	МЧС РОССИИ
	Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы
	Фонд оценочных средств Текущий контроль
СМК-УМК-4.4.2-37-17	Управление документацией

ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

Направление подготовки
38.03.03 «УПРАВЛЕНИЕ ПЕРСОНАЛОМ»

УТВЕРЖДАЮ
Начальник кафедры СА и АУ
полковник внутренней службы
В.А. Онов
«_____» ____________20   года

ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

Направление подготовки
38.03.03 «УПРАВЛЕНИЕ ПЕРСОНАЛОМ»

Одобрена на заседании ПМК
Протокол №
от «   »   20   г.

Санкт-Петербург
2017

	Должность	*Фамилия/ Подпись*	*Дата*
Разработали	*Профессор кафедры*	*Антюхов В.И./*	
Проверил	*Начальник кафедры*	*Онов В.А./*	
Согласовал			

СОДЕРЖАНИЕ:

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ……………………………………..…………..….4

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Начало выполнения контрольной работы планируется после проведения занятий на установочном сборе. Календарный период её выполнения для слушателей, обучающихся по заочной форме – во время межсессионной работы. Рубежный срок сдачи контрольной работы - не позднее, чем за неделю до зачета по дисциплине. Список слушателей, не сдавших контрольную работу к указанному сроку, подается в институт заочного и дистанционного обучения Санкт-Петербургского университета ГПС МЧС России.

Каждому слушателю выдается вариант темы контрольной работы в соответствии с его порядковым номером в классном журнале. Номера вариантов и темы контрольных работ представлены ниже.

Результаты выполнения контрольной работы оформляются в виде отчета и представляются преподавателю установленным порядком через институт заочного и дистанционного обучения. По результатам проверки выставляется оценка по двухбалльной шкале (зачтено - не зачтено). Получение оценки не зачтено ведет к выполнению новой работы или переработке прежней в сроки, определяемые начальником кафедры по согласованию с начальником института.

Оценка контрольной работы

Критерии оценки контрольной работы следующие:

зачтено - работа выполнена в соответствии с заданием в полном объеме, практическая часть реализована слушателем самостоятельно, ответы на вопросы по существу материала содержательные;

не зачтено - работа не соответствует заданию, представленные материалы не позволяют судить о законченности работы, слушатель слабо ориентируется в собственных результатах, ответы на вопросы отличаются неточностью.

Оформление контрольной работы

Отчет о выполнении контрольной работы готовится с использованием средств автоматизации подготовки документов (текстового редактора) и представляется преподавателю в соответствии со следующими требованиями.

Текст размещается на одной стороне листа бумаги формата А4 (297×210 мм). Размеры полей: слева - 25 мм, справа - 10 мм, сверху - 15 мм, снизу - 20 мм. Абзацный отступ - 15 мм. Шрифт выбирается произвольно, близким к машинописному, размер 12-14 пт. Строки абзаца формируются через 1,5 интервала.

Отчет делится на разделы. Каждый раздел начинается с новой страницы. Разделы, обозначаются арабскими цифрами с точкой. Точка в конце заголовка раздела не ставится, подчеркивание не допускается.

На титульном листе указываются:

- наименование учебного заведения с указанием принадлежности к министерству;

- наименование кафедры;

- текст «Контрольная работа по учебной дисциплине «ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»;

- номер варианта и наименование контрольной работы;

- сведения о слушателе, такие как: специальное звание, фамилия, инициалы, учебная группа, номер зачетной книжки;

- город, где находится учебное заведение и год выполнения работы.

Все листы отчета, в том числе и титульный лист, нумеруются сквозной нумерацией арабскими цифрами. На титульном листе номер не ставят, на последующих листах он указывается в правом верхнем углу. Все листы отчета сшиваются. Использование канцелярских скрепок не разрешается.

Законченный отчет подписывается слушателем.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ОТЧЕТА ПО КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Образец оформления титульного листа

МЧС России Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы Кафедра системного анализа и антикризисного управления **Контрольная работа по дисциплине** ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ Вариант № (тема) Студент 254 уч. гр. ИБЖ ПЕТРОВ В.А., Проверил: Ф.И.О. преподавателя Санкт-Петербург 2017

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Слушатели выполняют вариант контрольной работы, соответствующий номеру слушателя по классному журналу.

