

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов всех специальностей заочной
формы обучения (I, II семестры)

Санкт-Петербург
2018

УДК 51(07)

Математика: методические указания и контрольные задания для студентов всех специальностей заочной формы обучения (I,II семестры)/ сост.: И. Ю. Малова, И.Э.Апакова, Н.Ю.Косовская, М.Э.Юдовин. ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2018. – 18 с.

В настоящих методических указаниях приводятся варианты контрольных заданий. Предназначены для студентов первого курса всех специальностей заочной формы обучения.

Рецензент: доцент кафедры высшей математики ЛЭТИ С.Б.Энтина

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики ВШТЭ Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна (протокол № 6 от 06.02.2018).

Утверждены к изданию методической комиссией факультета промышленной энергетики ВШТЭ Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна (протокол № 3 от 07.02.2018).

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для студентов - заочников первого курса всех специальностей. Оно составлено в соответствии с действующей программой курса высшей математики в ВШТЭ СПбГУПТД. За основу составители приняли издание «Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочников инженерно-технических высших учебных заведений» под ред. Ю. С. Арутюнова 1981 года издания.

Курс высшей математики в ВШТЭ СПбГУПТД состоит из четырех частей в соответствии с количеством семестров, в течение которых он изучается. По каждой части (в каждом семестре) студент - заочник должен выполнить определенное количество контрольных работ (в дальнейшем к/р). Ниже мы приводим номера и темы к/р, которые должны быть выполнены на первом курсе в первом и втором семестрах. Таблицы для выбора задач к/р и общие правила их выполнения и оформления представлены в конце брошюры.

I семестр. Контрольная работа № 1 – Аналитическая геометрия, векторная и линейная алгебра.

Предел функции. Непрерывность функции.

II семестр. Контрольная работа № 2 – Производная функции одной переменной. Исследование функций с помощью производных.

Функции нескольких переменных. Частные производные. Полный дифференциал.

Неопределенный интеграл. Определенный интеграл.

Рекомендации к выполнению контрольных работ

1. В процессе изучения курса математики студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых – освоение практического и теоретического материала. Рецензия на эти работы позволяет студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывает на имеющиеся у него пробелы, помогает сформулировать вопросы к преподавателю.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или

иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Контрольные работы должны выполняться студентом самостоятельно. В противном случае студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к устному экзамену или зачету.

4. Не рекомендуется присылать в университет одновременно работы по нескольким заданиям: это не дает возможности рецензенту своевременно указать студенту на допускаемые им ошибки и удлиняет срок рецензирования работ.

5. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

6. Распределение контрольных работ по семестрам устанавливается университетом с соответствием с распределением материала по семестрам и сообщается студентам дополнительно.

7. Все задания выполняются шариковой или гелевой ручкой. Примеры, выполненные и набранные на компьютере, не принимаются.

Задачи для контрольных заданий

1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

11-20. Даны координаты вершин пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$. Найти: 1) длину ребра $A_1 A_2$; 2) угол между ребрами $A_1 A_2$ и $A_1 A_4$; 3) угол между ребром $A_1 A_4$ и гранью $A_1 A_2 A_3$; 4) площадь грани $A_1 A_2 A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой $A_1 A_2$; 7) уравнение плоскости $A_1 A_2 A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$. Сделать чертеж.

11. $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(0; 2; 7)$, $A_4(1; 5; 0)$.

12. $A_1(4; 4; 10)$, $A_2(4; 10; 2)$, $A_3(2; 8; 4)$, $A_4(9; 6; 9)$.

13. $A_1(4; 6; 5)$, $A_2(6; 9; 4)$, $A_3(2; 10; 10)$, $A_4(7; 5; 9)$.

14. $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(8; 7; 4)$, $A_3(5; 10; 4)$, $A_4(4; 7; 8)$.

