

Z61917

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ



Кафедра теоретической механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания
по выполнению контрольных работ
для студентов специальностей
170600, 210200, 271300, 070200
факультета заочного обучения и экстерната

И-6204



Санкт-Петербург 2004

3. Контрольные работы выполняются студентами в порядке возрастания номеров, т. е. сначала работа № 1, после получения на нее рецензии и зачета – работа № 2, затем – работа № 3.

4. При возникновении затруднений в проработке теории, решении задач студент может обратиться на кафедру за консультацией.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

В контрольную работу № 1 входят две задачи из раздела «Статика твердого тела» и две задачи из раздела «Кинематика точки».

Поясним, как отобразить необходимый для решения комплект задач:

- первая буква имени студента определяет строку в таблице исходных данных для решения задачи 1 (прил. 1);
- вторая буква имени студента определяет рисунок к задаче 1 (прил. 1);
- начальная буква отчества студента определяет строку в таблице исходных данных для решения задачи 2 и рисунок к задаче 2 (прил. 2);
- первая буква фамилии студента указывает строку в таблице исходных данных для решения задачи 3 (прил. 3);
- вторая буква фамилии указывает строку в таблице исходных данных для решения задачи 4 (прил. 4).

Статика твердого тела

Задача 1

Определить реакции опор твердого тела (рамы) при действии произвольной плоской системы сил.

Порядок решения задачи

Изобразить схему конструкции с заданными внешними силами и опорами. Построить силовую схему, для чего заменить равномерно распределенную нагрузку равнодействующей силой; при необходимости разложить наклонные силы на горизонтальные и вертикальные составляющие, сохраняя неизменной точку их приложения.

4

Согласно принципу освобождаемости от связей, вместо мысленно отброшенных опор изобразить замещающие их реакции (силы).

Для плоской системы сил, приложенных к балке с ломаной осью (раме), составить три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum M_{A_i} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В рассматриваемых конструкциях количество неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия (статически определимая задача). Поэтому, решая совместно три уравнения равновесия с тремя неизвестными (1), находим все три реакции связей.

Для контроля правильности составления трех уравнений равновесия и выполнения вычислений дополнительно записывается уравнение моментов всех сил относительно нового центра моментов K , который выбирается таким образом, чтобы все реакции связей входили в уравнение:

$$\sum M_K = 0. \quad (2)$$

Если в результате вычислений уравнение (2) обратится в тождество, то выполненная таким образом проверка подтвердит правильность решения задачи.

Оформление решения задачи

В процессе решения задачи должны быть представлены: исходные данные и конструктивная схема рассчитываемой рамы с заданными (активными) силами; силовая схема, содержащая активные силы и реакции мысленно отброшенных связей; уравнения равновесия плоской системы сил и их решение; уравнение моментов сил для проверки правильности решения задачи.

5

Задача 2

Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций и необходимые для расчета данные приведены в прил. 2.

Примеры решения задачи 2

Пример 1

Дано: Рама $ABCD$ весом $G = 1$ кН (рис. 7); $P = 2$ кН, $\bar{p} // A_1$, $AD = BC = 60$ см, $AB = CD = 100$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Найти: реакции опор A и B (A – шаровой шарнир, B – петля).

Решение.

К раме $ABCD$ приложены сила тяжести \vec{G} , сила \vec{P} , реакция \vec{S} идеального стержня CE и реакции опор A и B . Реакция шарового шарнира A определяется тремя составляющими: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, а реакция петли B – двумя: \vec{X}_B, \vec{Z}_B (рис. 8). Эти силы (активные и реакции связей) образуют произвольную пространственную систему сил, равновесие которой описывается шестью уравнениями: тремя уравнениями проекции сил на координатные оси x, y, z и тремя уравнениями моментов сил относительно этих осей:

$$\sum X_i = 0: X_A + X_B - S \cos 60^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: Y_A + P = 0, \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0: Z_A - G + Z_B + S \cos 30^\circ = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{x_i} = 0: -P \cdot AD \cos 30^\circ - G \cdot AB/2 + S \cos 30^\circ \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0, \quad (4)$$

$$\sum M_{y_i} = 0: G(BC/2) \sin 30^\circ - S \cdot BC \sin 60^\circ = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_{z_i} = 0: P \cdot AD \sin 30^\circ + S \cos 60^\circ \cdot AB - X_B \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Из шести уравнений определяем 6 неизвестных реакций связей. Из уравнения (5) определяем S , затем из уравнений (4) и (6) находим Z_B, X_B . Из уравнений (1), (2), (3) находим X_A, Y_A, Z_A .

Результаты вычислений приведены ниже:

Силы, кН					
S	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Z_B
0,289	-0,600	-2,00	-0,54	0,744	1,29

12

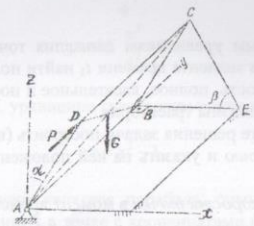


Рис. 7

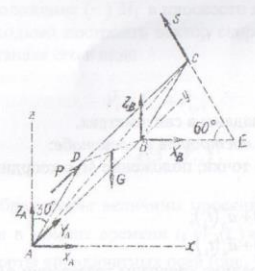


Рис. 8

13

Кинематика точки

Задачи 3, 4

По заданным уравнениям движения точки установить вид ее траектории и для момента времени t_1 найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

В результате решения задачи построить (в масштабе):

- траекторию и указать на ней положение M_1 точки в момент времени t_1 ;
- вектор скорости точки в момент времени t_1 $\vec{V}(t_1)$;
- полное ускорение точки в момент времени t_1 $\vec{a}(t_1)$, используя составляющие вектора $\vec{a}_x(t_1)$, $\vec{a}_y(t_1)$;
- полное ускорение точки в момент времени t_1 , используя касательное $\vec{a}_t(t_1)$ и нормальное $\vec{a}_n(t_1)$ ускорения (с целью проверки $\vec{a}(t_1)$).

Примеры решения задач 3, 4

Пример 1

Дано:

$$\left. \begin{aligned} x &= 4t \\ y &= 16t^2 - 1 \\ t_1 &= 0,5 \text{ с.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Координаты точки заданы в сантиметрах.

Определить и построить в масштабе:

- 1) траекторию точки, положение M_1 с координатами $x(t_1)$, $y(t_1)$;
- 2) $\vec{V}(t_1)$;
- 3) $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_x(t_1) + \vec{a}_y(t_1)$;
- 4) $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_t(t_1) + \vec{a}_n(t_1)$;
- 5) вычислить радиус кривизны траектории $\rho(t_1)$.

Решение

Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1):

$$t = \frac{x}{4}$$

$$y = 16 \cdot \frac{x^2}{4^2} - 1.$$

Таким образом, уравнение траектории точки имеет вид:

$$y = x^2 - 1, \quad (2)$$

т. е. траекторией точки является парабола, симметричная относительно оси y , с вершиной в точке с координатами $(0; -1)$, ветви которой направлены в сторону положительной оси y (на рис. 9 траектория изображена в масштабе).

Определяем координаты точки в момент времени $t_1 = 0,5$ с:

$$x(t_1) = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ см,}$$

$$y(t_1) = 16 \cdot (0,5)^2 - 1 = 3 \text{ см.}$$

Находим положение (\cdot) M_1 в плоскости xOy (рис. 9).