Вариант 1.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$max\ Z = x_1 + x_2$$
$$x_1 + 3\,x_2 \le 30$$
$$2x_1 + x_2 \le 20$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$max\ L = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} -5 & 8 \\ 4 & -7 \end{matrix}$$

Вариант 2.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$min\ L = 2x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$max\ U = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 16$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 14$$
$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{matrix}$$

Вариант 3.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$max\ F = 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 \geq 4$$
$$x_2 \geq 3$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$min\ U = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 169$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{matrix}$$

Вариант 4.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$min\ W = x_1 - 3x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$min\ U = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$$
$$2x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 10$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{matrix}$$

Вариант 5.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$max\ L = x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 7$$
$$x_1 \le 3$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$min\ U = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Вариант 6.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$\max W = 2x_1 + 5x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 500$$
$$x_1 \leq 400$$
$$x_2 \leq 300$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$\min U = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} -2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Вариант 7.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$\max Z = 5x_1 + x_2$$
$$3x_1 + 6x_2 \leq 11$$
$$x_1 \leq 2.75$$
$$3x_2 \leq 1.1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$\max U = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{matrix}$$

Вариант 8.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$\max K = 3x_1 + 2x_2$$
$$x_1 \geq 1$$
$$x_2 \geq 0.6$$

$$0.1x_1 + 0.4x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$\min L = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 13$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{matrix}$$

Вариант 9.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$\max Z = x_1 + x_2$$
$$3x_1 + x_2 \le 20$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 30$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$\max L = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$$
$$x_1 + 2x_2 = 6$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

3. Найти приближённое решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{matrix}$$

Вариант 10.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$\max U = 2x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$\min L = x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4$$
$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$2x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{matrix}$$

Вариант 11.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$max\ W = 2x_1 + 7x_2$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \geq 4$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$min\ L = x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & -2 \end{matrix}$$

Вариант 12.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$min\ U = x_1 - 2x_2$$
$$x_1 + 10x_2 \leq 1$$
$$-2x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$min\ L = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_4 = 4$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 6$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} -2 & 2 & -4 & 0 \end{matrix}$$

$$3 \ \ -1 \ \ 4 \ \ 2$$

Вариант 13.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$max\ Z = x_1 + 3x_2$$
$$4x_1 + 8x_2 \leq 17$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$max\ L = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$$
$$x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$
$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{matrix}$$

Вариант 14.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$max\ U = 2x_1 + 4x_2$$
$$4x_1 + x_2 \leq 15$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$min\ L = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

3. Найти приближённое решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{matrix}$$

Вариант 15.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$max\ Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 9$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$max\ L = x_1 + 7x_2 - x_3$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -1$$
$$x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 14$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3. Найти решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

Вариант 16.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$min\ Z = 3x_1 + x_2$$
$$4x_1 + x_2 \geq 5$$
$$-3x_1 + 10x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$minL = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 2$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 2 & -4 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Вариант 17.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$max\ Z = x_1 + x_2$$
$$x_1 + 2\,x_2 \leq 15$$
$$3x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$max\ U = 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{matrix}$$

Вариант 18.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$min\ L = 2x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$-x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$min\ L = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \end{matrix}$$

Вариант 19.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$max\ F = 3x_1 + 2x_2$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \geq 4$$
$$x_1 + x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$max\ L = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4$$
$$x_1 + 2x_2 = 8$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} -4 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \end{matrix}$$

Вариант 20.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$min\ W = 3x_1 - x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$min\ L = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4$$
$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$
$$2x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

3. Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{matrix}$$

Вариант 21.

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$max\ L = 4x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 9$$
$$x_1 \le 4$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$min\ Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$2x_1 + x_3 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

3. Найти решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

$$\begin{matrix} 8 & -5 \\ -7 & 4 \end{matrix}$$

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Решение задачи линейного программирования графическим методом

Графический метод решения задачи линейного программирования возможен если удовлетворяются следующие условия.

1. Число неизвестных переменных в задаче не больше трех (n < 3). В этом случае целевая функция и область допустимых решений могут быть изображены на плоскости - для задачи с двумя неизвестными, либо в пространстве - для задачи с тремя неизвестными (ограничения могут быть как равенствами так и неравенствами).

2. Когда число переменных на два или три больше чем число ограничений. В первом случае имеет место двумерная, а во втором трехмерная интерпретация задачи линейного программирования (ограничения задаются только в виде равенств).

Графическая интерпретация позволяет преобразовать n-мерную область допустимых решений, где n - число неизвестных, в двумерную выпуклую область с n гранями и найти оптимум целевой функции в этой области.

В графических примерах удобно пользоваться понятием «*Градиент*» и «*Линия уровня*».

Линией уровня линейного выражения называют место точек, удовлетворяющих заданному значению правой части.

В пространстве R^2 линия уровня - это прямая, в трехмерном R^3 - плоскость, в n-мерном R^n - это (n - 1)-мерная гиперплоскость.

Все линии уровня задачи линейного программирования параллельны.

Градиент линейного выражения - это вектор из коэффициентов при неизвестных в левой части.

Например, градиент выражения $Z = 2x_1 + 3x_2$ равен (2,3).

