# Лабораторная работа № 2
# ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

**Цель работы:** Изучение методов анализа линейных дискретных систем (цифровых фильтров) во временной и частотных областях.

## Общие теоретические положения

Рассмотрим систему цифровой обработки сигналов (СЦОС) (см. рисунок 2.1), выполняющую преобразование входного дискретного сигнала $x[n]$ (воздействия) в выходной дискретный сигнал $y[n]$ (реакцию).


Рисунок 2.1 Система цифровой обработки сигналов

На рисунке $x[n] = x(nT)$ - воздействие, $y[n] = y(nT)$ – реакция, $T$ – период дискретизации.

В общем случае связь реакции системы и воздействия описывается операторным уравнением:

$$y = F\{x\},$$

где $F$– некоторый оператор.

Систему обработки называют *линейной*, если она обладает свойствами аддитивности и однородности.

**Аддитивность.** Система называется *аддитивной*, если реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие:

$$F\{x_1+x_2\} = F\{x_1\} + F\{x_2\}.$$

**Однородность.** Система называется *однородной*, если умножение воздействия на весовой коэффициент соответствует реакции, умноженной на тот же коэффициент:

$$F\{\alpha x\} = \alpha F\{x\}.$$

Систему называют *стационарной*, если она обладает свойствами инвариантности во времени:

$$y[n + l] = F\{x[n + l]\} \text{ для любого целого } l.$$

В соответствии с принципом стационарности задержка воздействия приводит к задержке реакции на то же время.

Мы будем рассматривать стационарные линейные дискретные системы (ЛДС). На практике такие системы называются *цифровыми фильтрами*.

**Импульсная характеристика.** *Импульсной характеристикой* (ИХ) $h[n]$ ЛДС называется её реакция на единичный импульс $u_0[n]$ при *нулевых начальных условиях* (см. рисунок 2.2).


Рисунок 2.2 Импульсная характеристика ЛДС

где $u_0[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ - единичный цифровой импульс (цифровая дельта-функция). *Нулевые начальные условия* означают отсутствие реакции при отсутствии воздействия, что отвечает принципу причинности, в соответствии с которым реакция не может возникнуть раньше воздействия: из $x[n] = 0$ при $n<n_0$ следует, что $y[n] = 0$ при $n<n_0$, где $n_0$- начальный момент (время возникновения воздействия).

**Переходная характеристика.** *Переходной характеристикой* (ПХ) $g[n]$ ЛДС называется её реакция на единичный цифровой скачок $u_1[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$ при нулевых начальных условиях (см. рисунок 2.3).

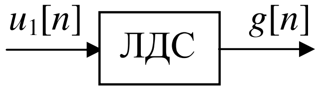


Рисунок 2.3 Переходная характеристика ЛДС

**Описание ЛДС во временной области, формула свертки.** Рассмотрим реакцию ЛДС на произвольное воздействие $x[n]$ (см. рисунок 2.4).


Рисунок 2.4 Линейная дискретная система

Поскольку любой дискретный сигнал_$x[n]$ может быть представлен в виде $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_0[n-m]x[m]$, в силу линейности системы мы получаем следующее выражение:

$$F\left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_0[n-m]x[m] \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\{u_0[n-m]x[m]\}.$$

В соответствии со свойством однородности:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} F\{u_0[n-m]x[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]F\{u_0[n-m]\}.$$

Наконец по свойству стационарности и определению импульсной характеристики:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]F\{u_0[n-m]\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]h[n-m],$$

Сделав в последней сумме замену переменной $l = n - m$, получим тождественную формулу:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]F\{u_0[n-m]\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]x[n-m],$$

Таким образом, мы показали, что реакция ЛДС равна *свертке* воздействия и ИХ:

$$y[n] = x[n] * h[n],$$

где символом « * » обозначена операция свертки: $x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]h[n-m].$

**Разностное уравнение.** Соотношение между воздействием $x[n]$ и соответствующей реакцией $y[n]$ для линейной дискретной стационарной системы в общем случае имеет вид разностного уравнения:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k],$$

где $b_m$ , $m = 0,\dots,M$ и $a_n$ , $n = 1,\dots,N$ – коэффициенты ЛДС, $M$, $N$– константы. *Порядком ЛДС* называют величину $Q = \max\{M , N\}$.

ЛДС называется *рекурсивной*, если хотя бы один из коэффициентов $a_n$ , $n = 1,\dots,N$ разностного уравнения отличен от нуля.

