

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**П.А. Красножон, А.Г. Кривошеев,
В.Г. Мельников, Г.И. Мельников**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2014

УДК 531

П.А. Красножон, А.Г. Кривошеев, В.Г. Мельников, Г.И. Мельников
Теоретическая механика. Учебное пособие.- СПб: Университет ИТМО, 2014.
– 87 с.

В пособии излагаются методические рекомендации по выполнению расчетно-графических работ по теоретической механике, а также даются задания на эти работы.

Пособие предназначено для бакалавров, обучающихся по направлениям «Приборостроение», «ОпTOTехника», «Техническая физика», «Управление в технических системах», «Мехатроника и робототехника», «Электротехника».

Рекомендовано к печати Ученым советом Естественнонаучного факультета
16 декабря 2014 г., протокол №6.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2014

© П.А. Красножон, А.Г. Кривошеев, В.Г. Мельников, Г.И. Мельников, 2014.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Глава 1. Статика твердого тела.....	5
1.1. Основные понятия и определения.....	5
1.2. Связи и реакции связей.....	6
1.3. Момент силы относительно точки и оси.....	9
1.4. Пара сил. Момент пары.....	11
1.5. Основная теорема статики.....	13
1.6. Уравнения равновесия твердого тела.....	14
1.7. Задание 1. Определение реакций опор твердого тела.....	17
Глава 2. Кинематика точки.....	25
2.1. Векторный способ задания движения точки	25
2.2. Координатный способ задания движения точки	26
2.3. Естественный способ задания движения точки	27
2.4. Касательное и нормальное ускорения	28
2.5. Задание 2. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям движения	29
Глава 3. Кинематика твердого тела	32
3.1. Поступательное движение твердого тела	32
3.2. Вращательное движение твердого тела	33
3.3. Плоское движение твердого тела	37
3.3.1. Уравнения движения плоской фигуры в плоскости	37
3.3.2. Определение скоростей точек плоской фигуры с использованием полюса	38
3.3.3. Определение скоростей точек плоской фигуры с использованием мгновенного центра скоростей	39
3.3.4. Определение ускорений точек плоской фигуры	44
3.4. Задание 3. Определение скоростей и ускорений точек плоского механизма	45
Глава 4. Динамика механической системы	51
4.1. Введение в динамику механической системы	51
4.2. Момент инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.....	53
4.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы	55
4.3.1. Определение кинетической энергии	55
4.3.2. Кинетическая энергия твердого тела	55
4.3.3. Работа и мощность силы	56
4.3.4. Формулировка теоремы об изменении кинетической энергии	61
4.4. Задание 4. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы	61
Глава 5. Линейные колебания одностепенной механической системы	74
5.1. Основные понятия	74
5.1.1. Потенциальная энергия и обобщенная сила механизма.....	75
5.1.2. Математическая модель движения механизма.....	75
5.2. Задание 5. Линейные колебания одностепенной механической системы	76
ЛИТЕРАТУРА.....	84

Введение

В пособии приводятся краткие теоретические сведения об основных разделах «Теоретической механики»: статике твердого тела, кинематике материальной точки и твердого тела, динамике механической системы, колебаниях системы с одной степенью свободы необходимые для усвоения курса бакалаврами, по направлениям подготовки «Приборостроение», «Оптотехника», «Техническая физика», «Управление в технических системах», «Мехатроника и робототехника», «Электротехника». Приводятся примеры выполнения расчетно-графических работ по перечисленным разделам, а также даются задания на выполнение этих работ.

В соответствии с требованиями к результатам освоения основных образовательных программ бакалавриата, раздел 1 предназначен для формирования следующих общепрофессиональных компетенций выпускника: способность рассчитывать и проектировать элементы и устройства, основанные на различных физических принципах действия.

В соответствии с требованиями к результатам освоения основных образовательных программ бакалавриата, разделы 2-4 предназначены для формирования следующих общепрофессиональных компетенций выпускника: способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Содержание дисциплины «Теоретическая механика» охватывает круг вопросов, связанных с изучением кинематических, статических и динамических характеристик механических систем (приборов, механизмов, устройств), изучении законов и уравнений механики, применяемых при составлении математической модели движения и равновесия технических объектов.

ГЛАВА 1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1. Основные понятия и определения

Курс теоретической механики традиционно делится на три части: *статика* – рассматривает общее учение о силах, а также условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил; *кинематика* – рассматривает движение тел с геометрической точки зрения без учета их массы, а также действующих сил; *динамика* – изучает движение тел в связи с действующими на них силами.

В теоретической механике, как и в любой другой естественной науке, использующей математические методы, вводятся в рассмотрение некоторые идеальные модели реальных материальных тел. Такими моделями являются материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело.

Материальной точкой называется материальное тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Механической системой (системой материальных точек) называется мысленно выделенная совокупность точек, движущаяся взаимосвязанно и необходимая для решения данной задачи. Согласно этому определению, любое твердое тело можно рассматривать как систему точек.

Абсолютно твердым телом (или просто **твердым телом**) называется тело, расстояния между двумя любыми точками которого остаются неизменными, вне зависимости от действующих на тело сил.

Важнейшим понятием механики является понятие силы. **Силой** называется мера механического взаимодействия материальных тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия. Сила – векторная величина; она характеризуется модулем (численным значением), точкой приложения и направлением действия (рис. 1.1).

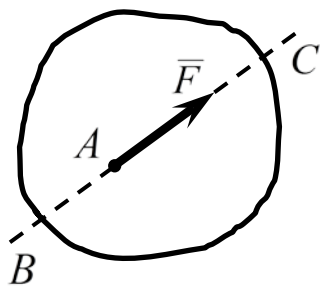


Рис. 1.1

Прямая BC , вдоль которой направлен вектор силы \vec{F} , называется **линией действия силы** (обозначена пунктиром).

Силу, приложенную к твердому телу, можно рассматривать как **скользящий вектор**, определяемый модулем, направлением и линией действия. **Точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия в пределах данного твердого тела.**

Совокупность (множество) сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, действующих на тело одновременно, называется **системой сил**.

В системе СИ сила измеряется в *Ньютонах* (H); в технической системе единиц ($MKГСС$) – в килограммах силы ($кгс$), причем:

$$1 \text{ кгс} = 9,81 \text{ Н} .$$

1.2. Связи и реакции связей

В механике различают свободные и несвободные тела. Материальное тело называется *свободным*, если ничто не препятствует его перемещениям в любом направлении. Если же какие-либо другие тела ограничивают свободу перемещений данного тела, то оно называется *несвободным*. Тела, ограничивающие свободу перемещений данного тела, называются *связями*. Сила, с которой связь действует на данное несвободное тело, называется *реакцией связи*. Реакции всегда направлены *противоположно тем перемещениям*, которым данная связь не позволяет осуществиться.

Все силы, действующие на несвободное тело, можно разделить на *активные силы* и *реакции связей*. *Активными* будем называть те силы, которые продолжают действовать на тело и после освобождения его от связей.

Рассмотрим основные типы идеальных связей (то есть недеформируемых связей без трения), а также их реакции.

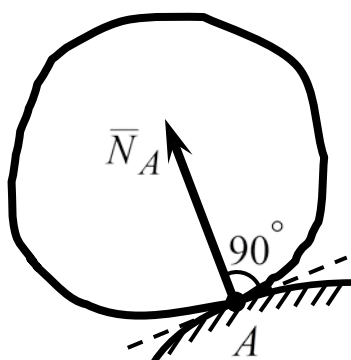


Рис. 1.2

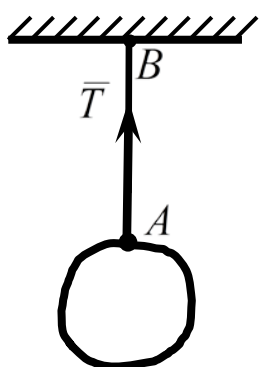


Рис. 1.4

1. **Гладкая поверхность.** Поверхность называется гладкой, если при решении данной задачи можно пренебречь силами трения, возникающими в точках контакта тела с поверхностью. Реакция \bar{N}_A гладкой поверхности всегда направлена вдоль нормали к ней (рис. 1.2)

2. **Ребро или острие.** При пренебрежении трением реакция ребра или острия \bar{N}_A (рис. 1.3) направлена по нормали к поверхности несвободного тела.

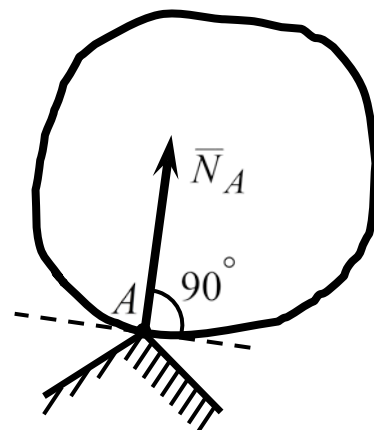


Рис. 1.3

3. **Гибкая связь (нить, трос).** Тело подвешено к точке B на гибкой нерастяжимой нити (рис. 1.4). Такая связь не позволяет телу удаляться от точки подвеса в направлении от B к A . Поэтому реакция \bar{T} гибкой связи всегда направлена вдоль этой связи к точке подвеса B .

4. **Неподвижный шарнир (подшипник).** Шарнирная связь между двумя телами осуществляется с помощью стержня, проходящего через отверстия в этих телах (рис. 1.5, а). Реакция \bar{N}_A неподвижного цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира А.

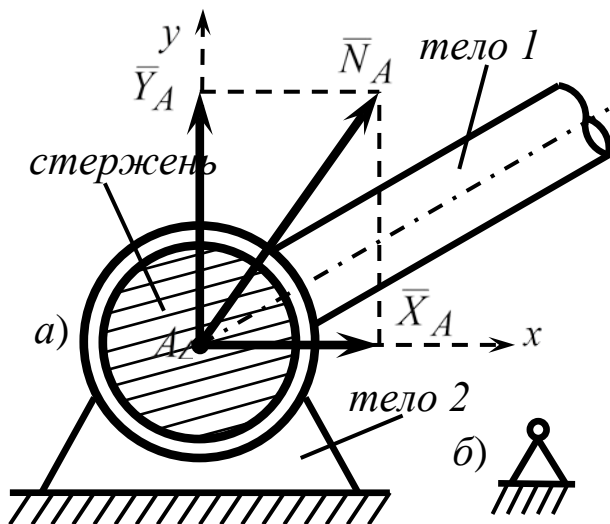


Рис. 1.5

Поскольку направление этой реакции \bar{N}_A заранее неизвестно (рис. 1.5, а), то при решении задач ее раскладывают на две составляющие вдоль осей координат (\bar{X}_A, \bar{Y}_A) . Модуль реакции определяется по формуле:

$$N_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$$

Условное обозначение данного шарнирного соединения представлено на рис. 1.5, б.

5. **Подвижная шарнирная опора.** Данная шарнирная опора может перемещаться на катках вдоль плоскости, на которую опираются катки (рис. 1.6, а). Подвижная опора в различных конструкциях предназначена для снятия температурных напряжений. Условное обозначение такой опоры дано на рис. 1.6, б. Реакция подвижной шарнирной опоры \bar{N}_A всегда направлена перпендикулярно плоскости, на которую опираются катки.

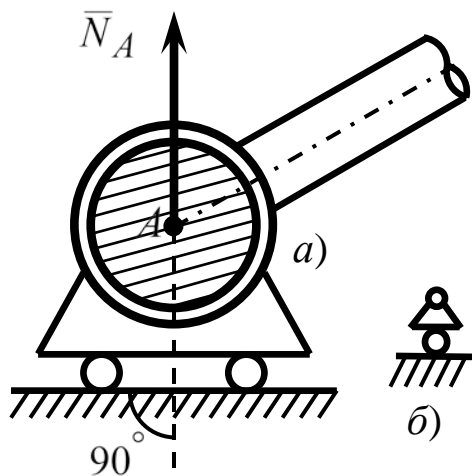


Рис. 1.6

6. **Сферический шарнир**
Реакция \bar{N}_A сферического шарнира может иметь любое, заранее неизвестное, направление в пространстве и раскладывается на три

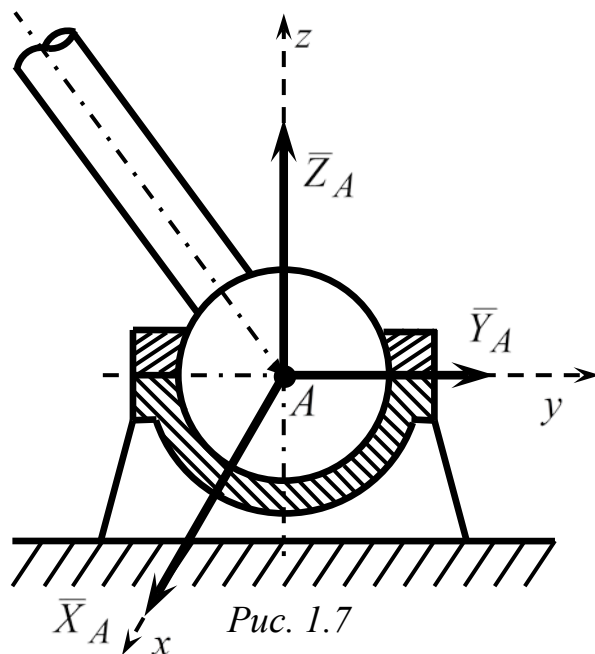


Рис. 1.7

составляющие (рис. 1.7), направленные вдоль осей координат.

Модуль этой реакции определяется формулой:

$$N_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}.$$

7. Подпятник (упорный подшипник)

Как и в предыдущем случае, реакция \bar{N}_A подпятника может иметь любое, заранее неизвестное, направление в пространстве и раскладывается на три составляющие, направленные вдоль осей координат (рис. 1.8). Модуль этой реакции определяется формулой, аналогичной предыдущей.

8. Стержень

Пусть тело опирается на жесткий невесомый стержень, прикрепленный с помощью шарниров в точке A тела и к какой неподвижной опоре в точке B (рис. 1.9).

Реакция \bar{N}_A направлена вдоль прямой, проходящей через центры шарниров A и B , причем от стержня к телу, если стержень сжимается, и от тела к стержню, если он растягивается.

На рис. 1.9 изображен случай сжатия стержня.

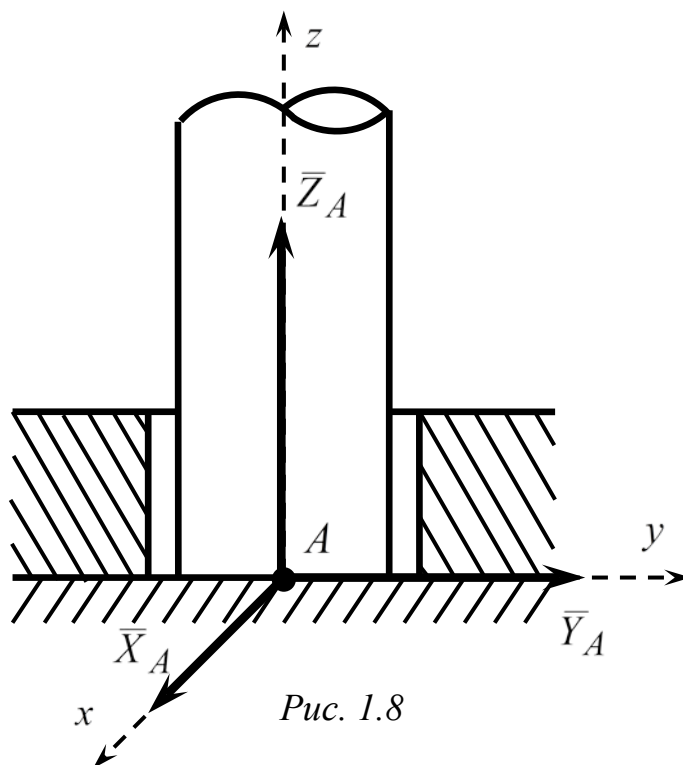


Рис. 1.8

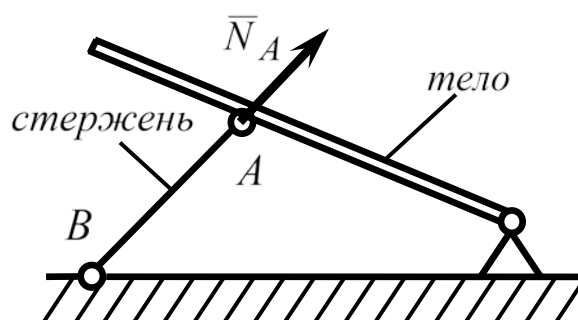


Рис. 1.9

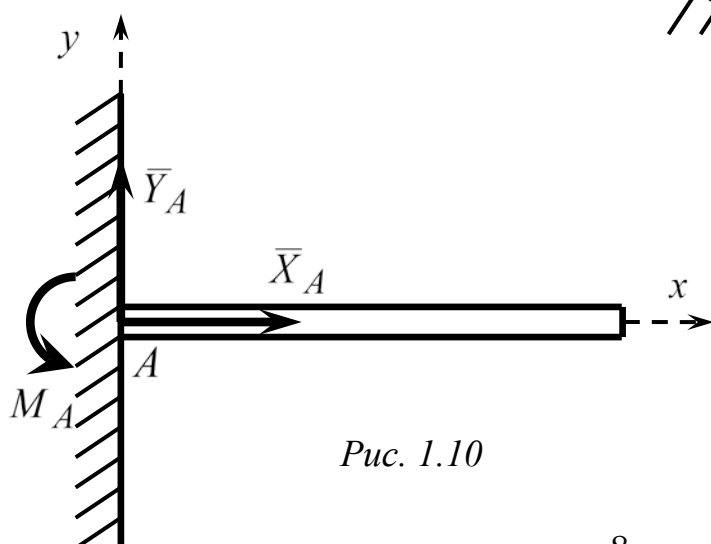


Рис. 1.10

9. Жесткая заделка (зашемление)

Рассмотрим тело, которое жестко заделано в точке

А в другое тело так, что их взаимные перемещения невозможны (рис.1.10). Реакция \bar{N}_A в этой точке раскладывается на три составляющие: это составляющие \bar{X}_A , \bar{Y}_A , направленные вдоль осей координат, а также реактивный момент в заделке M_A .

10. Скользящая заделка

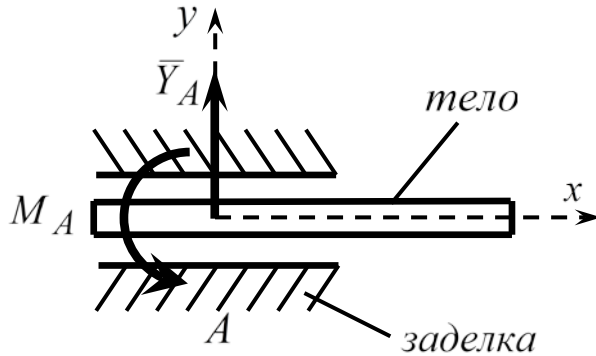


Рис. 1.11

Тело может перемещаться лишь вдоль оси x . Реакция в точке A раскладывается на вертикальную составляющую \bar{Y}_A и момент в заделке M_A .

11. Бискользящая заделка

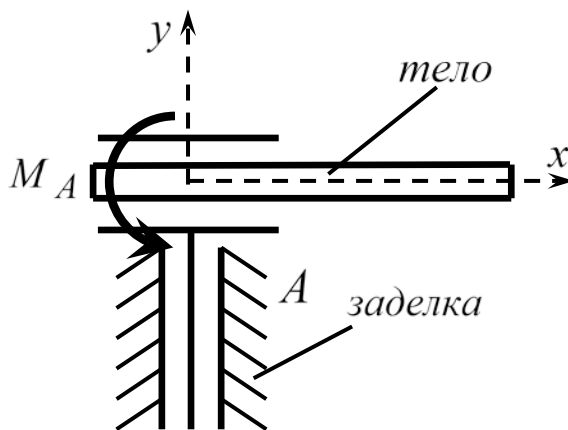


Рис. 1.12

Тело может перемещаться вдоль осей x и y . Реакция в точке A сводится к моменту в заделке M_A .

1.3. Момент силы относительно точки и оси

Рассмотрим твердое тело, к точке A которого приложена сила \bar{F} (рис.1.13). Выберем в теле произвольную точку O и свяжем с ней систему отсчета $Oxuz$. Длина перпендикуляра h , опущенного из точки O на линию действия силы, называется **плечом силы** \bar{F} относительно точки O .

Если закрепить тело в точке O , то сила \bar{F} будет стремиться повернуть его вокруг этой точки. Вращающее действие силы на тело зависит от ее модуля, плеча, направления вращения и от положения плоскости треугольника OAB , проходящей через силу и точку. Влияние всех этих факторов и отражается в понятии о моменте силы относительно точки как о векторе.

Моментом силы \vec{F} относительно точки O называется вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$, приложенный в этой точке, равный по модулю произведению модуля силы на ее плечо и направленный перпендикулярно плоскости треугольника OAB в ту сторону, откуда поворот, который сила стремится сообщить телу вокруг этой точки, виден с конца вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ происходящим против хода часовой стрелки.

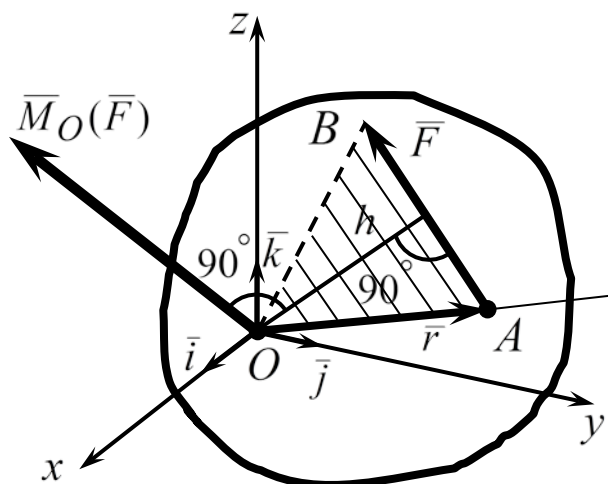


Рис. 1.13

Согласно этому определению модуль вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ равен

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = F \cdot h = 2S_{\Delta OAB}. \quad (1.1)$$

В частном случае, когда все силы, действующие на тело, и точка O расположены в одной плоскости (например, в плоскости чертежа), то момент силы относительно точки можно рассматривать как алгебраическую величину, равную взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на ее плечо. В этом случае момент обозначим

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (1.2)$$

Момент силы относительно точки считается **положительным**, если сила стремится повернуть тело вокруг этой точки против хода часовой стрелки, и **отрицательным**, если – по ходу часовой стрелки.

Вектор момента силы относительно точки может быть определен как:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (1.3)$$

где \vec{r} - радиус-вектор точки A приложения силы относительно точки O (рис.1.13).

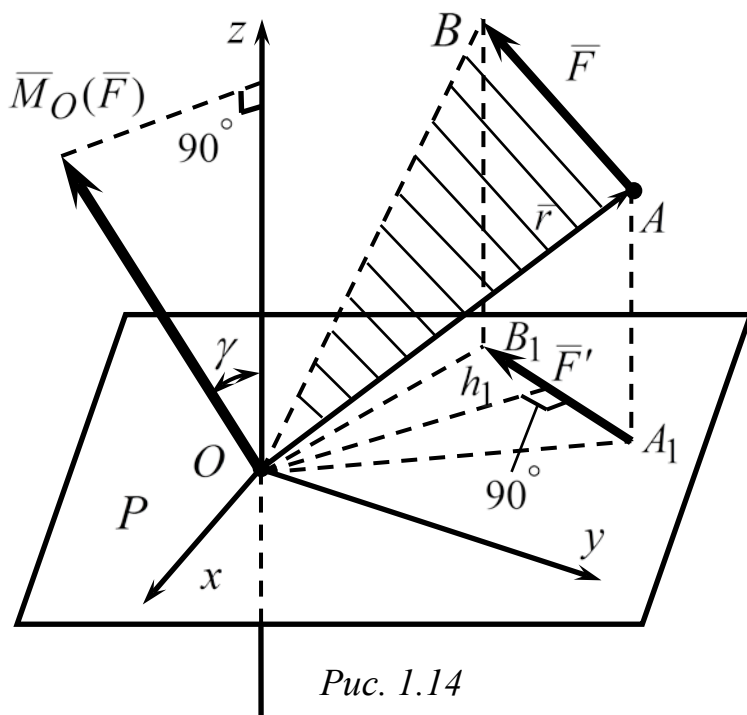


Рис. 1.14

Рассмотрим теперь понятие момента силы относительно оси, причем введем сначала понятие проекции силы на плоскость. Пусть даны сила \vec{F} и некоторая плоскость P . Опустим из начала и конца вектора силы перпендикуляры на эту плоскость (рис.1.14).