Все градиенты перпендикулярны к своим линиям уровня. Будучи, изображенными в виде векторов, они указывают направление *наиболее быстрого увеличения* правой части.

Первый шаг при использовании графического метода связан с построением области допустимых решений.

Область допустимых решений находится по направлению, совпадающему с градиентом линии уровня соответствующего ограничения, если оно имеет знак больше или равно (≥), по противоположному направлению, если ограничение имеет знак меньше или равно (≤).

Условия неотрицательности переменных ограничивают данную область положительным квадрантом системы прямоугольных координат x_1, x_2.

Остальные границы пространства решений отображаются линиями уровня, построенными по уравнениям, которые получаются при замене знака меньше или «равно» на знак «равно» в ограничениях исходной задачи.

Рассмотрим сущность графического метода решения задачи линейного программирования на следующем примере.

Пусть заданы целевая функция и ограничения задачи линейного программирования в следующем виде:

$$\max U = 0.4x_1 + 0.6x_2$$

$$2\,x_1 + x_2 \le 250$$

$$2\,x_1 + 2x_2 \le 300$$

$$x_1 + 2x_2 \le 250$$

$$x_1 \;\le 110$$

$$x_2 \le 110$$

$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

Рассмотрим порядок решения поставленной задачи.

В соответствии с изложенным выше, для каждого уравнения-ограничения построим на графике линии уровня. Для этого представим графически двумерную систему координат, в которой по оси абсцисс будем откладывать значения x_1, а по оси ординат – значения x_2.

Так как задано ограничение x_1, $x_2 \ge 0$, то для графического представления нам достаточно ограничиться верхним правым квадрантом.

Ограничения можно строить просто используя метод *построения прямой по отрезкам*.

Приравнивая $x_1 = 0$ в первом ограничении находим $x_2 = 250$.

Затем принимаем $x_2 = 0$, и находим $x_1 = 125$.

Отложив по осям точки x_1, x_2 соответственно 125 и 250, соединим их. В результате получаем отрезок, соответствующий первому ограничению. Так как ограничение имеет вид «≤», то штриховку на представленной линии уровня следует направить левее этой линии. Обозначим эту линию уровня номером 1, т.к. она соответствует первому уравнению-ограничению.

Аналогично можно построить линии уровня для уравнений-ограничений 2 – 5.

Выполнив указанные преобразования и отобразив их результаты графически, получим область допустимых решений в виде выпуклого многоугольника (обозначим вершины полученной с помощью линий уровня многоугольника соответствующими буквами по часовой стрелке, получим область ABCДEFG).

Целевая функция задачи линейного программирования для случая двух переменных отображается на графике семейством параллельных прямых.

Для того, чтобы *определить точку оптимума* задачи необходимо знать угол наклона этого семейства к осям координат и направление возрастания (убывания) целевой функции.

Для выяснения первого вопроса (*определение точки оптимума)* зададим целевой функции произвольные значения, например $Z_1 = 24$ и построим прямую $0.4x_1 + 0.6x_2 = 24$ (построить целевую функцию можно также используя метод построения прямой по отрезкам).

Для ответа на второй вопрос (направление возрастания (убывания) целевой функции) найдем градиент.

Он равен (0.4; 0.6).

Отобразим его на линии уровня целевой функции стрелкой.

Теперь становится очевидным, что целевая функция растет при её приближении к точке D области допустимых решений и именно в этой точке находится оптимальное решение задачи.

Точка D есть крайняя точка, в которой область допустимых значений пересекается с целевой функцией при возрастании последней.

Осталось определить координаты точки D и величину целевой функции в этой точке.

После построения выпуклого многоугольника можно увидеть, что из пяти неравенств задачи два, а именно второе и третье превращаются в точке D в равенства.

Воспользуемся этим фактом для решения задачи, рассчитав величину переменных x_1 и x_2 из системы линейных уравнений:

$$x_1 + x_2 = 150$$
$$x_1+2x_2 = 250$$

В результате решения этой системы получили x_1=50, x_2=100.

Теперь можно рассчитать и величину целевой функции в точке D.

Она оказывается равной 80 ($U = 0.4*50 + 0.6*100 = 80$).

Таким образом алгоритм решения задачи графическим способом в случае, когда число переменных не больше трех следующий:

1. На основании ограничений строится область допустимых решений (выпуклый многоугольник).
2. Строится прямая в координатах переменных задачи линейного программирования, соответствующая целевой функции Z (для этого выбирается произвольное значение целевой функции).
3. Строится вектор нормали N к целевой функции Z. Вектор нормали указывает направление возрастания целевой функции.
4. Перемещаем прямую $Z = const$ в направлении N так, что бы она оставалась перпендикулярной N до тех пор, пока эта прямая не выйдет на границу множества.