Далее необходимо построить вектор скорости точки в момент времени t_1 , представляя его в виде

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{1x} + \vec{V}_{1y}, \quad (3)$$

или

$$\vec{V}_1 = V_{1x} \vec{i} + V_{1y} \vec{j}, \quad (3')$$

где V_{1x}, V_{1y} - алгебраические величины проекций скорости точки на координатные оси в момент времени t_1 ($V_x(t_1) \equiv V_{1x}$; $V_y(t_1) \equiv V_{1y}$ - для краткости); \vec{i}, \vec{j} - орты координатных осей (рис. 9).

Определяем проекции скорости точки на оси координат, дифференцируя по времени уравнения (1), представляющие законы изменения координат точки с течением времени:

Схемы к примерам решения задачи 3; 4

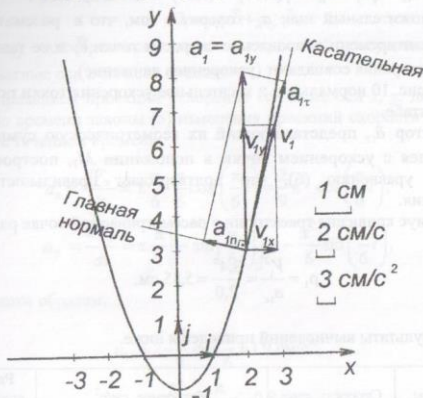


Рис. 9



Рис. 10

Приложения к контрольной работе № 1

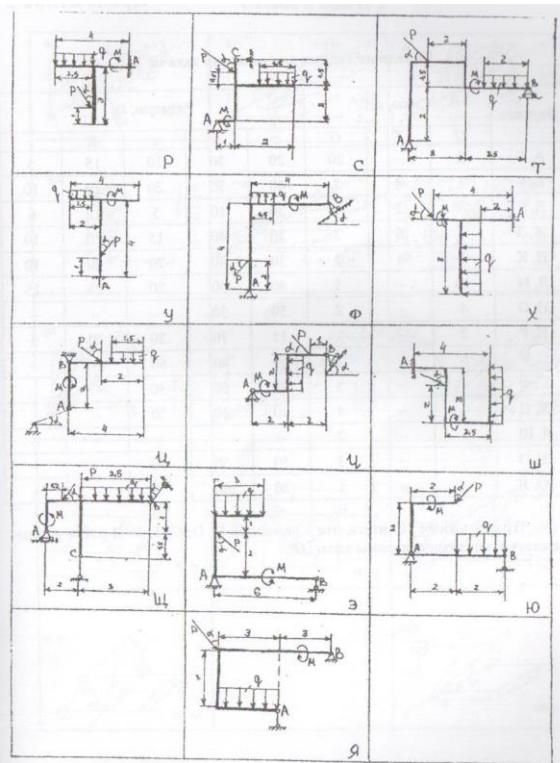
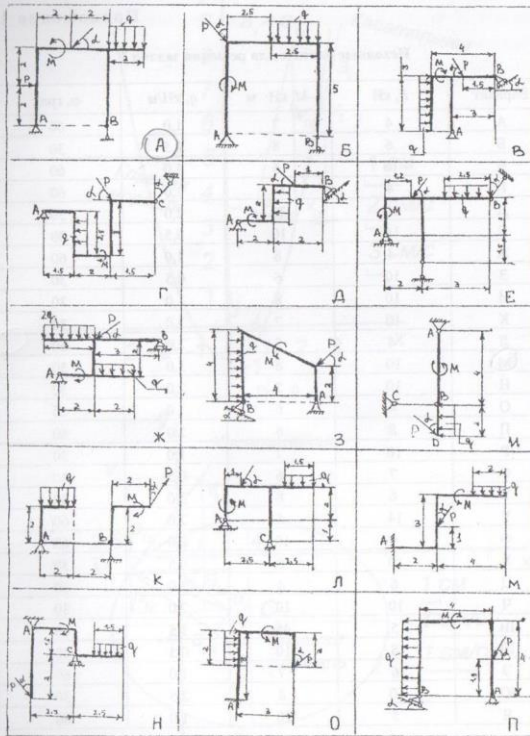
Приложение 1

Исходные данные для решения задачи 1

Вариант	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	α , град
А	4	7	1,0	60
Б	6	8	0,5	30
В	10	6	3,0	60
Г	4	14	1,0	60
Д	10	20	2,0	30
Е	16	10	0,5	30
Ж	4	8	1,0	60
З	10	6	0,5	30
И	10	8	1,0	30
К	10	7	3,0	30
Л	4	5	2,0	60
М	10	8	3,0	30
Н	10	5	2,0	30
О	4	6	1,0	60
П	8	6	2,0	60
Р	10	7	1,0	30
С	7	6	0,5	30
Т	6	8	3,0	30
У	14	4	2,0	60
Ф	4	10	2,0	60
Х	10	6	0,5	30
Ц	6	4	1,0	60
Ч	10	10	2,0	30
Ш	5	45	1,5	60
Щ	8	10	0,5	30
Э	6	7	1,0	60
Ю	10	8	2,5	30
Я	5	20	1,0	60

Примечание. В задаче 1 определить реакции опор твердого тела

Схемы к задаче 1



Приложение 2

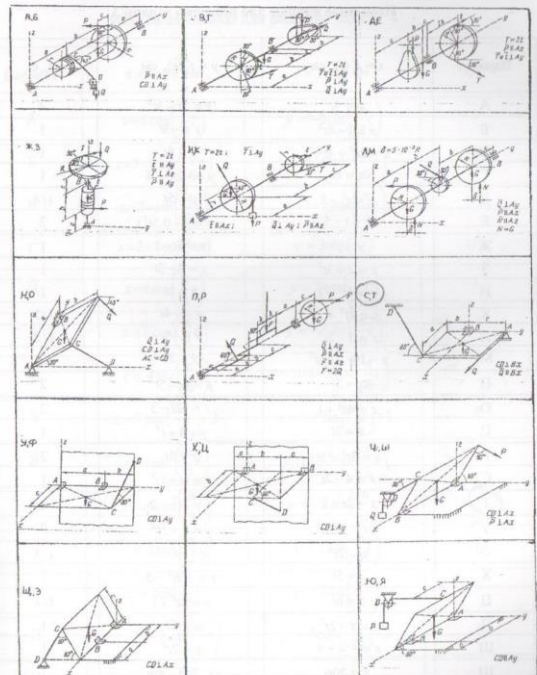
Исходные данные для решения задачи 2

Вариант	Силы, кН			Размеры, см				
	Q	T	G	a	b	c	R	r
А, Б	2	-	20	20	30	10	15	5
В, Г	1	4	2	40	30	20	20	10
Д, Е	-	3	1	30	10	5	18	6
Ж, З	4	6	3	20	40	15	20	10
И, К	1	4	2	30	40	20	20	10
Л, М	10	-	5	40	30	20	25	15
Н, О	4	-	2	50	30	-	-	-
П, Р	2	-	1	15	10	20	20	5
С, Г	6	-	2	60	40	60	-	-
У, Ф	-	-	5	20	50	30	-	-
Х, Ц	-	-	4	40	30	50	-	-
Ч, Ш	5	-	2	-	-	-	-	-
Щ, Э	-	-	3	50	50	60	-	-
Ю, Я	-	-	1	20	60	40	-	-

Примечание. Считать, что в вариантах Н, О; С, Т; У-Я петли не препятствуют перемещению рамы вдоль АВ.

