Контрольные работы по дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика" для студентов заочного отделения

Контрольная работа №1 (определение вероятностей случайных событий)

Пример решения контрольной работы:

Задача 1. В 3-х из 10 проб крови недостаточный уровень гемоглобина. Лаборант для анализа взял четыре пробы. Какова вероятность, что в 2-х из отобранных проб уровень гемоглобина в норме; хотя бы в одной пробе недостаточный уровень гемоглобина?

Решение. Обозначим случайное событие: в 2-х пробах из 4-х отобранных уровень гемоглобина в норме, через А. Нужно найти вероятность этого события, т.е. Р(А) - ?

Будем искать Р(А) по классической формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n – общее число равновозможных элементарных исходов нашего испытания, а m – число элементарных исходов, при наступлении которых событие А обязательно наступит.

За элементарные исходы в нашей задаче выберем все возможные сочетания способов выбора 4-х проб из 10 имеющихся. Число таких исходов:

$$n = C_{10}^{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210.$$

Число исходов m благоприятных для нашего события будет равно числу способов выбрать 2 пробы из 7 с нормальным уровнем гемоглобина, умноженному на число способов выбрать 2 пробы из трех с низким уровнем гемоглобина:

$$m = C_7^2 \cdot C_3^2 = \frac{7!}{2!\cdot 5!}\frac{3!}{2!\cdot 1!} = 126.$$

И вероятность искомого события P(A)=0,6.

Обозначим случайное событие: хотя бы в одной пробе недостаточный уровень гемоглобина, через B. Общее число исходов остаётся прежним 210, а число благоприятных исходов можно вычислить, если из общего числа вычесть число вариантов, когда все четыре пробы будут содержать нормальный уровень гемоглобина, т.о.

$$m = n - C_7^4 = 210 - \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 210 - 35 = 175,$$

а вероятность P(B)=0,833.

Задача 2. На опытном поле посеяли три семени, вероятность всхожести для них соответственно 0,8; 0,9 и 0,7. Какова вероятность, что взойдут ровно два семени; более одного семени?

Решение. Обозначим случайное событие - взойдут ровно два семени через A.

Для нахождения его вероятности введем события A_1, A_2, A_3 – соответственно взошло первое семя, второе, третье. Тогда наше событие A можно представить:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot A_3 \cdot \overline{A_2} + A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_1},\ где\ \overline{A} - означает\ противоположное\ событие\ к\ A$$

Каждые два слагаемых в этой сумме попарно несовместны, поэтому вероятность суммы будет равна сумме вероятностей, а так как каждое семя всходит или не всходит независимо от других, то для каждого слагаемого вероятность произведения будет равна произведению вероятностей. Т.о.:

$$p(A) = p(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) + p(A_1 \cdot A_3 \cdot \overline{A_2}) + p(A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_1}) =$$
$$p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(\overline{A_3}) + p(A_1) \cdot p(A_3) \cdot p(\overline{A_2}) + p(A_2) \cdot p(A_3) \cdot p(\overline{A_1})$$

Вероятность противоположного события находим по формуле:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

И получаем:

P(A)=0,8·0,9·(1-0,7)+ 0,8·0,7·(1-0,9)+ 0,9·0,7·(1-0,8)=0,398

Теперь найдем вероятность второго события: взойдут более чем одно семя (событие B). Иными словами, событие B состоит в том, что взойдут ровно два семени (событие A) или все три. Таким образом, событие B можно представить как сумму двух несовместных событий:

$$B = A + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3,$$

а вероятность:

$$p(B) = p(A) + p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = p(A) + p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3)$$

P(B)= 0,398+ 0,8·0,9·0,7=0,902

Задача 3. В трёх урнах содержатся белые и черные шары, причём в первой – 3 белых и 1 чёрный, во второй – 2 белых и 3 чёрных, в третьей – все шары белые. Из наугад выбранной урны наудачу выбирают 1 шар. Найти вероятности следующих событий: 1) взятый шар окажется белым, 2) шар взят из третьей урны, если известно, что он оказался белым.

Решение. Выдвигаем 3 гипотезы: H_k - выбрана урна № k (k = 1, 2, 3); событие A - появление белого шара. $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$, т.к. нет причин отдать предпочтение какой-либо из урн. Условные вероятности события A при гипотезах H_1, H_2, H_3: $P(A|H_1) = \frac{3}{4}$, $P(A|H_2) = \frac{2}{5}$, $P(A|H_3) = 1$. Найдём по формуле полной вероятности вероятность того, что взятый шар окажется белым: $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{43}{60}$. По формуле Байеса определим вероятность того, что была выбрана третья урна, если известно, что взятый шар оказался белым:

$$P(H_3 \mid A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{20}{43}.$$

Задача 4. Игральная кость подброшена 10 раз. Найти наивероятнейшее число k выпадений единицы в этом случае и вероятность того, что единица выпадет k раз.