Проекцией силы на плоскость называется вектор \bar{F}' , начало и конец которого (точки A_1, B_1) совпадают с проекциями начала и конца силы \bar{F} (точки A, B).

Моментом силы \bar{F} относительно оси Oz называется алгебраическая величина $M_z(\bar{F})$, равная произведению модуля проекции \bar{F}' силы \bar{F} на плоскость P , перпендикулярную к оси Oz (т.е. совпадающую с плоскостью Oxy), на кратчайшее расстояние h_1 от точки O пересечения оси с плоскостью P до линии действия проекции силы \bar{F}' (рис. 1.14).

Этому определению соответствует следующая зависимость.

$$M_z(\bar{F}) = \pm F' \cdot h_1 = \pm 2S_{\Delta OA_1 B_1}. \quad (1.4)$$

Момент силы \bar{F} относительно оси Oz считается **положительным**, если смотря с положительного конца этой оси, видим, что сила \bar{F} стремится повернуть тело вокруг нее в направлении против хода часовой стрелки, и **отрицательным**, если - по ходу часовой стрелки.

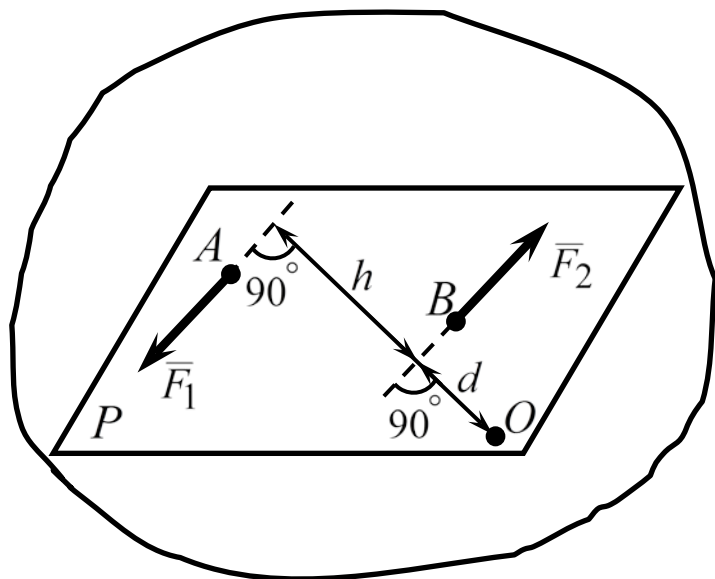
Из определения $M_z(\bar{F})$ следует, что момент силы относительно оси **равен нулю** в двух случаях:

- 1) Когда $F' = 0$, т.е. сила \bar{F} параллельна оси Oz ;
- 2) когда $h_1 = 0$, т.е. линия действия силы пересекает ось Oz .

Объединяя эти два случая, можно сказать, что **момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось располагаются в одной плоскости.**

1.4. Пара сил. Момент пары

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на твердое тело.



Плоскость P , содержащая линии действия сил пары \bar{F}_1 и \bar{F}_2 (рис.1.15), называется **плоскостью действия сил пары**. Кратчайшее расстояние h между линиями действия сил пары называется **плечом пары**.

Вращающее действие пары на твердое тело зависит от модуля сил пары ($F_1 = F_2 = F$), плеча h , положения плоскости P дей-

Рис. 1.15

ствия пары и направления вращения.

Мерой этого действия пары является ее вектор-момент \vec{M} . Если все силы и пары, приложенные к телу, лежат в одной плоскости, то момент пары можно рассматривать как алгебраическую величину, равную

$$M = \pm F \cdot h. \quad (1.5)$$

Момент пары считается *положительным*, если он стремится вращать тело против хода часовой стрелки и *отрицательным*, если - по ходу часовой стрелки.

Момент пары, как и момент силы, измеряется в $H \cdot m$ (система СИ) и в $кгс \cdot м$ (система МКГСС).

Если силы и пары, приложенные к телу, лежат в разных плоскостях, то момент пары, как и момент силы, необходимо рассматривать как вектор. Введем в связи с этим общее определение момента пары.

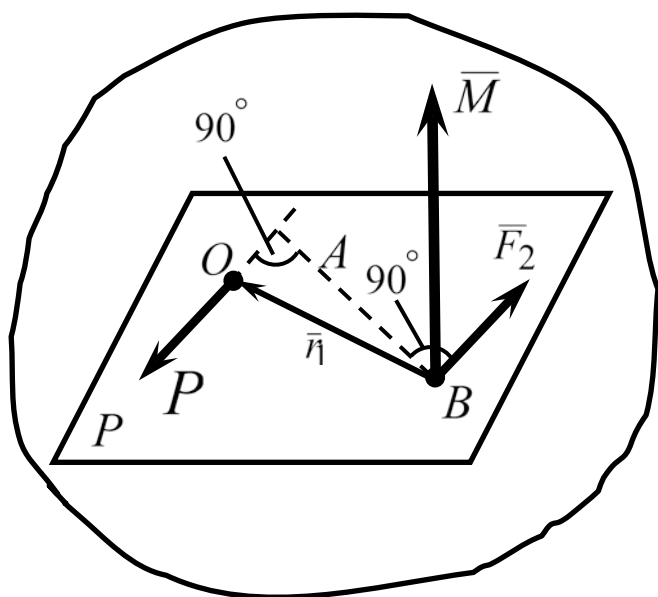


Рис. 1.16

Моментом пары является вектор \vec{M} , равный по модулю произведению модуля сил пары на ее плечо и направленный перпендикулярно плоскости ее действия P в ту сторону, откуда поворот, который пара стремится сообщить телу, виден происходящим в направлении против хода часовой стрелки (рис. 1.16).

Модуль вектора \vec{M} равен

$$|\vec{M}| = F \cdot h. \quad (1.6)$$

Из определения векторов \vec{M} и $\vec{M}_O(\vec{F})$ следует, что момент пары \vec{M} (рис. 1.16) равен по модулю и направлению моменту любой из сил пары (например, \vec{F}_1) относительно точки приложения другой, то есть

$$\vec{M} = \vec{M}_B(\vec{F}_1).$$

Используя формулу (16), имеем:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1. \quad (1.7)$$

Таким образом, момент пары можно представить в виде векторного произведения (1.7), в котором \vec{r}_1 – радиус-вектор точки приложения силы \vec{F}_1 относительно точки приложения силы \vec{F}_2 (рис. 1.16).

Свойства пар выражаются следующими теоремами:

1) Действие пары на твердое тело не изменится, если перенести пару в плоскости ее действия в любое другое положение.

2) Действие пары на твердое тело не изменится, если модуль сил пары и ее плечо изменить так, чтобы модуль момента пары сохранился неизменным.

3) Действие пары на твердое тело не изменится, если перенести пару в любую другую плоскость, параллельную плоскости ее действия.

4) Система пар, приложенных к твердому телу, может быть заменена одной результирующей парой с моментом \bar{M} , равным геометрической сумме моментов слагаемых пар:

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k . \quad (1.8)$$

Из теорем следует, что пару, выраженную вектором \bar{M} , в твердом теле можно как угодно перенести в плоскости действия пары, а также перенести в любую параллельную плоскость; поэтому момент пары \bar{M} является свободным вектором, т.е. его можно изобразить приложенным в любой точке твердого тела.

1.5. Основная теорема статики

Пусть на твердое тело действует произвольная система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, то есть сил, расположенных как угодно в пространстве (рис.1.17). В соответствии с методом приведения Пуансо эту систему сил можно привести к *одной силе \bar{R}'* , приложенной в произвольно выбранном центре O (*центре приведения*) и к *одной паре сил* с моментом \bar{M}_O относительно этого центра.

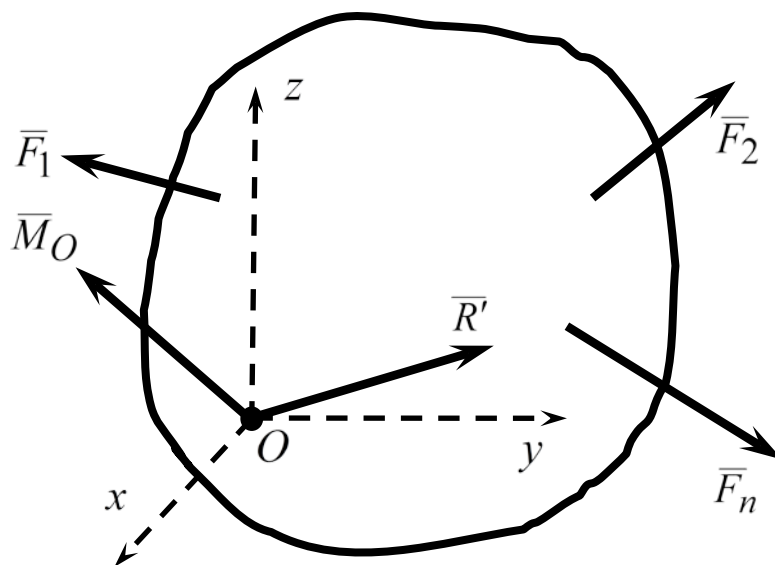


Рис. 1.17

Вектор \bar{R}' , равный геометрической сумме всех сил системы, называется *главным вектором* системы сил:

$$\bar{R}' = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.10)$$

Вектор \bar{M}_O , равный геометрической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения O , называется *главным моментом* системы сил относительно этого центра.

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k). \quad (1.11)$$

Основная теорема статики формулируется следующим образом: *произвольную систему сил, приложенную к твердому телу, можно заменить одной силой, равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения, и к одной паре с моментом, равным главному моменту этой системы относительно центра приведения.*

Выбор центра приведения произволен, при его изменении главный вектор системы сил не изменяется, а главный момент в общем случае изменяется.

1.6. Уравнения равновесия твердого тела

Из основной теоремы статики вытекает *условие равновесия* приложенной к телу произвольной (пространственной) системы сил: *для равновесия произвольной системы сил, приложенной к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы сил относительно произвольного центра были равны нулю:*

$$\bar{R}' = 0, \bar{M}_O = 0. \quad (1.12)$$

Проектируя эти векторные равенства на оси координат Ox, Oy, Oz , получим:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; & \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; & \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; & \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Уравнения 1.13 называются *уравнениями равновесия* произвольной системы сил.

Рассмотрим частный случай, когда все силы, приложенные к твердому телу, лежат в *одной плоскости*. Этот случай имеет важное практическое значение, так как к нему приводится большое количество технических задач. Возьмем систему координат с началом в произвольной точке O плоскости действия сил, с осями Ox и Oy , расположенными в этой плоскости, и осью Oz , перпендикулярной ей (рис. 1.18).

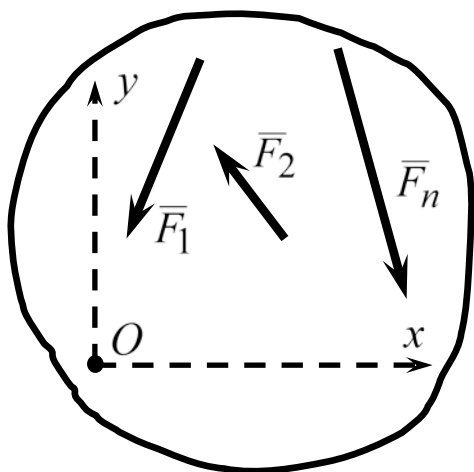


Рис. 1.18

Тогда проекции всех сил на ось Oz будут равны нулю; равны нулю и их моменты относительно осей Ox и Oy , так как все силы, будучи расположенными в плоскости Oxy , или пересекают эти оси, или параллельны одной из них. В результате, учитывая, что моменты сил относительно оси Oz равны их алгебраическим моментам относительно точки O (поскольку линии действия этих сил лежат в плоскости Oxy , перпендикулярной к оси Oz), получим следующие три уравнения равновесия приложенной к телу плоской системы сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.14)$$

Систему уравнений (1.14) принято называть *первой или основной формой уравнений равновесия тела под действием плоской системы сил*. Эта форма используется при решении задач наиболее часто.

При решении задач статики целесообразно следовать (независимо от вида действующей системы сил) следующим методическим указаниям.

Решение начинается с выбора объекта равновесия, т.е. тела, равновесие которого должно быть исследовано. На чертеже изображаются активные силы, приложенные к телу по условию задачи.

Затем тело мысленно освобождается от наложенных связей, а их действие заменяется соответствующими реакциями, которые также изображаются на чертеже. Если линия действия реакции заранее неизвестна, то она раскладывается на составляющие, параллельные осям координат.

Изобразив на чертеже все активные силы и реакции связей, устанавливается вид системы сил, действующей на тело (плоская, пространственная). Далее составляются соответствующие уравнения равновесия.

Оси координат целесообразно выбирать направленными перпендикулярно какой либо неизвестной силе, а центр моментов сил - располагать в точке пересечения линий действия неизвестных сил.

Затем решается система алгебраических уравнений равновесия относительно неизвестных величин (чаще всего реакций связей).

Следует отметить, что в результате решения уравнений равновесия определяются алгебраические значения неизвестных сил. Если же значения каких-нибудь из этих сил получатся отрицательными, то это означает, что их истинные направления противоположны выбранным на расчетной схеме.

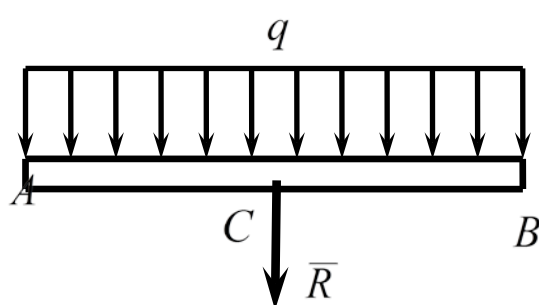


Рис. 1.19

Необходимо помнить, что активные силы, приложенные к телу, могут быть как *сосредоточенными* (приложенными в какой-то одной точке тел), так и *распределенными* (действующими по всей длине какого-то участка тела).

На рисунке 1.19 изображены распределенные силы (распределенная нагрузка), *равномерно* действующие по всей длине участка AB тела.

Здесь величина q - это *интенсивность* такой нагрузки, которая характеризует величину силы, действующей на единицу длины нагруженного участка тела.

Перед тем, как приступить к составлению уравнений равновесия, необходимо распределенную нагрузку заменить ее *равнодействующей* \bar{R} , которая в рассматриваемом на рисунке 1.19 случае приложена в середине нагруженного участка AB в точке C. Модуль этой равнодействующей определится следующей формулой:

$$R = q \cdot l,$$

где l - длина участка AB.

Далее приводятся пример выполнения *задания 1* по данной теме и исходные данные для самостоятельной работы.

1.7. Задание 1. Определение реакций опор твердого тела

Пример выполнения задания

Криволинейный стержень ACB с размерами $AD = DC = CB = 1\text{ м}$ находится в состоянии равновесия под действием сосредоточенной силы $P = 10\text{ кН}$, пары сил с моментом $M = 4\text{ кН} \cdot \text{м}$ и распределенной нагрузки интенсивностью $q = 2\text{ кН/м}$, угол $\alpha = 60^\circ$. Заданы две схемы закрепления стержня (рис. 1.20, а, б). Найти реакции опор для каждой из схем.

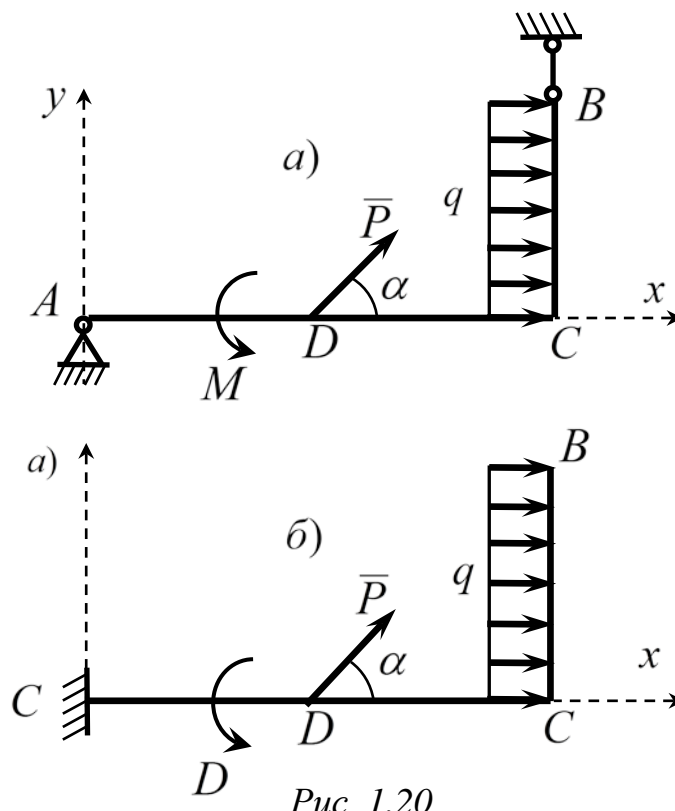


Рис. 1.20

Решение. Рассмотрим сначала схему а. На стержень наложены следующие связи: неподвижный шарнир в точке А и стержень в точке В.

Мысленно отбросим эти связи, заменив их действие соответствующими реакциями (рис. 1.21): в точке А реакция раскладывается на две составляющие: \bar{X}_A и \bar{Y}_A , в точке В действует реакция \bar{Y}_B , направленная вдоль стержня. Все неизвестные составляющие реакций направляем в положительные стороны осей координат.

Кроме того, заменим распределенную нагрузку ее равнодействующей \bar{Q} , приложенной в точке Е (середина участка CB). Модуль равнодействующей равен:

$$Q = 2 \cdot 1 = 2\text{ кН}$$

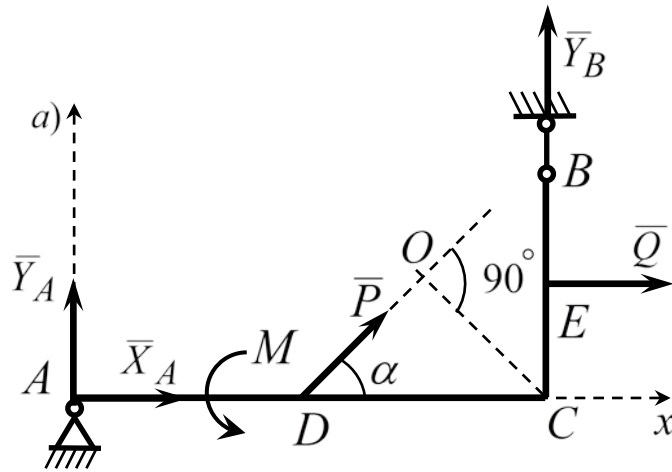


Рис. 1.21

Рассмотрим теперь схему б. На стержень в точке A наложена жесткая связь, отбрасывая мысленно эту связь, заменим ее тремя составляющими реакции: составляющими \bar{X}_A , \bar{Y}_A , а также реактивным моментом M_A (см. рис. 1.22).

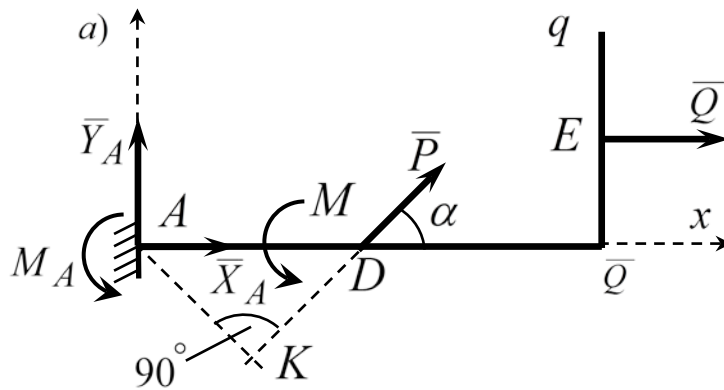


Рис. 1.22

В обеих схемах все действующие на стержень силы, как активные – P , Q , M ; так и реакции связей, лежат в одной плоскости Axy , следовательно, образуют *плоскую систему сил*. Поэтому системы уравнений равновесия для этих схем будут состоять из следующих трех уравнений (формулы 1.14):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0 \quad (1.15)$$

Здесь точка O - некоторый центр, относительно которого определяются моменты всех сил. Будем в дальнейшем составлять уравнения равновесия в *табличной* (табл. 1.1) и *алгебраической* формах.

Рассмотрим **схему а** (рис. 1.21). Составим в табличной форме (табл.1.1) два уравнения проекций сил на оси координат и уравнение моментов этих сил, выбрав в качестве центра моментов точку C . При этом плечом силы \bar{P} является длина отрезка $OC = DC \cdot \sin \alpha$, плечом силы \bar{Q} - длина отрезка EC , плечом силы \bar{Y}_A - длина отрезка AC , плечо силы \bar{X}_A равно нулю.

Таблица 1.1

Схема	Уравнение	\bar{X}_A	\bar{Y}_A	\bar{Y}_B	\bar{P}	\bar{Q}	M	
Схема a	$\sum_{k=1}^n F_{kx}$	X_A	0	0	$P \cdot \cos \alpha$	Q	0	= 0
Схема a	$\sum_{k=1}^n F_{ky}$	0	Y_A	Y_B	$P \cdot \sin \alpha$	0	0	= 0
Схема a	$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k)$	0	$-Y_A \cdot AC$	0	$-P \cdot OC$	$-Q \cdot EC$	M	= 0

Составим теперь уравнения равновесия в алгебраической форме.

$$1) \quad \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + P \cos \alpha + Q = 0. \text{ Вычисления дают:}$$

$$X_A = -P \cos 60^\circ - Q = -10 \cdot 0,5 - 2 = -7 \text{ кН}$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B + P \sin \alpha = 0 \text{ Отсюда можем выразить:}$$

$$Y_B = -Y_A - P \sin 60^\circ = -Y_A - 10 \cdot 0,87 = -Y_A - 8,7 \text{ кН}$$

$$3) \quad \sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad -Y_A \cdot AC - P \cdot OC - Q \cdot EC + M = 0 \text{ Отсюда:}$$

$$Y_A = \frac{M - P \cdot DC \sin 60^\circ - Q \cdot EC}{AC} = \frac{4 - 10 \cdot 1 \cdot 0,87 - 2 \cdot 0,5}{2} = -2,85 \text{ кН}$$

Подставляя это значение в уравнение 2), получим:

$$Y_B = -Y_A - 8,7 = 2,85 - 8,7 = -5,85 \text{ кН}$$

Рассмотрим теперь **схему б** (рис. 1.22). Составим в табличной форме (табл.1.2) два уравнения проекций сил на оси координат и уравнение моментов этих сил, выбрав в качестве центра моментов точку A . При этом плечом силы \bar{P} является длина отрезка $AK = AD \cdot \sin \alpha$, плечом силы \bar{Q} - длина отрезка EC , плечи сил \bar{X}_A и \bar{Y}_A равны нулю.

Таблица 1.2

Схема	Уравнение	\bar{X}_A	\bar{Y}_A	\bar{P}	\bar{Q}	M	M_A	
Схема б	$\sum_{k=1}^n F_{kx}$	X_A	0	$P \cdot \cos \alpha$	Q	0		= 0
Схема б	$\sum_{k=1}^n F_{ky}$	0	Y_A	$P \cdot \sin \alpha$	0	0		= 0
Схема б	$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k)$	0	0	$P \cdot AK$	$-Q \cdot EC$	M	M_A	= 0

Составим теперь уравнения равновесия в алгебраической форме.

$$4) \quad \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + P \cos \alpha + Q = 0. \text{ Отсюда получим:}$$

$$X_A = -P \cos 60^\circ - Q = -10 \cdot 0,5 - 2 = -7 \text{ кН}$$

$$5) \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + P \sin \alpha = 0. \text{ Тогда:}$$

$$Y_A = -P \sin 60^\circ = -10 \cdot 0,87 = -8,7 \text{ кН}$$

$$6) \quad \sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad P \cdot AK - Q \cdot EC + M + M_A = 0. \text{ Вычисления дают:}$$

$$M_A = -P \cdot AD \cdot \sin 60^\circ + Q \cdot EC - M = \\ = -10 \cdot 1 \cdot 0,87 + 2 \cdot 0,5 - 4 = -11,7 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Исходные данные для выполнения самостоятельной работы

На рисунках 1.23 – 1.26 приведены 24 варианта схем закрепления стержней, оси которых являются ломаными линиями ($l = 1\text{м}$). Для каждого из вариантов предлагается по два способа закрепления одного и того же стержня; при этом задаваемая нагрузка (см. табл. 1.3) и размеры (в метрах) в каждом из способов одинаковы.