Схемы к задаче 2

Схемы к задаче 2



Исходные данные для решения задачи 3

Вариант	$x = f_1(t)$, см	$y = f_2(t)$, см	t_1 , с
А	$x = 4t$	$y = 2t - 3t^2$	2
Б	$x = 1 - 4t^2$	$y = -3t$	1
В	$x = 2t^2 + 4t + 1$	$y = 4t$	1
Г	$x = 6t$	$y = -2t^2 - 4$	1
Д	$x = t^2 - 3$	$y = 5t$	1/4
Е	$x = t - 5$	$y = 6(t + 0,5t^2)$	2
Ж	$x = t^2$	$y = 2t - 1$	1
З	$x = 2 + 3t^2$	$y = 4 - 3t$	1
И	$x = 4t^2 + 1$	$y = 8t$	1
К	$x = 2t^2 + 2$	$y = -4t$	1/2
Л	$x = 3 - 2t^2$	$y = -5t$	1/2
М	$x = 10t - 0,1t^2$	$y = 5t$	2
Н	$x = 3t$	$y = 4t - 5t^2$	2
О	$x = 4t^2 + 1$	$y = 12t - 3$	2
П	$x = 3t$	$y = 1 + t^2$	1
Р	$x = 3t^2 + 5t$	$y = 5t$	2
С	$x = 4 - 2t$	$y = (t + 1)^2$	1
Т	$x = 2t + 2$	$y = 3t^2 - 2$	1
У	$x = 10t$	$y = 4 + 5t^2$	2
Ф	$x = 2t^2$	$y = 4t - 1$	1/4
Х	$x = 5t$	$y = 4,9t^2 - 5$	1
Ц	$x = 8t$	$y = 2t^2 + 1$	1/2
Ч	$x = 1 - 2t^2$	$y = 3t$	1
Ш	$x = -5t + 4$	$y = 2t^2$	1
Щ	$x = 20t$	$y = 245 - 49t^2$	1
Э	$x = 10t$	$y = 20t - 5t^2$	1
Ю	$x = t^2 - 6t$	$y = 25t$	2
Я	$x = 4t^2 + 1$	$y = 8t - 2$	1

Вариант	$x = f_1(t)$, см	$y = f_2(t)$, см	t_1 , с
П	$x = 4 \sin(\pi t)$	$y = 4 \cos(\pi t)$	1/3
Р	$x = 4 \cos(2t)$	$y = 4 \sin(2t)$	$\pi/2$
С	$x = 15 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 5 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1/2
Т	$x = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1/2
У	$x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 1 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	3
Ф	$x = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	$y = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
Х	$x = 5 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1
Ц	$x = -3 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 2 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
Ч	$x = 6 \sin(\pi t) - 2$	$y = 6 \cos(\pi t) - 1$	1/4
Ш	$x = 2 \cos(\pi t)$	$y = 2 \sin(\pi t)$	1
Щ	$x = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 2$	1
Э	$x = -2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 3$	1
Ю	$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 6 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
Я	$x = 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 4 - 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	2

Исходные данные для решения задачи 4

Вариант	$x = f_1(t)$, см	$y = f_2(t)$, см	t_1 , с
А	$x = 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
Б	$x = 3 - 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 4 - 9 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
В	$x = 2 + \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1/2
Г	$x = 2 + 3 \cos(\pi t)$	$y = 3 \sin(\pi t)$	1/2
Д	$x = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$y = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1
Е	$x = 8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = -8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
Ж	$x = 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 4 - 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	2
З	$x = 7 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 2$	$y = -7 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 3$	1
И	$x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 4 - 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
К	$x = 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = -2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
Л	$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	2
М	$x = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1
Н	$x = 3 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	1
О	$x = 5 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = -5 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

В контрольную работу № 2 входят три задачи из раздела «Кинематика твердого тела» и одна задача из раздела «Кинематика точки» (сложное движение точки).

Поясним, как отобразить необходимый для решения комплект данных:

- первая буква имени студента определяет строку в исходных данных и рисунок для решения задачи 1 (прил. 5);
- вторая буква имени студента указывает рисунок и исходные данные для решения задачи 2 (прил. 6);
- начальная буква отчества студента определяет рисунок и исходные данные для решения задачи 3 (прил. 7);
- первая буква фамилии студента указывает строку исходных данных и рисунок для решения задачи 4 (прил. 8).

Кинематика твердого тела

Поступательное и вращательное движения твердого тела

Задача 1

По заданному уравнению поступательного движения груза (тела l) определить в момент времени его скорость и ускорение, а также скорость и ускорение точки M одного из колес механизма.

Пример решения

Дано:

Схема механизма (рис. 11), $R_2 = 50$ см, $r_2 = 25$ см, $r_3 = 40$ см, $x = 36t^2 + 5t + 14$, $t_1 = 1$ с, $A_3 = 65$ см.

Определить и построить:

- 1) скорость и ускорение груза l в момент времени t_1 ;
- 2) скорость и ускорение точки M колеса 3 в момент времени t_1 .

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из трех материальных тел (рис. 11). Груз l совершает поступательное движение, колеса 2, 3 вращаются вокруг неподвижных осей. В соответствии со свойствами поступательного движения рассматриваем тело l как материальную точку, которая перемещается относительно оси x

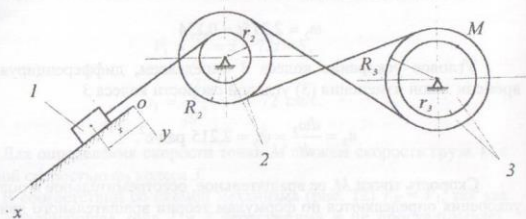


Рис. 11

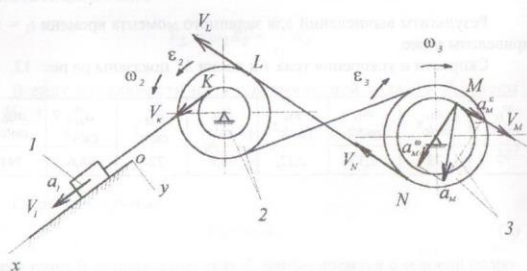


Рис. 12

Задача 2

В этой задаче требуется найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C , а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Построить план скоростей и план ускорений шатуна AB . Схемы механизмов приведены в прил. 6.

Пример решения

Дано: схема кривошипно-ползунного механизма в заданном положении (рис. 13); $OA = 10$ см, $AB = 60$ см, $AC = 20$ см; $\omega_{OA} = 1,5$ рад/с, $\epsilon_{OA} = 2$ рад/с².

Определить: скорости и ускорения точек B и C , угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Построить: план скоростей и план ускорений шатуна AB .

Решение

1. Определение скоростей точек и угловой скорости звена (рис. 14)

Определяем модуль скорости точки B , рассматривая ее как точку шатуна AB , совершающего плоское движение. Скорость точки B является вращательной скоростью при вращении шатуна AB вокруг оси, проходящей через его мгновенный центр скоростей P , т. е.

$$V_B = \omega_{AB} \cdot PB \quad (1)$$

Положение P мгновенного центра скоростей шатуна AB в рассматриваемом положении кривошипно-ползунного механизма находим как точку пересечения прямых, перпендикулярных к линиям действия векторов скоростей точек A и B шатуна (рис. 14). Линии действия скоростей точек A и B известны: точка A принадлежит кривошпину OA , вращающемуся вокруг неподвижной оси, и в рассматриваемом положении механизма имеет горизонтальную линию действия; точка B принадлежит ползуну, совершающему поступательное движение по вертикали, поэтому линия действия скорости точки B вертикальна.