Согласно разностному уравнению реакция рекурсивной ЛДС в любой момент времени определяется:

- текущим воздействием;
- предысторией воздействия;
- предысторией реакции.

ЛДС называется *нерекурсивной*, если все коэффициенты $a_n$ , $n = 1,\dots,N$ разностного уравнения равны нулю: $a_n = 0, \forall n > 0$. Таким образом, РУ нерекурсивной ЛДС имеет следующий вид:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m].$$

Реакция нерекурсивной ЛДС в любой момент времени определяется:

- текущим значением воздействия;
- предысторией воздействия.

Вычислим импульсную характеристику (ИХ) $h[n]$ для нерекурсивной ЛДС, воспользовавшись её разностным уравнением:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m].$$

По определению ИХ имеем:

$$h[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m u_0[n-m] = b_n.$$

Таким образом, $h[n] = b_n$ для любого $n = 0,\dots,M$, и ИХ нерекурсивного фильтра имеет конечную длительность. Такие ЛДС называются ЛДС с *конечной импульсной характеристикой* (*КИХ* системы). ИХ рекурсивной

ЛДС имеет бесконечную длительность, поэтому такие ЛДС называются системами с *бесконечной импульсной характеристикой* (*БИХ* системы).

**Устойчивость ЛДС.** ЛДС называется *устойчивой*, если при ограниченном воздействии и произвольных (конечных) начальных условиях реакция ЛДС также ограничена.

**Критерий устойчивости ЛДС.** ЛДС является устойчивой, тогда и только тогда, когда ряд, составленный из значений ее ИХ сходится абсолютно: $\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| < \infty$.

Следствия:

1. Нерекурсивные ЛДС всегда являются устойчивыми.
2. ИХ устойчивой рекурсивной ЛДС имеет характер затухающей функции времени.

**Описание ЛДС в Z области.** Основной характеристикой ЛДС в Z области (в комплексной плоскости переменной $z$) является её *передаточная функция* $H(z)$, которая определяется как Z-преобразование (изображение) импульсной характеристики:

$$H(z) = Z\{h[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}.$$

Выше было установлено, что связь воздействия и реакции ЛДС определяется как свертка:

$$y[n]=h[n] * x[n].$$

Вычисляя Z-преобразование от левой и правой частей уравнения, на основании свойств Z-преобразования получим:

$$\mathrm{Z}\{y[n]\} = \mathrm{Z}\{h[n]*x[n]\} = \mathrm{Z}\{h[n]\}\mathrm{Z}\{x[n]\}$$

Следовательно,

$$Y(z) = \mathrm{Z}\{h[n]\}\mathrm{Z}\{x[n]\} = H(z)\, X(z),$$

где $Y(z) = \mathrm{Z}\{y[n]\}$, $X(z) = \mathrm{Z}\{x[n]\}$.

Таким образом, передаточная функция $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$ есть отношение Z-преобразования реакции к Z-преобразованию воздействия.

**Связь передаточной функции и разностного уравнения.** Рассмотрим разностное уравнение ЛДС и вычислим Z-преобразование от его обеих частей:

$$Z\{y(n)\} = \sum_{m=0}^{M} b_m Z\{x[n-m]\} - \sum_{k=1}^{N} a_k Z\{y[n-k]\}.$$

Пользуясь свойствами Z-преобразования, получим

$$Y(z) = X(z)\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} - Y(z)\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}.$$

Приводя подобные члены, имеем

$$Y(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} X(z).$$

Отсюда получаем связь *передаточной функции* (ПФ) с коэффициентами разностного уравнения:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}.$$

Таким образом, передаточная функция ЛДС является дробно-рациональной функцией, зависящей только от коэффициентов разностного уравнения и не зависящей от воздействия и реакции.

Как и любая дробно-рациональная функция ПФ однозначно определяется своими нулями и полюсами. Можно показать, что критерием устойчивости ЛДС в Z области является расположение всех полюсов ПФ внутри единичной окружности.

**<u>Описание ЛДС в частотной области.</u>** Передаточная функция (ПФ) вычисленная на единичной окружности называется *частотной характеристикой* ЛДС $H(i\Omega)$:

$$H(i\Omega) \equiv H(e^{i\Omega}) = H(z)\big|_{z=e^{i\Omega}} \quad \Omega \in (-\pi, \pi].$$

Параметр $\Omega \in (-\pi, \pi]$, который на Z плоскости равен полярному углу, называется *безразмерной* или *цифровой частотой*. С круговой частотой $\omega$ он связан простым соотношением:

$$\Omega = \omega T,$$

где $T$ - период дискретизации.