Определить реакции опор для каждого из способов закрепления стержня.

Таблица 1.3

Номер варианта (рис. 1.23-1.26)	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	Номер варианта (рис. 1.23-1.26)	P , кН	M , кН·м	q , кН/м
1	6	12	2	13	6	12	2
2	10	5	3	14	10	5	3
3	15	10	5	15	15	10	5
4	20	4	1	16	20	4	1
5	4	8	4	17	4	8	4
6	8	12	3	18	8	12	3
7	10	5	2	19	10	5	2
8	12	2	3	20	12	2	3
9	4	10	1	21	4	10	1
10	10	4	4	22	10	4	4
11	12	8	3	23	12	8	3
12	2	12	5	24	2	12	5

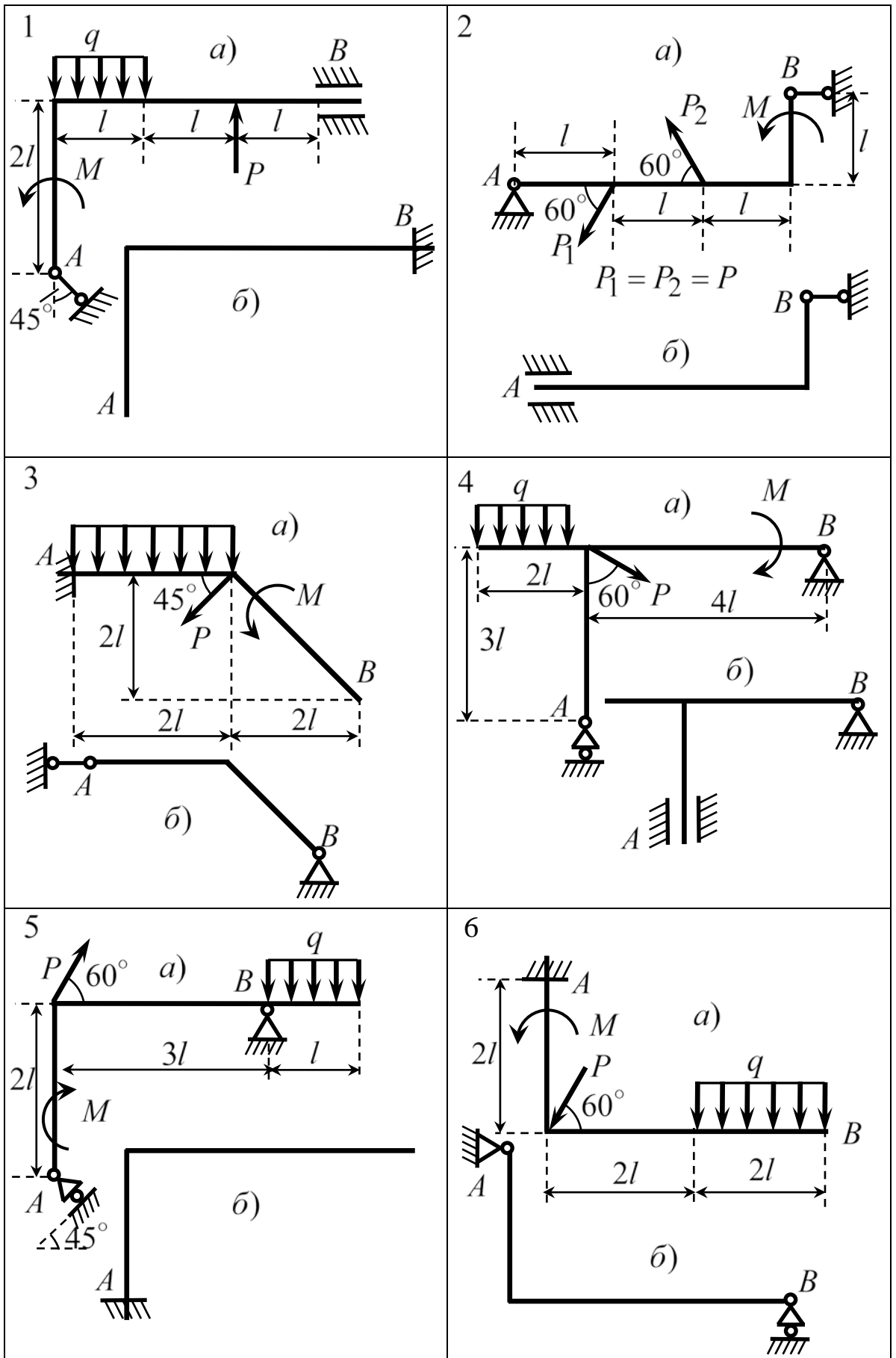


Рис. 1.23

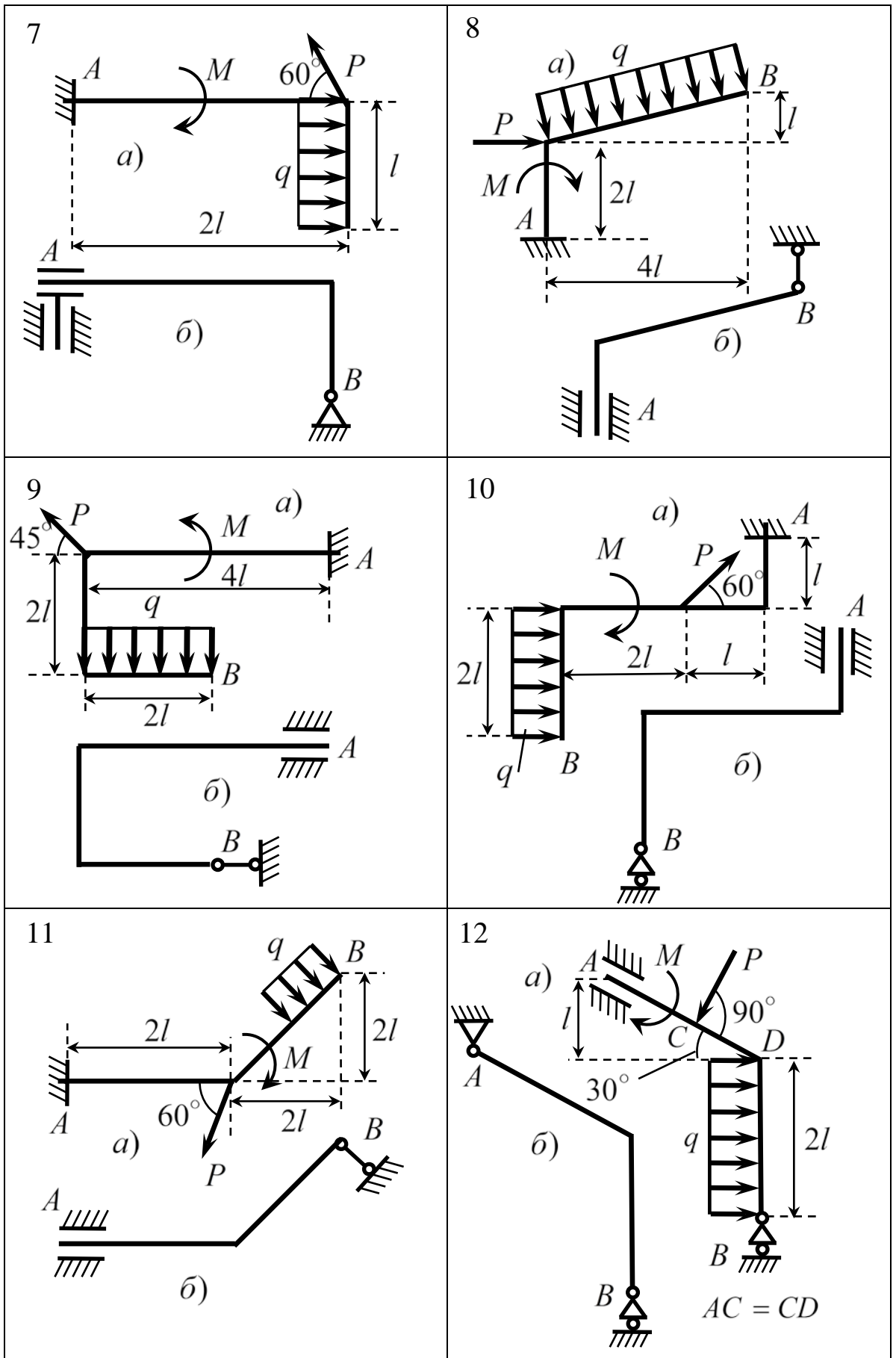


Рис. 1.24

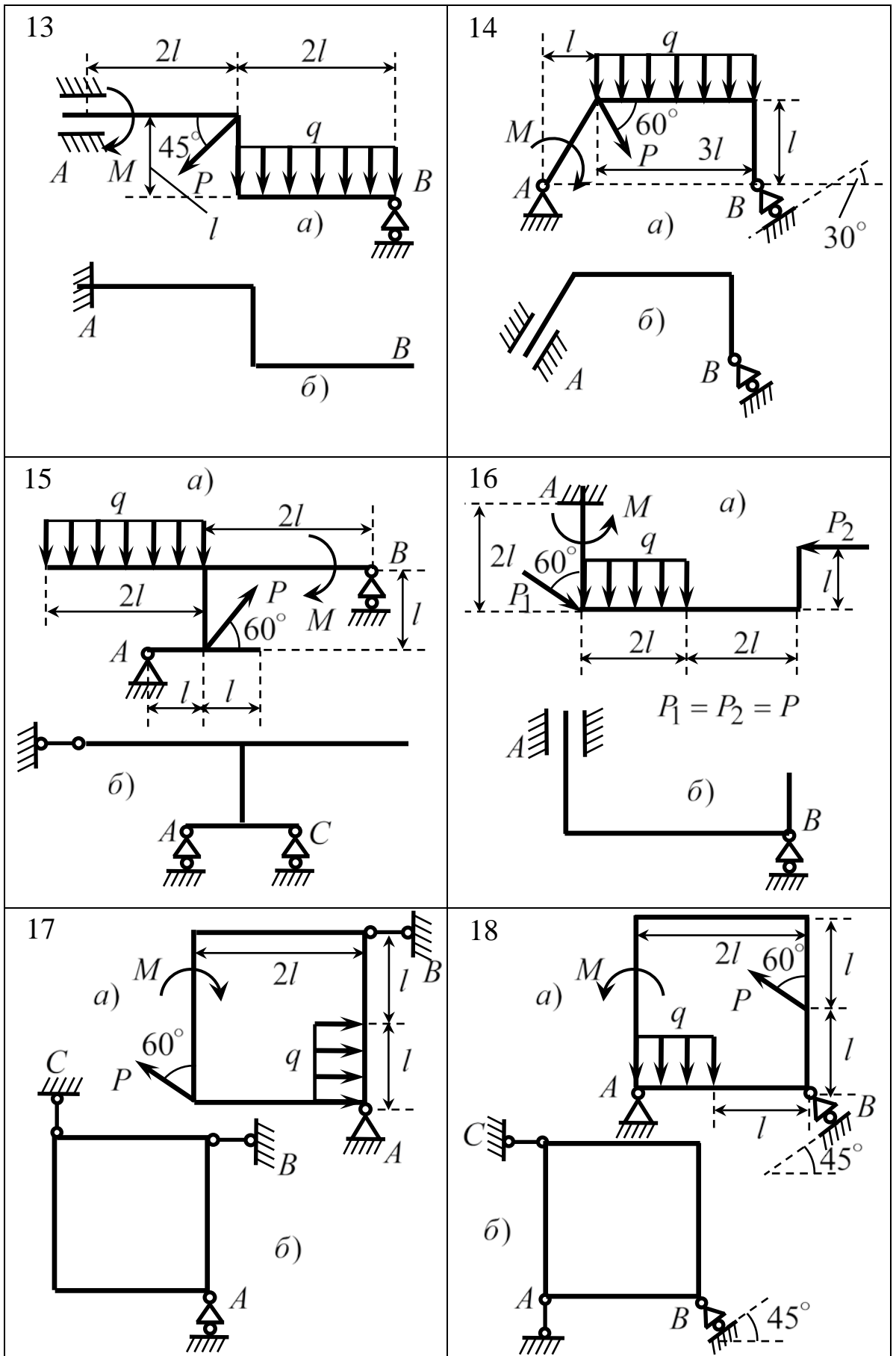


Рис.1.25

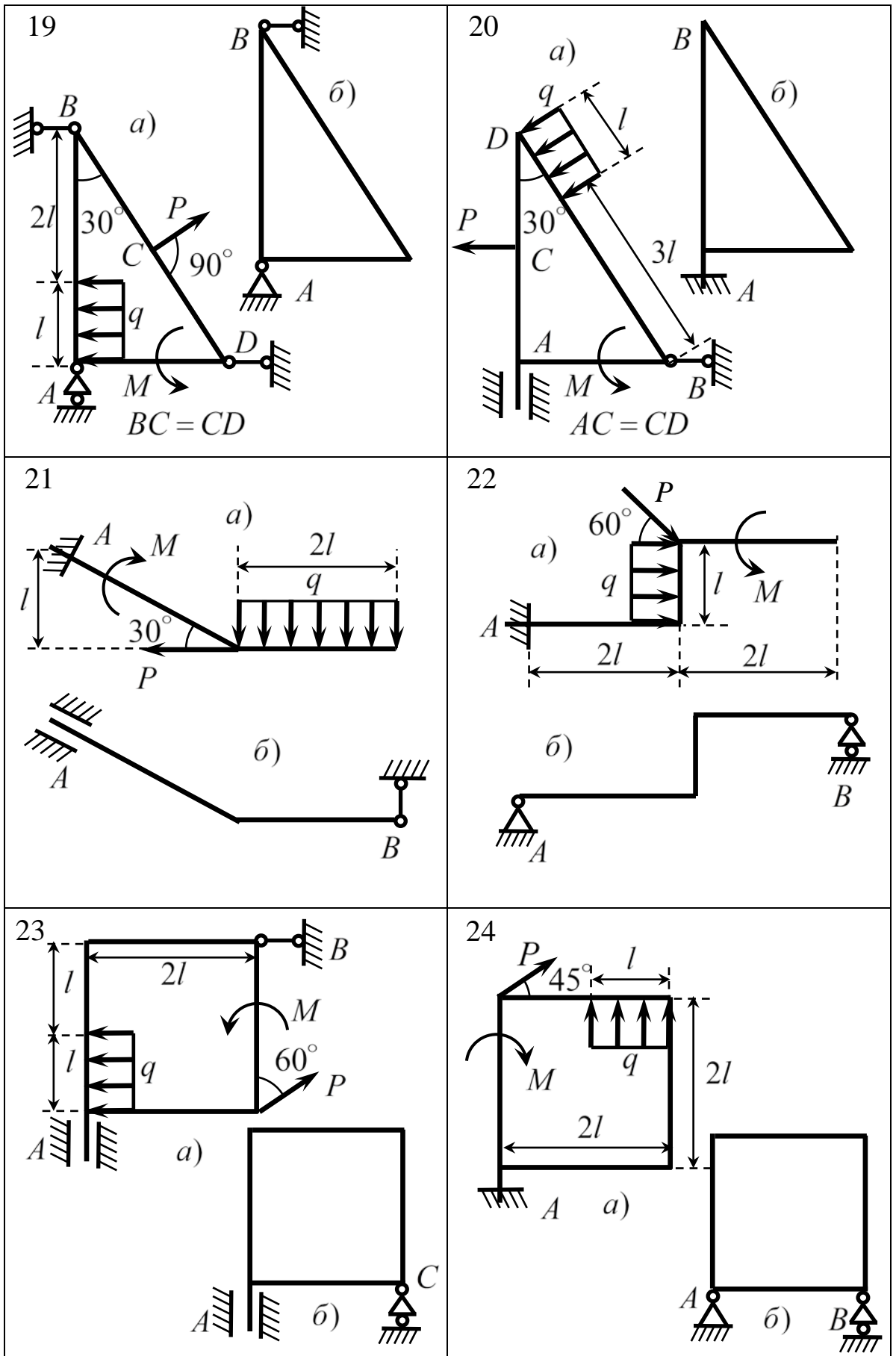


Рис. 1.26

ГЛАВА 2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Рассмотрим движение точки в плоскости относительно прямоугольной декартовой системы координат Oxy (рис.2.1). Непрерывная линия AB , которую описывает движущаяся точка с течением времени, называется *траекторией*. В зависимости от формы траектории различают *прямолинейные* и *криволинейные* движения точки.

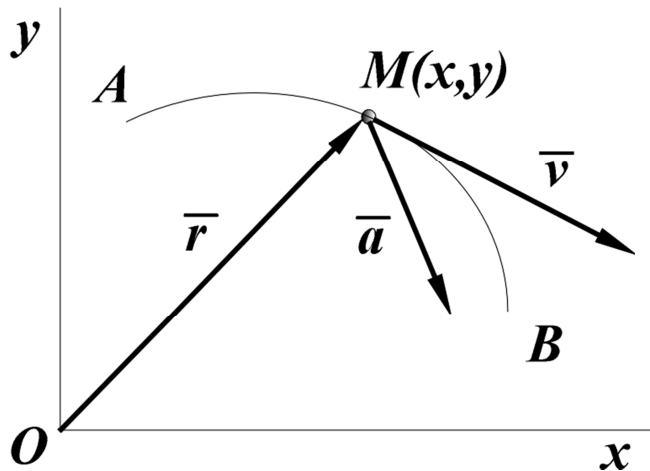


Рис 2.1. Векторы скорости и ускорения точки, движущейся в плоскости

Для задания положения движущейся точки используют *векторный*, *координатный* и *естественный* способы задания движения.

2.1. Векторный способ задания движения точки

В векторном способе задания движения точки ее положение в любой момент времени определяют радиусом-вектором $\vec{r} = \overline{OM}$, проведенным из начала координат O в движущуюся точку M (рис. 2.1), то есть векторной функцией

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.1)$$

Конкретная функция (2.1) определяет *закон движения точки в векторной форме*. Вектор $\vec{r}(t)$ изменяется в общем случае по величине и по направлению.

Основными кинематическими характеристиками движения точки являются скорость и ускорение, которые являются векторными величинами.

Скоростью точки называют вектор \vec{v} , равный первой производной по времени t от ее радиуса-вектора \vec{r} , то есть от векторной функции $\vec{r}(t)$:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} \quad \text{или} \quad \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (2.2)$$

Здесь использован принятый в механике символ дифференцирования по времени в виде точки, расположенный над дифференцируемой функцией.

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения (рис.1).

Ускорением точки называется вектор \bar{a} , равный первой производной по времени t от ее скорости \bar{v} или второй производной от ее радиуса-вектора \bar{r} :

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} \quad \text{или} \quad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (2.3)$$

При криволинейном движении точки в плоскости Oxy ускорение расположено в этой плоскости и отклонено от скорости в сторону вогнутости траектории точки (рис. 2.1). При прямолинейном движении точки векторы скорости и ускорения направлены вдоль траектории в одну сторону или противоположные стороны.

2.2. Координатный способ задания движения точки

В координатном способе задания движения точки положение точки в любой момент времени определяется в виде функций ее декартовых координат от времени

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (2.4)$$

Уравнения (2.4) представляют собой уравнения движения точки в координатной форме. Они одновременно являются уравнениями траектории в параметрической форме, в которых роль параметра выполняет время t .

На основании формулы (1.2) проекции v_x, v_y скорости точки \bar{v} равны первым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y} \quad \text{или} \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}. \quad (2.5)$$

Модуль скорости v и ее направляющие косинусы определяются формулами

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad \cos(\bar{v}, x) = v_x/v, \quad \cos(\bar{v}, y) = v_y/v. \quad (2.6)$$

Проекции a_x, a_y ускорения точки на координатные оси равны первым производным по времени от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}. \quad (2.7)$$

Модуль ускорения a и его направляющие косинусы определяются по формулам

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \quad \cos(\bar{a}, x) = a_x/a, \quad \cos(\bar{a}, y) = a_y/a. \quad (2.8)$$

2.3. Естественный способ задания движения точки

Естественный способ задания движения точки используется в тех случаях, когда траектория ее движения заранее известна. Если кривая AB является траекторией точки M (рис. 2.2), то положение точки M на этой траектории можно однозначно определить *криволинейной координатой* s .

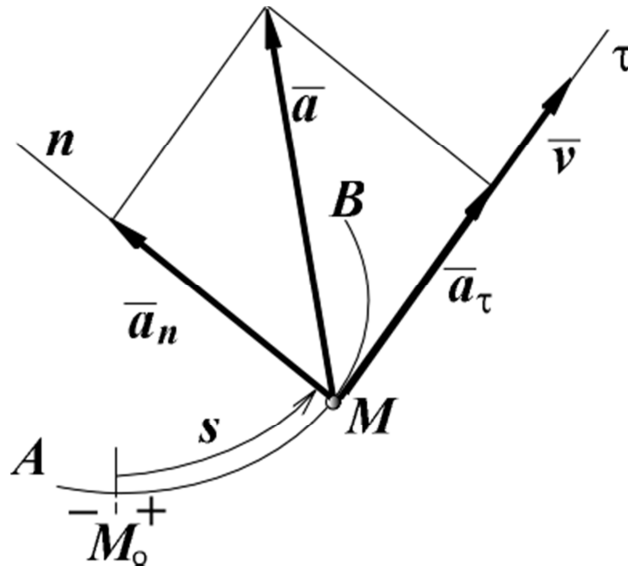


Рис 2.2. Векторы скорости и ускорения точки при естественном способе задания ее движения в плоскости.

Координата s отсчитывается вдоль траектории от некоторой фиксированной точки M_0 (начало отсчета) и берется с соответствующим знаком. Чтобы знать положение точки M на траектории в любой момент времени, надо задать зависимость криволинейной координаты от времени

$$s = s(t). \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) выражает *закон движения точки* при естественном способе задания ее движения. Отметим, что величина s в общем случае не равна пройденному точкой пути.

Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения определяют по их проекциям на подвижные прямоугольные оси $M\tau n$, имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с нею (рис. 2.2). Ось $M\tau$ направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета координаты s , а ось Mn - по нормали к траектории в сторону ее вогнутости. Орты этих осей обозначим соответственно $\bar{\tau}$ и \bar{n} .

Скорость точки \bar{v} , направленная по касательной к траектории, определяется одной проекцией v_τ , равной первой производной по времени от криволинейной координаты s :

$$\bar{v} = v_\tau \bar{\tau}, \quad v_\tau = \dot{s}. \quad (2.10)$$

Вектор ускорения $\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n}$ имеет проекцию a_τ на касательную, равную первой производной по времени от проекции скорости v_τ или второй производной от координаты s , и проекцию на нормаль a_n , равную отношению квадрата скорости к радиусу кривизны траектории в данной точке:

$$a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{s}, \quad a_n = v_\tau^2 / \rho. \quad (2.11)$$

Величины a_τ и a_n называют **касательным** и **нормальным** ускорениями точки. Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине, а нормальное – по направлению.

Модули скорости и ускорения точки определяются по формулам

$$v = |v_\tau|; \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.12)$$

Если известны касательное ускорение точки $a_\tau(t)$ и начальные значения скорости v_0 и криволинейной координаты s_0 в момент времени $t_0 = 0$, то в последующие моменты времени скорость и положение точки на траектории могут быть найдены по следующим формулам:

$$v_\tau(t) = v_0 + \int_0^t a_\tau(t) dt; \quad s(t) = s_0 + \int_0^t v_\tau(t) dt. \quad (2.13)$$

В частном случае *равнопеременного криволинейного движения*, когда $a_\tau = a_0 = const$ формулы (2.13) принимают вид

$$v_\tau(t) = v_0 + a_0 t; \quad s(t) = s_0 + v_0 t + a_0 t^2 / 2. \quad (2.14)$$

Если v_τ и a_0 имеют одинаковые знаки (произведение $v_\tau \cdot a_0 > 0$), движение будет *равноускоренным*, а если разные знаки ($v_\tau \cdot a_0 < 0$) – *равнозамедленным*. При $a_0 = 0$ точка совершает *равномерное движение* с постоянной скоростью $v_\tau = v_0 = const$, причем ускорение точки равно только нормальному ускорению: $a = a_n = v^2 / \rho$.

2.4. Касательное и нормальное ускорения

Для определения касательного ускорения точки при ее движении, заданном координатным способом с помощью функций (2.4), вводится орт касательной $\bar{\tau} = \bar{v} / v$, сонаправленный с вектором скорости. Проектируя вектор ускорения \bar{a} на этот орт, получаем формулу

$$a_\tau = \bar{a} \cdot \bar{\tau} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \quad (2.15)$$

Величины, входящие в правую часть этой формулы, вычисляются согласно (2.5), (2.6), (2.7). При $a_\tau > 0$ векторы \bar{v} и \bar{a}_τ имеют одинаковые направления вдоль касательной, а при $a_\tau < 0$ – противоположные. Если в

данный момент точка остановилась ($v=0$), то $\bar{a}_n = 0$ и ускорение точки $\bar{a} = \bar{a}_\tau$ определяется проекциями a_x, a_y .

