} = a_1 = \ddot{x} = 10\left(\frac{см}{с}\right).$$

Так как колёса 2 и 3 имеют одну ось вращения, то угловая скорость и угловое ускорение у них одинаковые:

$$\omega_{2-3} = \frac{V_k}{r_2} = \frac{10t + 10}{10} = t + 1 \ \ c^{-1} \ \ ;$$

$$\varepsilon_{2-3} = \frac{a_k^{вр}}{r_2} = \frac{10}{10} = 1 \ \ c^{-2} \ \ .$$

Точка N – точка соприкосновения колёс 3 и 4. Скорость этой точки и вращательное ускорение для колес 3 и 4 будут одинаковыми:

$$V_N = \omega_{2-3} \cdot r_3 = \omega_4 \cdot r_4;$$

отсюда $$\omega_4 = \frac{\omega_{2-3} \cdot r_3}{r_4} = \frac{t+1 \ \cdot 6}{8} = \frac{t+1 \ \cdot 3}{4} \ c^{-1} \ ;$$

$$a_N^{вр} = \varepsilon_{2-3} \cdot r_3 = \varepsilon_4 \cdot r_4;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_{2-3} \cdot r_3}{r_4} = \frac{1 \cdot 6}{8} = \frac{3}{4} \ c^{-2} \ .$$

Скорость точки М:

$$V_M = \omega_4 \cdot r_4 = \frac{t+1 \ \cdot 3}{4} \cdot 8 = 6t + 6 \left(\frac{см}{c} \right);$$

в момент t=1c:

$$V_{M1} = 6 + 6 = 12 \left(\frac{см}{c} \right).$$

Ускорение точки М:

$$a_M^{вр} = \varepsilon_4 \cdot r_4 = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6 \left(\frac{см}{c^2} \right);$$

$$a_M^{ц} = \omega_4^2 \cdot r_4 = \left(\frac{(t+1) \cdot 3}{4} \right)^2 \cdot 8 = \frac{9(t+1)^2}{2} \left(\frac{см}{c^2} \right);$$

в момент t=1c:

$$a_{M1}^{ц} = \frac{9 \cdot 2^2}{2} = 18 \left(\frac{см}{c^2} \right);$$

$$a_M = \sqrt{\ a_M^{вр} \ ^2 + \ a_M^{ц} \ ^2} = \sqrt{6^2 + 18^2} = 18.97 \left(\frac{см}{c^2} \right).$$

Ответ:

$V_M = 12 \left(\frac{см}{c} \right)$, $a_M = 18.97 \left(\frac{см}{c^2} \right)$.

Задача К3

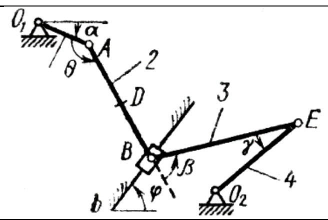
Плоский механизм состоит из стержней 1-4 и ползуна В, соединённых друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами (рис.К 3.0 - К 3.9. - длина стержней: l_1 = 0,4 м, l_2 = 1,2 м, l_3= 1,4 м, l_4 = 0,8 м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ, которые вместе с другими величинами заданы в табл. К3. Точка D на всех рисунках и точка К на рис. 7-9 - в середине соответствующего стержня; определить величины, указанные в таблице в столбце "Найти".

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа должны откладываться соответствующие углы, т.е. по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. 1 следует отложить от стержня DE против хода часовой стрелки, а на рис. 2 - от стержня АЕ по ходу часовой стрелки.)

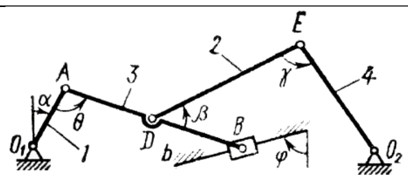
Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α: ползун В и его направляющие для большей наглядности изобразить, как в примере К3 (см. рис. К3). Заданную угловую скорость считать направленной против хода часовой стрелки, а заданную скорость v_B- от точки В к b.

Указания. Задача К3 - на исследование плоскопараллельного движения твёрдого тела. При её решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