Решение. Число независимых повторных опытов n = 10. Событие A - выпадение единицы при одном подбрасывании, $p = P(A) = 1/6$, $q = 1 - p = 5/6$. Составляем двойное неравенство: $\frac{1}{6} \cdot (10+1) - 1 \le k \le \frac{1}{6} \cdot (10+1)$, откуда $\frac{5}{6} \le k \le 1\frac{5}{6}$. Отсюда следует, что k = 1. По формуле Бернулли (4.1) находим $P_{10,1}(A) = C_{10}^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 = 0.323$.

Ниже приведены номера вариантов контрольных работ.

Варианты (выбираются по последней цифре зачётной книжки)

Вариант 1

1) Из десяти билетов 4 выигрышных. Приобретается четыре билета. Какова вероятность того, что: хотя бы один из них невыигрышный; не менее трёх выигрышных; все выигрышные?
2) Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что не потребует наладки I станок, равна 0,9; II станок – 0,6; III станок – 0,7. Вычислить вероятность того, что только один станок потребует наладки: хотя бы один станок потребует наладки.
3) В первом ящике из 14 ламп 3 неисправны, во втором – из 10 ламп одна неисправная. Какова вероятность извлечь из наугад выбранного ящика исправную лампу?
4) Техническая система состоит из пяти узлов. Вероятность нарушения режима работы для каждого узла равна 0,2. Найти вероятность выхода из строя двух узлов системы; хотя бы одного узла; наивероятнейшее число узлов, не вышедших из строя.

Вариант 2

1) Из урны, содержащей 5 белых и 4 черных шара, наугад извлекают три. Определить вероятность того, что среди них: ровно один чёрный; хотя бы один из них чёрный; все белые.
2) Изделие подвергается четырем видам испытаний. Вероятность того, что изделие выдержит первое испытание, равна 0,9; вторное – 0,6; третье – 0,8; четвертое – 0,7. Найти вероятность того, что изделие выдержит более двух испытаний; хотя бы одно испытание.
3) В первой корзине 7 яблок и 9 груш, во второй – 2 яблока и 4 груш, в третьей – 11 яблок и 4 груши. Из наугад выбранной корзины взяли один фрукт. Найти вероятность того, что это груша. Какова вероятность того, что выбранная таким образом груша была в третьей корзине?
4) Вероятность того, что лампа останется исправной в течение месяца, равна 0,9. В коридоре поставили 5 новых ламп. Какова вероятность того, что из строя выйдут три лампы; останутся исправными менее 4-х ламп?

Вариант 3

1) Из колоды в 36 карт наудачу извлекают 5 карты. Найти вероятность того, что будут вынуты три туза; хотя бы один король; больше двух тузов.
2) Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что потребует наладки I станок, равна 0,2; II станок – 0,3; III станок – 0,1. Вычислить вероятность того, что ровно один станок потребует наладки; хотя бы один станок потребует наладки, не менее двух потребуют наладки.
3) Литье в болванках поступает из двух цехов: из первого в пять раз больше, чем из второго цеха. При этом первый цех дает 5% брака, а второй – 4%. Найти вероятность того, что взятая наугад болванка не содержит дефекта.
4) Какова вероятность пять раз попасть в цель, если вероятность попадания равна 0,8 и производится 8 независимых выстрелов? Найти вероятность не менее 6 попаданий; наивероятнейшее число попаданий.

Вариант 4

1) В урне 8 белых и 4 зеленых шара. Наудачу вынимают 5 шаров. Определить вероятность вынуть 4 белых и 1 зеленый шар; не менее двух белых; хотя бы один зелёный.
2) Производят независимые выстрелы по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.Определить вероятность того, что мишень будет поражена только при шестом выстреле; будет сделано более пяти выстрелов.
3) На двух станках обрабатывают одинаковые детали. Вероятность брака для станка № 1 равна 0,02, для станка № 2 – 0,04. Обработанные детали собирают в одном месте, причем со станка № 1 втрое меньше, чем со станка № 2. Вычислить вероятность того, что наудачу взятая деталь будет дефектной.
4) В некотором обществе 4% дальтоников. Какова вероятность того, что среди 5 отобранных человек, будет хотя бы один дальтоник, не менее 3-х дальтоников, наивероятнейшее число дальтоников?