Нормальное ускорение точки определяется по любой из формул::

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \cdot a_n = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{v}. \quad (2.16)$$

2.5. Задание 2. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

Пример выполнения задания

По заданным уравнениям движения точки M :

$$x = 3t \text{ (см)}; \quad y = 2t^2 \text{ (см)}$$

установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение. Для определения вида траектории найдем *уравнение траектории*, показывающее зависимость между координатами x и y движущейся точки. Выразив из первого, более простого, уравнения время $t = x/3$, и подставив во второе, получим уравнение траектории в виде $y = \frac{2}{9}x^2$. Следовательно, траекторией точки является ветвь параболы с вершиной в начале координат (рис.2.3). При графическом изображении траектории масштабы по осям Ox и Oy следует выбрать одинаковыми.

Положение точки M на траектории в заданный момент времени $t_1 = 1$ (с) находим путем вычисления ее координат:

$$x(t_1) = 3 \cdot 1 = 3 \text{ (см)}; \quad y(t_1) = 2 \cdot 1^2 = 2 \text{ (см)}.$$

Скорость и ускорение точки определяем по их проекциям на координатные оси:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = (3t) = 3; \\ v_y &= \dot{y} = (2t^2) = 4t; \quad v_y(t_1) = 4; \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad v(t_1) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (см/с)}. \\ a_x &= \dot{v}_x = (3) = 0; \\ a_y &= \dot{v}_y = (4t) = 4; \\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \quad a(t_1) = 4 \text{ (см/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Касательное и нормальное ускорения точки находим по формулам (2.15), (2.16):

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}; \quad a_\tau(t_1) = \frac{3 \cdot 0 + 4 \cdot 4}{5} = 3.2 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

$$a_n = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{v}; \quad a_n(t_1) = \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 0|}{5} = 2.4 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Радиус кривизны траектории в рассматриваемом положении точки определяется из формулы (2.11):

$$\rho = v^2 / a_n; \quad \rho(t_1) = 5^2 / 2.4 \approx 10.4 \text{ (см)}.$$

Полученные результаты отобразим на рисунке (рис. 2.3). Векторы \bar{v} и \bar{a} строим по их проекциям v_x, v_y и a_x, a_y в выбранных масштабах. Масштабы по координатам, скорости и ускорению не обязательно должны быть одинаковыми. Их следует выбирать так, чтобы обеспечить приемлемые размеры и наглядность рисунка.

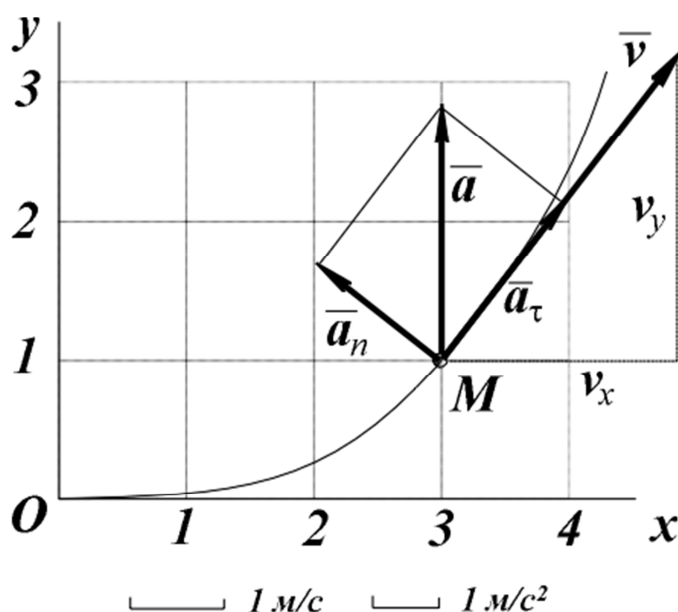


Рис 2.3. Графическое изображение результатов выполнения задания 1

Вектор скорости \bar{v} должен совпадать по направлению с касательной к траектории, а вектор ускорения \bar{a} направлен в сторону вогнутости траектории. Построенный вектор \bar{a} разложим на составляющие по касательной (касательное ускорение \bar{a}_τ) и по нормали (нормальное ускорение \bar{a}_n). В качестве контроля правильности решения рекомендуется убедиться в совпадении величин a_τ и a_n , полученных измерением по рисунку длин векторов \bar{a}_τ и \bar{a}_n , с их значениями, полученными аналитически.

Далее приводятся двадцать четыре варианта исходных данных для самостоятельного выполнения данного задания.

Исходные данные для выполнения самостоятельной работы

Таблица 2.1

№	$x = x(t), \text{ см}$	$y = y(t), \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$
1	$3t$	$3t^2 - 2$	1
2	$(2t - 3)^2$	$4t$	0.5
3	$-3t$	$6t^2 + 3$	0.5
4	$-2t^2 + 3$	$3t$	1
5	$3t$	$-5t^2 + 2$	1
6	$2t^2 - 4$	$-2t$	0.5
7	$-3t$	$-6t^2 + 1$	0.5
8	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
9	$2t$	$6t^2 - 4$	1
10	$(6t - 2)^2$	$3t$	0.5
11	$-2t$	$4t^2 - 1$	0.5
12	$-6t^2 + 4$	$2t$	1
13	$2t$	$-3t^2 - 3$	1
14	$6t^2 + 2$	$-3t$	0.5
15	$-2t$	$-5t^2 + 4$	1
16	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1
17	$4t$	$5t^2 - 1$	1
18	$(4t - 1)^2$	$2t$	0.5
19	$-4t$	$3t^2 - 2$	1
20	$-4t^2 + 2$	$4t$	0.5
21	$4t$	$-6t^2 + 3$	0.5
22	$4t^2 - 3$	$-4t$	1
23	$-4t$	$-3t^2 + 4$	1
24	$-6t^2 - 1$	$-2t$	0.5

ГЛАВА 3. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

В данной главе рассматриваются способы задания движения твердого тела и методы определения кинематических характеристик движения как всего тела в целом, так и отдельных его точек.

Различные виды движения твердого тела классифицируются следующим образом:

- *поступательное движение;*
- *вращательное движение*
(вращение тела вокруг неподвижной оси);
- *плоское (плоскопараллельное) движение;*
- *сферическое движение*
(вращение тела вокруг неподвижной точки);
- *общий случай движения твердого тела.*

Далее рассматриваются первые три вида движения.

3.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, жестко скрепленная с телом, остается во все время движения параллельной своему первоначальному положению (на рис. 4 прямая $AB \parallel A_1B_1$). Траектории всех точек тела при этом движении представляют собой одинаковые кривые, которые могут быть совмещены друг с другом путем параллельного переноса (на рис. 3.1 показаны траектории точек A и B). Траекториями точек могут быть кривые любой формы.

При поступательном движении векторы скорости и ускорения всех точек тела в каждый момент времени одинаковы (на рис. 3.1 $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ и $\vec{a}_A = \vec{a}_B$). Одинаковую для всех точек тела скорость \vec{v} называют *скоростью поступательного движения* тела, а одинаковое ускорение \vec{a} - *ускорением поступательного движения*. Эти понятия скорости и ускорения тела имеют смысл *только при поступательном движении*, а при других видах движения теряют свой смысл, поскольку скорости и ускорения различных точек будут разными.

Таким образом, поступательное движение твердого тела полностью определяется движением любой его точки. Для задания этого движения достаточно знать координаты какой-либо точки тела (например, точки A) как функции времени:

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad z_A = z_A(t). \quad (3.1)$$

Уравнения вида (3.1) являются *уравнениями поступательного движения твердого тела*. Для изучения поступательного движения тела достаточно использовать методы кинематики точки.

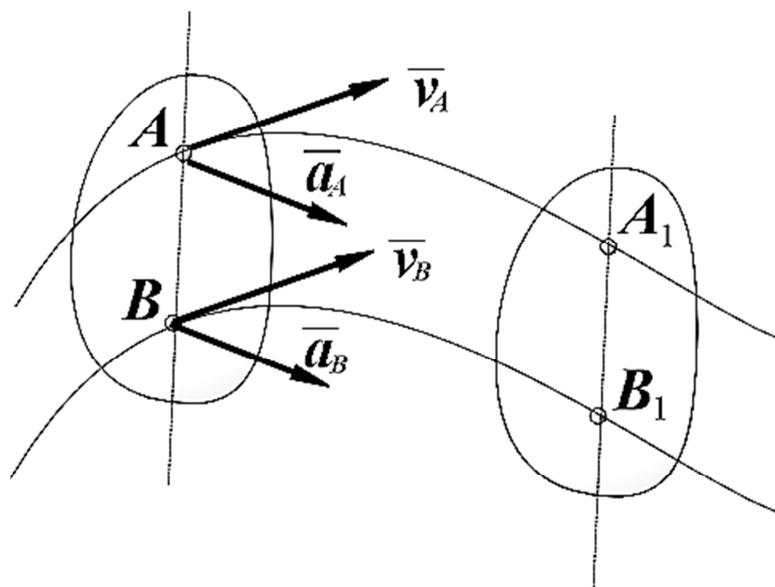


Рис 3.1. Поступательное движение твердого тела.

Движение твердого тела, для которого векторы скоростей всех точек равны только в один момент времени, а не все время, называется *мгновенным поступательным движением*. При мгновенном поступательном движении ускорения точек в общем случае не являются одинаковыми.

3.2. Вращательное движение твердого тела

Вращательным движением тела (вращением тела вокруг неподвижной оси) называется такое движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения (точки A и B на рис. 3.2). При этом также остаются неподвижными все точки тела, расположенные на прямой, проходящей через эти точки. Эта прямая называется *осью вращения тела* (ось Oz). Точки, не лежащие на оси вращения, описывают окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения и центры которых лежат на этой оси.

Положение вращающегося тела в любой момент времени однозначно определяется взятым с соответствующим знаком углом φ , называемым **углом поворота тела**. Положительным направлением отсчета угла φ принимается направление *против хода часовой стрелки*, видимое с положительного конца оси Oz (как показано на рис. 3.2). Зависимость угла φ от времени

$$\varphi = \varphi(t) \quad (3.2)$$

выражает закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Угол φ измеряется в радианах.

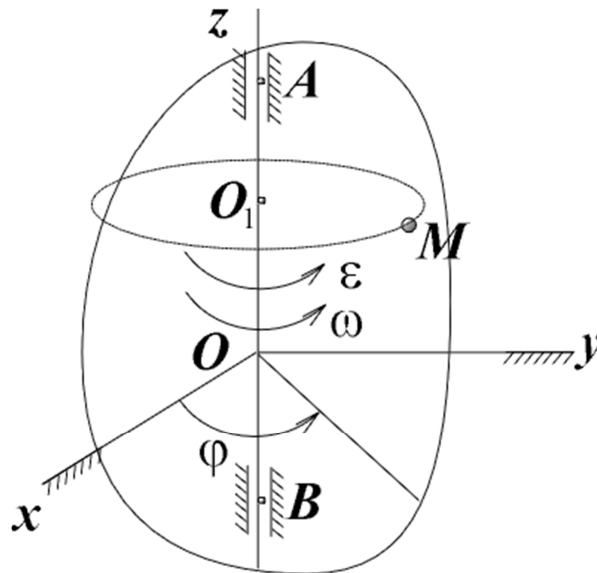


Рис 3.2. Вращательное движение твердого тела.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения тела являются его угловая скорость и угловое ускорение.

Угловой скоростью ω тела в данный момент времени называется первая производная по времени от угла поворота:

$$\omega = \dot{\varphi} \quad (\text{рад/с}). \quad (3.3)$$

Угловая скорость ω является величиной положительной при вращении тела против часовой стрелки (см. рис. 3.2), когда угол поворота тела возрастает с течением времени, и отрицательной – при вращении тела по часовой стрелки.

В технике угловую скорость называют также **частотой вращения** n и часто выражают в других единицах измерения, например, в оборотах в минуту. Связь между этими величинами выражается формулой:

$$\omega (\text{рад/с}) = \frac{2\pi}{60} n (\text{об/мин}) \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (3.4)$$

Угловым ускорением ε тела в данный момент времени называется первая производная по времени от угловой скорости ω или вторая производная от угла поворота φ :

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (\text{рад/с}^2). \quad (3.5)$$

Угловую скорость и угловое ускорение тела на рисунках изображают дуговыми стрелками вокруг оси вращения (рис. 3.2).

Эти кинематические параметры тела можно рассматривать как векторные величины. Если \bar{k} - орт оси вращения Oz , то вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ и вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ определяются выражениями:

$$\bar{\omega} = \omega \bar{k}; \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \bar{k}. \quad (3.6)$$

Эти векторы направлены вдоль оси вращения и могут быть приложены к любым точкам этой оси, то есть они являются *скользящими векторами*.

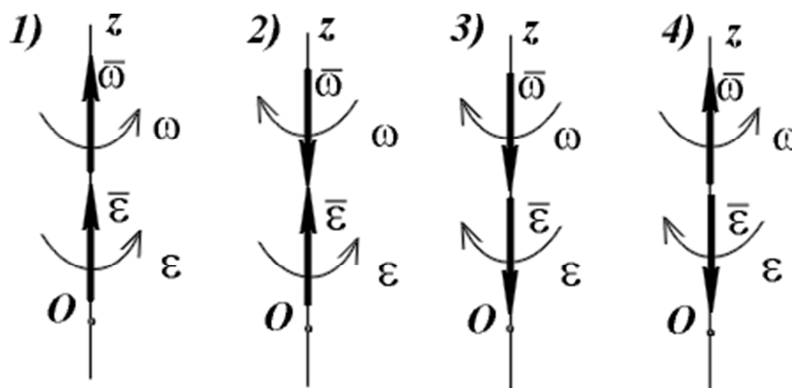


Рис. 3.3. Векторы угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела и их взаимное расположение

При $\omega = \dot{\varphi} > 0$ и $\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$ оба вектора направлены в положительную сторону оси вращения Oz (рис. 3.3; случай 1). В отличие от векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ скалярные величины ω и ε , определяемые формулами (3.3) и (3.4), называют *алгебраической угловой скоростью* и *алгебраическим угловым ускорением*.

Если известно угловое ускорение тела $\varepsilon = \varepsilon(t), t \geq 0$ и начальные значения угловой скорости ω_0 и угла поворота φ_0 (обычно принимают $\varphi_0 = 0$) в момент времени $t = 0$, то угловая скорость и угол поворота в последующие моменты времени $t > 0$ определяются по формулам:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon(t) dt; \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(t) dt. \quad (3.7)$$

В частном случае *равнопеременного вращения* при $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$ формулы (3.7) принимают вид

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon_0 t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_0 t^2 / 2. \quad (3.8)$$

Если величины ω и ε_0 имеют одинаковые знаки (произведение $\omega\varepsilon_0 > 0$), вращение будет *равноускоренным* (рис 6; случаи 1 и 3), а если разные ($\omega\varepsilon_0 < 0$) – *равнозамедленным* (рис 6; случаи 2 и 4).

При $\varepsilon_0 = 0$ угловая скорость тела остается постоянной во все время движения тела ($\omega = \omega_0 = const$) и такое вращение называется *равномерным*.

Рассмотрим движение какой-либо точки M вращающегося тела (рис.3.2), находящейся на расстоянии R от оси вращения. Расстояние s точки M , отсчитываемое от точки M_0 (при $\varphi = 0$) по дуге окружности (рис.3.4), выражается через угол поворота φ (рад.) зависимостью:

$$s = R\varphi. \quad (3.9)$$

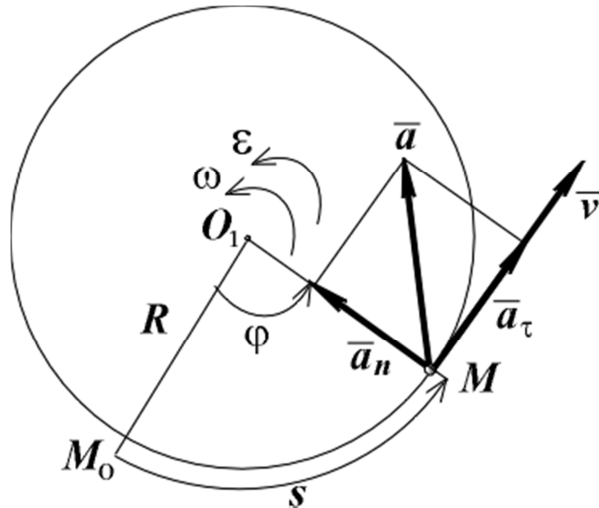


Рис 3.4. Векторы скорости и ускорения точки вращающегося тела.

Числовое значение скорости согласно формуле (2.10) будет равно

$$v_{\tau} = \dot{s} = R \dot{\varphi} \quad \text{или} \quad v = R \omega. \quad (3.10)$$

Таким образом, модуль скорости точки вращающегося тела равен произведению модуля угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону дуговой стрелки ω (рис. 3.4).

Полное ускорение точки определяется по его касательной и нормальной составляющим согласно формулам (3.11):

$$a_{\tau} = \dot{v}_{\tau} = R \dot{\omega} = R \varepsilon; \quad a_n = \frac{v_{\tau}^2}{\rho} = R \omega^2 \quad (\rho = R). \quad (3.11)$$

Касательная составляющая ускорения a_{τ} (вращательное ускорение) направлена по касательной к траектории в сторону дуговой стрелки ε , а нормальная составляющая a_n (центростремительное ускорение) всегда направлена по радиусу MO_1 к оси вращения (рис. 3.4).

Модуль полного ускорения точки равен:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.12)$$

Векторы скорости \bar{v} и ускорения \bar{a} могут быть определены по следующим векторным формулам:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}; \quad \bar{a} = \bar{a}_{\tau} + \bar{a}_n = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}; \quad (3.13)$$

где \bar{r} - радиус-вектор, проведенный из точки O в точку M .

Формулы (3.9)-(3.12) позволяют определять скорость и ускорение любой точки тела, если известен закон вращения тела (3.2) и расстояние данной точки от оси вращения. По этим же формулам можно, зная движение одной точки вращающегося тела, найти характеристики движения всего тела в целом (угловую скорость ω и угловое ускорение ε).

3.3. Плоское движение твердого тела

Плоским движением называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в неподвижных параллельных между собой плоскостях. Частным случаем плоского движения является вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Для изучения плоского движения тела достаточно изучить движение плоской фигуры в плоскости, которую можно считать сечением тела данной плоскостью.

3.3.1. Уравнения движения плоской фигуры в плоскости

Положение плоской фигуры S в плоскости Oxy (рис. 3.5) можно задать координатами x_A, y_A какой-либо точки A и углом φ , на который повернулась фигура вокруг точки A относительно некоторого начального ее положения (в этом положении принимается $\varphi = 0$). Точку A , используемую для определения положения фигуры, называют *полюсом*.

Для задания положения движущейся фигуры надо задать зависимости координат x_A, y_A и угла φ от времени t :

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad \varphi = \varphi(t). \quad (3.14)$$

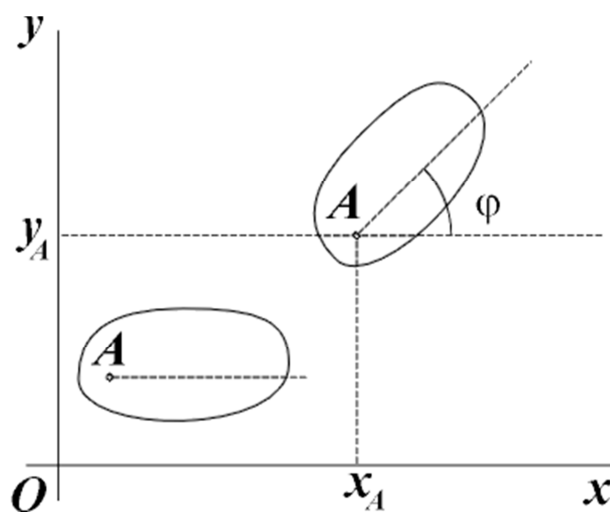


Рис 3.5. Движение плоской фигуры в плоскости.

Уравнения (3.14) называются **уравнениями движения плоской фигуры** в плоскости.

Первые два из уравнений (3.14) определяют движение, которое совершала бы фигура при $\varphi = const$. При этом все точки фигуры будут двигаться так же как полюс A , то есть такое движение будет поступательным. Третье из уравнений (3.14) определяет движение, которое совершала бы фигура при неподвижном полюсе A ($x_A = const; y_A = const$), то есть вращение фигуры вокруг полюса A .

Следовательно, любое плоское движение плоской фигуры складывается из поступательного и вращательного движений.

Кинематическими характеристиками поступательного движения являются скорость и ускорение полюса A : $\bar{v}_A = \dot{\bar{r}}_A$; $\bar{a}_A = \dot{\bar{v}}_A = \ddot{\bar{r}}_A$; а вращательного движения – угловая скорость и угловое ускорение фигуры: $\omega = \dot{\phi}$; $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\phi}$. Характеристики поступательного движения зависят от выбора полюса, а вращательного движения – не зависят.

3.3.2. Определение скоростей точек плоской фигуры с использованием полюса

Поскольку движение плоской фигуры складывается из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся со скоростью \bar{v}_A полюса A , и из вращательного движения вокруг этого полюса, то скорость любой точки B складывается векторно из скоростей, которые имеет точка B в каждом из этих движений (рис. 3.6):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad (\bar{v}_{BA} \perp AB). \quad (3.15)$$

Здесь \bar{v}_A - скорость полюса A ; \bar{v}_{BA} - скорость точки B при вращении фигуры вокруг полюса A (если считать его неподвижным), равная по модулю $v_{BA} = \omega \cdot AB$ и направленная перпендикулярно к AB в сторону дуговой стрелки угловой скорости ω .

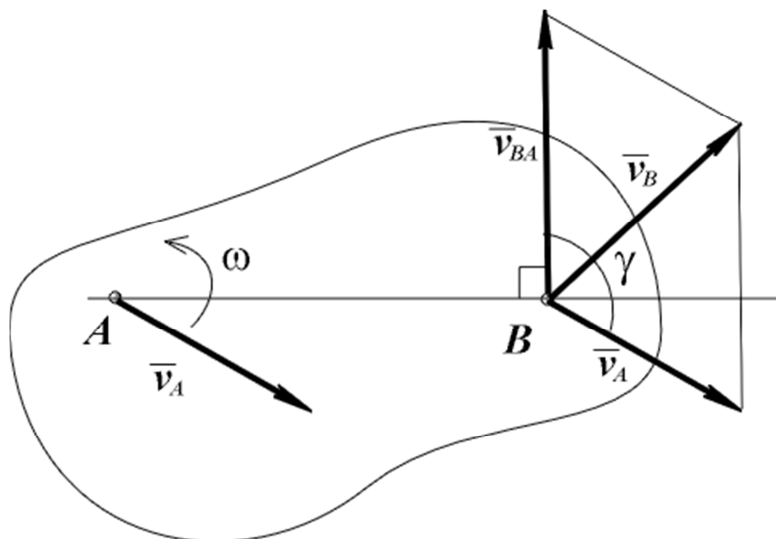


Рис. 3.6. Определение скорости точки B с использованием полюса A .

Модуль скорости точки B может быть найден с использованием теоремы косинусов по формуле

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A v_{BA} \cos \gamma}, \quad (3.16)$$

где $\gamma \in [0, \pi]$ - угол между векторами \bar{v}_A и \bar{v}_{BA} .

Если спроектировать векторное равенство (3.15) на ось Au , проведенную через точки A и B (рис. 3.6), то с учетом условия перпендикулярности $\bar{v}_{BA} \perp AB$, получаем **свойство проекций скоростей** точек плоской фигуры: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны.