Таким образом, обобщенный графический метод решения задач линейного программирования заключается в выполнении следующего алгоритма:

1. Представляем задачу линейного программирования в стандартной канонической форме (предварительно проверяется условие $n - r \leq 3$, где n – количество переменных, а k – количество уравнений ограничений).
2. Определяются координатные переменные (основное условие для их выбора - линейная независимость).

3. Некоординатные переменные выражаются через координатные.

4. Из условий неотрицательности некоординатных переменных получаем систему ограничений неравенств, содержащих только координатные переменные.

5. В системе координатах переменных строим допустимое множество решений, определяемое полученными ограничениями.

6. Выражаем целевую функцию в координатных переменных.

7. Строим целевую функцию Z.

8. Строим вектор нормали N к целевой функции Z.

9. Двигая целевую функцию в направлении вектора нормали, находим оптимальное решение как граничную точку допустимого множества.

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом

Согласно симплекс-методу оптимальный план достигается направленным перебором наборов базисных и свободных переменных.

Определяется начальный набор.

Затем каждый раз в наборе производится замена одной базисной переменной на свободную переменную, приводящую к улучшению плана.

Заменяемые переменные не повторяются.

Так как число возможных наборов базисов ограничено (не более C_n^r), то итерационный процесс конечен.

Опытным путем установлено, что для большей части задач число итераций составляет от $1{,}5r$ до $3r$ (где r – число уравнений-ограничений).

Алгоритм решения задачи на основе симплекс-метода представляется последовательностью следующих шагов:

Шаг 1. Приведение задачи к каноническому виду.

Шаг 2. Построение начального плана.

Шаг 3. Проверка оптимальности плана:

1. Если «да», то возможны два варианта:

а) получен оптимальный план и в этом случае - «Оформление полученных результатов» и конец алгоритма;

б) задача не имеет решения и выдача сообщения «Задача не имеет решения»;

2. Если «нет» (то есть некоторые коэффициенты имеют отрицательные значения) – переход на шаг 4.

Шаг 4. Проверка «Разрешающий элемент выбран?»:

- если «да» - переход на шаг 5;
- если «нет» - выдача сообщения: «Целевая функция не ограничена» и конец алгоритма.

Шаг 5. Выполнение процедуры полного исключения с выбранным разрешающим элементом и переход на шаг 3.

Пусть необходимо минимизировать значение следующей целевой функции:

$$\min U = 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

при ограничениях:

$$1x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 \geq 24$$
$$3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 2x_4 \geq 18$$
$$0x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 1x_4 \geq 18$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

***Шаг 1*. Приведение задачи к каноническому виду**

В зависимости от того, какой начальный вид имеет задача, применяют те или иные рассмотренные ранее преобразования.

В рассматриваемой задаче необходимо избавиться от неравенств.

Введем дополнительные переменные x_5, x_6 и x_7.

Целевая функция и ограничения примут следующий вид:

$\min U = 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$

$1x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 - 1x_5 - 0x_6 + 0x_7 = 24$

$3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 2x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 0x_7 = 18$

$0x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 1x_7 = 18$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

***Шаг 2*. Построение начального плана**

Для построения начального плана систему уравнений необходимо преобразовать так, чтобы базисные переменные остались по одной в каждом уравнении, а коэффициенты при них стали равны единице.

Тогда после приравнивания остальных (свободных) переменных нулю сразу получим начальный план:

$X^{(1)} = (x^{(1)}_1, x^{(1)}_2, \ldots, x^{(1)}_j, \ldots, x^{(1)}_m, 0, 0, \ldots, 0)$,

где $x^{(1)}_1 = \beta^{(1)}_1$, $x^{(1)}_2 = \beta^{(1)}_2, \ldots, x^{(1)}_m = \beta^{(1)}_m$;

$\beta^{(1)}_i$ – значения преобразованных свободных членов b_i;

j' - порядковый номер базисной переменной в плане.

Этому плану будет соответствовать значение целевой функции:

$$U^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{(1)} = \sum_{j'=1}^{m} c_j \beta_j .$$

Начальный план (базис) может строиться различными способами.

Одним из общих способов является введение искусственных переменных.

В каждое уравнение ограничений, где нет базисной переменной, вводится искусственная переменная x_{n+k} ($k = 1, 2, \ldots, m$) с единичным коэффициентом.

К целевой функции все искусственные переменные x_{n+k} присоединяются с общим коэффициентом M, значение которого выбирается достаточно большим ($M >> \max c_j$).

Начальный план (базис) может строиться различными способами.

Одним из общих способов является введение искусственных переменных.