Вариант 5

1) Из двадцати билетов выигрышными являются 6. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: три выигрышных; хотя бы один выигрышный; не менее двух выигрышных.
2) По самолету производят три одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,7; при втором – 0,8; при третьем – 0,9. Найти вероятность: хотя бы одного попадания, ровно одного попадания; более одного промаха.
3) В первой урне 3 белых и 7 черных шаров, во второй – 5 белых и 4 черных шара. Из первой урны во вторую наугад переложены два шара. Найти вероятность того, что извлеченный после этого из второй урны шар окажется белым.
4) Вероятность того, что стрелок попадет в «десятку», равна 0,7. Вычислить вероятность того, что при девяти выстрелах будет шесть попаданий в «десятку», хотя бы одно попадание в «десятку», наивероятнейшее число попаданий в «десятку».

Вариант 6

1) В корзине 7 спелых и 8 неспелых апельсинов. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу 6-ти апельсинов 4 неспелых; хотя бы один неспелый; более половины спелых?
2) Производят независимые выстрелы до первого попадания. Определить вероятность того, что будет сделано ровно шесть выстрелов; менее пяти выстрелов; более пяти выстрелов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.
3) В первой урне 3 белых и 4 черных шара, во второй – 6 белых и 4 черных шара. Из первой урны во вторую наугад переложены 2 шара. Найти вероятность того, что извлеченный после этого из второй урны шар окажется белым.
4) В ралли участвует 10 машин. Вероятность выхода из соревнования каждой из них 0,1. Найти вероятность того, что к финишу придут более 8 машин.

Вариант 7

1) Из колоды в 36 карт наудачу извлекают четыре карты. Найти вероятность того, что среди них будет ровно два туза; хотя бы один туз; все карты будут разной масти.
2) Станция метрополитена оборудована тремя эскалаторами. Вероятность безотказной работы для первого эскалатора равна 0,6; для второго – 0,8; для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что произойдет поломка одного эскалатора; произойдет поломка более одного эскалатора; хотя бы один эскалатор не выйдет из строя.
3) В первом ящике из 8 ламп 2 неисправных, во втором – из 10 ламп 2 неисправные. Какова вероятность того, что две извлеченные из наудачу выбранного ящика лампы окажутся исправными?
4) Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину равна 0,8. Произведено 11 бросков. Найти вероятность не менее 10 попаданий; наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

Вариант 8

1) В цехе работают 8 мужчин и 4 женщины. Наудачу отобрали 4 человека. Какова вероятность того, что среди них ровно 3 женщины; хотя бы один мужчина; более половины - женщины?
2) Радист может трижды вызывать корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2; второй – 0,6; третий – 0,7. Если вызов принят, последующие вызовы не производятся. Найти вероятность того, что корреспондент не услышит вызов радиста.
3) В группе 5 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить норму равна для лыжника 0,9, для велосипедиста – 0,8, для бегуна – 0,75. Определить вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен не выполнит норму.
4) Вероятность появления удачи в каждом из шести независимых опытов равна 0,7. Определить вероятность появления этого события хотя бы три раза, наивероятнейшее число удач и соответствующую вероятность.

Вариант 9

1) На складе имеется 10 кинескопов, 6 из них изготовлены заводом N. Найти вероятность того, что среди 4-х наудачу взятых кинескопов: окажется не менее трёх, изготовленных заводом N, хотя бы один изготовлен заводом N.
2) По мишени производят три выстрела. Вероятности попадания в мишень при каждом выстреле соответственно равны 0,4; 0,7; 0,9. Найти вероятность того, что в мишени будут ровно одна пробоина; хотя бы одна пробоина; мишень не будет поражена.
3) На двух станках обрабатывают одинаковые детали. Вероятность брака для станка № 1 равна 0,07, для станка № 2 – 0,06. Обработанные детали собирают в одном месте, причем со станка № 1 втрое больше, чем со станка № 2. Вычислить вероятность того, что наудачу взятая деталь будет без дефекта.
4) В среднем 10% станков нуждаются в регулировке. Какова вероятность того, что из шести станков хотя бы один нуждается в регулировке?

Вариант 0

1) Из колоды карт (36 листов) вынимают 4 карты. Найти вероятность того, что все они разных мастей; пиковой масти; одной масти.
2) При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включать зажигание не более трёх раз; более трёх раз.
3) В лаборатории 16 автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность выхода из строя автомата равна 0,05, а полуавтомата – 0,1. Найти вероятность того, что наудачу выбранная машина не выйдет из строя.
4) Станок изготавливает $\frac{2}{3}$ деталей первого сорта. Найти вероятность того, что из шести деталей: одна первого сорта; хотя бы одна первого сорта.

Контрольная работа №2 (случайные величины)

Пример решения контрольной работы:

Задача 1. В ящике 10 деталей, из которых 3 дефектных. Наугад извлекают 2 детали. Построить ряд распределения случайной величины ξ - количества дефектных деталей среди извлечённых, а также функцию распределения, и ее график.