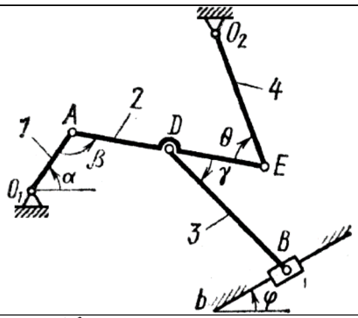
К 3.0



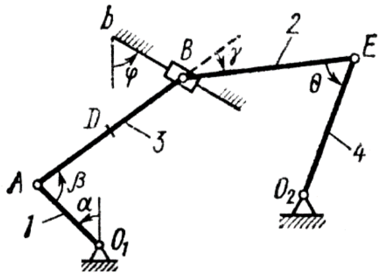
К 3.1



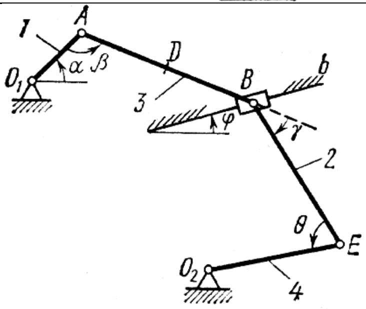
К 3.2



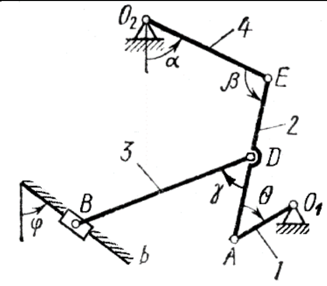
К 3.3



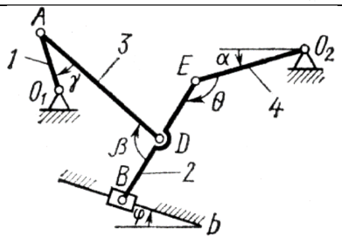
К 3.4



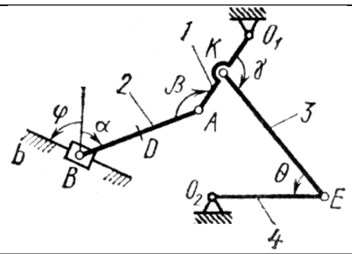
К 3.5



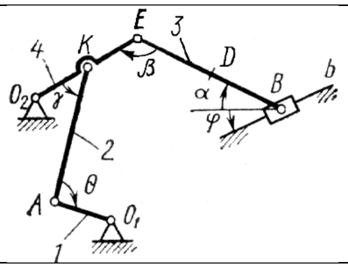
К 3.6



К 3.7



К 3.8



К 3.9

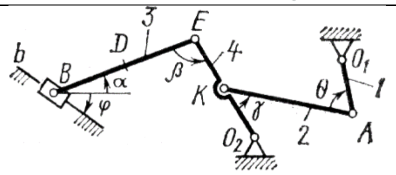


Таблица К3

Номер условия	Углы					Дано			Найти
	α°	β°	γ°	φ°	θ°	ω_1, 1/с	ω_4, 1/с	V_B, м/с	
0	30	150	120	0	60	6			V_B, V_E, ω_2
1	60	60	60	90	120		3		V_A, V_D, ω_3
2	0	120	120	0	60			10	V_A, V_E, ω_2
3	90	120	90	90	60	10			V_B, V_E, ω_2
4	0	150	30	0	60		4		V_B, V_A, ω_2
5	60	150	120	90	30			8	V_A, V_E, ω_3
6	30	120	30	0	60	8			V_B, V_E, ω_3
7	90	150	120	90	30		5		V_A, V_D, ω_3
8	0	60	30	0	120			6	V_A, V_E, ω_2
9	30	120	120	0	60	4			V_B, V_E, ω_3

Пример К3

Механизм (рис. К 3, а) состоит из стержней 1,2,3,4 и ползуна В, соединённых друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 0°$, $\theta = 30°$, AD == DE, $l_1 = 0{,}6$ м, $l_3 = 1{,}2$ м, $\omega_1 = 5$ $с^{-1}$

Определить: V_B, V_E, ω_3.

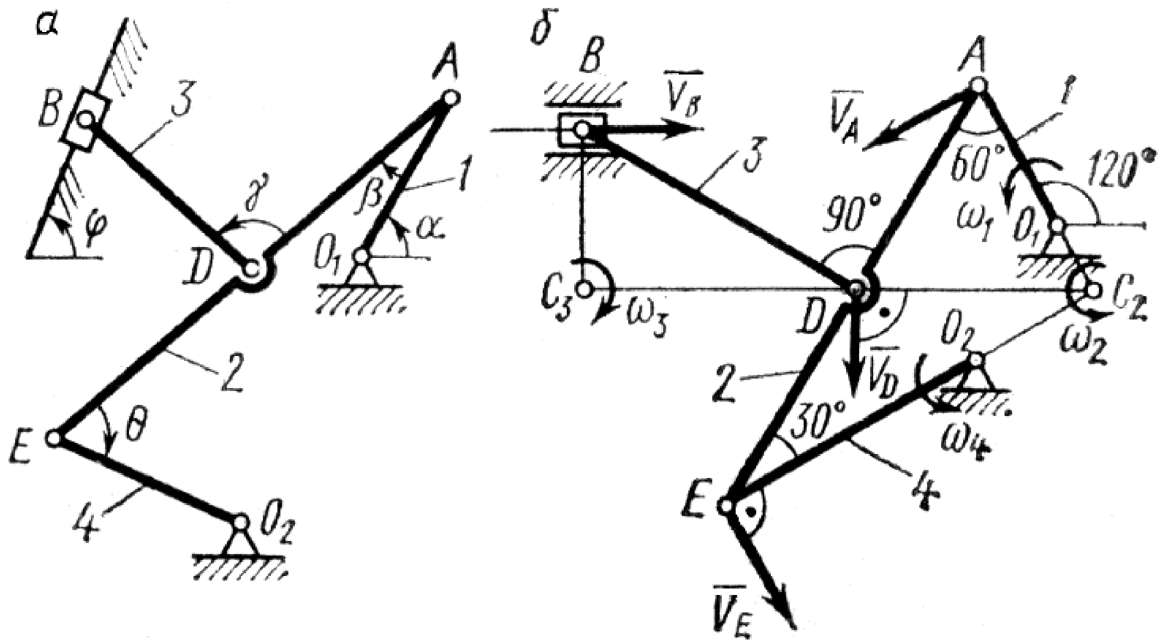


Рис. К3

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К3, б).

2. Определяем V_E. Точка E принадлежит стержню AE. Чтобы найти V_E, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление V_E. По данным задачи можно определить V_A:

$$V_A = \omega_1 l_1 = 5 \cdot 0{,}6 = 3 \text{ м/с}, V_A \text{ перпендикулярна } O_1A. \qquad (1)$$

Направление V_E найдём, учитывая, что точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2: следовательно V_E перпендикулярна O_2E. Теперь, зная V_A и направление V_E , воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AE) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AE). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор V_E (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим:

$$V_E \cos 60° = V_A \cos 30°,\ V_E=3\sqrt{3}= 5{,}2 \text{ м/с}. \qquad (2)$$

3. Определяем V_B. Точка B принадлежит стержню BD. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить V_B, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AE. Для этого, зная V_A и V_E , построим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AE: это точка C_2, лежащая на пересечении перпендикуляров к V_A и V_E, восставленных из точек A и E (к V_A и V_E перпендикулярны стержни 1 и 4). По направлению вектора определяем направление поворота стержня AE вокруг МЦС C_2. Вектор V_D будет перпендикулярен отрезку C_2D, соединяющему точки D и C_2, и направлен в сторону поворота. Величину V_D найдём из пропорции:

$$V_D/C_2D = V_A/C_2A. \qquad (3)$$

Чтобы вычислить C_2D и C_2A , заметим, что ΔAC_2E - прямоугольный, так как острые углы в нём равны 30° и 60° , и что C_2A = AEsin30° = 0,5 AE = AD. Тогда ΔAC_2E является равносторонним, и $C_2A = C_2D$. В результате равенство (3) даёт:

$$V_D = V_A = 3 \text{ м/с};\ V_D \text{ перпендикулярна } C_2D. \qquad (4)$$

Так как точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно, то направление V_B известно. Тогда, проводя из точек B и D перпендикуляры к скоростям V_B и V_D, построим

МЦС C_3 стержня BD. По направлению вектора V_D определяем направление поворота стержня BD вокруг центра C_3. Вектор V_B будет направлен в сторону поворота стержня BD. Из рис. К2,б видно, что угол $C_3DB = 30°$, а угол $DC_3B = 90°$, откуда $C_3B = l_3 \sin 30°$, $C_3D = l_3 \cos 30°$. Составив теперь пропорцию, найдём, что $V_B/C_2B = V_D/C_3D$, $V_B = V_D \operatorname{tg} 30° = 1{,}7$ м/с.

4. Определяем ω_3. Так как МЦС стержня 3 известен (точка C_3), то:

$$\omega_3 = V_D/C_3D = V_D/\, l_3 \cos 30° = 2{,}9\ \text{с}^{-1}$$

Ответ: $V_E = 5{,}2$ м/с, $V_B = 1{,}7$ м/с, $\omega_3 = 2{,}9$ с$^{-1}$.