Это свойство проекций скоростей выражается следующим соотношением между модулями скоростей точек A и B (рис. 3.7):

$$v_u = v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta. \quad (3.17)$$

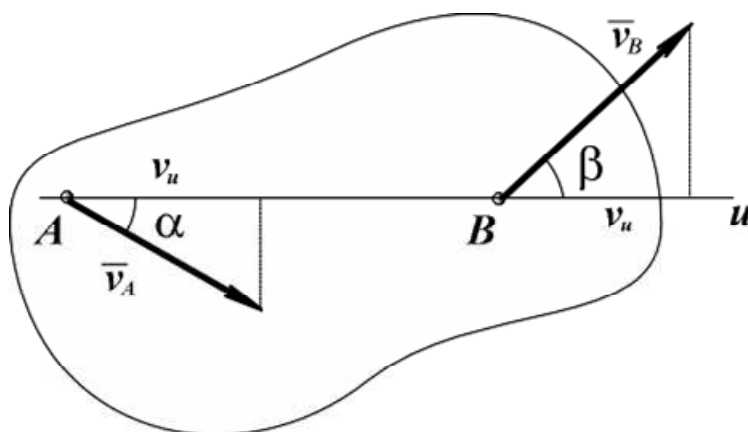


Рис 3.7. Свойство равенства проекций скоростей точек A и B

При помощи равенства (3.17) могут решаться многие задачи определения скоростей точек плоской фигуры.

Отметим, что равенство проекций скоростей \bar{v}_A и \bar{v}_B является следствием неизменности расстояния между точками A и B , принадлежащими твердому телу. Поэтому указанное свойство проекций скоростей будет выполняться при любом движении твердого тела.

3.3.3. Определение скоростей точек плоской фигуры с использованием мгновенного центра скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) плоской фигуры называется точка P , скорость которой в данный момент времени равна нулю: $\bar{v}_P = 0$. МЦС может быть конкретной точкой плоской фигуры или может располагаться вне плоской фигуры. В последнем случае его следует понимать как точку *подвижной плоскости*, жестко скрепленной с плоской фигурой. При движении плоской фигуры положение МЦС может изменяться как относительно самой фигуры, так и относительно неподвижной системы отсчета.

Использование МЦС упрощает процедуру определения скоростей точек плоской фигуры. Пусть в данный момент времени известно положение МЦС (точка P) и известна угловая скорость ω плоской фигуры (рис. 3.8).

Рассмотрим точку P для этого момента времени в качестве полюса, скорость которого $\bar{v}_P = 0$. Тогда согласно формуле (3.15) скорость какой-либо точки B равна: $\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}$. Направление скорости \bar{v}_B перпендикулярно отрезку PB и ее модуль $v_B = v_{BP} = \omega \cdot PB$. Аналогичный результат получается и для какой-то другой точки C :

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{CP}; \quad v_C = v_{CA} = \omega \cdot PC; \quad (\bar{v}_C \perp PC).$$

Таким образом, **скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до МЦС и определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг МЦС.**

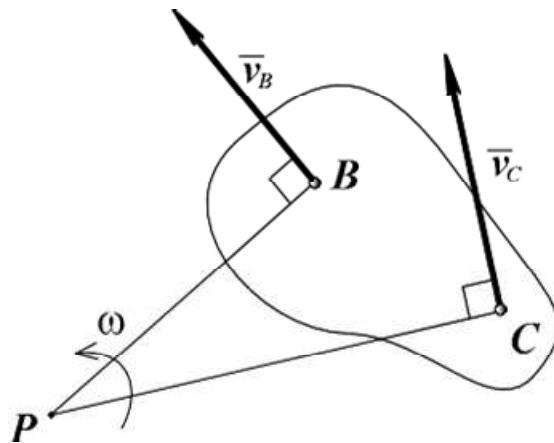


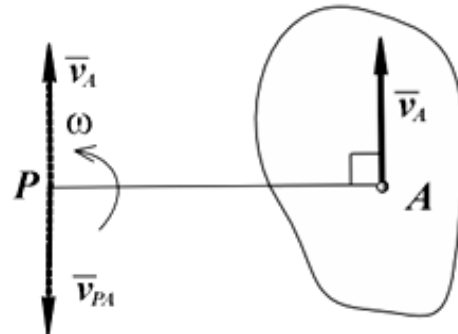
Рис 3.8. Определение скоростей точек B и C с использованием мгновенного центра скоростей P .

Методы определения положения мгновенного центра скоростей приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

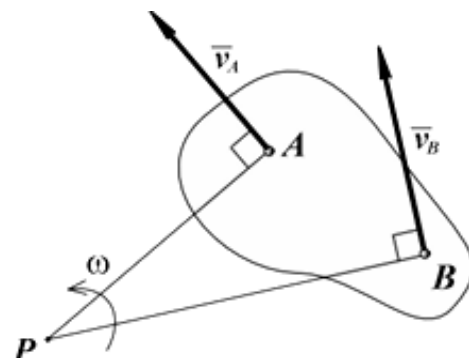
Методы нахождения положения МЦС

1). Известен вектор скорости \vec{v}_A какой-либо точки A плоской фигуры и ее угловая скорость $\omega \neq 0$.



МЦС (точка P) находится на перпендикуляре к вектору \vec{v}_A , проведенном через точку A . Расстояние $AP = v_A / \omega$ и откладывается в сторону, которую указывает вектор \vec{v}_A после поворота на угол $\pi/2$ в направлении дуговой стрелки ω . При этом получается, что скорость $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_A - \vec{v}_A = 0$; ($v_{PA} = \omega \cdot PA = v_A$).

2). Известны не параллельные друг другу скорости \vec{v}_A и \vec{v}_B двух точек плоской фигуры.



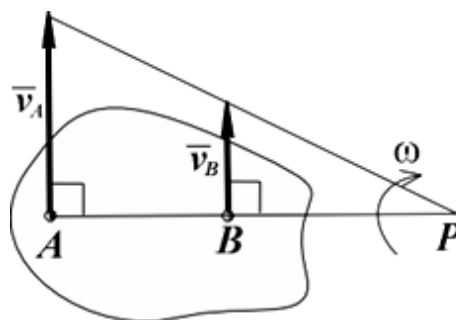
МЦС (точка P) находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных через точки A и B к скоростям этих точек. Угловая скорость плоской фигуры

$$\omega = v_A / PA = v_B / PB$$

Отметим, что для нахождения только положения МЦС достаточно знать лишь направления скоростей двух точек.

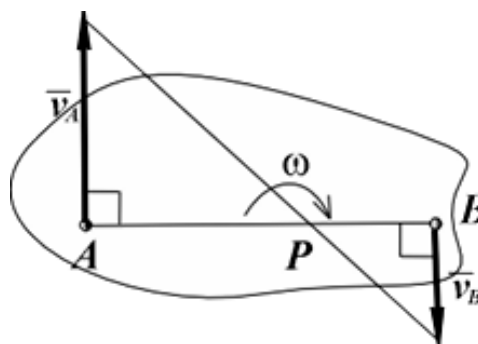
Методы нахождения положения МЦС

3). Известны параллельные друг другу скорости \vec{v}_A и \vec{v}_B точек A и B плоской фигуры, перпендикулярные отрезку AB , направленные в одну сторону и не равные по модулю ($v_A \neq v_B$).



МЦС (точка P) находится в точке пересечения продолжения отрезка AB и прямой, проведенной через концы векторов \vec{v}_A и \vec{v}_B . При заданной длине отрезка AB расстояния от МЦС до точек A и B определяются из пропорции: $V_A : V_B = PA : PB$. Угловая скорость фигуры $\omega = v_A / PA = v_B / PB$.
Случай равенства $v_A = v_B$ см. п. 6 на с. 34.

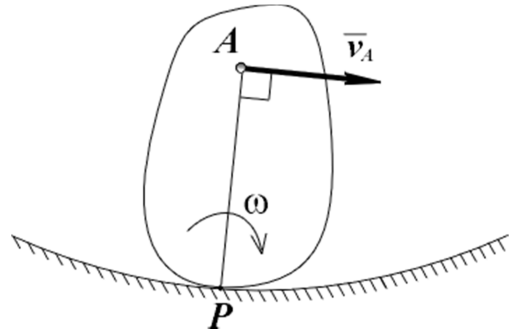
4). Известны параллельные друг другу скорости \vec{v}_A и \vec{v}_B точек A и B плоской фигуры, перпендикулярные отрезку AB , направленные в разные стороны.



МЦС (точка P) находится в точке пересечения отрезка AB и прямой, проведенной через концы векторов \vec{v}_A и \vec{v}_B . При заданной длине отрезка AB расстояния от МЦС до точек A и B определяются из пропорции: $V_A : V_B = PA : PB$. Угловая скорость фигуры $\omega = v_A / PA = v_B / PB$.

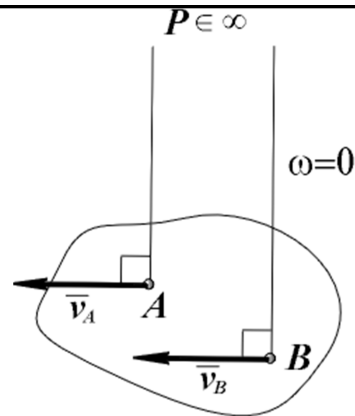
Методы нахождения положения МЦС

5). *Плоская фигура катится без скольжения по неподвижной кривой.*



МЦС (точка P) находится в точке соприкосновения фигуры с кривой, так как скорости точек фигуры и неподвижной кривой, находящиеся в соприкосновении, равны между собой и, следовательно, равны нулю. Если известна скорость какой-либо точки A фигуры, то угловая скорость $\omega = v_A / PA$.

б). *Известно, что скорости \bar{v}_A и \bar{v}_B двух точек плоской фигуры параллельны друг другу и не перпендикулярны отрезку AB .*



МЦС в данный момент времени *не существует* или, другими словами, *находится в бесконечности*. Угловая скорость плоской фигуры в данный момент равна нулю. Движение фигуры называется *мгновенно-поступательным*. Скорости всех точек фигуры равны ($\bar{v}_A = \bar{v}_B$).

Аналогичный результат получается в случае равенства $v_A = v_B$ (см. п. 4 на с. 33).

3.3.4. Определение ускорений точек плоской фигуры

Рассматривая плоское движение плоской фигуры как сумму поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся с ускорением \bar{a}_A полюса A , и вращательного движения вокруг этого полюса, получаем формулу для определения ускорения какой-либо точки B плоской фигуры в виде

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\epsilon} + \bar{a}_{BA}^{\omega} . \quad (3.18)$$

Здесь $\bar{a}_A = \dot{\bar{v}}_A = \ddot{\bar{r}}_A$ - ускорение полюса A ; \bar{a}_{BA} - ускорение вращательного движения точки B вокруг полюса A , которое как и в случае вращения тела вокруг неподвижной оси векторно складывается из **вращательного ускорения** \bar{a}_{BA}^{ϵ} и **центростремительного ускорения** \bar{a}_{BA}^{ω} . Модули этих ускорений определяются по формулам

$$a_{BA}^{\epsilon} = \varepsilon \cdot AB; \quad a_{BA}^{\omega} = \omega^2 \cdot AB , \quad (3.19)$$

В формуле (2.19) $\omega = |\dot{\phi}|$ - модуль угловой скорости плоской фигуры; $\varepsilon = |\ddot{\phi}|$ - модуль углового ускорения.

Вращательное ускорение \bar{a}_{BA}^{ϵ} направлено перпендикулярно отрезку AB в сторону дуговой стрелки ε , а центростремительное ускорение \bar{a}_{BA}^{ω} направлено по линии AB от точки B к полюсу A (рис. 3.9). Модуль полного ускорения \bar{a}_{BA} точки B относительно полюса A в силу условия $\bar{a}_{BA}^{\epsilon} \perp \bar{a}_{BA}^{\omega}$ вычисляется по формуле

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^{\epsilon})^2 + (a_{BA}^{\omega})^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} . \quad (3.20)$$

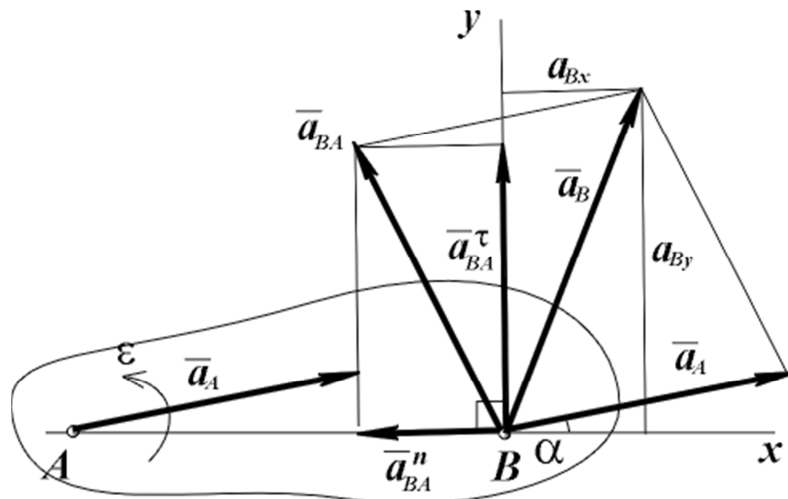


Рис 3.9. Определение ускорения точки B с использованием полюса A .

Для нахождения ускорения \bar{a}_B по формуле (3.18) рекомендуется использовать *аналитический способ*. В этом способе вводится прямоугольная

декартова система координат (система Vx на рис. 3.9) и вычисляются проекции a_{Bx}, a_{By} искомого ускорения как алгебраические суммы проекций ускорений, входящих в правую часть равенства (3.18):

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= (\bar{a}_A)_x + (\bar{a}_{BA}^6)_x + (\bar{a}_{BA}^y)_x = a_A \cos \alpha - a_{BA}^y; \\ a_{By} &= (\bar{a}_A)_y + (\bar{a}_{BA}^6)_y + (\bar{a}_{BA}^y)_y = a_A \sin \alpha + a_{BA}^6, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где α - угол между вектором \bar{a}_A и осью Vx . По найденным проекциям можно изобразить на рисунке вектор \bar{a}_B и найти его модуль

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}. \quad (3.22)$$

Изложенный способ определения ускорений точек плоской фигуры применим для решения задач, в которых задано движение полюса A и угол поворота фигуры уравнениями (3.14). Если зависимость угла поворота от времени неизвестна, то для заданного положения фигуры приходится определять *мгновенную* угловую скорость и *мгновенное* угловое ускорение.

Отметим также, что при определении ускорений точек плоской фигуры может использоваться *мгновенный центр ускорений* – точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Однако применение мгновенного центра ускорений связано с довольно трудоемкими методами нахождения его положения, поэтому определение ускорений точек плоской фигуры рекомендуется выполнять по формуле (3.18).

3.4. Задание 3. Определение скоростей и ускорений точек плоского механизма

Механизмы называются *плоскими*, если все его точки движутся в одной или в параллельных друг другу плоскостях, иначе механизмы называются *пространственными*. Большинство рассматриваемых механизмов являются *механизмами с одной степенью свободы*, в которых для определения движения всех звеньев нужно задать закон движения одного звена. В задании рассматриваются *планетарные механизмы*.

Пример выполнения задания

В планетарном механизме (рис. 3.10) кривошип 1 длиной $OA = 0,8$ (м) вращается вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону $\varphi_{OA}(t) = 6t - 2t^2$ (рад). В точке A кривошип шарнирно соединен с центром диска 2 радиуса $r = 0,5$ (м), находящегося во внутреннем зацеплении с неподвижным колесом 3, соосным с кривошипом OA . На диске 2 в момент времени $t_1 = 1$ (с) задана точка B , положение которой определяется расстоянием $AB = 0,5$ (м) и углом $\alpha = 135^\circ$. (В заданный момент времени угол α отсчитывается от оси Ax в направлении против хода часовой стрелки при $\alpha > 0$, или в противоположном направлении при $\alpha < 0$).

Определить в момент времени t_1

- 1) скорость точки B двумя способами: с использованием мгновенного центра скоростей (МЦС) диска 2 и с использованием полюса A ;
- 2) ускорение точки B с использованием полюса A .

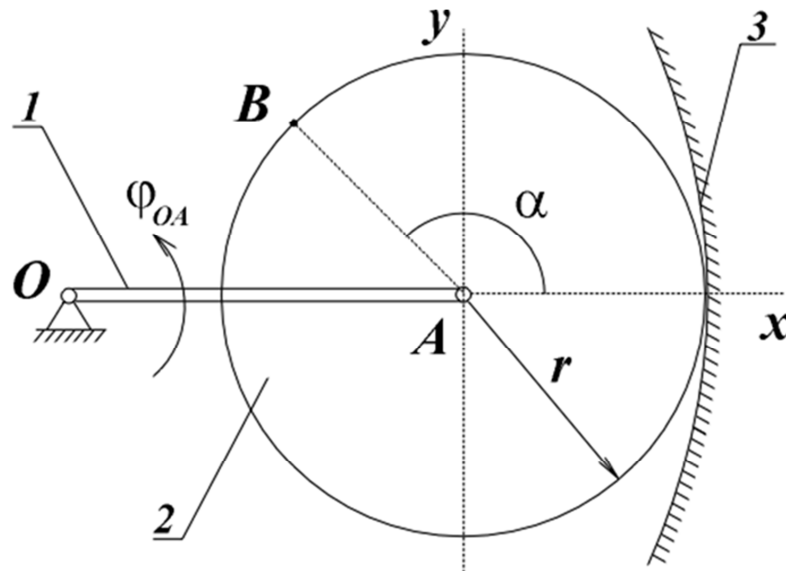


Рис 3.10. Планетарный механизм и способ задания положения точки B .

Решение

1) Определение скорости точки B

Вначале требуется выполнить графическое изображение механизма в выбранном масштабе (например, в 1 см рисунка – 0,1 м отрезка OA и радиуса r) и показать заданное положение точки B (рис. 3.11).

По заданному закону вращения кривошипа OA найдем скорость центра A диска 2. Определяем угловую скорость кривошипа в заданный момент времени $t_1 = 1$ (с):

$$\omega_{OA} = \dot{\varphi}_{OA} = (6t - 2t^2)' = 6 - 4t;$$

$$\omega_{OA}(t_1) = 2 \text{ (рад/с)}.$$

Полученная величина $\omega_{OA}(t_1)$ является положительной, поэтому дуговую стрелку ω_{OA} направляем против хода часовой стрелки, в положительном направлении отсчета угла φ .

Вычисляем модуль скорости

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA$$

$$v_A(t_1) = 2 \cdot 0.8 = 1,6 \text{ (м/с)}$$

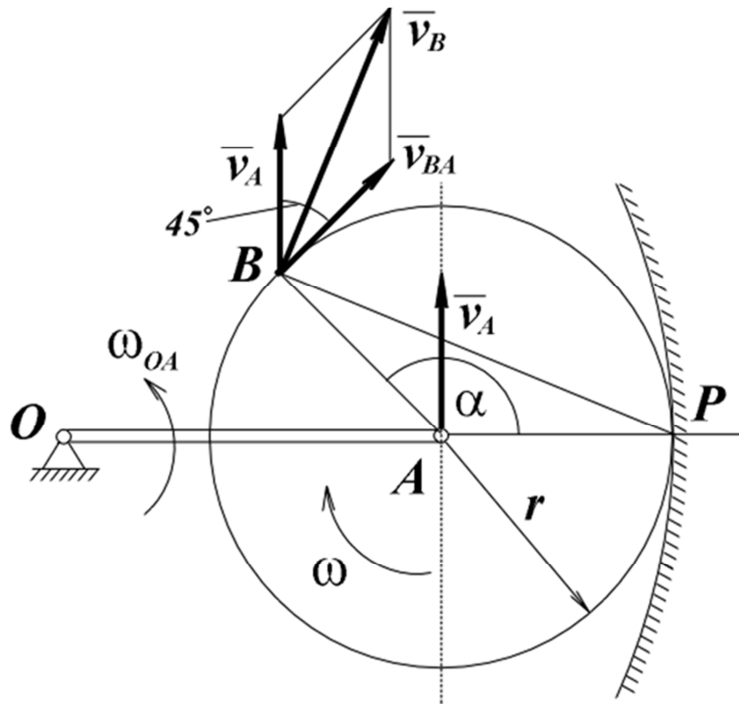


Рис 3.11. Определение скорости точки B с использованием мгновенного центра скоростей P и полюса A .

и строим вектор скорости \bar{v}_A перпендикулярно OA в сторону дуговой стрелки ω_{OA} .

Мгновенный центр скоростей (точка P) диска 2 расположен в точке его соприкосновения с колесом 3. Определим мгновенную угловую скорость ω диска по найденной величине скорости v_A :

$$\omega = v_A / AP = v_A / r$$

$$\omega = 1.6 / 0.5 = 3,2 \text{ (рад / с)}$$

и изображаем на рисунке ее дуговую стрелку (рис. 3.11).

Для определения скорости точки B с использованием МЦС находим расстояние BP по теореме косинусов из треугольника ABP :

$$BP = \sqrt{AB^2 + AP^2 - 2 AB \cdot AP \cos 135^\circ} =$$

$$= \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 - 2 \cdot 0,5^2 (-\sqrt{2} / 2)} \approx 0,924 \text{ (м)}.$$

Скорость \bar{v}_B равна по модулю

$$v_B = \omega \cdot PB = 3,2 \cdot 0,924 \approx 2,956 \text{ (м / с)}$$

и направлена перпендикулярно отрезку PB в сторону дуговой стрелки ω .

Тот же вектор \bar{v}_B может быть найден с использованием полюса A по формуле (3.15): $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$. Перенесем вектор \bar{v}_A в точку B и построим вектор \bar{v}_{BA} , перпендикулярный отрезку AB и направленный в сторону дуговой стрелки ω . Модуль $v_{BA} = \omega \cdot AB = 3,2 \cdot 0,5 = 1,6 \text{ (м / с)}$. Здесь получилось равенство $v_{BA} = v_A$ поскольку расстояние $AB = r$. По рисунку определяем, что угол между векторами \bar{v}_A и \bar{v}_{BA} равен 45° . Тогда по формуле (3.16) находим:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A v_{BA} \cos 45^\circ} =$$

$$= \sqrt{1,6^2 + 1,6^2 + 2 \cdot 1,6^2 (\sqrt{2}/2)} \approx 2,956 \text{ (м/с)}.$$

На рисунке вектор \bar{v}_B должен совпадать с диагональю параллелограмма, сторонами которого являются векторы \bar{v}_A и \bar{v}_{BA} . Это достигается построением векторов \bar{v}_A , \bar{v}_B и \bar{v}_{BA} в выбранном масштабе (например, 1 см на рисунке соответствует 0,5 м/с). Отметим, что приведенные в рассмотренном примере масштабы можно изменять и назначать самостоятельно.

2) Определение ускорения точки B.

Ускорение точки B определим по формуле (3.18) с использованием полюса A, ускорение которого складывается векторно из касательного и нормального ускорений:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^g + \bar{a}_{BA}^u = \bar{a}_A^r + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^g + \bar{a}_{BA}^u.$$

По заданному закону вращения кривошипа OA найдем его угловое ускорение:

$$\varepsilon_{OA} = \dot{\omega}_{OA} = (6 - 4t) = -4 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Полученная величина ε_{OA} является отрицательной, поэтому дуговую стрелку ε_{OA} направляем по ходу часовой стрелки, то есть в отрицательном направлении, а в дальнейшем расчете будем брать эту величину по модулю.

Модули касательного и нормального ускорений полюса A в заданный момент времени t_1 находим по формулам (3.11):

$$a_A^r = |\varepsilon_{OA}| \cdot OA = 4 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Касательное ускорение \bar{a}_A^r направлено перпендикулярно кривошипу OA в сторону дуговой стрелки ε_{OA} , а нормальное ускорение \bar{a}_A^n - от точки A к точке O при любом направлении угловой скорости кривошипа (рис. 3.12). Полное ускорение \bar{a}_A определять не требуется.

Далее требуется найти угловое ускорение ε диска 2. Для этого запишем выражение для его угловой скорости, которое выполняется в каждый момент времени:

$$\omega = v_A / r = \omega_{OA} \cdot (OA / r).$$

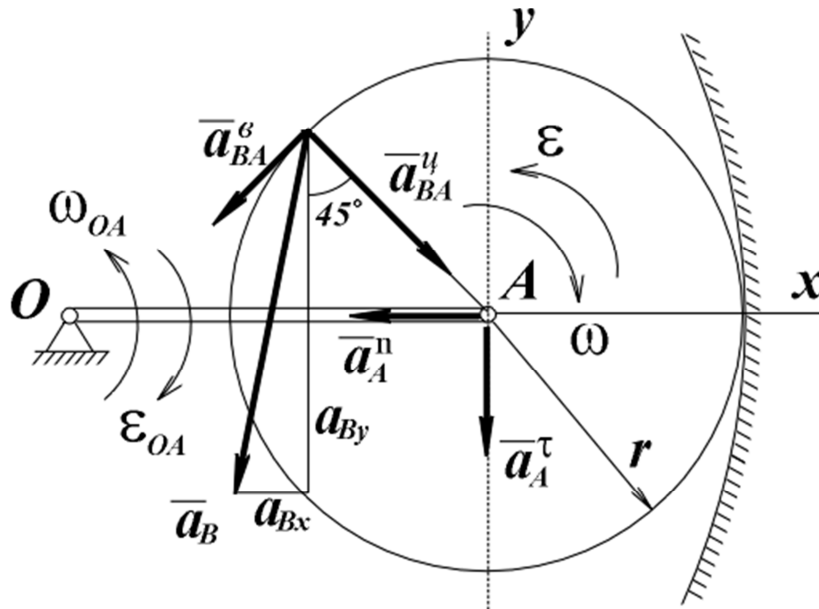


Рис. 3.12. Определение ускорения точки B с использованием полюса A .