Расстояние PB определяется из рассмотрения треугольника ABP :

$$PB = AB/2 = 60/2 = 30,0 \text{ см.}$$

Схемы к примеру решения задачи 2 (окончание)

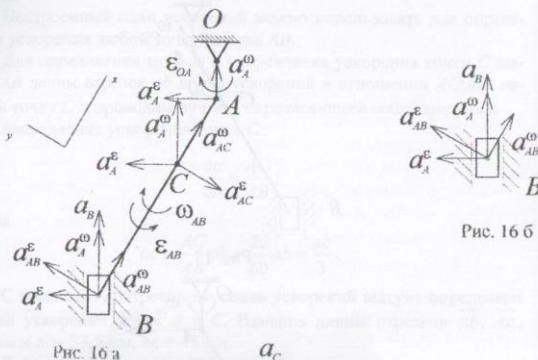


Рис. 16 а

Рис. 16 б

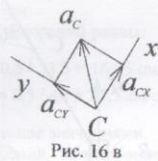


Рис. 16 в

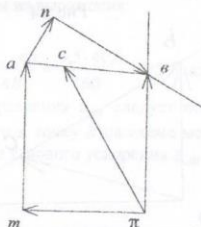


Рис. 17

Задача 3

Колесо радиуса R катится без скольжения по неподвижной плоскости. Зная скорость V_A и ускорение a_A центра A колеса в некоторый момент времени, определить скорости и ускорения точек B и C колеса в этот момент времени.

Рисунки и необходимые для расчета данные приведены в прил. 7.

Пример решения

Дано: Колесо радиуса $R = 40$ см катится без скольжения по неподвижной плоскости. Модули скорости и ускорения его центра A (рис. 18 а) в рассматриваемый момент равны $V_A = 40$ см/с, $a_A = 20$ см/с².

Определить: Скорости и ускорения точек B и C , указанных на рис. 18, в данный момент времени.

Решение

1. Определение скоростей точек колеса и его угловой скорости

Колесо совершает плоское движение. Так как оно катится без скольжения, то скорость точки касания колеса с неподвижной плоскостью (точка B) равна нулю. Точка B является мгновенным центром скоростей (точка P на рис. 18 б). Следовательно, $V_B = 0$

Зная положение мгновенного центра скоростей и скорость точки A колеса, найдем модуль его угловой скорости:

$$\omega = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_A}{R} = \frac{40}{40} = 1 \text{ рад/с.}$$

Направление угловой скорости колеса определяем, рассматривая скорость точки A как вращательную вокруг мгновенного центра скоростей P (рис. 18 б).

Определив модуль и направление угловой скорости ω и зная положение мгновенного центра скоростей P , найдем модуль скорости точки C :

$$V_C = \omega \cdot PC.$$

Расстояние PC определяется из рассмотрения равнобедренного треугольника ABC :

$$PC = R\sqrt{2}.$$

Схемы к примеру решения задачи 3

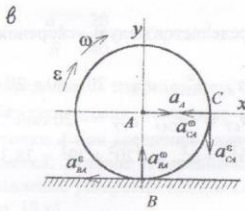
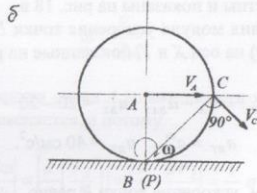
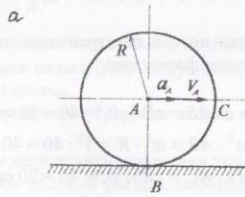


Рис. 18

Кинематика точки
(сложное движение точки)

Задача 4

Точка M движется относительно тела D . По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M . Схемы механизмов показаны на рисунках, а необходимые для расчета данные приведены в прил. 8.

Примеры решения задачи 4

Пример 1

Дано: схема механизма (рис. 19). Точка M движется относительно тела D , согласно уравнению

$$s_r = OM = 16 - 8 \cos 3\pi t.$$

Тело D вращается вокруг вертикальной оси по закону

$$\varphi_e = 0,9t^2 - 9t^3,$$

$$t_1 = \frac{2}{9}.$$

Определить: абсолютную скорость \vec{V} и абсолютное ускорение \vec{a} точки M в заданный момент времени t_1 .

Решение

1. Определение положения точки M в заданный момент времени t_1

Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа (рис. 19) совпадает с плоскостью треугольника D . Положение точки M на теле D определяется расстоянием $s_r = OM$ при $t = 2/9$ с