Динамика

Различные виды техники представляют собой сложные комплексы, состоящие из систем, взаимодействующих между собой агрегатов и узлов, звеньев, механическими моделями которых являются твердые тела, материальные точки.

Таким образом, возникает механическая модель системы материальных точек как совокупности находящихся в силовом контакте твердых тел, размерами которых можно пренебречь при решении конкретной задачи.

Абсолютно твердое тело представляет собой частный случай этой модели как системы материальных точек, расстояния между которыми не изменяются в процессе движения.

Основная задача состоит в усвоении основ методологии исследования вращательного движения систем материальных точек, обосновании меры инерции при вращении твердого тела и выработке навыков составления дифференциального уравнения вращения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси.

Важным является обобщение меры инерции в случае вращательного движения, которая учитывает распределение масс в твердом теле. Такой мерой является момент инерции.

Существенным является то, что только моменты внешних сил оказывают влияние на вращательное движение твердого тела.

В технике имеется большое количество вращающихся деталей (валы, кривошипы, шкивы), поэтому навыки в исследовании динамики вращательного движения имеют практическое значение.

Момент инерции твердого тела относительно оси

Радиус инерции

Положение центра масс характеризует распределение масс системы не полностью.

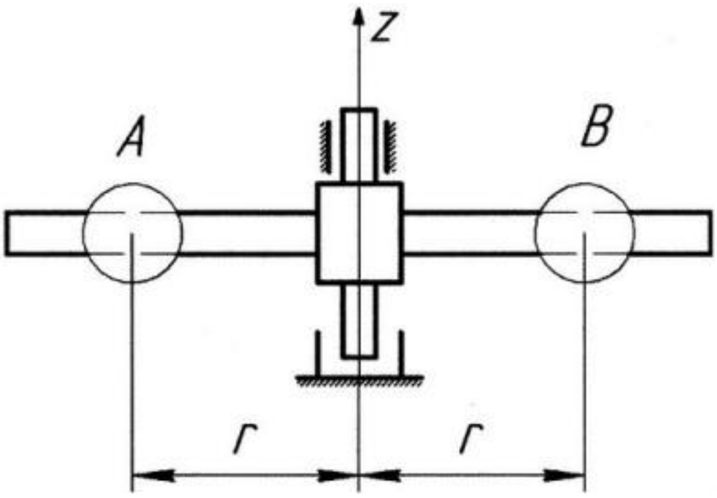


Рис. Д1

Например, если расстояния*r*от оси *z*каждого из одинаковых шариков *A и B* увеличить или уменьшить на одну и ту же величину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим (рис. Д1) .Это приведет к тому, что движение системы под действием тех же приложенных сил изменится, т.е. вращение вокруг оси *Z*станет происходить медленнее или быстрее.

Значит, не изменяя положения центра масс системы, можно изменить распределение масс, что приведет к изменению движения системы. Это требует введения дополнительных характеристик распределения масс.

Такой характеристикой является момент инерции тела относительно сил.

Моментом инерции *Jz* твердого тела относительно некоторой оси (осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений массы mj каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки до оси.

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2 \tag{1}$$

При непрерывном распределении масс материальных точек в твердом теле осевой момент инерции определяется формулой:

$$J_z = \int_{(V)} r^2\, dm \quad (2)$$

где: *dm* - масса элементарной частицы тела;

r - расстояние этой частицы от оси Z.

Из определения следует, что осевой момент инерции является величиной положительной и не равен нулю.

В дальнейшем будет показано, что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении,* т.е. выполняет такую же роль, какую масса при поступательном движении тела. Момент инерции тела относительно данной оси Z можно представить в виде произведения массы тела на квадрат длины некоторого отрезка Jz, называемого радиусом инерции тела относительно этой оси, т.е.

$$J_z = m{i_z}^2 \quad (3)$$

Следовательно, моментом инерции тела относительно данной оси называется скалярная величина, равная произведению массы тела на квадрат радиуса инерции тела относительно этой оси. Радиусом инерции тела относительно какой-либо оси называется такое расстояние от этой оси, в конце которого нужно сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела. Если момент инерции тела относительно данной оси известен, то радиус инерции тела относительно этой оси находится по формуле:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} \quad (4)$$

Таким образом, зная момент инерции, можно найти радиус инерции тела и наоборот.

Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей (теорема Штейнера)

Через центр масс С тела проведем координатные оси XУZ, а через любую точку О на оси СУ проведем ось *Z1* , параллельную оси Z (рис. Д2).

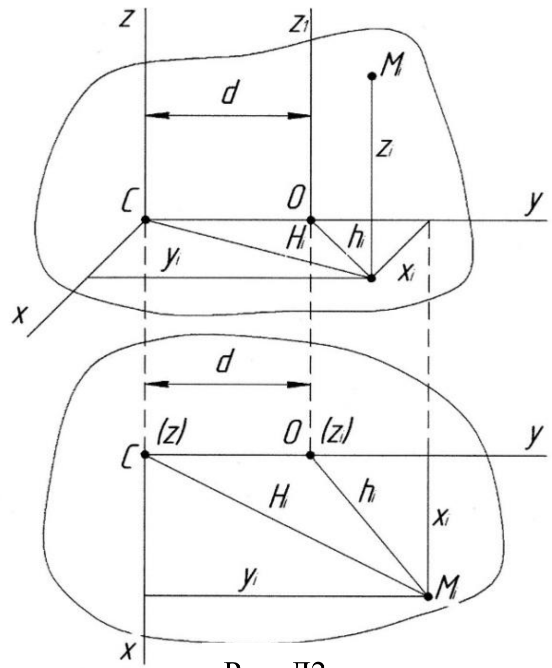


Рис. Д2

Оси, проходящие через центр масс тела, называются центральными. Расстояние между осями Z и Z1обозначим через d. Выделим произвольную точку тела с массой *Mj*и координатами *x1,y1,z1*. Расстояние этой точки от оси Z обозначим через *Hj;* а от оси *Z1* - через hj.

Тогда на основании определения момента инерции:

Момент инерции тела относительно центральной оси Z:

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i H_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^{\,2} + y_i^{\,2}) \;.$$

$$J_{z1} = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} m_i [x_i^{\,2} + (y_i - d)^2] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^{\,2} + y_i^{\,2} - 2y_i d + d^2) = \tag{5}$$
$$= J_z - 2d \sum_{i=1}^{n} m_i y_i + d^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = J_z + md^2 \cdot$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = m y_C = 0 \cdot$$
$$J_{z1} = J_z + md^2 \cdot$$

Равенство (5) выражает следующую теорему:

Момент инерции тела относительно любой оси равен моменту инерции этого тела относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.

Из этой теоремы следует, что из всех моментов инерции тела относительно параллельных осей наименьшим будет момент инерции относительно центральной оси.