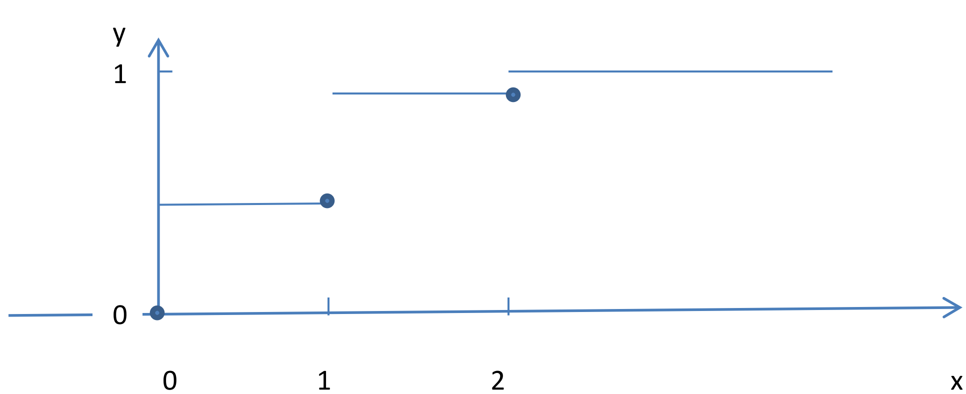
Решение. Случайная величина ξ в данном случае принимает значения x_i = i-1, где i = 1, 2, 3. Вероятности $p_i = P(\xi = x_i)$ того, что среди двух взятых деталей окажется ровно x_i дефектных, вычисляются в соответствии с классическим пределением вероятности по формуле $P(\xi = x_i) = \dfrac{C_3^{i-1} \cdot C_{10-3}^{3-i}}{C_{10}^2}$,

откуда получаем, что ряд распределения случайной величины ξ имеет вид

x_i	0	1	2
p_i	7 / 15	7 / 15	1 / 15

Отметим, что $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 7/15, & 0 < x \le 1 \\ 14/15, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$



Задача 2. Дискретная случайная величина ξ имеет следующий ряд распределения:

x_i	-1	0	1	2
p_i	0.1	0.2	0.3	p_4

Найти значение p_4, вычислить $\mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$

и $\mathbf{M}\eta$ и $\mathbf{D}\eta$, если $\eta = 7 - 6\xi$

Решение. Учитывая, что $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$, находим

$p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 0.4.$

$\mathbf{M}\xi = -1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.4 = 1;$

$\mathbf{D}\xi = (-1)^2 \cdot 0.1 + 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.4 - 1^2 = 1;$

$\mathbf{M}\eta = 7 - 1 = 6;$

$\mathbf{D}\eta = 0 + 6^2 \cdot 1 = 36$

Задача 3. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ ax^3, \text{ при } 0 \le x \le 2 \\ 0, \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

a) найти коэффициент a;

b) найти функцию распределения;

c) построить графики $f(x)$, $F(x)$; вычислить $\mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$.

Решение. Параметр a находим из правила нормировки:

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} a\cdot x^3 dx + \int_{2}^{\infty} 0dx = a\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = a\cdot 4; \Rightarrow$$

$$a = 0.25$$

Функция распределения на участке x <0:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

на участке от 0 до 2 - x, включая границы :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 0.25\cdot t^3 dt = 0.25\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_0^x = \frac{x^4}{16}$$

и при x >2 :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} 0.25\cdot t^3 dt + \int_{2}^{\infty} 0dt = 1$$

График F(x):