$$s_r = 16 - 8 \cos(3\pi \cdot 2/9) = 20,0 \text{ см.}$$

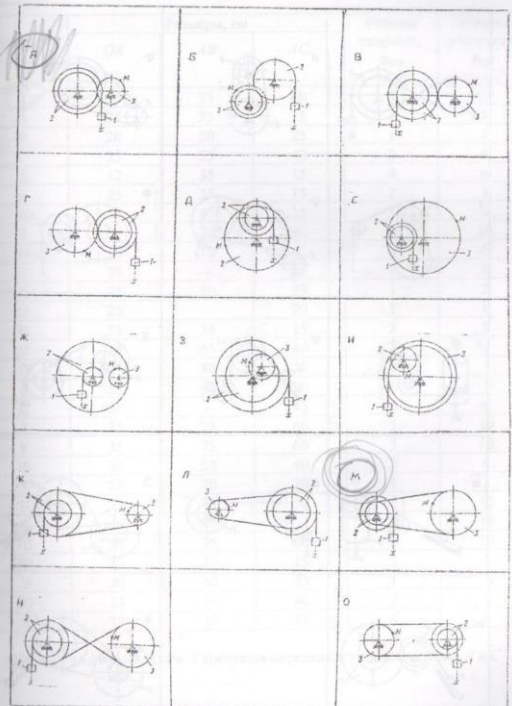
Приложения к контрольной работе № 2

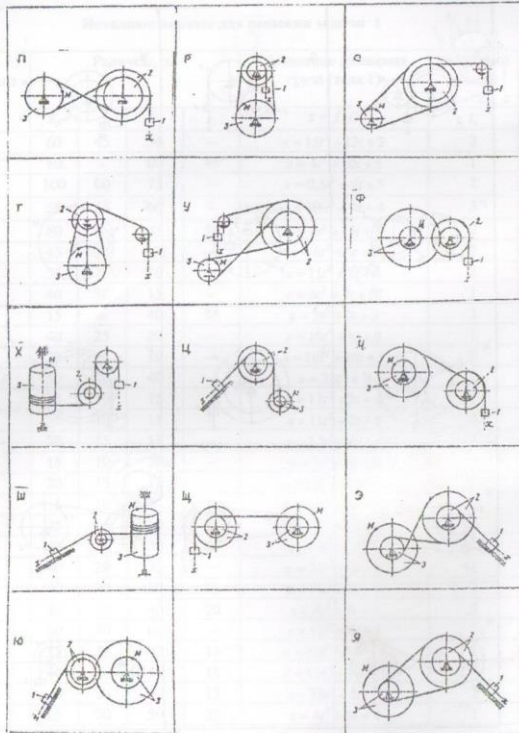
Приложение 5

Исходные данные для решения задачи 1

Вариант	Радиусы, см				Уравнение движения груза (тела 1) $x = f(t)$	Расчетный момент времени, с t_1
	R_2	r_2	R_3	r_3		
A	60	45	36	—	$x = 15t^2 + 12t + 2$	2
Б	80	—	60	45	$x = 4t^2 + 10t + 5$	1
В	100	60	75	—	$x = 0,5t^2 + 6t + 5$	2
Г	58	45	60	—	$x = 9,5t^2 + 4t + 4$	3
Д	80	—	45	30	$x = 6t^2 + 15t + 3$	2
Е	45	35	105	—	$x = 6t^2 + 5t + 8$	3
Ж	35	10	10	—	$x = 11t^2 + 2t + 6$	2
З	40	30	15	—	$x = 6t^2 + 7t + 10$	1
И	15	—	40	35	$x = 7t^2 + 3t + 5$	3
К	40	25	20	—	$x = 10t^2 + 8t + 9$	1
Л	20	15	10	—	$x = 16t^2 + 10t + 5$	2
М	30	20	40	—	$x = 22t^2 + 7$	2
Н	15	10	15	—	$x = 17t^2 + 3t + 6$	1
О	15	10	15	—	$x = 11t^2 + 2t + 5$	2
П	20	15	15	—	$x = 12t^2 + 6t + 4$	3
Р	15	10	20	—	$x = 7t^2 + 4t + 8$	1
С	20	15	10	—	$x = 10t^2 + 12t + 3$	1
Т	15	10	20	—	$x = 18t^2 + 10t + 5$	3
У	25	15	10	—	$x = 27t^2 + 8t + 10$	1
Ф	20	10	30	10	$x = 13t^2 + 5t + 6$	2
Х	40	20	35	—	$x = 21t^2 + 6t + 7$	1
Ц	40	30	30	15	$x = 18t^2 + 9t + 5$	2
Ч	30	15	40	20	$x = 4t^2 + 8t + 9$	2
Ш	50	20	60	—	$x = 11t^2 + 4t + 8$	2
Щ	32	16	32	16	$x = 50t^2 + 14t + 6$	2
Э	40	18	40	18	$x = 42t^2 + 10t + 5$	1
Ю	40	20	40	15	$x = 36t^2 + 5t + 8$	2
Я	25	20	50	25	$x = 4t^2 + 6t + 4$	1

Схемы к задаче 1



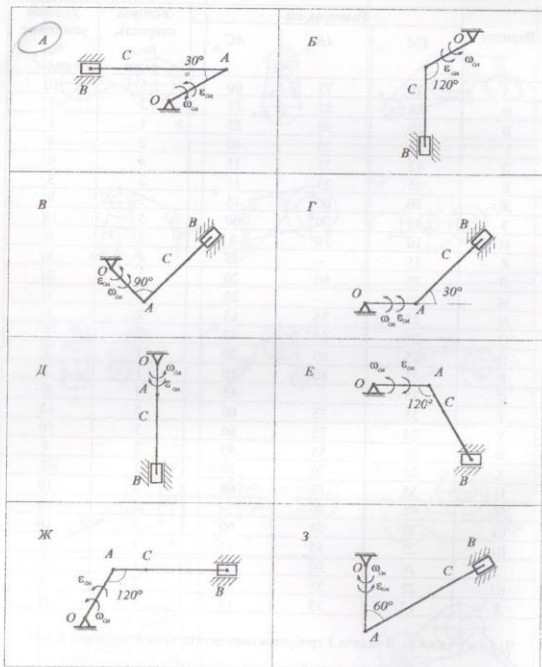


Исходные данные для решения задачи 2

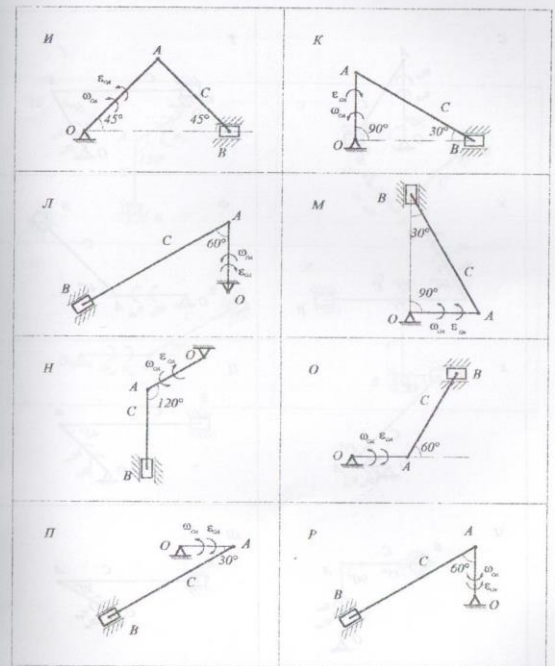
Вариант	Размеры, см			Угловая скорость, ω_{O1} рад/с	Угловое ускорение, ϵ_{O1} рад/с ²
	OA	AB	AC		
А	35	75	60	5	10
Б	25	35	15	2	3
В	20	50	25	1	1
Г	25	55	40	2	4
Д	12	35	15	4	6
Е	25	35	15	2	3
Ж	30	60	15	3	8
З	35	70	60	5	10
И	10	10	5	2	6
К	35	-	45	4	8
Л	25	80	20	1	2
М	25	-	20	1	1
Н	25	35	15	2	3
О	25	55	40	2	4
П	25	80	20	1	2
Р	25	80	20	1	2
С	35	-	45	4	8
Т	35	75	60	5	10
У	35	75	60	5	10
Ф	25	55	40	2	4
Х	20	70	20	1	2
Ц	35	75	60	5	10
Ч	40	20	-	5	10
Ш	35	75	60	5	10
Щ	25	35	15	2	3
Э	20	50	25	1	1
Ю	25	55	40	2	4
Я	12	35	15	4	6