Равенство (5) широко используется в практических расчетах при определении моментов инерции тел относительно осей, не проходящих через центр масс.

Моменты инерции простейших однородных тел

Тонкий однородный стержень

Определим момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси, перпендикулярной к оси стержня и проходящей через его конец (рис. Д3).

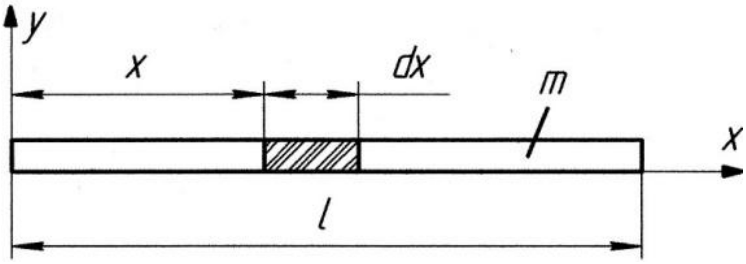


Рис. Д3

Разобьем стержень по длине на малые отрезки. Тогда масса любого элементарного отрезка стержня длиной dx, находящегося на расстоянии X от оси Z, будет равна:

$$dm = \rho dx = \frac{m}{l} dx \quad ,$$

где : m – масса стержня;

$\rho = \frac{m}{l}$ – масса единицы длины стержня.

По формуле (2) найдем:

$$J_z = \int\limits_{(V)} r^2\, dm = \int\limits_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \int\limits_0^l x^2\, dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

Следовательно,

$$J_z = \frac{1}{3} ml^2 \quad .$$

Момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно к его оси, равен одной третьей произведения массы стержня на квадрат его длины.

Применим теорему Штейнера для определения момента инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его центр тяжести (рис. Д4):

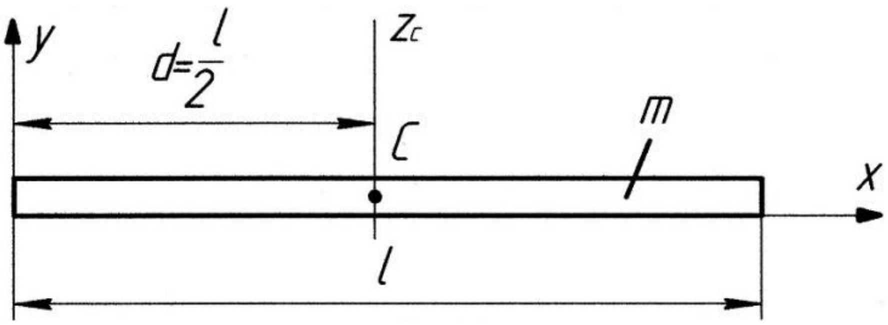


Рис. Д4

$$Jz = Jzc + md^2 \text{ ,}$$

откуда

$$Jzc = Jz - md^2.$$

Момент инерции относительно оси Z:

$$J_z = \frac{ml^3}{3}$$

Подставляя это значение, получим:

$$J_{zC} = J_z - md^2 = \frac{ml^2}{3} - m\frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{12}$$

$$J_{zC} = \frac{ml^2}{12} \quad .$$

Тонкое однородное кольцо

Определим момент инерции точного однородного кольца радиусом R и массой m относительно центральной оси Z , перпендикулярной к плоскости кольца (рис. Д5).

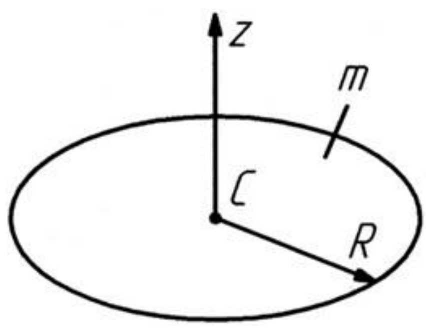


Рис. Д5

В данном случае все точки кольца находятся от оси Z на расстоянии R, поэтому момент инерции находится по формуле:

$$J_z = mR^2 \ .$$

Очевидно, такой же результат получится при вычислении момента инерции тонкостенного цилиндра массой *m* с радиусом*R*относительно центральной оси. Момент инерции тонкого однородного кольца (тонкостенного цилиндра) относительно его центральной оси равен произведению массы кольца (цилиндра) на квадрат его радиуса.

При приближенном вычислении моментов инерции полых цилиндрических тел с тонким ободом (например, маховиков) пренебрегают толщиной обода и считают всю массу тела равномерно распределенной по его внешней боковой поверхности, т.е. момент инерции таких тел вычисляют по формуле, как для кольца.

Круглая однородная пластина

Вычислим момент инерции круглой однородной пластины радиусом *R* и массой *m* относительно центральной оси перпендикулярной ее плоскости.

Разобьем пластину на множество элементарных колес и рассмотрим одно из них радиусом *r*и толщиной *dr* (рис. Д6).

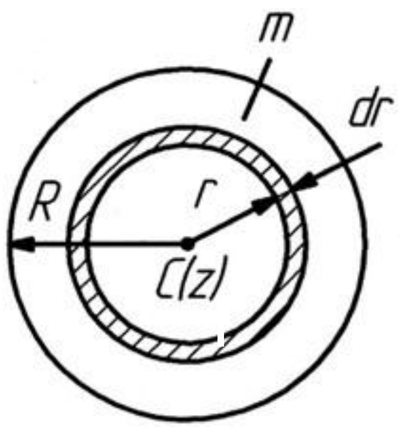


Рис. Д6

Момент инерции круглой однородной пластины высчитывается по формуле:

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2 \quad .$$

Такая же формула получится и для момента инерции однородного круглого цилиндра.

Момент инерции круглой однородной пластины (круглого однородного цилиндра) относительно центральной оси равен половине произведения массы пластины (цилиндра) на квадрат ее радиуса.

Формулы для вычисления моментов инерции однородных тел различной геометрической формы приводятся в технических справочниках. Для тел неоднородных или тел сложной формы моменты инерции вычисляются экспериментально.

Дифференциальное уравнение вращательного движения

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси под действием внешних сил $\overrightarrow{P_1^E}, \overrightarrow{P_2^E}, \dots, \overrightarrow{P_n^E}$ (рис. Д7).

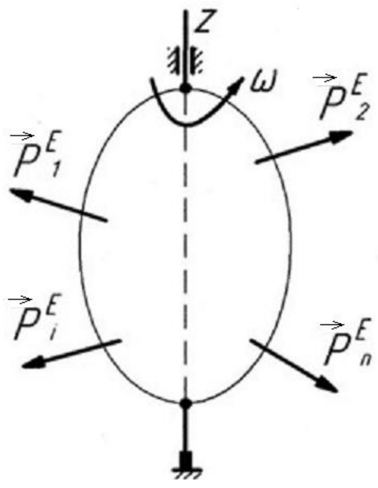


Рис. Д7

Z - Ось вращения. Применим к вращающемуся телу теорему о моменте количествадвижения относительно оси вращения Z.

$$\frac{dL_Z^*}{dt} = M_Z^E \qquad \textbf{(6)}$$

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения

$$L_Z^* = J_z\omega \ ,$$

где: *Jz* - момент инерции относительно оси вращения; ω - угловая скорость тела.