Используя выражение для передаточной функции ЛДС, получим следующее представление частотной характеристики (ЧХ) через ИХ:

$$H(i\Omega) \equiv H(e^{i\Omega}) = H(z)\big|_{z=e^{i\Omega}} = \sum_{m=0}^{\infty} h[m] z^{-m}\Big|_{z=e^{i\Omega}} = \sum_{m=0}^{+\infty} h[m] e^{-im\Omega}.$$

Сумма, стоящая последней, называется *преобразованием Фурье дискретного сигнала* $h[m]$. Рассмотрим реакцию ЛДС на воздействие цифрового гармонического сигнала единичной амплитуды и цифровой частоты $\Omega$: $x[n] = e^{in\Omega}$. В соответствии с формулой свертки, получим следующее выражение:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m] x[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m] e^{i(n-m)\Omega} = e^{in\Omega} \sum_{m=0}^{\infty} h[m] e^{-im\Omega} = H(i\Omega) e^{in\Omega}.$$

Таким образом, частотную характеристику можно представить как комплексную амплитуду, которую приобретает цифровой гармонический сигнал единичной амплитуды при прохождении ЛДС.

В экспоненциальной форме частотная характеристика (как комплексная функция) имеет следующее представление:

$$H(i\Omega) = A(\Omega) e^{i\varphi(\Omega)},$$

где $A(\Omega)$ и $\varphi(\Omega)$ - вещественные функции. Модуль частотной характеристики называется *амплитудно-частотной характеристикой* (*АЧХ*):

$$A(\Omega) = |H(i\Omega)|,$$

а фаза частотной характеристики называется *фазочастотной характеристикой* (ФЧХ):

$$\varphi(\Omega) = \arg(H(i\Omega)).$$

Следовательно, значение АЧХ на частоте $\Omega$ – это амплитуда сигнала на выходе ЛДС при воздействии на входе цифрового гармонического сигнала единичной амплитуды и частоты $\Omega$, а значение ФЧХ на частоте $\Omega$ - это фаза выходного сигнала (сдвиг по фазе, который приобретает входной сигнал при прохождении ЛДС).

Свойства частотной характеристики:

1. ЧХ, АЧХ, ФЧХ – непрерывные функции частоты;
2. ЧХ, АЧХ, ФЧХ – периодические функции частоте с периодом $2\pi$;
3. Если коэффициенты ПФ вещественны, то АЧХ является четной, а ФЧХ – нечетной функцией частоты.

*Фазовое время задержки* $\tau_ф(\Omega)$ ЛДС равно:

$$\tau_ф(\Omega) = -\frac{\varphi(\Omega)}{\Omega}.$$

*Групповое время задержки* $\tau_{гр}(\Omega)$ ЛДС определяется скоростью изменения фазочастотной характеристики и равно:

$$\tau_{гр}(\Omega) = -\frac{d\varphi(\Omega)}{d\Omega}.$$

Фазовое время задержки равно временному запаздыванию выходного сигнала по отношению к входному при условии, что входной сигнал – гармонический на частоте $\Omega$. Групповое время задержки равно временному запаздыванию огибающей выходного сигнала по отношению к огибающей входного при условии, что на вход ЛДС подается узкополосный радиосигнала на несущей частоте $\Omega$.

**<u>Расчет частотной характеристики.</u>** По определению частотной характеристики и на основании связи передаточной функции с разностным уравнением ЧХ ЛДС можно представить в следующем виде:

$$F(\Omega) = H\left(e^{i\Omega}\right) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-m(i\Omega)}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-k(i\Omega)}} \equiv \frac{Q(i\Omega)}{P(i\Omega)}.$$

Откуда получаются выражения для амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик ЛДС:

$$A(\Omega) = \left|H\left(e^{i\Omega}\right)\right| = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}(Q)^2 + \mathrm{Im}(Q)^2}{\mathrm{Re}(P)^2 + \mathrm{Im}(P)^2}},$$

$$\varphi(\Omega) = \arg\left(H(e^{i\Omega})\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(Q)}{\mathrm{Re}(Q)}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(P)}{\mathrm{Re}(P)}\right),$$

где введены следующие обозначения: $Q(i\Omega)$ - числитель частотной характеристики, $P(i\Omega)$ - знаменатель частотной характеристики.