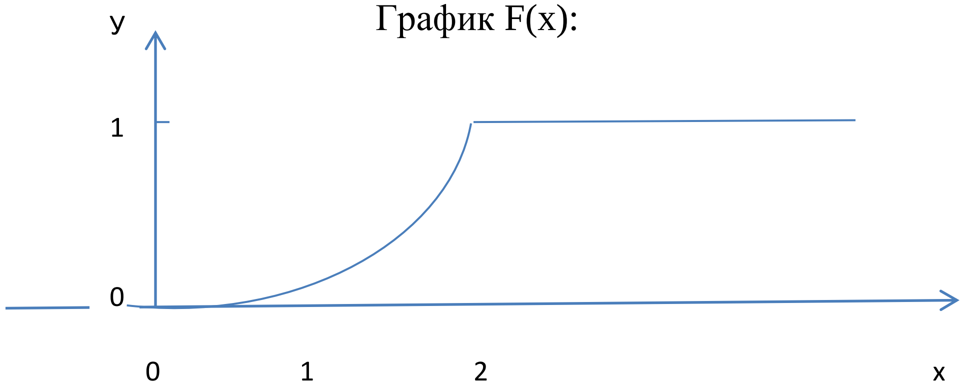
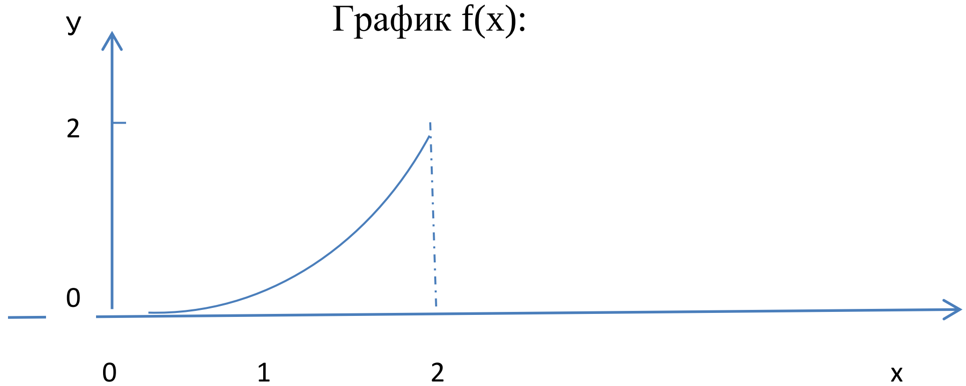


График f(x):



$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{2} x \cdot 0.25 \cdot x^3 dx = 0.25 \cdot \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^2 = 1.6;$$

$$\mathbf{D}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (\mathbf{M}\xi)^2 = \int_{0}^{2} x^2 \cdot 0.25 \cdot x^3 dx - 1.6^2 = 0.25 \cdot \left. \frac{x^6}{6} \right|_0^2 - 2.56 = 0.107$$

Задача 4. С.в. ξ имеет нормальное распределение с m=4 и σ=2. Выписать плотность вероятности, построить график, найти P(3< ξ <4), соответствующую область под графиком заштриховать.

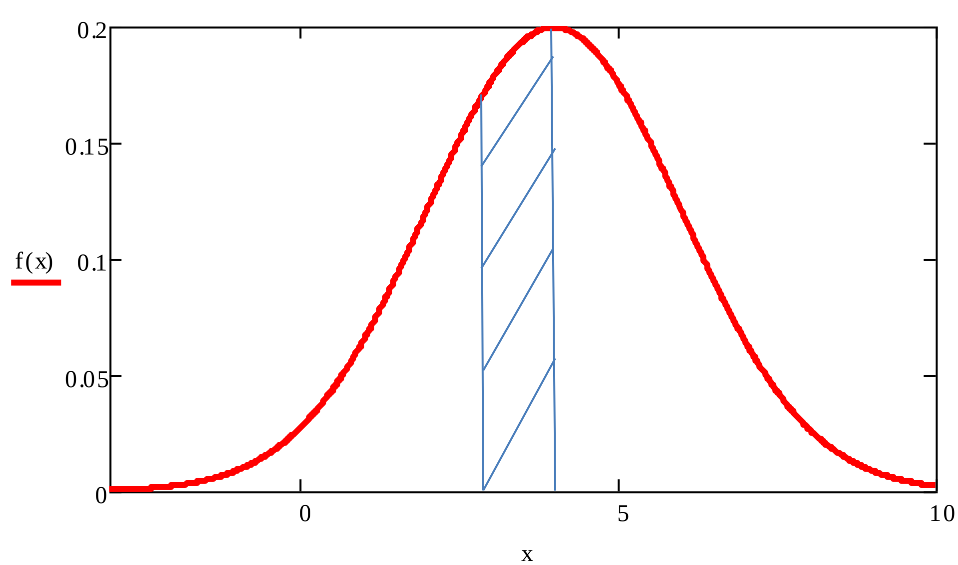
Решение.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 2} \cdot e^{-\frac{(x-4)^2}{8}}$$

Вероятность попадания в интервал:

$$P(3 < \xi < 4) = \int_{3}^{4} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 2} \cdot e^{-\frac{(x-4)^2}{8}} dx = 0.191$$

График f(x):



Варианты (выбираются по последней цифре зачётной книжки)

Вариант 1

1) В корзине 10 яблок, причем 6 из них красные. Наудачу выбирают 2 яблока. $\xi -$ число красных яблок, среди отобранных. Построить ряд распределения, функцию распределения, и ее график.
2) Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

x_i	-2	-1	0	3
p_i	$0,1$	p	$0,4$	$0,2$

a) вычислить $p, \mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;

b) вычислить $\mathbf{M}\eta$ и $\mathbf{D}\eta$, если $\eta = 5-4\xi$.

3) Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<0 \text{ или } x>2 \\ x, \quad \text{при } 0\le x\le 1 \\ 2-x, \text{при } 1\le x\le 2 \end{cases}$$

a) найти функцию распределения;

b) построить графики $f(x)$, $F(x)$; вычислить $\mathbf{M}\xi$;

c) вычислить вероятность попадания ξ в интервал $[0; 0{,}5]$.

4) С.в. ξ имеет нормальное распределение с m=-30 и σ=5. Выписать плотность вероятности, построить график, найти P(ξ>-35), соответствующую область под графиком заштриховать.

Вариант 2

1) Производится 3 выстрела по мишени, вероятность попадания при каждом выстреле $2/3$. $\xi -$ число попаданий в мишень. Построить ряд распределения, функцию распределения, и ее график. Найти $\mathbf{M}\xi, \mathbf{D}\xi$.
2) Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

x_i	-1	1	4
p_i	$0,3$	$0,3$	p

a) вычислить $p, \mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;

b) вычислить $\mathbf{M}\eta$ и $\mathbf{D}\eta$, если $\eta = -2+5\xi$.

3) Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<2\pi \\ a\sin x, \text{ при } 2\pi\le x\le 3\pi \\ 0, \text{ при } x>3\pi \end{cases}$$

a) найти коэффициент a;

b) найти функцию распределения;

c) построить графики $f(x)$, $F(x)$; вычислить вероятность попадания ξ в интервал $\left[\frac{7\pi}{3}; \frac{9\pi}{4}\right]$.

4) С.в. ξ имеет нормальное распределение с m=20 и σ=10. Выписать плотность вероятности, построить график, найти P(ξ>10), соответствующую область под графиком заштриховать.

Вариант 3

2) Стрелок стреляет по мишени до первого попадания или пока не израсходует 4 патрона. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. ξ – число израсходованных патронов. Построить ряд распределения, функцию распределения, и ее график.
3) Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	p	0,3	0,1	0,2

   a) вычислить $p, \mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;
   b) вычислить $\mathbf{M}\eta$ и $\mathbf{D}\eta$, если $\eta = -2 + 5\xi$.
4) Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ ax^5, \text{при } 0 \le x \le 3 \\ 0, \text{при } x > 3 \end{cases}$$

   a) найти коэффициент a;
   b) найти функцию распределения;
   c) построить графики $f(x)$, $F(x)$; вычислить $\mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$.
5) С.в. ξ имеет нормальное распределение с m=-1 и σ=1. Выписать плотность вероятности, построить график, найти P(-2< ξ <0), соответствующую область под графиком заштриховать.

Вариант 4

1) В ралли участвуют 4 машины. Вероятность выхода из соревнований в результате поломки для каждой машины равна $1/5$. ξ – число машин, вышедших из соревнования. Построить ряд распределения, функцию распределения, и ее график. Найти $\mathbf{M}\xi, \mathbf{D}\xi$.
2) Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

x_i	1	3	5
p_i	0,2	p	0,4

   a) вычислить $p, \mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;
   b) вычислить $\mathbf{M}\eta$ и $\mathbf{D}\eta$, если $\eta = -4 + 3\xi$.
3) Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < \pi/2 \\ a\cos x, \text{при } \pi/2 \le x \le \pi \\ 0, \text{при } x > \pi \end{cases}$$

   a) найти коэффициент a;
   b) найти функцию распределения;
   c) построить графики $f(x)$, $F(x)$; вычислить $\mathbf{M}\xi$.
4) С.в. ξ имеет нормальное распределение с m=-4 и σ=2. Выписать плотность вероятности, построить график, найти P(ξ<-2), соответствующую область под графиком заштриховать.

Вариант 5

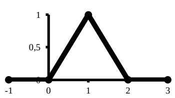
1) Караван из 3-х судов пересекает минное поле, вероятность подрыва для каждого из судов считается равной 0,1. ξ – число взорвавшихся судов. Построить ряд распределения, функцию распределения, и ее график. Найти $\mathbf{M}\xi, \mathbf{D}\xi$.
2) Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

x_i	-3	0	4
p_i	0,1	0,4	p

a) вычислить $p, \mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;

b) вычислить $\mathbf{M}\eta$ и $\mathbf{D}\eta$, если $\eta = -7 - 6\xi$.

3) Плотность вероятности случайной величины имеет вид:



a) найти аналитическое выражение для $f(x)$; найти функцию распределения и построить ее график;

b) вычислить $\mathbf{M}\xi$ и вероятность попадания ξ в интервал $[0,5;\ 3]$.