Главный момент внешних сил M_Z^E определяется алгебраической суммой всех внешних сил системы относительно оси вращения Z:

$$M_Z^E = \sum_{i=1}^{n} M_{iZ}^E \ .$$

Тогда уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}(J_z\omega) = \sum_{i=1}^{n} M_{iZ}^E \ .$$

Так как $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ - угловое ускорение тела, можно это уравнение представить в виде:

$$J_z\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} M_{iZ}^E \ .$$

Угловая скорость тела определяется производной от угла поворота по времени:

$$J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} M_{iZ}^E \ .$$

Применяя на практике эти уравнения, удобно левую часть всегда считать положительной. Тогда знаки моментов внешних сил, входящих в правую часть, зависят от того, способствует или препятствует момент данной силы вращению тела в определенном направлении.

Моменты сил, способствующие вращению, считаются положительными, а препятствующие - отрицательными.

Дифференциальное уравнение вращения можно также получить из уравнения поступательного движения, заменяя характеристики поступательного движения на их аналоги во вращательном движении.

Вопросы по теме:

1. Введение. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Законы механики Галилея - Ньютона. Задачи динамики.

2. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в декартовых координатах и в проекциях на естественные оси.

3. Две основные задачи динамики для материальной точки. Схема решения первой задачи динамики.

4. Решение второй задачи динамики. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение.

5. Механическая система. Классификация сил, действующих на систему. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс и его координаты.

6. Момент инерции твердого тела относительно оси. Радиус инерции. Вычисление моментов инерции однородных тел.

7. Момент инерции тела относительно параллельных осей.

8. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы.

9. Количество движения материальной точки. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной и конечной формах.

10. Количество движения механической системы и его вычисление. Теорема об изменении количества движения механической системы.

11. Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении момента количества движения точки.

12. Кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения.

13. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента.

14. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

15. Элементарная работа силы и ее аналитическое выражение. Работа силы на конечном перемещении.

16. Кинетическая энергия материальной точки. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

17. Кинетическая энергия механической системы.

18. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении твердого тела.

19. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

20. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

21. Сила инерции материальной точки.

22. Принцип Даламбера для материальной точки.

Задачи к контрольной работе

Динамика

Задача Д1

Варианты 0-4 (рис. Д8). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол a с горизонтом, его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения равен f. Через τ секунд тело в точке B со скоростью V_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью V_C: при этом оно находится в воздухе T секунд. При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

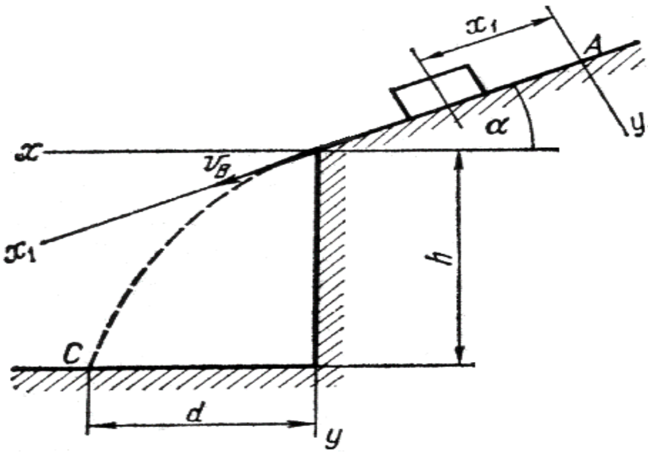


Рис. Д8

Варианты 5-9 (рис. Д9). Имея в точке A скорость V_A, тело движется по горизонтальной плоскости AB длиной l в течение τ секунд. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f. Со скоростью V_B тело от точки B движется к точке C со скоростью V_c, находясь в воздухе T секунд. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

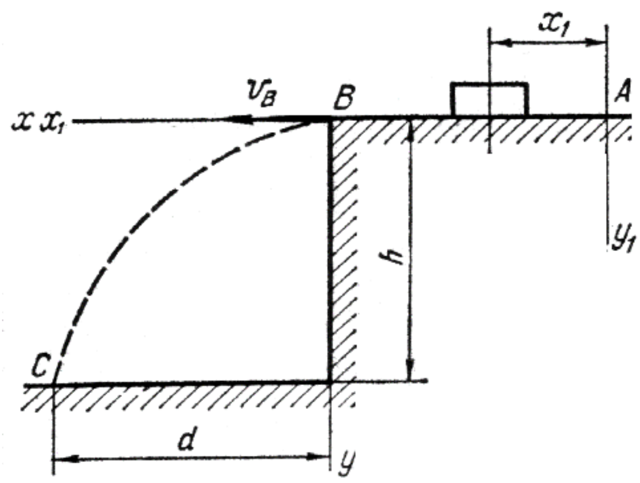


Рис. Д9

Номер условия	α°	*l*, м	*d*, м	*h*, м	*f*	*τ*, с	V_A, м/с	V_B, м/с	Найти
0	30	-	-	10	0,1	1,5	1	-	V_B, d
1	45	10	-	-	-	2	0	-	*f, уравнение траектории на участке* ВС
2	-	9,81	-	20	0	2	0	-	α°, T
3	30	10	12	-	0,2	-	0	-	*τ*, *h*
4	30	6	-	4,5	0,2	-	0	-	*τ*, V_C
5	-	8	-	20	0,2	-	7	-	*d*, V_D
6	-	-	2	-	0,1	2	4	-	V_B, *h*
7	-	3	-	5	0,3	-	-	3	V_A, T
8	-	2,5	-	20	-	-	3	1	*f*, *d*
9	-	4	3	5	0,25	-	-	-	V_A, *τ*

Указания. Задача Д1 - на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи осуществляется в два этапа. Сначала нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения точки (тела) на участке АВ, учитывая начальные условия. Затем, зная время движения на участке АВ или его длину, определить, какую скорость будет иметь тело в точке В. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке ВС. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальные уравнения движения тела в участке ВС тоже с учётом начальных условий, ведя отсчёт времени от момента, когда тело находится в точке В, и полагая, что в этот момент $T_0 = 0$.

Пример Д1. В железнодорожных скальных выемках, для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей, устраивается "полка" ДС. Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки А откоса и полагая при этом его начальную скорость $V_0 = 0$, определить минимальную ширину полки " в" и скорость V_C, с которой камень падает на неё. По участку АВ откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину *l*, камень движется *τ* секунд.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения *f* камня на участке АВ постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь. (рис. Д10).