Полученные выражения используются для аналитического представления АЧХ и ФЧХ ЛДС.

**<u>Условия отсутствия искажений на выходе ЛДС.</u>** Отсутствие искажений на выходе ЛДС означает, что сигнал может быть задержан на некоторое время $k_0$ и его амплитуда может быть изменена в $K$ раз. Во временной области эти условия означают, что реакция системы на произвольное воздействие $x[n]$ должна иметь следующий вид:

$$y[n] = Kx[n - k_0].$$

Рассмотрим условие отсутствия искажений в Z области, для чего вычислим Z-преобразование от приведенного выражения:

$$Z\{y[n]\} = Z\{Kx[n-k_0]\} = KZ\{x[n-k_0]\} = Kz^{-k_0}Z\{x[n]\}.$$

Таким образом, отсутствие искажений на выходе ЛДС с необходимостью приводит к следующему выражению для передаточной функции:

$$H(z) = Kz^{-k_0}.$$

Это означает, что частотная характеристика равна

$$H(i\Omega) = Ke^{-ik_0\Omega}.$$

Соответственно, АЧХ и ФЧХ имеют следующие выражения:

$$A(\Omega) = K,\ \varphi(\Omega) = -k_0\Omega,$$

т.е. АЧХ должна быть постоянна, а ФЧХ должна линейно зависеть от частоты. Линейная зависимость ФЧХ от частоты приводит к постоянному значению группового времени задержки:

$$\tau_{\text{гр}}(\Omega) = -\frac{d\varphi(\Omega)}{d\Omega} = -\frac{d(-k_0\Omega)}{d\Omega} = k_0.$$

При синтезе цифровых частотных фильтров, как правило, ставят следующие условия:

$$A(\Omega) = \begin{cases} K, \text{ при } \Omega \in (\Omega_{\min}, \Omega_{\max}) \\ 0, \text{ при } \Omega \notin (\Omega_{\min}, \Omega_{\max}) \end{cases},$$

$$\varphi(\Omega) = -k_0\Omega,$$

означающие передачу без искажений сигналов, сосредоточенных в полосе частот $(\Omega_{\min}, \Omega_{\max})$, и подавление сигналов, сосредоточенных вне этой полосы. Однако реализация поставленных условий (по крайней мере, первого) возможна лишь приближенно, поскольку передаточные функции ЛДС являются дробно-рациональными и, следовательно, не могут иметь бесконечно много нулей в конечной полосе частот.

## Индивидуальные задания к лабораторной работе

Таблица 2.1

| № | Разностное уравнение |
|---|---|
| 1. | $y[n] = x[n] - \frac{1}{2}y[n-1]$ |
| 2. | $y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-2]$ |
| 3. | $y[n] = -x[n] + 2x[n-1] - x[n-2]$ |

| | |
|---|---|
| 4. | $y[n]=\frac{2}{3}x[n]+\frac{2}{3}y[n-1]$ |
| 5. | $y[n]=x[n-1]-\frac{1}{10}y[n-2]$ |
| 6. | $y[n]=\frac{2}{3}x[n]-0.25y[n-1]+0.25y[n-2]$ |
| 7. | $y[n]=x[n]+2x[n-1]+3x[n-2]-\frac{1}{2}y[n-1]$ |
| 8. | $y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{3}y[n-2]$ |
| 9. | $y[n]=x[n-1]-\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{1}{3}y[n-2]$ |
| 10. | $y[n]=\frac{1}{6}x[n]-\frac{1}{9}y[n-2]$ |
| 11. | $y[n]=\frac{2}{9}x[n-1]-\frac{1}{3}y[n-1]$ |
| 12. | $y[n]=x[n]-\frac{1}{5}y[n-1]-y[n-2]$ |
| 13. | $y[n]=-\frac{1}{4}x[n]+\frac{1}{6}y[n-1]$ |
| 14. | $y[n]=x[n]+2x[n-1]+x[n-2]$ |
| 15. | $y[n]=x[n]-\frac{1}{2}y[n-1]-0.75y[n-2]$ |

## Порядок выполнения и требования к отчету

В соответствии с номером варианта необходимо аналитически получить:

1. Аналитическое выражение передаточной функции ЛСД.
2. Аналитическое выражение ЧХ.
3. Аналитическое выражение АЧХ.
4. Аналитическое выражение ФЧХ.

Также необходимо создать MATLAB функцию для вычисления:

1. Импульсной характеристики ЛДС.
2. Переходной характеристики ЛДС.