В каждое уравнение ограничений, где нет базисной переменной, вводится искусственная переменная x_{n+k} (k = 1, 2,…, m) с единичным коэффициентом.

К целевой функции все искусственные переменные x_{n+k} присоединяются с общим коэффициентом M, значение которого выбирается достаточно большим ($M >> \max c_j$).

Введем искусственные переменные x_8, x_9 и x_{10}.

Модель примет вид:

$\min U = 4x_1+ 4x_2+3x_3+2x_4+0x_5+0x_6+0x_7+Mx_8+Mx_9+Mx_{10}$

$x_1+2x_2+4x_3+0x_4-1x_5-0x_6+0x_7+1x_8+0x_9+0x_{10} = 24$

$3x_1+2x_2+0x_3+2x_4+0x_5-x_6+0x_7+0x_8+1x_9+0x_{10} = 18$

$0x_1+4x_2+3x_3+1x_4+0x_5+0x_6-1x_7+0x_8+0x_9+1x_{10} = 18$

$x_j =0, j = 1, 2 ,…, 10$

При записи начальной симплекс-таблицы, соответствующей этой модели, производят исключение искусственных переменных в целевой функции.

Для этого необходимо выразить каждую базисную переменную в уравнениях-ограничениях через свободные переменные, подставить в целевую функцию и привести подобные члены.

При записи начальной симплекс-таблицы, соответствующей этой модели, производят исключение искусственных переменных в целевой функции.

Для этого необходимо выразить каждую базисную переменную в уравнениях-ограничениях через свободные переменные, подставить в целевую функцию и привести подобные члены:

$$\gamma_j = c_j - M\sum_{i=1}^{m} a_{ij},\ j = 0,1,2,..., n+m.$$

В дальнейшем по ним оценивается построенный план.

Левый элемент нулевой строки содержит значение целевой функции ($U = 60M$).

Столбец свободных членов содержит значения базисных неизвестных.

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**U-60M**	**4-4M**	**4-8M**	**3-7M**	**2-3M**	**M**	**M**	**M**	**0**	**0**	**0**

1	24	1	2	4	0	-1	0	0	1	0	0
2	18	3	2	0	2	0	-1	0	0	1	0
3	18	0	4	3	1	0	0	-1	0	0	1

Приравняв небазисные переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 и x_7 нулю, получим значения базисных составляющих начального плана $x_8 = 24$, $x_9 = 18$ и $x_{10} = 18$.

План обеспечивает значение целевой функции $U = 60M$.

***Шаг** 3*. Проверка оптимальности плана.

Чтобы проверить, является ли полученный план оптимальным или нет, необходимо произвести анализ *значений коэффициентов при свободных переменных в целевой функции* (в строке 0 симплексной таблицы).

Каждый коэффициент в строке 0 определяет положительное (если его значение больше нуля) или отрицательное (если его значение меньше нуля) приращение целевой функции U при увеличении на единицу соответствующей ему небазисной переменной.

Если значения коэффициентов положительны, то, увеличивая какую-то свободную переменную сверх нуля (вводя ее в базисные переменные), мы не сможем уменьшить значение целевой функции.

Следовательно, либо получен оптимальный план и нужно переходить на шаг 6 (при отсутствии искусственных переменных в плане), либо задача не имеет решения (при наличии искусственных переменных в плане).

Если же некоторые коэффициенты имеют отрицательные значения, то при увеличении одной из соответствующих им свободных переменных можно добиться улучшения плана.

План $x^{(1)}$ не является оптимальным (γ_1, γ_2, γ_3 и $\gamma_4 < 0$).

***Шаг** 4*. Выбор разрешающего элемента для улучшения плана.

Включению в план подлежит та из свободных переменных x_s, для которой оценка γ_s отрицательна и имеет наибольшее абсолютное значение:

$$\gamma_s < 0,\ \gamma_s = \max_j |\gamma_j|.$$

Это обеспечивает (но не всегда) сокращение числа итераций.

Теперь остается выяснить, какая базисная переменная должна исключаться из плана.

Тем самым мы определим, с каким значением будет введена свободная переменная.

Чем больше значение x_s, тем меньше значение U.

Однако нельзя забывать об ограничениях.

Теперь остается выяснить, какая базисная переменная должна исключаться из плана.

Тем самым мы определим, с каким значением будет введена свободная переменная.

Чем больше значение x_s, тем меньше значение U.

Однако нельзя забывать об ограничениях.

$$\frac{\beta_r}{\alpha_{rs}} > 0, \ \frac{\beta_r}{\alpha_{rs}} = \min \frac{\beta_i}{\alpha_{is}}.$$

Величина β_i / α_{is} определяет максимально допустимое значение базисной переменной x_s в каждом ограничении.