Дано: $V_A = 0$, $\alpha = 60°$, $l = 4$ м, $\tau = 1$ с, $f \neq 0$, h = 5 м, $\beta = 75°$.

Определить: *в* и V_C.

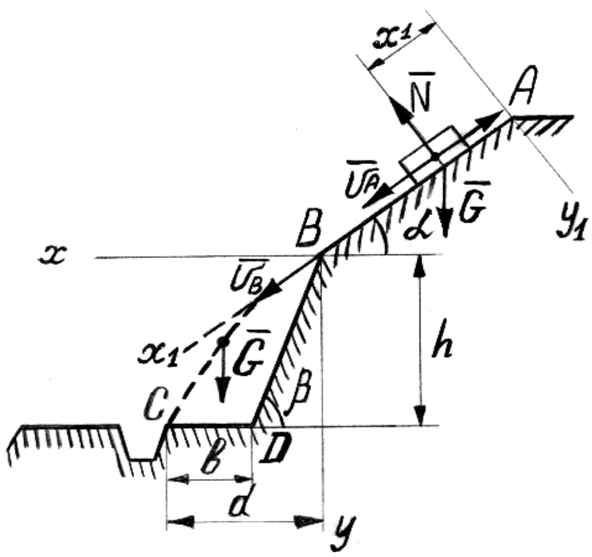


Рис. Д10

Решение: рассмотрим движение камня на участке АВ. Принимая камень за материальную точку, покажем действующие на него силы: вес G, нормальную реакцию N и силу трения скольжения F. Составим дифференциальные уравнения движения камня на участке АВ:

$$mx_1'' = \sum x_{i1};\ mx_1'' = G\sin\alpha - F$$

Сила трения:

$$F = fN,$$

где $N = G\cos\alpha$

Таким образом, $mx_1'' = G\sin\alpha - fG\cos\alpha$или $x_1'' = g\sin\alpha - fg\cos\alpha$.

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получим:

$$x_1' = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1$$

$$x_1 = (g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2)t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: $t_0 = 0$; $x_{10} = 0$; $x_{10}' = 0$.

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t_0 = 0$ $x_{10}' = C_1$; $x_{10} = C_2$. Найдём постоянные: $C_1 = 0$; $C_2 = 0$.

Тогда$x_1' = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$.

$$x_1 = (g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2)t^2 .$$

Для момента τ, когда камень покидает участок,

$$x_1' = V_B;\ x_1 = l.\ \text{Т.е.}\ V_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,\tau;$$

$$l = (g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2)\,\tau^2.$$

Откуда $V_B = 2l/\tau$, т.е $V_B = 8$ м/с.

Рассмотрим движения камня от точки В до С, показав силу тяжести G, действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$mx'' = 0;\ my'' = G.$$

Интегрируя первое из этих уравнений:

$$X' = C_3;\ x = C_3t + C_4.$$

Постоянные интегрирования C_3 и C_4 определим, используя начальные условия задачи: при $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $x_0' = V_B\cos\alpha$.

С помощью уравнений, полученных при интегрировании и составленных для $t = 0$, $x_0' = C_3$, $x_0 = C_4$, найдём $C_3 = V_B\cos\alpha$, $C_4 = 0$. Тогда $x' = V_B\cos\alpha$, $x = V_B\cos\alpha t$, интегрируя уравнения $my'' = G$,
получим: $y = gt + C_5$; $y = gt^2/2 + C_5t + C_6$. Начальные условия: при $t_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_0' = V_B\sin\alpha t$. Определив t из первого уравнения и подставляя его значение во второе, получим уравнение параболы:

$$Y = gx^2/(2V^2_B\cos^2\alpha) + x\ \mathrm{tg}\alpha.$$

В момент падения $y = h = 5$ м,а$x = d$,

$$5 = 9{,}81d^2/(2\ 8^2 0{,}5^2) + d\sqrt{3}.$$

Откуда

$$d_{1,2} = -2{,}82 \pm 4{,}93.$$

Так что

$$d_1 = 2{,}11\ \text{м},\ d_2 = 7{,}75\ \text{м}.$$

Поскольку траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами её точек, то d = 2,ll м. Минимальная ширина полки $в = d – ED = d - h/\mathrm{tg}75° = 0{,}77$ м. Используя уравнения движения камня $x = V_B\cos\alpha t$, найдём время Т движения камня от точки В до С:

$$2{,}11 = 8 \cdot 0{,}5T \text{ откуда } T = 0{,}53\ \text{с}.$$

Скорость камня при падении найдём через проекции скорости на оси координат:

$$x' = V_B\cos\alpha,\ y' = gt + V_B\sin\alpha.$$

По формуле $v = \sqrt{(x^{2\prime} + y^{2\prime})}$.

Для момента падения $t = T = 0{,}53$ с.

$V_C = \sqrt{((V_B\cos\alpha)^2 + (gt + V_B\sin\alpha)^2)} = \sqrt{(8 \cdot 0{,}5)^2 + (9{,}81 \cdot 0{,}53 + 8 \cdot 0{,}87)^2} =$
$=12{,}8$ м/с.

Задача Д2

1. Материальная точка массой m=m (кг) движется вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы F=at (Н). Найти скорость V и положение точки x при t_1=t при нулевых начальных условиях.

2. На тело m=m, движущееся по горизонтальной гладкой поверхности, действует сила отталкивания, проекция которой на горизонтальную ось Ox$F_x=k^2mx$ (Н). В начальный момент времени тело находится в покое на расстоянии $x_0=x_0$ (м) от начала отсчета. Определить: скорость движения тела в момент, когда расстояние от начала отсчета увеличится в n=n раз.

3. Сила тяги винтов вертолёта массой m при вертикальном подъёме из состояния покоя в n раз больше L. Сопротивление воздуха пропорционально первой степени скорости R = -mkV (Н). Определить: скорость подъёма в момент t=t , а также V_{max}.

4. Лодке массой m = M (кг) сообщается начальная скорость $V_0 = V_0$ (м/с). При движении лодка встречает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости $R=aV^2$ (Н). Через какое время скорость лодки уменьшится в n раз?

5. Материальная точка массой m=m (кг) движется из начала координат вдоль горизонтальной оси Ox, имея начальную скорость $V_0=V_0$ (м/с) и испытывая силу сопротивления движению R=-kx (Н). Найти скорость V и положение точки x при t=k (с).

6. Тело массой m , движущееся по гладкой горизонтальной поверхности, притягивается к неподвижному центру с силой, проекция которой на горизонтальную ось Ox $F_x= -k^2mx$ (Н). В момент времени t=0, x=0 и $V_0=V_0$ (м/с). Определить: максимальное удаление тела от начала отсчета.