Тогда по определению угловое ускорение диска (при $OA/r = \text{const}$) равно $\varepsilon = \dot{\omega} = \dot{\omega}_{OA} \cdot (OA/r) = \varepsilon_{OA} \cdot (OA/r) = -4 \cdot (0,8/0,5) = -6,4 \text{ (рад/с}^2\text{)}$.

Поскольку в момент времени t_1 величины ω и ε имеют разные знаки, то угловую стрелку ε направляем в противоположном направлении к дуговой стрелки ω .

Вычислим модули вращательного и центростремительного ускорений точки B относительно полюса A по формулам (3.19):

$$a_{BA}^{\varepsilon} = |\varepsilon| \cdot AB = 6,4 \cdot 0,5 = 3,2 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$a_{BA}^{\omega} = \omega^2 \cdot AB = 3,2^2 \cdot 0,5 = 5,12 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор $\bar{a}_{BA}^{\varepsilon}$ направлен перпендикулярно отрезку AB в сторону дуговой стрелки ε , а вектор \bar{a}_{BA}^{ω} - от точки B к полюсу A (рис. 15).

Ускорение точки B найдем по его проекциям на оси координатной системы $Axу$:

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= (\bar{a}_A^{\tau})_x + (\bar{a}_A^n)_x + (\bar{a}_{BA}^{\varepsilon})_x + (\bar{a}_{BA}^{\omega})_x = \\ &= 0 - a_A^n - a_{BA}^{\varepsilon} \cos 45^\circ + a_{BA}^{\omega} \cos 45^\circ = \\ &= -3,2 - 3,2 \cdot \sqrt{2}/2 + 5,12 \cdot \sqrt{2}/2 \approx -1,84 \text{ (м/с}^2\text{)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{By} &= (\bar{a}_A^{\tau})_y + (\bar{a}_A^n)_y + (\bar{a}_{BA}^{\varepsilon})_y + (\bar{a}_{BA}^{\omega})_y = \\ &= -a_A^{\tau} + 0 - a_{BA}^{\varepsilon} \cos 45^\circ - a_{BA}^{\omega} \cos 45^\circ = \\ &= -3,2 - 3,2 \cdot \sqrt{2}/2 - 5,12 \cdot \sqrt{2}/2 \approx -9,08 \text{ (м/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

$$\text{Модуль ускорения: } a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} \approx 9,27 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

На рисунке ускорения $\bar{a}_A^r, \bar{a}_A^n, \bar{a}_{BA}^e, \bar{a}_{BA}^y$ требуется изобразить в выбранном масштабе и построить в этом же масштабе вектор \bar{a}_B по найденным проекциям (рис. 3.12).

Исходные данные для выполнения самостоятельной работы

Таблица 3.2

№	$\varphi_{OA}(t), \text{ рад}$	OA, м	r, м	AB, м	$\alpha, \text{ град}$	$t_1, \text{ с}$
1	$t^2 + 3t$	0.8	0.6	0.5	120	1
2	$8t - 3t^2$	0.8	0.5	0.3	-60	1
3	$t^2 - 4t$	0.8	0.6	0.3	90	1
4	$3t - 2t^2$	0.9	0.6	0.5	-30	1
5	$2t^2 - t$	0.9	0.5	0.4	45	1
6	$4t - t^2$	0.9	0.4	0.3	-135	1
7	$2t^2 - 6t$	1	0.6	0.4	-120	0.5
8	$2t - 3t^2$	1	0.7	0.5	150	1
9	$3t^2 - 4t$	1	0.8	0.6	135	1
10	$8t - 2t^2$	1	0.8	0.5	-45	1
11	$4t^2 - 6t$	1	0.6	0.3	-120	0.5
12	$3t - 4t^2$	1	0.7	0.4	60	1
13	$4t^2 - 2t$	1.2	0.9	0.6	-150	0.5
14	$6t - t^2$	1.2	0.9	0.8	-135	1
15	$2t^2 - 4t$	1.2	0.8	0.5	45	0.5
16	$4t - 3t^2$	1.2	0.8	0.6	-30	1
17	$2t^2 + t$	1.2	0.7	0.6	120	0.5
18	$4t - 2t^2$	1.2	0.6	0.4	-150	0.5
19	$3t^2 - 10t$	1.4	1	0.8	60	1
20	$t - 2t^2$	1.4	0.9	0.7	135	1
21	$3t^2 + 2t$	1.4	0.9	0.6	-45	0.5
22	$6t - 3t^2$	1.4	0.8	0.5	30	0.5
23	$3t^2 - 8t$	1.4	0.8	0.6	-90	0.5
24	$2t - 4t^2$	1.4	0.7	0.5	150	1

ГЛАВА 4. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

4.1. Введение в динамику механической системы

Механической системой называется совокупность материальных точек или тел, движения которых *взаимосвязаны*. Механической системой являются, например, Солнечная планетная система, а также какой-либо механизм или машина.

Различают *изменяемые* и *неизменяемые* механические системы. *Изменяемой* называется такая система, взаимное расположение точек которой под действием сил может изменяться. В противном случае система называется *неизменяемой*.

Механические системы могут быть также *несвободными* и *свободными*. *Несвободной* называется такая система, на положение и скорости точек которой наложены наперед заданные и не зависящие от характера движения точек ограничения. Если такие ограничения отсутствуют, то система называется *свободной*.

Тела, с помощью которых реализуются ограничения, наложенные на движения точек несвободной системы, называются *связями*; типы связей были рассмотрены в главе 1.

Центром масс механической системы, состоящей из n материальных точек или твердых тел, называется геометрическая точка C в пространстве, радиус-вектор \bar{r}_C которой определяется формулой:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{M}; \quad (4.1)$$

где \bar{r}_k - радиус-вектор некоторой точки системы относительно системы координат $Oxyz$;

$M = \sum_{k=1}^n m_k$ - масса системы, равная сумме масс всех ее точек;

\bar{r}_C - радиус-вектор центра масс C .

Декартовы координаты этой точки будут соответственно равны

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M}. \quad (4.2)$$

В случае если рассматривается твердое тело или система твердых тел, понятие центра масс совпадает с понятием центра тяжести.

Силы, приложенные к точкам системы можно разделить на *внешние* и *внутренние*. **Внешними** называются силы, действующие на систему извне. **Внутренними** называются силы взаимодействия между материальными точками самой системы. Отметим, что в состав внешних и внутренних сил могут входить как *активные силы*, так и *реакции связей*. В дальнейшем условимся обозначать внешнюю силу \bar{F}^e , а внутреннюю - \bar{F}^i .

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Обозначим через \bar{F}_k^e и \bar{F}_k^i равнодействующие соответственно внешних и внутренних сил, приложенных к точке системы с номером k . Движение этой системы может быть описано следующими n уравнениями, которые являются **основными уравнениями динамики материальной точки**, записанными для каждой из точек системы:

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (4.3)$$

где m_k и \bar{a}_k - масса и ускорение k -ой точки системы.

В проекциях на оси инерциальной декартовой системы координат имеем:

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i; \quad m_k \ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i; \quad m_k \ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i, \quad (4.4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Уравнения (4.4) представляют собой систему дифференциальных уравнений движения материальных точек всей системы.

Решение задачи динамики механической системы путем интегрирования системы $3n$ дифференциальных уравнений (4.4) практически нереализуемо, поскольку внутренние силы и входящие в число внешних сил реакции связей заранее неизвестны, а число n точек системы может быть достаточно велико.

В связи с этим в теоретической механике разработаны методы, позволяющие в какой-то степени обойти указанные трудности. При этом в рассмотрение вводятся векторные и скалярные величины, характеризующие движение механической системы в целом и называемые **мерами движения** системы. К числу таких мер относятся **количество движения, момент количества движения (кинетический момент) и кинетическая энергия механической системы**.

Связь между этими мерами движения и мерами действия сил выражается с помощью так называемых **общих теорем динамики**.

Одну из таких общих теорем – **теорему об изменении кинетической энергии механической системы** и будем рассматривать далее, но перед этим введем некоторые необходимые понятия.

4.2. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси

Рассмотрим частный случай механической системы – *твердое тело*, которое вращается вокруг неподвижной оси, с которой совместим координатную ось Oz .

Осевым моментом инерции тела относительно оси Oz называется величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний до оси вращения:

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2, \quad (\text{кг} \cdot \text{м}^2). \quad (4.5)$$

Здесь m_k и h_k - соответственно масса и расстояние до оси вращения некоторой точки M_k вращающегося тела.

Из формулы (4.5) следует, что момент инерции является постоянной, положительной, скалярной величиной, не зависящей от движения тела и характеризующей распределение масс точек тела относительно оси вращения.

Если при поступательном движении твердого тела **мерой инертности** (способностью тела сопротивляться изменению его скорости) является масса, то при вращательном движении тела мерой инертности тела является осевой момент инерции.

Моменты инерции однородных тел простой геометрической формы вычисляются путем интегрирования, их значения приводятся в технических справочниках и в учебных пособиях по механике.

Моменты инерции неоднородных тел сложной конфигурации вычисляются как путем их мысленного расчленения на фрагменты в виде простых геометрических форм, так и определяются экспериментально.

Осевой момент инерции можно выразить через **радиус инерции i_z** тела по формуле:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}, \quad (4.6)$$

где M - масса тела.

Величины осевых моментов инерции некоторых однородных симметричных тел приводятся ниже.

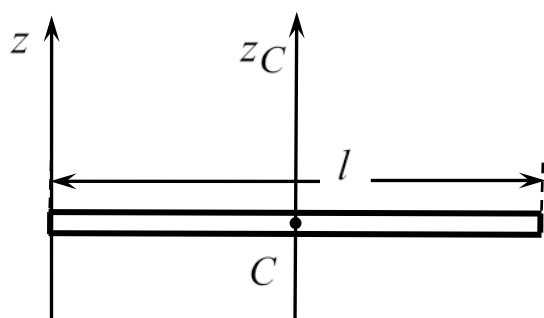
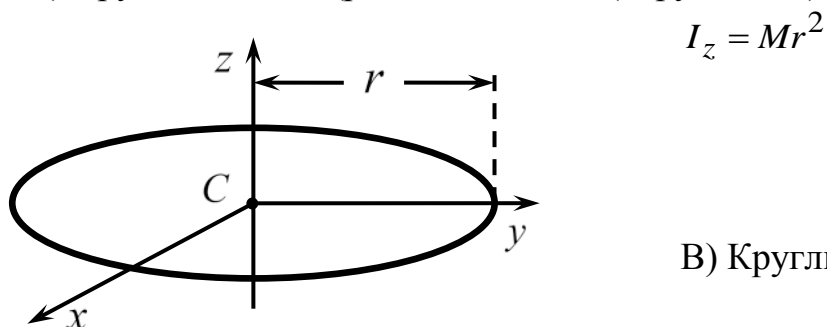


Рис. 4.1

А) Однородный тонкий стержень (рис. 4.1)

$$I_z = \frac{Ml^2}{3}, \quad I_{zC} = \frac{Ml^2}{12}$$

Б) Круглое тонкое (рис. 4.2) кольцо (окружность)



$$I_z = Mr^2$$

Рис. 4.2

В) Круглый диск (рис. 4.3)

$$I_z = \frac{Mr^2}{2}$$

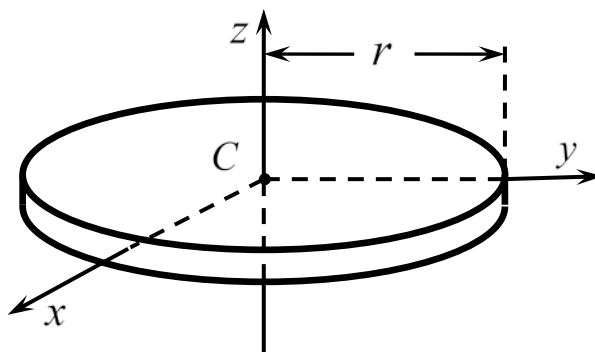


Рис. 4.3

Г) Круглый цилиндр (рис. 4.4)

$$I_z = \frac{Mr^2}{2}$$

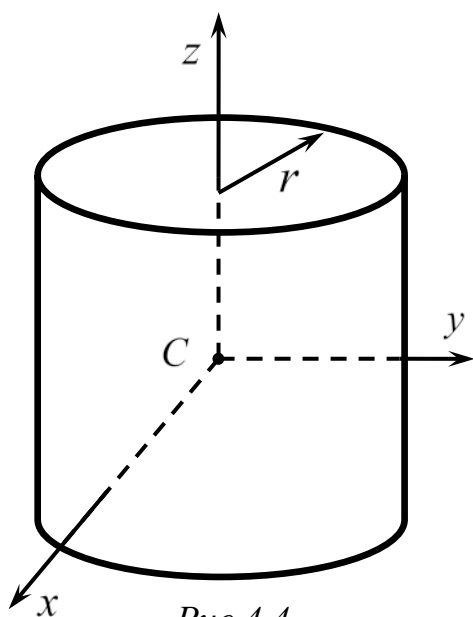


Рис 4.4

Если известен момент инерции относительно *центральной оси* (оси, проходящей через центр масс C тела), то можно определить момент инерции тела относительно любой оси, параллельной центральной. При этом используется теорема *Гюйгенса* о моментах инерции относительно параллельных осей (рис. 4.5): *момент инерции тела относительно некоторой оси z равен моменту инерции относительно центральной оси z_C , проходящей через центр масс тела параллельно оси z , сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.*

То есть
$$I_z = I_{z_C} + Ml^2. \quad (4.7)$$

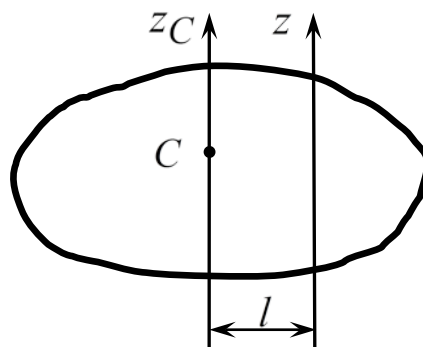


Рис. 4.5

4.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

4.3.1. Определение кинетической энергии

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная положительная мера ее движения, определяемая формулой

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$

где m - масса точки; v - модуль ее скорости.

Кинетической энергией механической системы называется арифметическая сумма кинетических энергий всех ее точек

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2. \quad (4.8)$$

Если в качестве системы рассматривается механизм или машина, то кинетическая энергия определяется следующей формулой

$$T = \sum_{j=1}^N T_j \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (4.9)$$

где T_j - кинетическая энергия подвижного звена механизма с номером j , N - число подвижных звеньев, которые рассматриваются как твердые тела.

4.3.2. Кинетическая энергия твердого тела

Используя общую формулу (4.8) можно получить выражения для кинетической энергии твердого тела при различных случаях его движения.

А) Поступательное движение.

При поступательном движении твердого тела скорости всех его точек, в том числе и скорость \bar{v}_C его центра масс, одинаковы, поэтому:

$$\bar{v}_k = \bar{v}_C; \quad v_k = v_C, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда кинетическая энергия тела будет равна:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = \frac{v_C^2}{2} \sum_{k=1}^n m_k = \frac{1}{2} M v_C^2. \quad (4.10)$$

Кинетическая энергия тела равна кинетической энергии материальной точки C (центра масс тела), с массой равной массе тела.

Б) Вращение вокруг неподвижной оси.

В этом случае модуль скорости любой точки тела будет равен $v_k = h_k \omega$, а кинетическая энергия тела выразится как:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = \sum_{k=1}^n \frac{m_k h_k^2}{2} \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (4.11)$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения z .

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения его осевого момента инерции на квадрат угловой скорости.

В) Плоское движение.

Из кинематики известно, что плоское движение можно рассматривать как сложное, состоящее из поступательного движения вместе с полюсом (за который мы здесь выбираем центр масс тела C) и вращательного движения вокруг оси, проходящей через полюс (центр масс). Тогда можно написать:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2. \quad (4.12)$$

Здесь I_{zC} - осевой момент инерции относительно оси z , проходящей через центр масс C .

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего плоское движение, равна арифметической сумме кинетической энергии поступательного движения тела и кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через его центр масс.

4.3.3. Работа и мощность силы

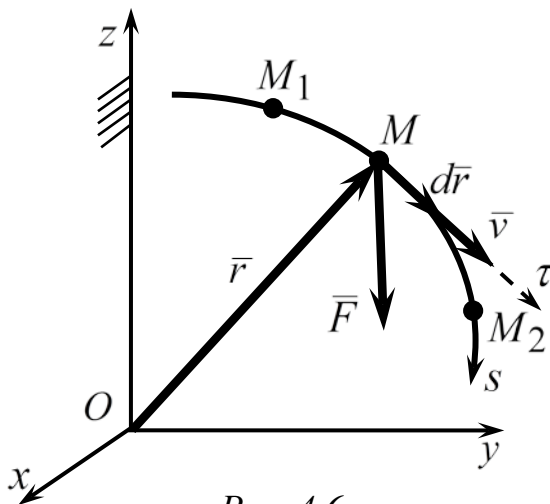


Рис. 4.6

Работой силы называется мера действия силы на некотором перемещении точки ее приложения.

Пусть точка M под действием приложенной к ней силы \vec{F} движется по некоторой траектории и совершает при этом элементарное перемещение $d\vec{r}$ (рис. 4.6).

Тогда **элементарной работой силы** \vec{F} называется величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (4.13)$$

где $d\vec{r}$ - вектор элементарного перемещения точки M за время dt , направленного так же, как и вектор скорости точки \vec{v} . Это следует из соотношения $d\vec{r} = \vec{v} dt$, полученного из известной формулы $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Элементарная работа здесь обозначается δA , а не dA , так как в общем случае она может не являться полным дифференциалом функции координат A .

Если отсчитывать вдоль траектории точки дуговую координату s , то формулу 4.13 можно переписать в виде:

$$\delta A = F_\tau ds, \quad (4.14)$$

где F_τ - проекция вектора силы на касательную ось $M\tau$, ds - дифференциал дуговой координаты s .

Обозначая проекции силы \vec{F} на оси координат $Oxyz$ как F_x, F_y, F_z , а проекции элементарного перемещения $d\vec{r}$ как dx, dy, dz , можно записать выражение (4.13) для элементарной работы в следующем виде:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (4.15)$$

Работа силы \vec{F} на конечном перемещении точки между положениями на траектории M_1 и M_2 (рис. 4.6) определяется как интегральная сумма элементарных работ, то есть как криволинейный интеграл от элементарной работы, взятый по дуге M_1M_2 траектории:

$$A = \int_{M_1M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (4.16)$$

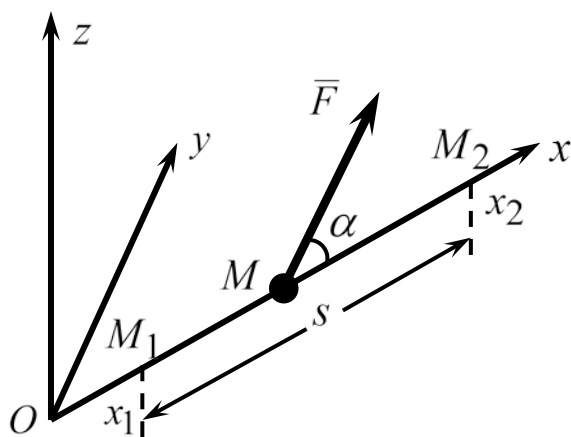


Рис. 4.7

Эта работа в общем случае может быть вычислена, если известна сила \vec{F} , начальная M_1 и конечная M_2 точки пути, вид траектории M_1M_2 , а также известен закон движения точки по траектории.

Рассмотрим частный случай, когда точка M под действием *постоянной* силы \vec{F} движется прямолинейно, например, вдоль координатной оси Ox (рис. 4.7).

Итак, $\vec{F} = \overline{const}$, $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F_z = 0$.

Тогда с учетом формулы 4.16 получим:

$$\begin{aligned} A &= \int_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{M_1M_2} F \cos \alpha dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F \cos \alpha dx = F \cos \alpha (x_2 - x_1) = Fs \cos \alpha \end{aligned}$$

Таким образом: $A = F s \cos \alpha$ (4.17)

Работа силы в этом случае равна произведению модуля силы на путь, пройденный точкой под действием силы, и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения точки.

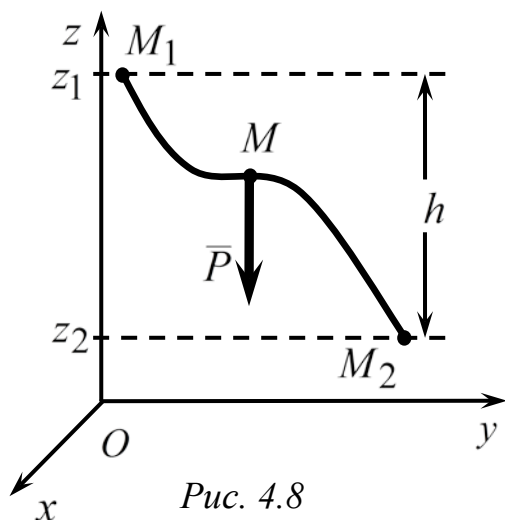


Рис. 4.8

Определим теперь работу *силы тяжести* точки M на некотором ее перемещении M_1M_2 (рис. 4.8). Считая это перемещение малым по сравнению с радиусом Земли, можно допустить, что модуль и направление силы тяжести точки $\bar{P} = m\bar{g}$ являются постоянными. Выберем систему отсчета $Oxyz$, направив ось Oz вверх по вертикали.

Используя формулу (4.15) и учитывая, что проекции силы тяжести на оси координат равны

$$P_x = P_y = 0; P_z = -mg,$$

получим выражение для элементарной работы силы тяжести: $\delta A = -mgdz$.

Работа силы тяжести точки на конечном перемещении M_1M_2 будет определяться определенным интегралом:

$$A = \int_{M_1M_2} P_x dx + P_y dy + P_z dz = \int_{z_1}^{z_2} -mgdz = mg(z_1 - z_2) = mgh.$$

Здесь $h = z_1 - z_2$ - разность высот точки M в начальном и конечном положениях. Если $z_1 > z_2$ (точка опускается), то работа силы тяжести положительна, если $z_1 < z_2$ (точка поднимается), то работа отрицательна.

Окончательно получим:

$$A = \pm mgh. \quad (4.18)$$

Таким образом, *работа силы тяжести материальной точки равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки (при опускании точки работа положительна, при подъеме – отрицательна).*

Из формулы (4.18) следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории и закона движения точки по траектории. На замкнутой траектории эта работа равна нулю, так как тогда $h = 0$.

В случае *механической системы* (в частности для твердого тела) работа силы тяжести определяется по формуле:

$$A = \pm Mgh_C, \quad (4.19)$$

где h_C - вертикальное перемещение центра масс, а M - масса системы (твердого тела).

Определим теперь работу *силы упругости* $\bar{F}_{упр}$, действующую на материальную точку M (рис 4.9). Эта сила всегда направлена к положению равновесия O , по модулю пропорциональна расстоянию r точки от этого положения и определяется выражением:

$$\bar{F}_{упр} = -c\bar{r}, \quad (4.20)$$

где \bar{r} - радиус-вектор точки M относительно точки O , c - коэффициент жесткости упругого элемента, например, пружины.