Примечание. В задаче 2 требуется определить ускорения точек В и С

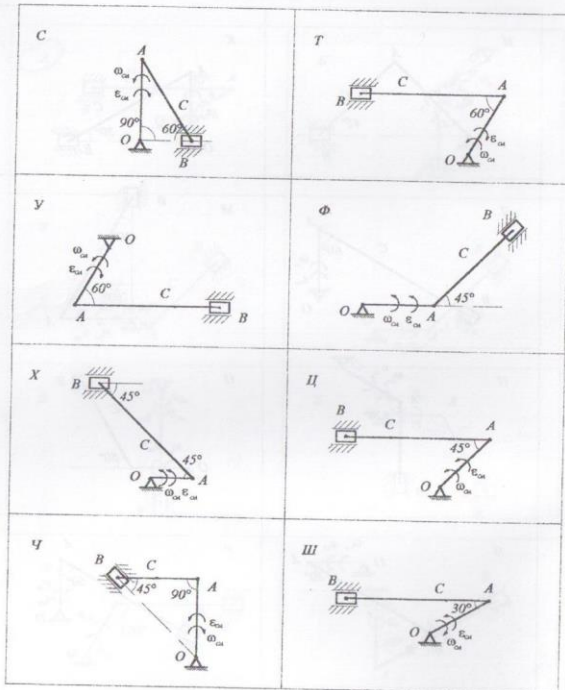
Схемы к задаче 2



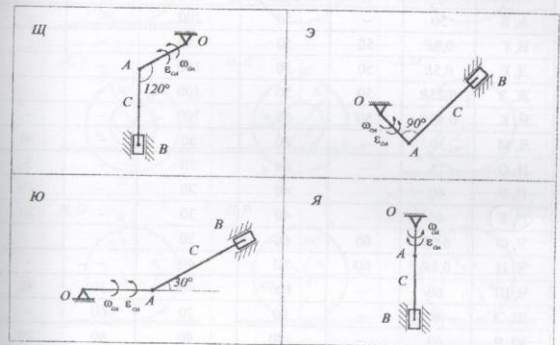
Схемы к задаче 2



Схемы к задаче 2



Схемы к задаче 2

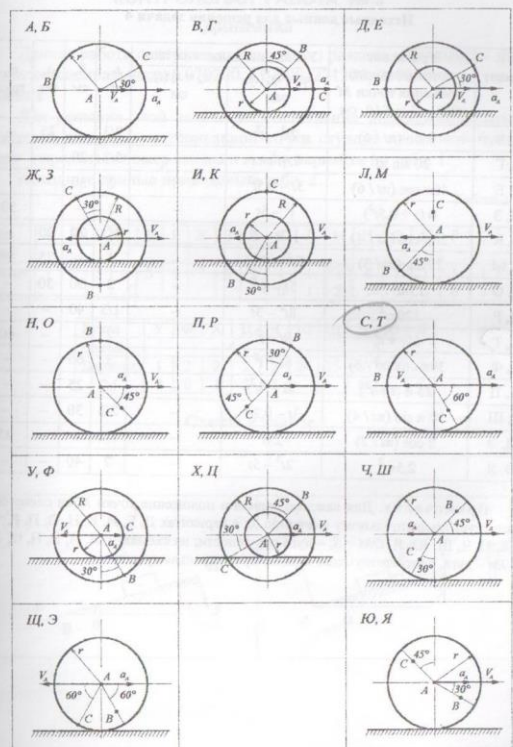


Приложение 7

Исходные данные для решения задачи 3

Вариант	Радиусы, см		Скорость, V_A , см/с	Ускорение a_A , см/с ²	Размеры, см	
	r	R			AB	AC
А, Б	50	—	50	100	—	—
В, Г	0,8R	50	50	100	—	—
Д, Е	0,5R	50	50	100	—	—
Ж, З	0,25R	50	50	100	—	—
И, К	0,45R	50	50	100	—	—
Л, М	30	—	80	50	—	10
Н, О	15	—	60	30	—	5
П, Р	40	—	40	20	—	20
С, Т	40	—	40	30	—	30
У, Ф	0,6R	60	60	20	—	—
Х, Ц	0,8R	60	80	40	—	—
Ч, Ш	60	—	100	40	30	40
Щ, Э	80	—	80	20	60	—
Ю, Я	60	—	100	40	40	20

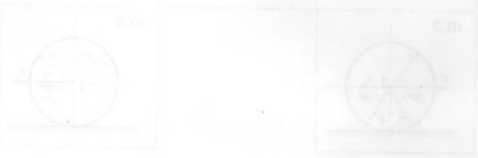
Схемы к задаче 3



Исходные данные для решения задачи 4

Вариант	Уравнение относительного движения точки M $OM = S_r = S_r(t)$, см	Уравнение движения тела		t_1 , с	R, см	a, см	α , град
		$\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	$x_e = x_e(t)$, см				
А, Б	$18 \sin(\pi t / 4)$	$2t^3 - t^2$	-	2/3	-	25	-
В, Г	$20 \sin \pi t$	$0,4t^2 + t$	-	5/3	20	-	-
Д, Е	$40\pi \cos(\pi t / 6)$	$3t - 0,5t^3$	-	2	30	-	-
Ж, З	$6(t + 0,5t^2)$	$t^3 - 5t$	-	2	-	-	30
И, К	$20\pi \cos(\pi t / 4)$	$1,2t - t^2$	-	4/3	20	20	-
Л, М	$25 \sin(\pi t / 3)$	$2t^2 - 0,5t$	-	4	-	25	-
Н, О	$15\pi^3 / 8$	$5t - 4t^2$	-	2	30	30	-
П, Р	$120\pi^2$	$8t^2 - 3t$	-	1/3	40	-	-
С, Т	$10t + t^3$	$8t - t^2$	-	2	-	-	60
У, Ф	$30\pi \cos(\pi t / 6)$	$6t + t^2$	-	3	60	-	-
Х, Ц	$25 \pi(t + t^2)$	$2t - 4t^2$	-	1/2	25	-	-
Ч, Ш	$10 \pi \sin(\pi t / 4)$	$3t - 0,2t^2$	-	2/3	30	-	-
Щ, Э	$8 \cos(\pi t / 2)$	$-2\pi^2$	-	3/2	-	-	45
Ю, Я	$2,5\pi^2$	$2t^2 - 5t$	-	2	40	-	-

Примечания. Для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению S; в вариантах Д, Е, И, К, Н, О, П, Р, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Ю, Я $OM = S_r$ - дуга окружности; на схемах Д, Е, И, К, Н, О, Х, Ц OM - дуга, соответствующая меньшему центральному углу.



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Динамика

Данная работа содержит две задачи из раздела «Динамика» для студентов специальностей 070200, 170600, 271300, 210200.

Задача 1

Для решения этой задачи на составление дифференциальных уравнений движения материальной точки студент по первой букве имени определяет номер схемы и номер варианта по табл. 1.

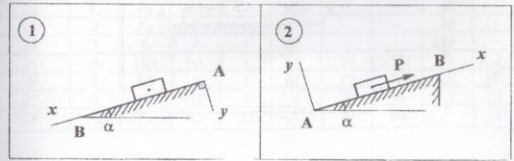
Исходные данные приведены в табл. 2.

Таблица 1

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т
Схема	1																	
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Буква	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Э	Ю	Я
Схема	4									
Вариант	1	2	2	2	2	24	25	2	27	2
	9	0	1	2	3		6		8	

Схемы к задаче 1



Примечание. В первой задаче требуется определить величины, обозначенные в таблице буквами.

Схемы к задаче 1

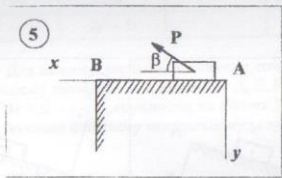
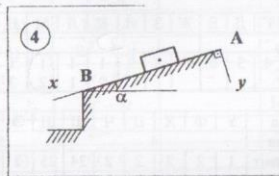
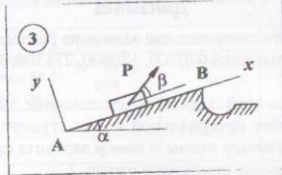