Так, по условиям рассматриваемой задачи (s = 2):

$x_1 = 24/2 = 12;$

$x_2 = 18/2 = 9;$

$x_3 = 18/4 = 4{,}5.$

В целом максимально допустимым значением, очевидно, может быть $x_3 = 4{,}5$ (это узкое место).

Если для столбца s не окажется ни одной базисной переменной с положительным значением отношения β_i / α_{is}, то, значит, целевая функция не ограничена снизу.

Строку r, столбец s и элемент a_{rs} принято называть *разрешающими*.

В рассматриваемой задаче разрешающим элементом будет элемент a_{32}.

Для элемента a_{32}: $\gamma_2 = 4 - 8M$, $\beta_3 / \alpha_{32} = 4{,}5$

***Шаг** 5*. Выполнение процедуры полного исключения с разрешающим элементом α_{rs}.

Переход к новой симплекс-таблице обеспечивается выполнением процедуры полного исключения, широко используемой при решении систем линейных уравнений.

Все элементы разрешающей строки s делятся на значение разрешающего элемента α_{rs}.

Чтобы исключить переменную, которой соответствует коэффициент α_{rs}, в остальных строках i (i = 0, 1, 2,…, m, $i \neq r$), вычитают из каждой из них строку с α_{rs}, умноженную на значение коэффициента α_{is}.

В результате получится новая таблица со значениями элементов:

$\alpha_{rs}{}' = 1;$

$\alpha_{rj}{}' = \alpha_{rj} / \alpha_{rs};$

$\alpha_{ij}{}' = \alpha_{ij} - (\alpha_{rj} / \alpha_{rs}) * \alpha_{is},$

$i = 0, 1, 2, \ldots, m;$

$j = 0, 1, 2, \ldots, n;$

$i \neq r;\ i \neq s.$

Целевая функция подвергается тем же самым преобразованиям, что и ограничения задачи.

Поэтому целевая функция оказывается всегда выраженной через свободные переменные.

Реализация шагов 3, 4 и 5 представляет собой одну итерацию по улучшению плана.

Далее, начиная с шага 3, должна выполняться следующая итерация.

Так как вводить искусственные переменные, исключенные из базиса на очередной итерации, в какой-то из последующих базисов не имеет смысла, то преобразование соответствующих им столбцов излишне.

Результаты первой итерации для рассматриваемой задачи представлены в таблице:

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**U-24M-18**	**4-4M**	**0**	**-M**	**1-M**	**M**	**M**	**1-M**	**0**	**0**	**2M-1**
1	15	1	0	5/2	-1/2	-1	0	1/2	1	0	-1/2
2	9	3	0	-3/2	1	0	-1	1/2	0	1	-1/2
3	4.5	0	1	3/4	1/4	0	0	-1/4	0	0	1/4

Значение целевой функции при полученном плане уменьшилось до

$$U^{(2)} = -24M-18$$

После трех итераций все искусственные переменные (x_8, x_9 и x_{10}) окажутся исключенными из плана (см. очередную таблицу).

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**U-38**	**0**	**-4-4M**	**0**	**11/3**	**2/3**	**10/9**	**13/9 3/4M)**			
1	4	0	0	1	-1/3	-1/3	1/9	1/9			
2	5	1	0	0	1/3	-1/6	-5/18	2/9			
3	1.5	0	1	0	1/2	1/4	-1/12	-1/3			

Целевая функция примет значение:

$$U^{(4)} = 38$$

Но план не оптимален.

Для получения оптимального плана потребуется еще две итерации.

Последней итерации соответствует следующая таблица:

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**U-36**	**1/4**	**1/2**	**0**	**0**	**9/12**	**35/36**	**0**			
1	9	9/4	-3/2	0	0	-3/4	-1/2	1			
2	9	3/2	1	0	1	0	-2/3	0			
3	6	-1/4	1/2	1	0	-1/12	0	0			

Шаг 6. Оформление полученных результатов

Полученные результаты представляются обычно в табличном виде (см. таблицу):

Номер j	Элементы решения x_j	Оценки c_j
1	0	4

2	0	4
3	6	3
4	9	2

Эффективность оптимального решения равна 36 единиц.

Как следует из таблицы, оптимальным для решаемой задачи будет план:

$$x^{(6)} = \{x_1 = 0,\ x_2 = 0, x_3 = 6,\ x_4 = 9\}$$

При этом затраты составят $U^{(6)}$ = 36 единиц и дополнительно еще может быть обслужено 9 единиц, так как $x_7 = 9$.

Решение игровой задачи

Вариант игровой задачи 2 x 2.

Пусть задана конечная игра 2 x 2 с платёжной матрицей вида:

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2
A_1	-3	5
A_2	6	-2

Требуется:

Найти решение игровой задачи.