Используя формулу (4.14), находим элементарную работу силы упругости $\bar{F}_{упр}$:

$$\delta A = \bar{F}_{упр} \cdot d\bar{r} = -c\bar{r} \cdot d\bar{r}.$$

Легко проверить, что $\bar{r} \cdot d\bar{r} = \frac{1}{2}d(r^2)$. (4.19)

В самом деле, имеем:

$$\frac{1}{2}d(r^2) = \frac{1}{2}d(\bar{r} \cdot \bar{r}) = \frac{1}{2}(d\bar{r} \cdot \bar{r} + \bar{r} \cdot d\bar{r}) = \bar{r} \cdot d\bar{r}.$$

Тогда работа силы упругости равна:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \delta A = -\frac{1}{2}c \int_{r_1}^{r_2} d(r^2) = -\frac{1}{2}c(r_2^2 - r_1^2),$$

или окончательно

$$A = \frac{1}{2}c(r_1^2 - r_2^2). \quad (4.22)$$

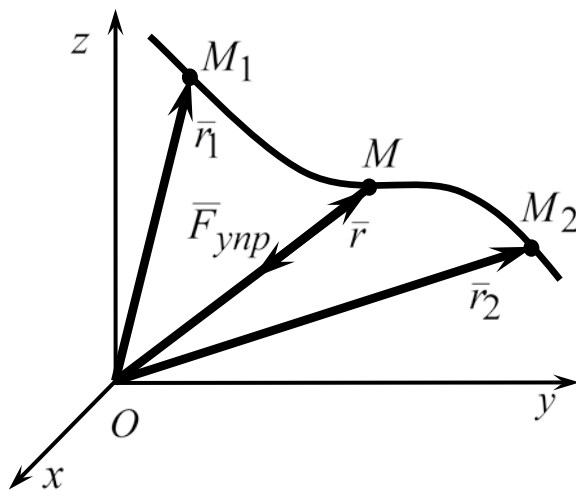


Рис. 4.9

Таким образом, *работа силы упругости* пропорциональна разности квадратов начального и конечного отклонений точки от положения равновесия. Подобно работе силы тяжести, работа силы упругости не зависит от вида траектории и закона движения точки по траектории. На замкнутой траектории эта работа равна нулю, так как тогда $r_1 = r_2$.

Если работа производится *пружиной*, то величина r в формуле (4.22) заменяется величиной Δ *деформации пружины* в начальном и конечном положениях.

Мощностью силы называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Эта величина определяется следующим образом:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z. \quad (4.23)$$

Приведем далее размерности работы и мощности в системе СИ и в технической системе единиц МКГСС.

Размерность работы:

$$\text{СИ: } [A] = \text{н} \cdot \text{м} = \text{Дж}; \quad \text{МКГСС: } [A] = \text{кгс} \cdot \text{м}$$

Размерность мощности:

$$\text{СИ: } [N] = \frac{\text{н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}, \quad \text{МКГСС: } [N] = \frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

Внесистемная единица измерения мощности – лошадиная сила (л.с.):

$$1 \text{ л.с.} = 75 \frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 736 \text{ Вт}$$

До сих пор речь шла об одной материальной точке; рассмотрим теперь **механическую систему**, состоящую из n материальных точек и к которой приложена система внешних сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$. В этом случае работа и мощность такой системы сил определяются как сумма работ и мощностей всех приложенных к механической системе сил:

$$A = \sum_{k=1}^n A(\bar{F}_k); \quad N = \sum_{k=1}^n N(\bar{F}_k). \quad (4.24)$$

Рассмотрим теперь частный случай механической системы - **твердое тело**, вращающееся с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси Oz под действием системы внешних сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$.

Предположим, что под действием приложенных сил тело повернулось за время $t_2 - t_1$ на угол $\varphi_2 - \varphi_1$, тогда работу системы сил на этом перемещении можно определить следующим образом:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi \quad (4.25)$$

где M_z - проекция главного момента $\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k)$ системы приложенных к телу сил на ось Oz , то есть главный момент системы сил относительно оси Oz .

Величина M_z носит название **вращающего момента**.

Если вращающий момент постоянен $M_z = const$, то работа равна произведению момента на угол φ поворота тела, то есть

$$A = M_z(\varphi_2 - \varphi_1) = M_z\varphi. \quad (4.26)$$

Мощность системы сил, приложенных к вращающемуся телу, определяется формулой:

$$N = M_z \cdot \omega \quad (4.27)$$

4.3.4. Формулировка теоремы об изменении кинетической энергии

Рассмотрим механическую систему, движущуюся под действием совокупности внешних и внутренних сил.

В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы формулируется следующим образом: **изменение кинетической энергии механической системы на некотором ее перемещении равно сумме работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил на этом перемещении.**

Теорема выражается следующим уравнением:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i. \quad (4.28)$$

Здесь T_0 и T - значения кинетической энергии системы в начале и конце ее перемещения.

Продифференцировав обе части уравнения (4.28) по времени и учитывая, что $T_0 = const$, а также формулу (4.23), получим:

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i, \quad (4.29)$$

где N^e и N^i - суммы мощностей всех внешних и внутренних сил.

Уравнение (4.29) выражает теорему об изменении кинетической энергии механической системы в *дифференциальной форме*: **производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех действующих на систему внешних и внутренних сил.**

Если рассматриваемая механическая система является **неизменяемой** (в частности, если рассматривается **твердое тело**), то сумма внутренних сил в этом случае равна нулю и в уравнениях (4.28) и (4.29) в правых частях остаются лишь первые слагаемые

4.4. Задание 4. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Рассматривается механическая система с одной степенью свободы, состоящая из трех твердых тел, которые совершают поступательное или враща-

тельное движения. Для определения скорости поступательно движущегося тела применяется теорема об изменении кинетической энергии.

Пример выполнения задания

Механическая система состоит из неоднородного диска 1, однородного диска 2 и груза 3 (рис. 4.10).

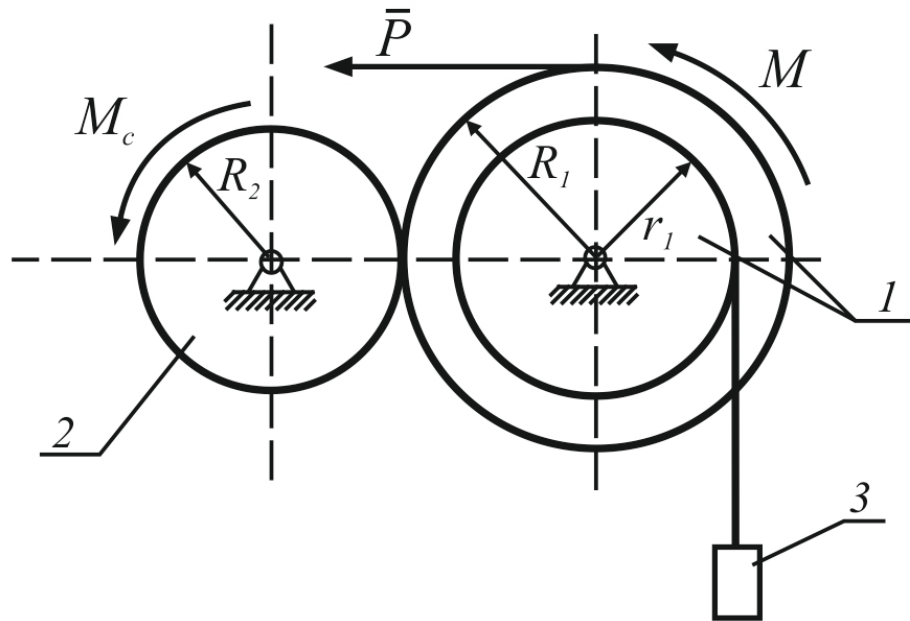


Рис 4.10. Исходная схема изучаемой механической системы

Заданы следующие параметры системы: m_1, m_2, m_3 – массы тел; R_1, r_1 – радиусы внешней и внутренней окружностей диска 1; i_1 – радиус инерции диска 1; R_2 – радиус диска 2.

Рассматриваемая механическая система начинает движение из состояния покоя под действием постоянной силы \bar{P} и постоянного момента M , приложенных к диску 1. На ведомый диск 2 действует постоянный момент сил сопротивления M_c .

Определить скорость груза 3 после его перемещения на расстояние s .

Решение

Решение данной задачи основывается на применении теоремы об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы в конечный момент времени, когда груз 3 переместился на расстояние s ; T_0 – начальная кинетическая энергия ($T_0=0$); $\sum_{k=1}^n A_k^e$ – сумма работ внешних сил и моментов на заданном перемещении рассматриваемой системы.

Конечная кинетическая энергия T равна сумме кинетических энергий вращательных движений дисков 1 и 2 и поступательного движения груза 3:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 \quad (2)$$

где I_1, I_2 – осевые моменты инерции дисков 1 и 2; ω_1, ω_2 – их угловые скорости; v_3 – скорость груза 3.

Выразим кинетическую энергию T через искомую скорость v_3 (рис.4.11). Из рис. 4.11 видно, что угловая скорость $\omega_1 = \frac{v_3}{r_1}$. Скорость точки E контакта дисков 1 и 2 $v_E = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$.

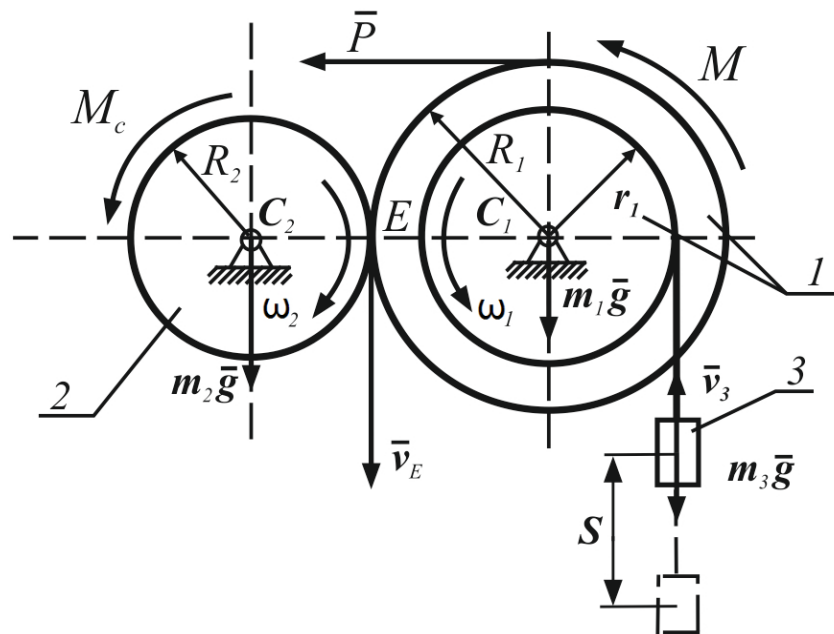


Рис. 4.11. Схема системы при решении данного примера

Следовательно, угловая скорость диска 2 равна:

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2} \omega_1 = \frac{R_1 v_3}{r_1 R_2}$$

Моменты инерции дисков 1 и 2 равны соответственно:

$$I_1 = m_1 i_1^2, \quad I_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2}$$

В результате подстановки этих формул в уравнение (2) получаем кинетическую энергию T в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} m_{np} v_3^2, \quad (3)$$

где $m_{np} = m_1 \left(\frac{i_1}{r_1} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{R_1}{r_1} \right)^2 + m_3$ - *приведенная масса* рассматриваемой системы.

Сумма работ внешних сил и моментов, действующих на рассматриваемую механическую систему, равна

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = A(\bar{P}) + A(M) + A(M_c) + A(m_1 \bar{g}) + A(m_2 \bar{g}) + A(m_3 \bar{g}), \quad (4)$$

где

$A(\bar{P}) = (PR_1)\varphi_1$ - работа постоянной силы \bar{P} , равная произведению ее момента PR_1 на угол поворота φ_1 диска 1;

$A(M) = M\varphi_1$ - работа постоянного момента M ;

$A(M_c) = -M_c\varphi_2$ - работа постоянного момента M_c сил сопротивления;

$A(m_1 \bar{g}) = 0$, $A(m_2 \bar{g}) = 0$ - работы сил тяжести, действующих на диски 1 и 2; эти работы равны нулю, т.к. центры тяжести C_1 и C_2 этих дисков остаются постоянными;

$A(m_3 \bar{g}) = -m_3 g s$ - работа силы тяжести, действующей на груз 3, равная взятому со знаком «минус» произведению силы тяжести $m_3 g$ на высоту подъема s груза 3.

Кроме вышеперечисленных сил и моментов на систему действуют также *динамические реакции*, приложенные в шарнирах C_1 и C_2 . Работы этих реакций из-за неподвижности шарниров C_1 и C_2 равны нулю и на рис. 4.11 они не показаны.

Выразим углы поворота φ_1 и φ_2 дисков 1 и 2 через путь s , пройденный грузом 3. Воспользуемся для этого равенствами $\omega_1 = \frac{v_3}{r_1}$ и $\omega_2 = \frac{R_1 v_3}{r_1 R_2}$, в

которых $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$, $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$, $v_3 = \dot{s}$.

Интегрируя эти равенства по времени с нулевыми начальными данными, получаем: $\varphi_1 = \frac{s}{r_1}$; $\varphi_2 = \frac{R_1 s}{R_2 r_1}$. После подстановки этих выражений для

φ_1 и φ_2 в уравнение (4) сумма работ внешних сил и моментов записывается в виде

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = \left(P \frac{R_1}{r_1} + M \frac{1}{r_1} - M_c \frac{R_1}{R_2 r_1} - m_3 g \right) s = Q_s s, \quad (5)$$

где $Q_s = P \frac{R_1}{r_1} + M \frac{1}{r_1} - M_c \frac{R_1}{R_2 r_1} - m_3 g$ - *обобщенная сила*, соответствующая координате s .

С учетом полученных выражений для кинетической энергии (3) и суммы работ (5) формулу (1) для теоремы об изменении кинетической энергии получаем в следующем окончательном виде:

$$\frac{1}{2} m_{np} v_3^2 = Q_s s.$$

Отсюда получим, что скорость груза 3, начавшего движение из состояния покоя, после перемещения на расстояние s равна:

$$v_3 = \sqrt{\frac{2Q_s s}{m_{np}}}, \quad (6)$$

где приведенная масса системы

$$m_{np} = m_1 \left(\frac{i_1}{r_1} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{R_1}{r_1} \right)^2 + m_3, \quad (7)$$

а обобщенная сила

$$Q_s = P \frac{R_1}{r_1} + M \frac{1}{r_1} - M_c \frac{R_1}{R_2 r_1} - m_3 g \quad (8)$$

Исходные данные для выполнения самостоятельной работы

Механическая система, состоящая из дисков 1 и 2 и груза 3, начинает движение в вертикальной плоскости из состояния покоя под действием постоянного момента M или постоянной силы P . На диск 2 действует постоянный момент сил сопротивления M_c .

Определить скорость v_3 груза 3 после его перемещения на расстояние s .

Схемы и параметры механических систем приведены в табл. 4.1, где используются следующие обозначения:

- m_1, m_2, m_3 – массы дисков 1, 2 и груза 3; $R_1, r_1; R_2, r_2$ – радиусы больших и малых окружностей дисков 1, 2; i_1, i_2 – радиусы инерции дисков 1, 2 (если радиус инерции диска не задан, то диск считается однородным);
- M – постоянный движущий момент; M_c – постоянный момент сил сопротивления; P – постоянная движущая сила;
- T_0 – начальная кинетическая энергия данной системы ($T_0 = 0$); s – расстояние, пройденное грузом 3; v_3 – искомая скорость груза 3 в конечном положении механической системы.

Таблица 4.1

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы
1		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1, R_2, r_2, i_2;$ $M = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>
2		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1, r_1, i_1, R_2;$ $P = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>
3		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1, i_1;$ $R_2, r_2, i_2;$ $M = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы
4		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1, R_2, r_2, i_2;$ $M = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>
5		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1, R_2, r_2, i_2;$ $P = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>
6		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1, i_1;$ $R_2, r_2, i_2;$ $M = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы
7		<p>Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; $P = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>
8		<p>Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; $P = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>
9		<p>Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1, R_2; $M = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы
10		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1, r_1, i_1, R_2;$ $M = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>
11		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1, r_1, i_1;$ $R_2, r_2, i_2;$ $P = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>
12		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1, r_1, i_1;$ $R_2, i_2;$ $P = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы
13		<p>Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; $P = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>
14		<p>Дано: m_1, m_2, m_3; $R_1, r_1, i_1; R_2$; $M = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>
15		<p>Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, i_2; $M = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы
16		<p>Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; $P = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>
17		<p>Дано: m_1, m_2, m_3; $R_1, r_1, i_1; R_2$; $M = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>
18		<p>Дано: m_1, m_2, m_3; $R_1; R_2, i_2$; $M = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы
19	<p>The diagram shows a planetary gear set with two fixed gears, 1 and 2, on a common horizontal axis. A planet gear, 3, meshes with both. Gear 1 has radius R_1 and pitch radius r_1. Gear 2 has radius R_2 and pitch radius r_2. A force P is applied tangentially to gear 1. A torque M_c is applied to the planet gear 3. A weight is suspended from gear 3. Gear 2 is the carrier.</p>	<p>Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; $P = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>
20	<p>The diagram shows a planetary gear set with a fixed gear 1 (radius R_1, pitch radius r_1) and a planet gear 2 (radius R_2, pitch radius r_2). Gear 2 meshes with gear 1 and a fixed gear 3. A torque M_c is applied to gear 2, and a torque M is applied to gear 1. A weight is suspended from gear 3.</p>	<p>Дано: m_1, m_2, m_3; $R_1, r_1, i_1; R_2$; $M = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>
21	<p>The diagram shows a planetary gear set with a fixed gear 1 (radius R_1, pitch radius r_1) and a planet gear 2 (radius R_2, pitch radius r_2). Gear 2 meshes with gear 1 and a fixed gear 3. A force P is applied tangentially to gear 1. A torque M_c is applied to gear 2. A weight is suspended from gear 3.</p>	<p>Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; $P = \text{const}$; $M_c = \text{const}$; $T_0 = 0, s$.</p> <hr/> <p>Найти: v_3.</p>

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы
22		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1, r_1, i_1; R_2;$ $P = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>
23		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1, r_1, i_1; R_2;$ $M = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>
24		<p>Дано: $m_1, m_2, m_3;$ $R_1; R_2, r_2, i_2;$ $P = \text{const};$ $M_c = \text{const};$ $T_0 = 0, s.$</p> <hr/> <p>Найти: $v_3.$</p>

ГЛАВА 5. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОСТЕПЕННОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

5.1. Основные понятия

Механическую систему (МС), имеющую одну степень свободы, положение которой фиксируется одной координатой (угловой или линейной) будем называть *одностепенной системой*.

Рассмотрим подпружиненный механизм с тремя подвижными звеньями: груз **1** движется поступательно, блок **2** вращается вокруг оси, колесо **3** совершает плоское движение, перекатываясь по наклонной поверхности без скольжения, при этом трением качения пренебрегаем (рис. 5.1). Отметим, что реакция N_3 направлена не перпендикулярно к поверхности опоры при ускоренном вращении колеса **3**. В то же время реакция является идеальной, поскольку точка приложения реакции N_3 не имеет скорости и следовательно мощность N_3 равна нулю.

Заданы массы m_1, m_2, m_3 , центральные радиусы инерции звеньев i_2, i_3 , и радиусы блоков r_2, r_3 . Нулевым положением назовем положение механизма при недеформированном состоянии пружины. От нулевого положения будем отсчитывать смещенное положение механизма. Примем за обобщенную координату угол поворота φ звена **2**, за обобщенную скорость – скалярную угловую скорость $\dot{\varphi} = \omega$. Имеем фазовый вектор-строку $V = [\omega, \varphi]$ с фазовыми координатами ω и φ .

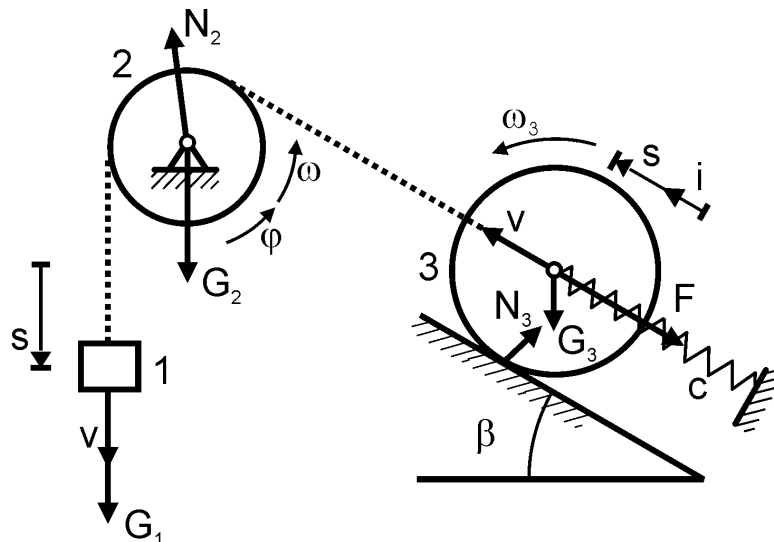


Рис. 5.1 Механическая система в положительной фазе движения
[$\omega > 0, \varphi > 0$]

В уравнении Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{dT}{dq} - Q = 0 \quad (5.1)$$

присваиваем обозначения $q \rightarrow \varphi$, $\dot{q} \rightarrow \omega$. Получаем уравнение в новых обозначениях

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right) - \frac{dT}{d\varphi} - Q = 0,$$

где кинетическая энергия T должна быть найдена в виде функций фазовых переменных, $T = T(\omega, \varphi)$, а обобщенная сила Q – в виде функций фазовой координаты $Q = Q(\varphi)$ (в более сложных задачах имеем $Q(\varphi, \omega, t)$).

В данной теме двойная кинетическая энергия механизма приводится к следующей структуре:

$$2T = J\omega^2, \quad (5.2)$$

где по рисунку 5.1 определяем постоянный коэффициент, именуемый *приведенным моментом инерции* J механизма. Он является угловой мерой инертности механизма.

5.1.1 Потенциальная энергия и обобщенная сила механизма

Обобщенная сила Q представляет собой частное от деления мощности системы приложенных сил на обобщенную скорость $\dot{\varphi} = \omega$.

$$Q = \frac{P}{\omega} \quad (5.3)$$

Мощность в общем случае состоит из скалярных произведений сил на скорости их точек приложения, а также из моментов приложенных пар сил, скалярно умноженных на угловые скорости соответствующих звеньев:

$$P = \sum \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i + \sum \bar{M}_j \cdot \bar{\omega}_j \quad (5.4)$$

Здесь \bar{v}_i – скорость точки приложения силы \bar{F}_i , $\bar{\omega}_j$ – угловая скорость тела, к которому приложена пара сил с моментом \bar{M}_j . Если все силы потенциальны и найдена их потенциальная энергия $\Pi(\varphi)$, то можно вместо формулы (5.4) применить другую формулу:

$$Q = -\frac{\partial \Pi(\varphi)}{\partial \varphi} \quad (5.5)$$

5.1.2. Математическая модель движения механизма

В данных задачах коэффициент инерции J получается постоянным, не зависящим от угловой обобщенной координаты φ , т.е. $J = \text{const}$. Поэтому уравнение Лагранжа (5.1) упрощается, принимая вид

$$J\ddot{\varphi} - Q = 0 \quad (5.6)$$

или

$$\ddot{\varphi} - bQ = 0 \quad \text{при} \quad b = J^{-1} \quad (5.7)$$

т.е. угловое ускорение $\ddot{\varphi} = \dot{\omega}$ прямо пропорционально обобщенной силе с некоторым постоянным коэффициентом пропорциональности b , называемым *обратным приведенным моментом инерции* механизма.

Таким образом, составление дифференциального уравнения движения второго порядка вида (5.6) сводится к вычислению коэффициента b и обобщенной силы Q по формулам:

$$J = \frac{2T}{\omega^2}, \quad b = \frac{\omega^2}{2T}, \quad Q = \frac{P}{\omega} \quad (5.8)$$

Математическая модель движения состоит из однородного дифференциального уравнения (ОДУ) вида (5.6) и начальных условий к нему, т.е. начального состояния механизма:

$$\omega = \omega_0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad (5.9)$$

В данном случае по условию задачи имеем $\omega_0 = 0$, а также $\varphi_0 = 0$, если угол φ отсчитывать от такого положения, при котором пружина была не деформирована.

Замечание 1 В более сложном случае, когда имеем переменный коэффициент инерции $J = J(\varphi)$, в уравнении (5.6) добавляется нелинейное слагаемое:

$$J\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 - Q = 0, \quad \ddot{\varphi} - bQ + \frac{1}{2} b \frac{\partial J}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 = 0, \quad b = 1/J .$$

Замечание 2 Динамическое уравнение одностепенной системы со стационарными связями можно также получать из дифференциального уравнения энергии вида $\dot{T} = P$, где P - мощность системы приложенных сил, точнее из уравнения $\dot{T} / \dot{q} = Q$.

5.2 Задание 5. Линейные колебания одностепенной механической системы

Кинематика

Изобразим механизм (рис. 5.1) в движении, т.е. в «положительной» фазе, когда обобщенная координата $\varphi > 0$ обобщенная скорость $\dot{\varphi} > 0$. Выразим скорость через обобщенную скорость, перемещение через обобщенную координату φ методом интегрирования формул для скоростей, изложенный ниже.