7. Груз массой m=m (кг) опускается при помощи парашюта без начальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна первой степени скорости $R = -bV$ (Н). Определить: скорость V груза через $t=t$ (с) после начала спуска.

8. В момент выключения мотора катер массой $m = M$ (кг) имел скорость V_0. Какой путь пройдёт катер с выключенным мотором до момента времени, когда его скорость уменьшится в $n=n$ раз. Силу сопротивления считать пропорциональной квадрату скорости $R = aV^2$ (Н).

9. Материальная точка массой $m = m$ (кг) движется вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F = (a+bV)$ (Н). Полагая начальные условия движения точки нулевыми, найти координату x точки в момент времени $t=t$ (с).

10. Материальная точка массой $m = m$ (кг) движется из состоянии покоя вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x= a(b–kt)$ (Н). Найти скорость V и координату x в момент, когда сила обратится в нуль.

Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. Д2.

Таблица Д2

№	k	a	b	m	M	x_0	V_0	n	t	L	α
0	0,3	6	35	9	500	2	4	9	4	100	30
1	0,8	5	60	1	50	4	9	4	8	150	10
2	0,3	5	20	8	800	1	3	5	1	120	30
3	0,7	3	55	2	300	5	8	3	7	90	40
4	0,5	6	25	6	500	3	2	6	5	180	15
5	0,4	7	40	7	75	2	5	8	2	70	35
6	0,7	4	50	5	60	4	6	7	6	160	20
7	0,6	7	30	3	400	3	4	8	5	60	45
8	0,6	5	65	5	100	1	7	2	4	200	25
9	0,5	8	45	4	700	5	1	7	4	140	40

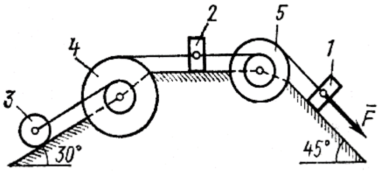
Задача Д 3

Механическая система состоит из грузов 1 и 2 (коэффициент трения грузов о плоскость f = 0,1), цилиндрического сплошного однородного катка 3 и ступенчатых шариков 4 и 5 с радиусами ступеней R_4 = 0,3 м, r_4 = 0,1 м, R_5= 0,2 м, r_5 = 0,1 м (массу каждого шкива считать равномерно распределённой по его внешнему ободу) (рис. Д3.0 – Д3.9, табл. Д3). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Под действием силы F = f(s), зависящей от перемещения s точки приложения силы, система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 4 и 5 действует постоянные моменты сил сопротивлений, равные соответственно M_4и M_5. Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы F равно s_1. Искомая величина указана в столбце "Найти" таблицы, где обозначено: V_1 - скорость груза 1; V_{C3} - скорость центра масс катка 3; ω_4 - угловая скорость тела 4 и т.д.

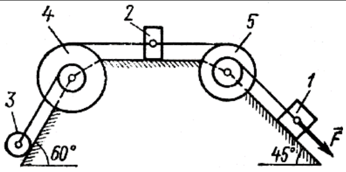
Указания. Задача Д3 - на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия системы равна суммарной кинетической энергии всех входящих в эту систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить.

При вычислении кинетической энергии катка, движущегося плоскопараллельно, для установления зависимости между его угловой скоростью и скоростью его центра масс воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей (кинематика). При определении работы все перемещения следует выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями. Когда по данным таблицы m_2 = 0, груз 2 на чертеже не изображать; шкивы 4 и 5 всегда входят в систему.

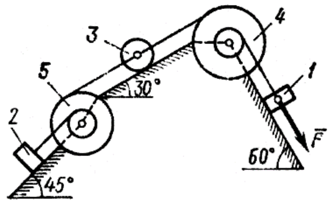
Д 3.0



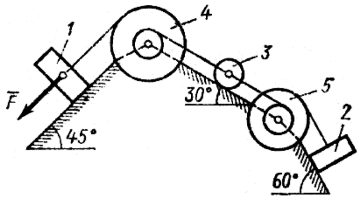
Д 3.1



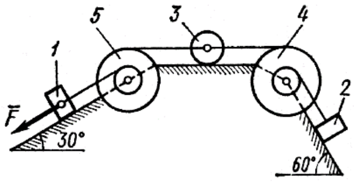
Д 3.2



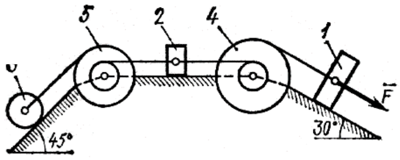
Д 3.3



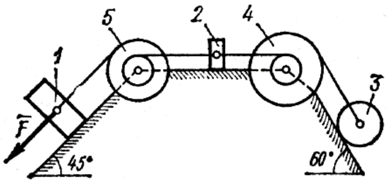
Д 3.4



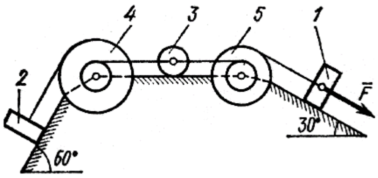
Д 3.5



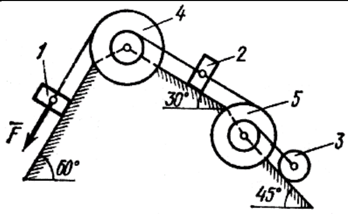
Д 3.6



Д 3.7



Д 3.8



Д 3.9

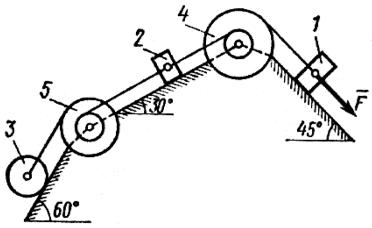


Таблица Д3

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	M_1, Н·м	M_2, Н·м	$F = f(s)$, Н	s_1, м	Найти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	50(2 + 3s)	1,0	V_1
1	6	0	2	0	8	0,6	0	20 (5 + 2s)	1,2	ω_5
2	0	4	6	8	0	0	0,4	80 (3 + 4s)	0,8	V_{C3}
3	0	2	4	0	10	0,3	0	40 (4 + 5s)	0,6	V_2
4	8	0	2	6	0	0	0,6	30(3+2s)	1,4	ω_4
5	8	0	4	0	6	0,9	0	40 (3 + 5s)	1,6	V_1
6	0	6	2	8	0	0	0,8	60 (2 + 5s)	1,0	ω_4
7	0	4	6	0	10	0,6	0	30 (8 + 3s)	0,8	ω_5
8	6	0	4	0	8	0,3	0	40 (2 + 5s)	1,6	V_{C3}
9	0	4	6	10	0	0	0,4	50 (3 + 2s)	1,4	V_2

Пример Д3. Механическая система (рис. Д3) состоит из сплошного цилиндрического катка 1, ступенчатого шкива 2 с радиусами ступеней R_2 и r_2 (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза 3 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 2.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещений s точки её приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив 2 действует постоянный момент M_2 сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 4$ кг; $m_2 = 10$ кг; $m_3 = 8$ кг; $R_2 = 0{,}2$ м; $r_2 = 0{,}1$м; $f = 0{,}2$, $M_2 = 0{,}6$ Нм; $F = 2(l+2s)$ Н; $s_1 = 2$ м.