Решение.

В рассматриваемой игре необходимо рассмотреть два случая:

1. Игра имеет седловую точку, следовательно решение может быть сразу найдено.

2. Седловая точка в игре отсутствует, следовательно решение необходимо искать в смешанных стратегиях.

Случай 1.

Найдём нижнюю и верхнюю цены игры.

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	α
A_1	-3	5	-3
A_2	6	-2	-2
β	6	5	

Видно, что седловой точки нет, следовательно решение необходимо искать в смешанных стратегиях, т.е рассмотреть случай 2.

Случай 2.

Найдём решение, т.е. пару оптимальных стратегий:

$$S_A^* = (p_1, p_2);\ S_B^* = (q_1, q_2).$$

Определим вначале оптимальную смешанную стратегию S_A^*. Согласно теореме об активных стратегиях, если будем придерживаться этой стратегии, то, независимо от действий стороны *B* (если сторона *B* не выходит за пределы своих активных стратегий), выигрыш будет оставаться равным цене игры

v.

В рассматриваемой игре обе стратегии стороны B являются активными (иначе игра имела бы седловую точку). Следовательно, если сторона A придерживается своей оптимальной стратегии $S_A^* = (p_1, p_2)$, то сторона B может, не меняя выигрыша, применять любую из своих чистых стратегий.

Отсюда имеем два уравнения:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v;$$
$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v.$$

Принимая во внимание, что $p_1 + p_2 = 1$, получаем из уравнений:

$$p_1 = (a_{22} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$$
$$p_2 = 1 - p_1 = (a_{11} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}).$$

Для решаемой задачи, таким образом, имеем:

$p_1 = (-2 – 6) / (-3 + (-2) – 5 – 6) = -8 / -16 = 0.5;$

$p_2 = 1 - p_1 = 1 – 0.5 = 0.5$

Цену игры v найдём, подставляя значения p_1 и p_2 в любое из выше представленных уравнений:

$$v = (a_{22}\, a_{11} - a_{12}\, a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$$

Для решаемой задачи имеем:

$$v = [(-2)*(-3) – 5 * 6] / [(-3) + (-2) – 5 - 6] = (-24) / (-16) = 1.5$$

Аналогичным образом находится стратегия стороны В, т.е.:

$$S_B^* = (q_1, q_2).$$

Из уравнений:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v;$$
$$a_{21}q_1 + a_{22}p_2 = v;$$
$$q_1 = (a_{22} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21});$$
$$q_2 = 1 - q_1.$$

Получаем:

$q_1 = [(-2) - 5] / [(-3) + (-2) – 5 - 6] = (-7) / (-16) = 0.44$

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 – 0.44 = 0.66$$

В результате решения задачи получен следующий результат:

$$p_1 = 0.5;\ p_2 = 0.5;\ v = 1.5;\ q_1 = 0.44;\ q_2 = 0.66;$$
$$S_A^* = (0.5, 0.5);\ \ S_B^* = (0.44, 0.66).$$

После выполнения задания рекомендуется самостоятельно сделать вывод по полученным результатам.

Вариант игровой задачи 2 x *n*.

Найти решение игры графическим методом, если для неё задана следующая платёжная матрица:

$i \backslash j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6

A_1	6	4	3	1	-1	0
A_2	-2	-1	1	0	5	4

Решим задачу по шагам.

Шаг 1. Анализ игры на наличие седловой точки:

$i \backslash j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	α
A_1	6	4	3	1	-1	0	**-1**
A_2	-2	-1	1	0	5	4	-2
β	6	4	3	**1**	5	4	

Нижняя цена игры равна -1, а верхняя - равна 1. Седловой точки нет. Следовательно решение игры нужно искать в смешанных стратегиях.

Шаг 2. Вычисление средних выигрышей игрока *A*. Это вычисление проводится при условии, что игрок *B* выбирает только чистые стратегии.

Средние выигрыши игрока А вследствие того, что:

	$i \backslash j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
p	A_1	6	4	3	1	-1	0
$1-p$	A_2	-2	-1	1	0	5	4

могут быть описаны уравнениями:

(1): $w = 6p - 2(1 - p)$;

(2): $w = 4p - (1 - p)$;

(3): $w = 3p + (1 - p)$;

(4): $w = p$;

(5): $w = - p + 5(1 - p)$;

(6): $w = 4(1 - p)$.

Шаг 3. Построение нижней огибающей.

На координатной плоскости (p, w) строим по полученным уравнениям прямые и найдём нижнюю огибающую. Для этого каждому значению p, $0 \le p \le 1$, путём визуального сравнения соответствующих ему значений w, определяем и отмечаем наименьшее из них. В результате выполнения этой процедуры получается ломаная, являющаяся графиком функции:

$$\min_{1 \le k \le n}(a_{1k} p + a_{2k}(1 - p)).$$

Получили нижнюю огибающую.