Таблица 2

Заданные и определяемые параметры

№ варианта	V_A , м/с	V_B , м/с	f, безр.	t, с	l, м	p, Н	β , град	α , град	m, кг
1	2	10	0,2	t	l	-	-	30	-
2	1	8	f	t	9	-	-	45	-
3	0	V_B	f	2	9,8	-	-	60	-
4	V_A	V_B	0,1	1	10	-	-	15	-
5	2	V_B	f	1	5,3	-	-	60	-
6	2	8	f	t	10	-	-	45	-
7	4	36,28	0,1	t	l	22	-	30	2
8	1	21	0	2	l	p	-	30	2
9	2	8	0,6	t	5	p	-	60	4
10	20	V_B	0,2	3	l	20	-	15	1
11	20	40	0,1	t	l	90	-	60	4
12	10	V_B	0,1	1	l	10	-	60	2
13	10	5,2	0,2	2	l	p	0	45	3
14	20	14,8	0,3	1	l	p	0	15	2
15	10	29	0,1	t	l	20	30	45	2
16	V_A	5	0,1	t	5	30	45	60	3
17	25	V_B	f	1	20	10	60	30	4
18	V_A	V_B	0,2	2	27,36	40	75	30	2
19	2	5,28	0,1	t	l	-	-	15	-
20	0	2	f	t	8	-	-	30	-
21	5	V_B	f	1	8	-	-	45	-
22	V_A	V_B	0,1	2	20,2	-	-	60	-
23	2	V_B	f	1	2,72	-	-	10	-
24	2	4	f	t	9	-	-	15	-
25	4	13,2	0,1	t	l	10	15	-	2
26	3	3,2	f	1	l	10	30	-	2
27	2	V_B	0,2	2	l	20	45	-	2
28	V_A	V_B	0,3	0,5	4,125	40	60	-	2

Примечание. В первой задаче требуется определить величины, обозначенные в таблице буквами.

$$\frac{dx}{dt} = 3,2t + C_1; \quad dx = 3,2tdt + C_1 dt;$$

$$\int dx = 3,2 \int t dt + C_1 \int dt;$$

$$x = 3,2 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (2)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из начальных условий:

$$t_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = V_A = 2 \text{ м/с}, \quad x_0 = 0 \text{ м}.$$

Подставим начальные условия в уравнения (1) и (2):

$$2 = 3,2 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 2,$$

$$0 = 3,2 \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Подставим найденные значения C_1 и C_2 в уравнения (1) и (2):

$$\begin{cases} \dot{x} = 3,2t, \\ x = 1,6t^2 + 2t. \end{cases}$$

Данные уравнения описывают движение тела на участке AB . Для момента времени t перепишем эти уравнения:

$$\begin{cases} V_B = 3,2t, \\ l = 1,6t^2 + 2t. \end{cases}$$

$$10 = 1,6t^2 + 2t,$$

$$1,6t^2 + 2t - 10 = 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1,6(-10)}}{3,2} = \frac{-2 \pm 8,2}{3,2};$$

$$t_1 = -3,2,$$

$$t_2 = 1,9.$$

Так как время – величина положительная, выбираем $t = 1,9$ с. Скорость тела в точке B : $V_B = 3,2t = 3,2 \cdot 1,9 = 6,08$ м/с.

Задача 2

Условия решения этой задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы определяются по первой букве фамилии по табл. 1. Схемы задач приведены ниже, варианты задач – в табл. 3. В этой задаче во всех вариантах определяется скорость и ускорение тела I : V_1 и a_1 .

Схемы к задаче 2

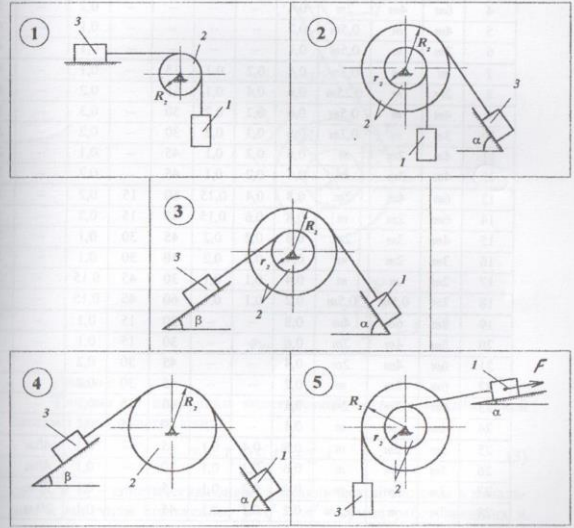


Таблица 3

Заданные и определяемые параметры

№ варианта	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	R_2 , м	r_2 , м	i_{2x} , м	α , град	β , град	f , безр	F , кН	S_1 , м
1	8m	2m	m	0,5	–	–	–	–	0,2	–	2
2	6m	2m	0,5m	0,4	–	–	–	–	0,1	–	2
3	8m	4m	2m	0,6	–	–	–	–	0,3	–	3
4	6m	4m	2m	0,4	–	–	–	–	0,2	–	3
5	4m	m	0,5m	0,2	–	–	–	–	0,1	–	4
6	2m	m	0,5m	0,1	–	–	–	–	0,1	–	4
7	m	m	0,5m	0,4	0,2	0,1	15	–	0,1	–	4
8	2m	m	0,25m	0,6	0,4	0,1	15	–	0,2	–	4
9	4m	m	0,5m	0,6	0,2	0,2	30	–	0,3	–	3
10	3m	m	0,2m	0,6	0,3	0,2	30	–	0,2	–	3
11	4m	2m	m	0,6	0,2	0,1	45	–	0,1	–	2
12	4m	3m	m	0,4	0,2	0,1	45	–	0,2	–	2
13	6m	4m	2m	0,8	0,4	0,15	60	15	0,2	–	1
14	6m	2m	m	0,8	0,6	0,15	45	15	0,2	–	1
15	4m	3m	2m	0,8	0,2	0,2	45	30	0,1	–	2
16	3m	2m	m	0,4	0,2	0,2	30	30	0,1	–	2
17	2m	m	m	0,4	0,1	0,1	30	45	0,15	–	3
18	2m	0,5m	0,5m	0,2	0,1	0,1	60	45	0,15	–	3
19	8m	6m	4m	0,8	–	–	30	15	0,1	–	2
20	8m	4m	2m	0,6	–	–	30	15	0,1	–	2
21	6m	4m	2m	0,4	–	–	45	30	0,2	–	4
22	6m	2m	m	0,2	–	–	45	30	0,2	–	4
23	4m	3m	2m	0,1	–	–	60	15	0,1	–	2
24	4m	2m	m	0,1	–	–	60	15	0,1	–	2
25	5m	2m	m	0,8	0,4	0,1	45	–	0,1	40m	4
26	5m	3m	m	0,6	0,3	0,1	30	–	0,1	40m	4
27	3m	2m	m	0,4	0,2	0,1	15	–	0,1	20m	2
28	3m	m	0,5m	0,2	0,1	0,1	45	–	0,1	20m	2

Пример решения задачи 2

Дано: $m_1 = 6m$; $m_2 = 4m$; $m_3 = 0,5m$; $f = 0,1$; $F = 40 \text{ м, Н}$; $R_2 = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}$; $r_2 = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $i_{2x} = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$; $S_1 = 2 \text{ м}$.
 Определить: V_1 ; a_1 .

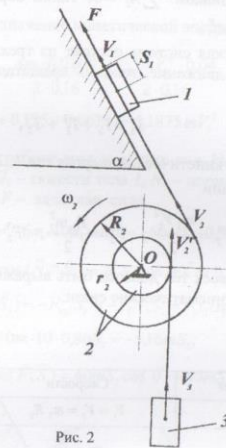


Рис. 2

Решение

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы записывается в виде:

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^E + \sum A_i^I, \quad (3)$$

где T_1 и T_2 – кинетическая энергия механической системы в начальном и конечном положении; $\sum A_i^E, \sum A_i^I$ – сумма работ внешних и внутренних сил системы при ее перемещении из начального положения в конечное.