Из рис. 5.1, а также условий нерастяжимости и непроскальзываемости троса, получаем кинематические выражения:

$$v = \omega r_2, \quad s = \int v dt = \varphi r_2, \quad \omega_3 = \frac{v_3}{r_3} = \frac{v}{r_3} = \frac{r_2}{r_3} \omega, \quad \varphi_3 = \frac{r_2}{r_3} \varphi$$

Двойная кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий: поступательного движения груза $2T_1 = m_1 v^2 = m_1 r_2^2 \omega^2$; вращательного движения блока $2T_2 = m_2 i_2^2 \omega^2$; плоского движения колеса, состоящего из поступательного движения вместе с центром масс и вращательного движения колеса вокруг центра масс:

$$2T_3 = m_3 v_3^2 + m_3 i_3^2 \omega^2 = m_3 (r_2^2 + i_3^2) \omega^2$$

Двойная кинетическая энергия механизма равна:

$$2T = 2(T_1 + T_2 + T_3) = (m_1 r_2^2 + m_2 i_2^2 + m_3 (r_2^2 + i_3^2)) \omega^2$$

Приведенный момент инерции механизма есть множитель при квадрате обобщенной (угловой) скорости, именно, $J = \frac{2T}{\omega^2}$

$$J = m_1 r_2^2 + m_2 i_2^2 + m_3 (r_2^2 + i_3^2), b = J^{-1} \quad (5.10)$$

Из последнего выражения видим, что $J = \text{const}$, тогда уравнение Лагранжа будет иметь упрощенный вид (5.6)- (5.7).

Определение обобщенной силы методом мощности

Изобразим на рисунке 5.1 приложенные силы тяжести звеньев $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$, упругую силу пружины $\bar{F} = -c s \bar{i}$, где s – деформация пружины, а также реакции связей \bar{N}_2, \bar{N}_3 , которые не имеют мощности (связи являются идеальными) и в дальнейшем не принимаются во внимание. Вычислим мощность системы сил:

$$P = \bar{G}_1 \cdot \bar{v}_1 + \bar{G}_2 \cdot \bar{O} + \bar{G}_3 \cdot \bar{v}_3 + \bar{F} \cdot \bar{v}_3 + (\bar{N}_2 \cdot \bar{O} + \bar{N}_3 \cdot \bar{O}),$$

отсюда

$$P = G_1 v + G_3 v \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - c s v = (m_1 g r_2 - m_3 g \sin \beta r_2 - c r_2 \varphi) \omega = (m g - c \varphi) r_2 \omega$$

при $m = m_1 - m_3 \sin \beta$.

Коэффициент $Q = \frac{P}{\omega}$ в выражении мощности при обобщенной скорости представляет собой обобщенную силу системы приложенных к механизму сил, т.е. меру эффективности сил.

$$Q = (m g - c \varphi) r_2. \quad (5.11)$$

Здесь мы не использовали понятие потенциальной энергии сил тяжести и упругости.

Определение обобщенной силы методом потенциальной энергии

Потенциальной энергией механизма в его произвольном положении, определяемом обобщенной константой q , называется функция $\Pi(q)$, равная работе всех действующих на механическую систему потенциальных сил при перемещении системы из произвольного положения q в «нулевое» положение $q = 0$, либо - в какое-либо другое выбранное положение $q = q_0$. Потенциальная энергия характеризует способность сил совершать работу на таком перемещении. Ее можно определять с точностью до *аддитивной константы*, т.е. можно отбрасывать или добавлять любую константу. Это объясняется тем, что в уравнение Лагранжа потенциальная энергия входит лишь в виде производной $\partial\Pi / \partial q$, а при дифференцировании константы исчезают.

Переведем условно механизм из произвольного положения в «нулевое», в котором пружина не деформирована, и подсчитаем работу приложенных сил, которая принимается за потенциальную энергию системы сил в произвольном положении. Работа силы тяжести равна произведению этой силы на падение высоты, для груза работа отрицательна, так как груз поднимается. Потенциальная энергия пружины равна $cs^2 / 2$, где $s = r_2\varphi$ – деформация пружины.

Потенциальная энергия всей системы равна

$$\Pi = A_{so} = -G_1s + G_3s \sin \beta + \frac{cs^2}{2} = -Gs + \frac{cs^2}{2}, \quad G = G_1 - G_3 \sin \beta.$$

или окончательно $\Pi = -mgr_2\varphi + \frac{1}{2}cr_2^2\varphi^2$. Дифференцируя это выражение, находим выражение обобщенной силы

$$Q = -\frac{\partial\Pi(\varphi)}{\partial\varphi} = (mg - c\varphi)r_2 \quad (0.1)$$

Результат совпадает с выражением для Q , полученным методом мощности (5.11).

Определение положения равновесия и решение дифференциального уравнения движения системы

Подставим величину (5.11) в уравнение (5.7). Получим

$$\ddot{\varphi} + bcr_2\varphi = (m_1 - m_2 \sin \beta)r_2g$$

или, вводя краткие обозначения,

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = h \quad (5.12),$$

где $k = \sqrt{bcr_2}$, $h = (m_1 - m_2 \sin \beta)r_2gb$.

Будем считать, что $m_1 \geq m_2 \sin \beta$, т.е. $h \geq 0$.

К линейному неоднородному уравнению второго порядка (5.12) присоединяем заданные начальные условия, характеризующие предысторию движения:

$$\omega(0) = 0 \quad \varphi(0) = 0 \quad (5.13)$$

Получаем математическую модель движения в виде начальной задачи Коши (5.12)-(5.13).

Статическое положение равновесия $\varphi = \varphi_{cm}$ находим как постоянное решение неоднородного уравнения (5.12), а именно,

$$\varphi_{cm} = \frac{h}{k^2}$$

Выполним замену переменной

$$\varphi = \varphi_{cm} + \psi \quad \Rightarrow \quad \psi = \varphi - \varphi_{cm}$$

т.е. переносим начало отсчета координаты в статическое положение φ_{cm} .

Получим однородное уравнение для нового угла поворота ψ , который отсчитывается от положения равновесия. Получаем начальную задачу для угла поворота ψ :

$$\ddot{\psi} + k^2\psi = 0 \quad \text{при} \quad \psi_0 = \psi(0) = -\varphi_{cm}, \quad \dot{\psi}_0 = \omega_0 = 0 \quad (5.14)$$

Решение задачи Коши для ОДУ вида (5.14) имеет вид кинематического уравнения гармонических колебаний

$$\psi = \psi_0 \cos(kt) + \frac{w_0}{k} \sin(kt) = A \cos(kt - \alpha),$$

где

$$A = \sqrt{\psi_0^2 + \left(\frac{w_0}{k}\right)^2} \text{ - амплитуда колебаний}$$

$$\alpha = \text{sgn}(w_0) \arccos\left(\frac{\psi_0}{A}\right) \text{ - начальная фаза колебаний}$$

k – циклическая частота колебаний

$$\tau = \frac{2\pi}{k} \text{ - период колебаний, } \nu = \frac{k}{2\pi} \text{ (Гц) - частота колебаний.}$$

При заданных начальных условиях получаем

$$\psi = -\frac{h}{k^2} \cos kt = \frac{h}{k^2} \cos(kt - h)$$

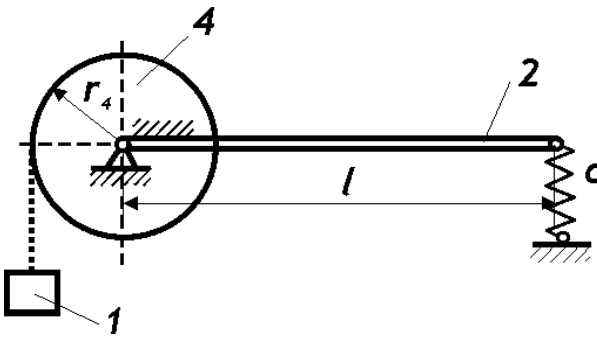
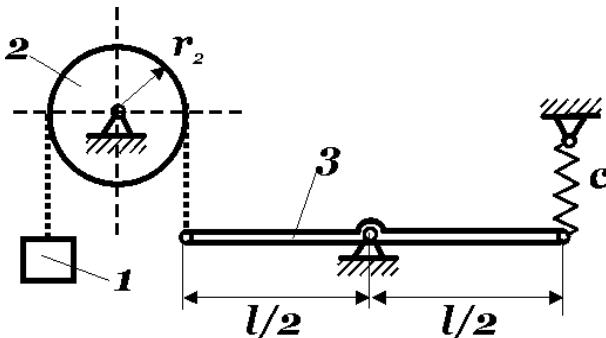
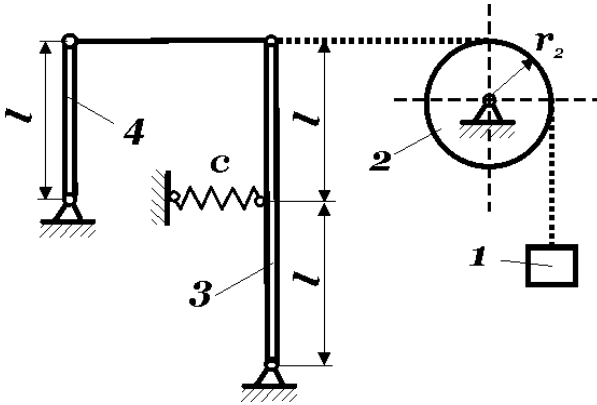
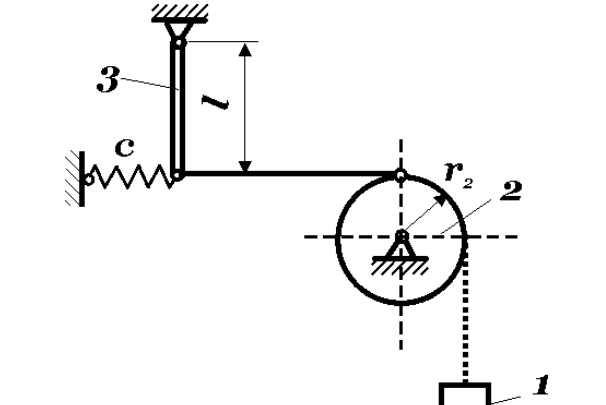
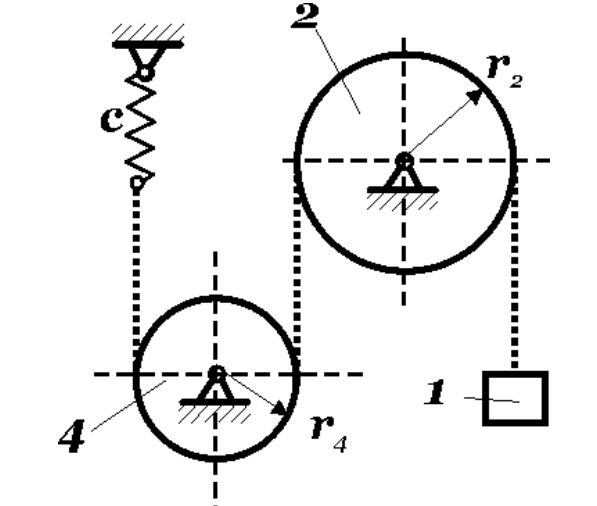
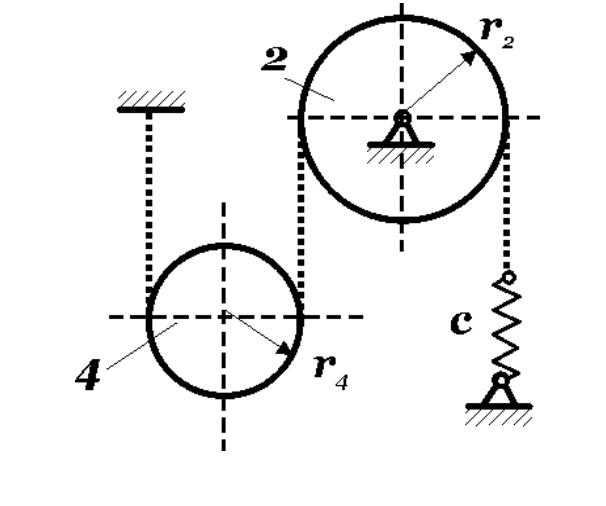
Исходные данные для выполнения самостоятельной работы

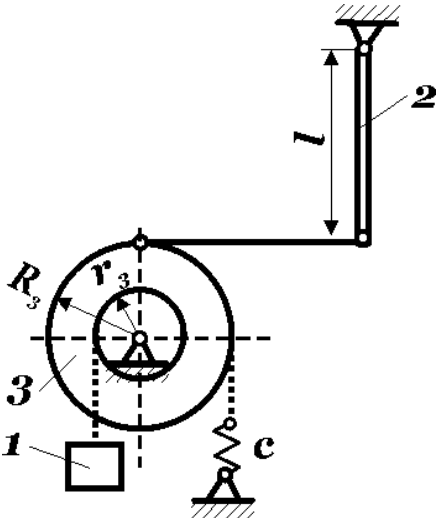
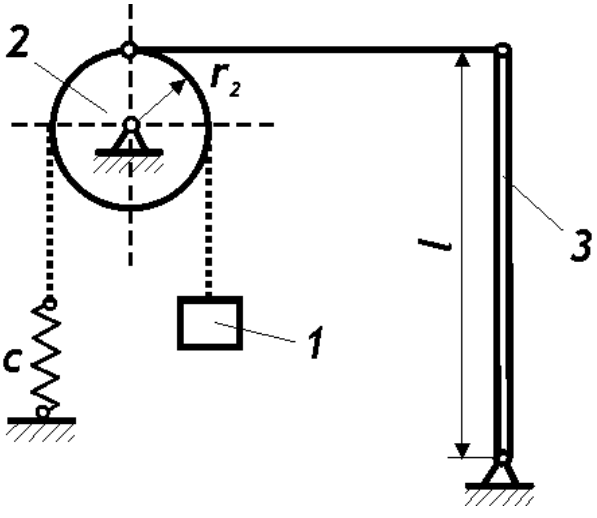
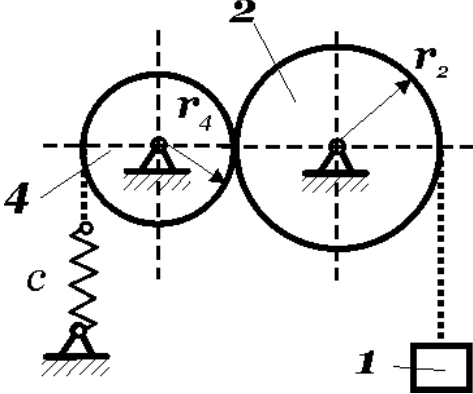
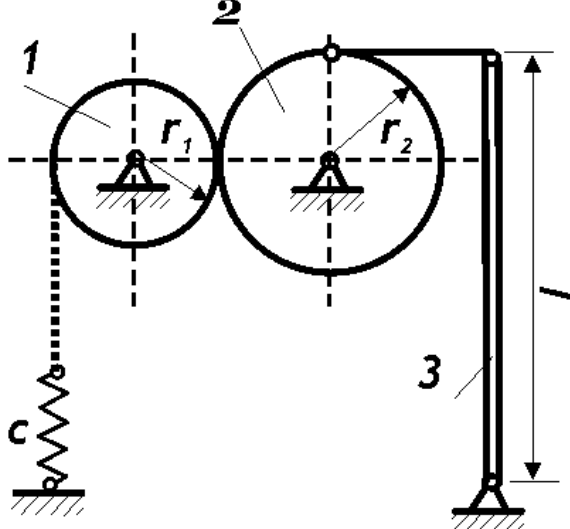
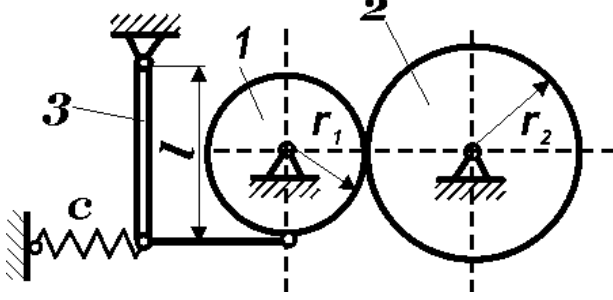
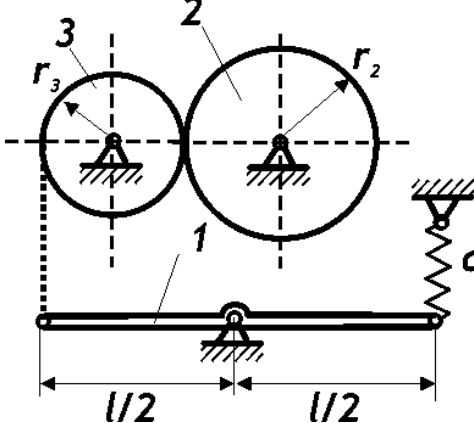
Необходимо построить и решить динамическое уравнение колебаний одноступенной механической системы. Исходная схема механической системы для самостоятельного выполнения задания приведены в таблице 5.1. в соответствии с номером варианта. Жесткость c пружины, внутренние и наружные радиусы r_i, R_i блоков, геометрический размер l стержней, массы m_i всех звеньев, радиусы инерции i блоков считать известными, не отмеченные номерами соединительные стержни считать невесомыми. Задачу решать в символьном виде.

Таблица 5.1

<p style="text-align: right;">1</p> <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; R_3, r_3, i_3, l; c.$</p>	<p style="text-align: right;">2</p> <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; r_2, i_2, l; c.$</p>
<p style="text-align: right;">3</p> <p>Дано: $m_1, m_2, m_3, m_4; r_2, i_2, r_4, i_4, l; c.$</p>	<p style="text-align: right;">4</p> <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; r_2, i_2, R_3, r_3, i_3; c.$</p>
<p style="text-align: right;">5</p> <p>Дано: $m_1, m_2, m_4; r_2, i_2, r_4, i_4; c.$</p>	<p style="text-align: right;">6</p> <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; r_2, i_2, R_3, r_3, i_3; c.$</p>

<p style="text-align: right;">7</p> <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; r_2, i_2, R_3, r_3, i_3; c$.</p>	<p style="text-align: right;">8</p> <p>Дано: $m_1, m_2, m_4; r_2, i_2, r_4, i_4; c$.</p>
<p style="text-align: right;">9</p> <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; r_2, i_2, l; c$</p>	<p style="text-align: right;">10</p> <p>Дано: $m_1, m_2; r_2, i_2, l; c$.</p>
<p style="text-align: right;">11</p> <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; R_3, r_3, i_3, l; c$</p>	<p style="text-align: right;">12</p> <p>Дано: $m_1, m_2, m_3, m_4; r_2, i_2, r_4, i_4, l; c$.</p>

<p style="text-align: right;">13</p>  <p>Дано: $m_1, m_2, m_4; r_4, i_4, l; c.$</p>	<p style="text-align: right;">14</p>  <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; r_2, i_2, l; c.$</p>
<p style="text-align: right;">15</p>  <p>Дано: $m_1, m_2, m_3, m_4; r_2, i_2, l; c.$</p>	<p style="text-align: right;">16</p>  <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; r_2, i_2, l; c.$</p>
<p style="text-align: right;">17</p>  <p>Дано: $m_1, m_2, m_4; r_2, i_2, r_4, i_4; c.$</p>	<p style="text-align: right;">18</p>  <p>Дано: $m_2, m_4; r_2, i_2, r_4, i_4; c.$</p>

<p style="text-align: right;">19</p>  <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; R_3, r_3, i_3, l; c.$</p>	<p style="text-align: right;">20</p>  <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; r_2, i_2, l; c.$</p>
<p style="text-align: right;">21</p>  <p>Дано: $m_1, m_2, m_4; r_2, i_2, r_4, i_4; c.$</p>	<p style="text-align: right;">22</p>  <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; r_2, i_2, r_1, i_1, l; c.$</p>
<p style="text-align: right;">23</p>  <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; r_2, i_2, r_1, i_1, l; c.$</p>	<p style="text-align: right;">24</p>  <p>Дано: $m_1, m_2, m_3; r_2, i_2, r_3, i_3, l; c.$</p>

ЛИТЕРАТУРА

1. С.М. Тарг. Краткий курс теоретической механики — М.: Высшая школа, 2005 .— 416 с.
2. Н.Н. Никитин. Курс теоретической механики — М.: Высшая школа, 2003 .— 720 с.
3. Курс теоретической механики. / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др. Под ред. К.С. Колесникова. — М.: МГТУ им Н.Э. Баумана, 2005.
4. В.Г. Мельников, С.Е. Иванов, Г.И. Мельников. Компьютерные технологии в механике приборных систем / Под ред. В. Г. Мельникова.— СПб.: Издательство СПбГУ ИТМО, 2006 .— 130 с.
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под общ. ред. проф. А.А. Яблонского.— М.: Интеграл-Пресс, 2005 .— 382 с.
6. Ю.А. Борисов, А.Г. Кривошеев, Г.И. Мельников. Теоретическая механика. Часть 1. Кинематика. — СПб.: Издательство СПбГИТМО(ТУ), 2002 .— 66 с.
7. А.Г. Кривошеев, Г.И. Мельников, А.А. Тихонов Под. ред. Г.И. Мельникова. Статика на компьютере. — СПб.: ГИТМО(ТУ), 2000.
8. А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. Курс теоретической механики. — СПб.: Лань, 2002 .— 765 с.
9. Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. Курс теоретической механики. Статика и кинематика. Динамика: в 2 т. — СПб.: Лань, 2004 .— 730 с.
10. И.В. Мещерский. Задачи по теоретической механике. — СПб.: Лань, 2005 .— 448 с
11. В.А. Диевский. Теоретическая механика. —СПб.: изд. Лань, 2005. -320 с.
12. П.Н. Поляхов, С.А. Зегжда, М.П. Юшков. Теоретическая механика. —М.: Высшая школа, 2000. – 592 с.

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

В 1900 году Государственный Совет России принял решение о создании в Ремесленном училище цесаревича Николая механико-оптического и часового отделения. Именно из этого отделения за прошедшие 100 лет вырос Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет).

Курсы механики преподавались в Университете с самого начала его основания. В Российской национальной библиотеке Санкт-Петербурга хранится руководство по теоретической механике для учащихся IV класса Петербургского Ремесленного училища цесаревича Николая 1900 года издания.

При создании на базе механико-оптического и часового отделения сначала техникума, а затем института точной механики и оптики, уровень преподавания теоретической механики естественно повышался. В результате этого в начале 1930-х годов в институте была создана кафедра теоретической механики.

В 1940-х годах ее возглавлял профессор, доктор физико-математических наук Н.И.Идельсон. Одновременно он был также заведующим кафедрой гироскопии и гироскопических приборов ЛИТМО, что свидетельствует о широкой области его научных интересов и научных исследований на обеих кафедрах.

В 1950-х годах кафедру возглавил доцент (а затем профессор) Г.Д.Ананов (1916-1976). Он был известным специалистом в области графо-аналитических методов и применял их к исследованию сложных пространственных механизмов и к решению задач астронавигации, Георгий Давидович также увлеченно занимался программированным обучением и внедрением технических средств в учебный процесс.

В 1960-х годах кафедре теоретической механики возглавлял профессор, доктор технических наук Э.И.Слив. Он внес большой вклад в активизацию научных исследований на кафедре, особенно в области бортовых систем инерциальной навигации подвижных объектов.

В 1965 году кафедра теоретической механики была объединена с кафедрой сопротивления материалов и стала называться кафедрой технической механики, а позднее кафедрой теоретической и прикладной механики.

С 1975 по 2002 год ее возглавлял заслуженный работник высшей школы, профессор, доктор физико-математических наук Г.И.Мельников (который продолжает научную и педагогическую работу). В это время на кафедре разрабатывались численно-аналитические методы теории нелинейных колебаний и оценок устойчивости движения, компьютерные технологии, матричные нелинейные математические модели в механике.

С 2002 г. кафедрой теоретической и прикладной механики руководит д.т.н., доцент Мельников В.Г. Он специализируется в области аналитических методов нелинейной механики, математического и компьютерного моделирования управляемых нелинейных управляемых механических и электромеханических систем, практического применения и развития аналитических методов А.М. Ляпунова, А.Пуанкаре, П.Л. Чебышева является автором шести патентов РФ на изобретения способов и устройств идентификации механических параметров объектов. Имеет публикации в центральных изданиях РФ и зарубежных изданиях, индексируемых Scopus и ISI.

Петр Антонович Красножон
Александр Геннадьевич Кривошеев
Виталий Геннадьевич Мельников
Геннадий Иванович Мельников

Теоретическая механика

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО
Зав. РИО
Подписано к печати
Заказ №
Тираж 100 экз.
Отпечатано на ризографе

Н.Ф. Гусарова