4) С.в. ξ имеет нормальное распределение с m=-7 и σ=3. Выписать плотность вероятности, построить график, найти P(-7< ξ <-4), соответствующую область под графиком заштриховать.

Вариант 6

1) Из колоды карт выбирают 4 карты. ξ – число пиковых карт среди отобранных. Построить ряд распределения, функцию распределения, и ее график.
2) Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

x_i	0	2	4	8
p_i	0,1	0,3	p	0,1

a) вычислить $p, \mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;

b) вычислить $\mathbf{M}\eta$ и $\mathbf{D}\eta$, если $\eta = 6 - 4\xi$.

3) Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ ax^5, \text{ при } 0 \le x \le 2 \\ 1, \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

a) найти коэффициент a и плотность вероятности;

b) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

c) вычислить $\mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;

d) вычислить вероятность попадания ξ в интервал $[1;\ 2]$.

4) С.в. ξ имеет нормальное распределение с m=-3 и σ=6. Выписать плотность вероятности, построить график, найти P(-3< ξ <3), соответствующую область под графиком заштриховать.

Вариант 7

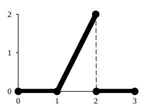
1) 3 кольца бросается на колышек до первого попадания. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,4. ξ – число промахов. Построить ряд распределения, функцию распределения, и ее график.
2) Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

x_i	2	4	6
p_i	p	0,1	0,6

a) вычислить $p, \mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;

b) вычислить $\mathbf{M}\eta$ и $\mathbf{D}\eta$, если $\eta = -5 - 6\xi$.

3) Плотность вероятности случайной величины имеет вид:



a) найти аналитическое выражение для $f(x)$;

b) найти функцию распределения и построить ее график; вычислить $\mathbf{M}\xi$;

c) вычислить вероятность попадания ξ в интервал $[0;1{,}5]$.

4) С.в. ξ имеет нормальное распределение с m=10 и σ=10. Выписать плотность вероятности, построить график, найти P(0< ξ <40), соответствующую область под графиком заштриховать.

Вариант 8

1) Построить ряд распределения, функцию распределения, и ее график числа появлений герба при четырех подбрасываниях монеты. Найти $\mathbf{M}\xi, \mathbf{D}\xi$.
2) Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

x_i	0	1	5	7
p_i	0,2	0,2	p	0,3

a) вычислить $p, \mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;

b) вычислить $\mathbf{M}\eta$ и $\mathbf{D}\eta$, если $\eta = 5 - 5\xi$.

3) Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 2 \\ (x-2)/2, \text{ при } 2 \le x \le 4 \\ 0, \text{ при } x > 4 \end{cases}$$

a) найти функцию распределения;

b) построить графики $f(x)$, $F(x)$; вычислить $\mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;

c) вычислить вероятность попадания ξ в интервал $[2;\,3]$.

4) С.в. ξ имеет нормальное распределение с m=-20 и σ=20. Выписать плотность вероятности, построить график, найти P(ξ> 0), соответствующую область под графиком заштриховать.

Вариант 9

1) На складе имеется 5 принтеров, 3 из них изготовлены фирмой HP. Наудачу взято 2 принтера. $\xi -$ число взятых принтеров, изготовленных фирмой HP. Построить ряд распределения, функцию распределения, и ее график.
2) Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	$0,1$	$0,3$	p	$0,2$

   a) вычислить $p, \mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;

   b) вычислить $\mathbf{M}\eta$ и $\mathbf{D}\eta$, если $\eta = -2+5\xi$.
3) Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<2 \\ (x-2)^2, \text{ при } 2 \le x \le 3 \\ 1, \text{ при } x>3 \end{cases}$$

   a) найти плотность вероятности; построить графики $f(x),\ F(x)$; вычислить $\mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;

   b) вычислить вероятность попадания ξ в интервал $[2{,}1;\ 2{,}4]$.
4) С.в. ξ имеет нормальное распределение с m=0 и σ=2. Выписать плотность вероятности, построить график, найти P(-2< ξ <4), соответствующую область под графиком заштриховать.

Вариант 0

1) Вероятность того, что лампа останется исправной равна 0,7. В коридоре поставили 3 новых лампы. $\xi -$ число ламп, оставшихся исправными. Построить ряд распределения, функцию распределения, и ее график. Найти $\mathbf{M}\xi, \mathbf{D}\xi$.
2) Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

x_i	0	2	4
p_i	$0,1$	$0,6$	p

   a) вычислить $p, \mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$;

   b) вычислить $\mathbf{M}\eta$ и $\mathbf{D}\eta$, если $\eta = 4-2\xi$.
3) Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<0 \\ x^2/8, \text{ при } 0 \le x \le 2 \\ x-1{,}5, \text{ при } 2 \le x \le 2{,}5 \\ 1, \text{ при } x>2{,}5 \end{cases}$$

   a) найти плотность вероятности;

   b) построить графики $f(x),\ F(x)$; вычислить $\mathbf{M}\xi$;

   c) вероятность попадания ξ в интервал $[1;\ 3]$.
4) С.в. ξ имеет нормальное распределение с m=-10 и σ=5. Выписать плотность вероятности, построить график, найти P(-20< ξ <0), соответствующую область под графиком заштриховать.