Шаг 4. Отыскание цены игры и оптимальной смешанной стратегии игрока *A*.

При построении нижней огибающей нетрудно определить, на пересечении каких двух из шести прямых лежит её наивысшая точка. В рассматриваемом случае это прямые (4) и (5), задаваемые уравнениями:

(4): $w = p$;

(5): $w = - p + 5(1 – p)$.

Решая эту систему уравнений, получаем:

$p_{опт} = 5/7$;

$w_{опт} = 5/7$ (средний выигрыш).

Отсюда можно сделать вывод:

- цена игры $\nu = 5/7$;
- оптимальная стратегия $p_{опт} = \{5/7; 2/7\}$.

Собственно этим и заканчивается решение игры для игрока A, поскольку его в первую очередь интересует отыскание собственной оптимальной стратегии и ожидаемого наилучшего гарантированного результата.

При решении матричной игры, решающий её обычно отождествляет себя с одним из игроков (как правило, это игрок A), считая другого своим противником. Это связано ещё и с тем, что в некоторых случаях основное внимание уделяется поиску оптимальных стратегий только игрока A, а стратегии противника могут вообще не интересовать исследователя.

Однако в целом ряде случаев оказывается важным знать оптимальные смешанные стратегии обоих игроков.

Рассмотрим, каким образом можно отыскать оптимальную смешанную стратегию игрока B.

Здесь в зависимости от формы нижней огибающей может представиться несколько случаев.

Случай 1.

Нижняя огибающая имеет ровно одну наивысшую точку ($p_{опт}$, $w_{опт}$).

а) Если $p_{опт} = 0$ (оптимальная стратегия игрока A – чистая стратегия A_2), то игроку B выгодно применить чистую стратегию, соответствующую прямой, проходящей через точку $(0, w_{опт})$ и имеющей наибольший отрицательный наклон (см. рис.);

б) Если $p_{опт} = 1$ (оптимальная стратегия игрока A – чистая стратегия A_1), то оптимальной для игрока B является чистая стратегия, соответствующая прямой, проходящей через точку $(1, w_{опт})$ и имеющей наименьший положительный наклон (см. рис.);

в) Если $0 < p_{опт} < 1$, то в наивысшей точке нижней огибающей пересекаются по меньшей мере две прямые, одна из которых (k-я) имеет положительный наклон, а другая (l-я) – отрицательный (см. рис.), и оптимальная смешанная стратегия игрока B получается, если положить:

$$q_k = q, \quad q_l = 1 – q, \quad q_j = 0, \quad j \neq k, l,$$

где q – решение уравнения $a_{1k}q + a_{1l}(1 – q) = a_{2k}q + a_{2l}(1 – q)$.

Случай 2.

Нижняя огибающая содержит горизонтальный участок, соответствующий чистой стратегии $k_{опт}$ игрока B, которая и является оптимальной для него (см. рис.).

Для рассматриваемого примера полное решение игры будет следующим (т.е. и с учётом нахождения оптимальной смешанной стратегии игрока В):

$Q_{опт} = \{q_{1\,опт}, q_{2\,опт}, q_{3\,опт}, q_{4\,опт}, q_{5\,опт}, q_{6\,опт}\}$.

Для этого поступают так:

1) полагают:

$q_{1\,опт} = 0$,

$q_{2\,опт} = 0$,

$q_{3\,опт} = 0$,

$q_{4\,опт} = q$,

$q_{5\,опт} = 1 - q$,

$q_{6\,опт} = 0$,

выделяя тем самым из шести чистых стратегий игрока B стратегии B_4 и B_5, которые соответствуют прямым (4) и (5), определяющим наивысшую точку нижней огибающей;

2) приравнивают любой из двух средних выигрышей игрока B (игрок A выбирает только чистые стратегии), отвечающий предложенной смешанной стратегии

0	**0**	**0**	***q***	**1 - *q***	**0**
6	4	3	1	-1	0
-2	-1	1	0	5	4

к цене игры:

$$q - (1 - q) = 5/7, \quad 5(1 - q) = 5/7;$$

3) получают в результате в обоих случаях, что: $q_{опт} = 6/7$.

Полное решение игры имеет вид:

$p_{опт}$ {5/7, 2/7};

$Q_{опт} = \{0, 0, 0, 6/7, 1/7, 0\}$;

$v = 5/7$.

Примеры решения задач контрольной работы рассматриваются также в ходе установочного сбора по дисциплине.

Разработал
Профессор кафедры системного анализа
и антикризисного управления В.И.Антюхов