Определить: скорость V_{C1} центра масс катка, когда $s = s_1$.

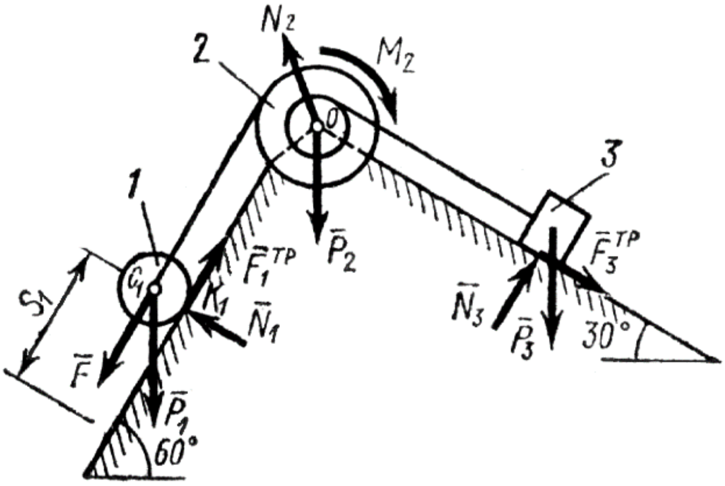


Рис. Д3

Решение

1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тела 1, 2, 3 соединённых нитями. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные F_1, P_1, P_2, P_3, момент сопротивления M_2, реакции N_1, N_2, N_3 и силы трения $F^{тр}{}_1$ и $F^{тр}{}_3$.

Для определения V_{C1}, воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы:

$$T - To = \Sigma A^e{}_R. \qquad (1)$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2)$$

Учитывая, что тело *l* движется плоскопараллельно, тело 3 - поступательно, а тело 2 вращается вокруг своей оси, получим:

$$T_1=m_1V^2_{C1}/2+I_{C1}\cdot\omega^2_1/2,\ T_2 = I_2\cdot\omega^2_2/2,\ T_3 = m_3V^2_3/2. \qquad (3)$$

Все входящие сюда скорости следует выразить через искомую V_{C1}. приняв во внимание, что точка K_1 - мгновенный центр скоростей катка 1, и обозначив радиус катка через r_1, получим

$$\omega_1 = V_{C1}/K_1C_1 = V_{C1}/r_1,\ \omega_2 = V_{C1}/R_2,\ V_3 = \omega_2\cdot r_2 = V_{C1}\cdot r_2/R_2. \qquad (4)$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5\ m_1r^2_1,\ I_2 = m_2R^2_2. \qquad (5)$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем используя равенство (2), получим окончательно:

$$T = (0{,}75\ m_1 + 0{,}5\ m_2 + 0{,}5\ m_3\ r^2_2/R^2_2\ )\ V^2_{C1}. \qquad (6)$$

3. Теперь найдём сумму работ всех действующих сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдёт путь S_1. Одновременно все перемещения следует выразить через заданную величину S_1, для чего учтём, что здесь зависимость между перемещениями будет такой же , как и между соответствующими скоростями в уравнении (4), т.е. $\varphi_2 = s_1/R_2$, $s_3 = s_1(r_2/R_2)$. В результате получим:

$$A(F) = \int_0^{S_1} 2(1+2S)dS = 2(S_1 + S_1^2)$$

$$A(P_1) = P_1s_1\sin 60°,\ A(M_2) = -\ M_2\varphi_2 = -\ M_2\ S_1/R_2,$$

$$A(P_3) = -\ P_3S_3\ \sin 30° = -\ P_3S_1\ r_2/R_2\ \sin 30°,$$

$$A(F^{mp}_3) = -\ F^{mp}_3S_3 = -\ f\ N_3S_3 = -\ f\ P_3\ \cos 30° S_1\ r_2/R_2.$$

Работа остальных сил равна нулю, так как точка K_1, где приложены N_1 и $F^{тр}_1$ - мгновенный центр скоростей, точка О, где приложены P_2 и N_2, неподвижна, а реакция N_3 перпендикулярна перемещению груза 3.

Тогда окончательно:

$$\Sigma A^E_R = 2(s_1+s^2_1)+P_1S_1\sin60°-M_2S_1/R_2-P_3S_1r_2/R_2(\sin30°+f\cos30°). \qquad (7)$$

4. Подставив выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая что T_0 = 0, получим:

$$(0{,}75m_1 + 0{,}5m_2 + 0{,}5m_3\, r^2_2/R^2_2)\, V^2_{C1} = 2(s_1 + s^2_1) + P_1S_1 \sin60° - M_2\, S_1/R_2 - P_3S_1\, r_2/R_2\, (\sin30°+f\cos30°). \qquad (8)$$

При числовых значениях, которые имеют заданные величины, равенство (8) даёт $9V^2_{C1} = 21{,}l$ Н·м.

Отсюда находим искомую скорость.

Ответ: V_{C1} = 1,53 м/с.

Библиографический список

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. -М.: Физматгиз, 1963.

2. Попов М.В. Теоретическая механика. Краткий курс. -М.: Наука, 1986.

3. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. -М.: Наука, 1952.

4. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. -М.: Наука, 1970.

5. Яблонский А.А. Никифорова В.М. Курс теоретической механики. -М.: Высшая школа, 1963.

6. Никитин Е.М. Краткий курс теоретической механики для втузов. -М.: Наука,1971.

7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для техн. вузов/ А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон и др.; под ред. А. А. Яблонского. -М.: Высшая школа, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Виктор Евгеньевич Головко
Иван Владимирович Клюшкин

Теоретическая механика

ТЕОРИЯ И ЗАДАНИЯ
для самостоятельной работы студентов
заочной формы обучения

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор и корректор В.А.Басова
Техн. редактор Л.Я.Титова Темплан 2018, поз.106

Подп. к печати 14.12.2018 г. Формат 60x84/16. Бумага тип. №1.
Печать офсетная. Объем 4,5 уч.-изд.л. 4,5 усл.печ.л.
Тираж 100 экз. Изд. № 106 Цена " С". Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД,
198095, ул. Ивана Черных, 4.