<u>Контрольная работа №3</u> (математическая статистика)

Пример решения контрольной работы:

Дана выборка: 8;4;3;4;6;9;7;2;2;9;4;3;3;5;7;7;2;7;3;3;5;6;6;4;8.

По результатам обследования выборки определить:

а) величину, которую следует принять за среднюю генеральной совокупности;

б) величину, которую следует принять за дисперсию генеральной совокупности;

в) доверительный интервал для генеральной средней, если доверительная вероятность ß = 0,95.

Выборка значений случайной величины:

Решение.

За оценку средней генеральной совокупности принимают среднее выборочное значение:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{8+4+3+4+6+9+7+2+2+9+4+3+3+5+7+7+2+7+3+3+5+6+6+4+8}{25} = 5.08$$

За оценку дисперсии обычно принимают *исправленную дисперсию*:

$$\overline{D} = \frac{n \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2 \right)}{n-1} = \frac{25 \cdot \left(\frac{8^2 + 4^2 + \ldots + 8^2}{25} - 5.08^2 \right)}{24} = 4.993$$

Для упрощения обычно выборку ранжируют, распределяя значения в порядке возрастания:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	3	5	4	2	3	4	2	2

Тогда вычисление оценок упрощается:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i \cdot n}{n} = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 5 + 4\cdot 4 + 5\cdot 2 + 6\cdot 3 + 7\cdot 4 + 8\cdot 2 + 9\cdot 2}{25} = 5.08$$

$$\overline{D} = \frac{n\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 \cdot n_i}{n} - \overline{X}^2\right)}{n-1} = \frac{25\cdot\left(\frac{2^2\cdot 3 + 3^2\cdot 5 + ... + 9^2\cdot 2}{25} - 5.08^2\right)}{24} = 4.993$$

Для построения интервальной оценки найдем оценку среднего квадратичного отклонения:

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = \sqrt{4.993} = 2.2345$$

А оценка среднего квадратичного отклонения для $\overline{X}$ меньше в $\sqrt{n}$. Коэффициент, необходимый для построения доверительного интервала, в предположении, что мы имеем дело с распределением Стьюдента, зависит от числа степеней свободы (в нашем случае n-1=24) и от заданной доверительной вероятности 0.95. По соответствующим таблицам можно найти его значение, что в нашем случае составляет 2.064, т.о. с вероятностью 0.95 генеральное среднее будет в пределах:

$$5.08 - 2.064\cdot\frac{2.2345}{\sqrt{25}} < M\xi < 5.08 + 2.064\cdot\frac{2.2345}{\sqrt{25}}$$

$$\text{или} \quad 4.16 < M\xi < 6.00$$

Варианты:

№	Выборочные значения																							
1	3	9	6	2	5	7	6	6	3	3	4	8	8	5	2	4	3	4	8	8	6	5	8	9	2
2	6	6	6	8	9	9	5	4	4	8	2	5	5	6	6	5	9	8	9	3	6	8	7	5	9
3	4	7	9	4	3	3	7	6	9	6	6	8	6	2	8	3	5	2	2	4	3	7	5	8	4
4	6	8	3	3	7	8	6	5	9	2	2	4	8	5	9	2	5	9	2	2	4	2	8	8	6
5	2	7	4	4	6	9	8	9	4	5	6	3	2	6	2	6	8	4	2	6	8	9	3	5	8
6	6	3	7	9	3	8	7	8	2	9	3	3	8	9	7	5	5	8	7	5	2	3	6	9	9
7	2	5	5	4	2	6	4	9	2	7	2	6	2	9	2	8	9	7	6	4	6	8	7	9	2
8	3	8	9	6	2	5	5	2	2	8	4	9	4	2	3	2	6	5	2	3	4	3	5	4	7
9	4	9	4	3	9	5	4	3	4	2	4	2	8	7	7	5	7	7	6	5	3	2	4	2	5
0	8	7	5	8	4	2	6	6	9	3	9	6	7	8	6	7	3	2	5	3	2	8	4	6	8

По результатам обследования выборки определить:

а) величину, которую следует принять за среднюю генеральной совокупности;

б) величину, которую следует принять за дисперсию генеральной совокупности;

в) доверительный интервал для генеральной средней, если доверительная вероятность ß = 0,95.