На тело 2 действуют силы: G_2 – сила тяжести тела 2, R_y и R_z – реакции связей, $A_{G_2} = 0$; $A_{R_z} = A_{R_y} = 0$ (рис. 4).

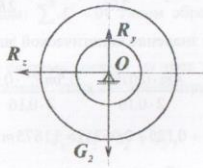


Рис. 4

На тело 3 действует сила G_3 – сила тяжести тела 3 (рис. 5).

$$A_{G_3} = -G_3 h_3 = -m_3 g h_3 = -m_3 g S_3 =$$

$$= -0,5 \cdot 10 \cdot \frac{S_1 r_2}{R_2} = -0,5 \cdot 10 \cdot \frac{S_1 \cdot 0,2}{0,4} = -2,5 m S_1.$$

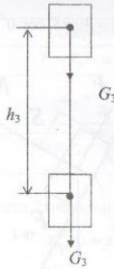


Рис. 5

86

Окончательно запишем теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$3,1875 m V_1^2 = -30 m S_1 - 5,16 m S_1 + 40 m S_1 - 2,5 m S_1,$$

$$3,1875 V_1^2 = 2,34 S_1,$$

$$V_1^2 = 0,73,$$

$$V_1 = 0,85 \text{ м/с.} \quad (4)$$

Определим ускорение a_1 , продифференцировав уравнение для скорости (4):

$$2 V_1 \frac{dV_1}{dt} = 0,73 \frac{dS_1}{dt},$$

$$2 a_1 = 0,73,$$

$$a_1 = 0,37 \text{ м/с}^2.$$

Задача 3

Эта задача на составление общего уравнения динамики решается для той же схемы и варианта, что и задача 2 (рис. 6).

Требуется определить ускорение тела 1: a_1 . Оно должно совпадать по величине с ускорением a_1 , найденным в задаче 2.

Общее уравнение динамики представляет собой уравнение рабoт всех внешних сил и сил инерции на возможном перемещении

$$\sum P_i^E \cdot \delta S_i \cdot \cos(\vec{P}_i^E; \delta \vec{S}_i) + \sum \Phi_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(\vec{\Phi}_i; \delta \vec{S}_i) = 0,$$

где P_i^E – внешние силы, Φ_i – силы инерции, δS_i – возможное перемещение, м

Предполагается, что все связи в рассматриваемой механической системе двусторонние и идеальные (силы трения, если они имеются, отнесены к числу задаваемых сил).

Если механическая система состоит из отдельных твердых тел, то силы инерции точек каждого тела можно привести к силе, приложенной в некоторой точке тела, и паре сил. Сила равна главному вектору сил инерции точек этого тела, а момент пары равен главному моменту этих сил относительно центра приведения.

87

$$\delta S_1 = \delta S_2, \quad \delta S_2 = \delta \varphi_2 R_2, \quad \delta \varphi_2 = \frac{\delta S_2}{R_2} = \frac{\delta S_1}{R_2},$$

$$\delta S_2' = \delta \varphi_2 r_2 = \frac{\delta S_1 r_2}{R_2} = \delta S_3.$$

Составляем общее уравнение динамики (уравнение всех внешних сил и сил инерции) и решаем его:

$$F \delta S_1 - G_1 \sin \alpha \delta S_1 - F_{\text{тр}} \delta S_1 - \Phi_1 \delta S_1 - M_2^e \delta \varphi_2 - G_3 \delta S_3 - \Phi_3 \delta S_3 = 0,$$

$$40 m \delta S_1 - 6 m g \cdot \frac{1}{2} \delta S_1 - 6 m g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,1 \delta S_1 - 6 m a_1 \delta S_1 - 4 m \cdot 0,1 \frac{a_1}{R_2} \delta S_1 -$$

$$- 0,5 m g \frac{\delta S_1 r_2}{R_2} - 0,5 m \frac{a_1 r_2}{R_2} \delta S_1 = 0,$$

$$40 m - 30 m - 5,16 m - 2,5 m = 6 m a_1 + 0,25 m a_1 + 0,125 m a_1,$$

$$2,34 m = 6,375 m a_1,$$

$$a_1 = 0,37 \text{ м/с}^2.$$

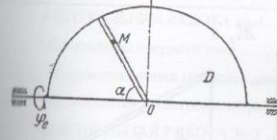
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 2000.
Яблонский А.А. Курс теоретической механики: в 2 т. – М.: Высш. шк., 2000.

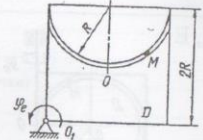
92

Приложение. Схемы к задаче 4

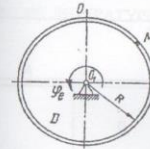
С, Т



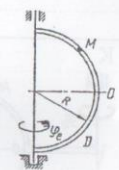
У, Ф



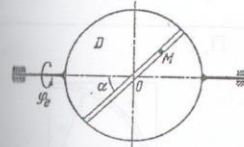
Х, Ц



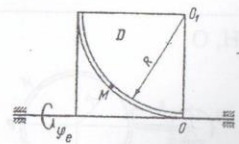
Ч, Ш



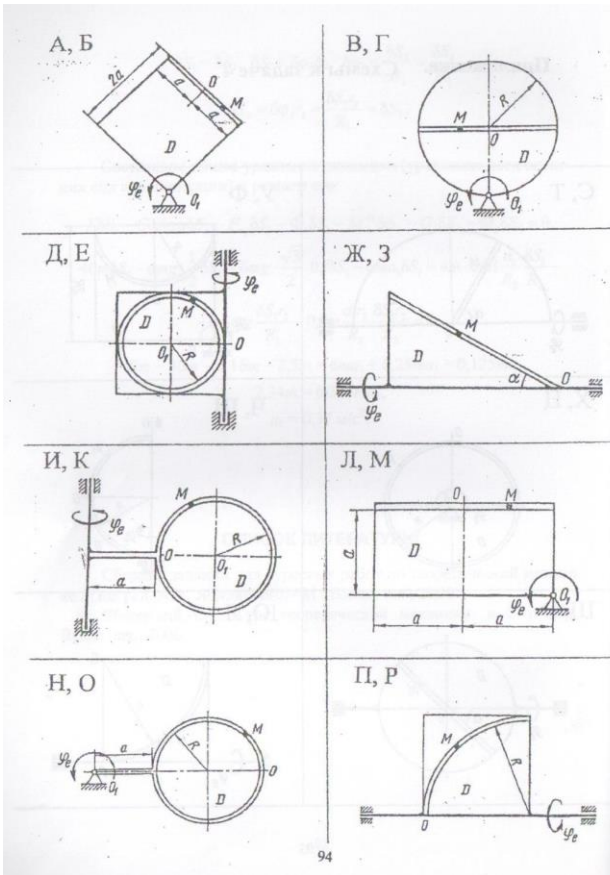
Щ, Э



Ю, Я



93



СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1	4
Статика твердого тела.....	4
Кинематика точки.....	14
Приложение к контрольной работе № 2	25
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2	33
Кинематика твердого тела	33
Кинематика точки (сложное движение точки)	51
Приложения к контрольной работе № 2	64
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3	75
Динамика.....	75
Приложение. Схемы к задаче 4	93
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	95