15. $A_1(10; 6; 6)$, $A_2(-2; 8; 2)$, $A_3(6; 8; 9)$, $A_4(7; 10; 3)$.

16. $A_1(1; 8; 2)$, $A_2(5; 2; 6)$, $A_3(5; 7; 4)$, $A_4(4; 10; 9)$.

17. $A_1(6; 6; 5)$, $A_2(4; 9; 5)$, $A_3(4; 6; 11)$, $A_4(6; 9; 3)$.

18. $A_1(7; 2; 2)$, $A_2(5; 7; 7)$, $A_3(5; 3; 1)$, $A_4(2; 3; 7)$.

19. $A_1(8; 6; 4)$, $A_2(10; 5; 5)$, $A_3(5; 6; 8)$, $A_4(8; 10; 7)$.

20. $A_1(7; 7; 3)$, $A_2(6; 5; 8)$, $A_3(3; 5; 8)$, $A_4(8; 4; 1)$.

21. Уравнение одной из сторон квадрата: $x + 3y - 5 = 0$. Составить уравнение трех остальных сторон квадрата, если точка пересечения его диагоналей $(-1, 0)$.

22. Даны уравнения одной из сторон ромба: $x - 3y + 10 = 0$ и одной из его диагоналей: $x + 4y - 4 = 0$; диагонали ромба пересекаются в точке $(0, 1)$. Найти уравнения остальных сторон ромба.

23. Уравнения двух сторон параллелограмма: $x + 2y + 2 = 0$ и $x + y - 4 = 0$, а уравнение одной из его диагоналей: $x - 2 = 0$. Найти координаты вершин параллелограмма.

24. Даны две вершины треугольника: $A(-3, 3)$ и $B(5, -1)$ и точка $D(4, 3)$ – точка пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон.

25. Даны вершины $A(-3, -2)$, $B(4, -1)$, $C(1, 3)$ трапеции $ABCD$ (AD

параллельно BC). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции.

26. Даны уравнения двух сторон треугольника $5x + 4y + 15 = 0$ и $4x + y - 9 = 0$. Его медианы пересекаются в точке $(0, 2)$. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

27. Даны две вершины треугольника : $A(2, -2)$ и $B(3, -1)$ и точка $P(1, 0)$ – точка пересечения медиан треугольника ABC . Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину C .

28. Даны уравнения двух высот треугольника : $x + y = 4$ и $y = 2x$ и одна из его вершин $A(0, 2)$. Составить уравнения сторон треугольника.

29. Даны уравнения двух медиан треугольника : $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$ и одна из его вершин $(1, 3)$. Составить уравнения его сторон.

30. Две стороны треугольника заданы уравнениями : $5x - 2y - 8 = 0$ и $3x - 2y - 8 = 0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение этой стороны.

31. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от начала координат и от точки $A(5, 0)$ относится как $2 : 1$.

32. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(-1, 0)$ вдвое меньше расстояния её от прямой $x = -4$.

33. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2, 0)$ и от прямой $5x + 8 = 0$ относится как $5 : 4$.

34. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(4, 0)$, чем от точки $B(1, 0)$.

35. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2, 0)$ и от прямой $2x + 5 = 0$ относится как $4 : 5$.

36. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(3, 0)$ вдвое меньше расстояния от точки $B(26, 0)$.

37. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0, 2)$ и от прямой $y - 4 = 0$.

38. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноотстоит от оси ординат и от окружности $x^2 + y^2 = 4x$.

39. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2, 6)$ и от прямой $y + 2 = 0$.

40. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(-4, 0)$ втрое дальше, чем от начала координат.

2. Введение в математический анализ

Задания 41-50. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

41. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x}{3x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{5x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$.
42. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x-7}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.
43. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^3 + x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.
44. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 - x + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x-1}}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}$.
45. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 5}{5x^2 - x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$.
46. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x + 5x^4}{x^4 - 12x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1)(\ln(x+3) - \ln x)$.
47. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-5)(\ln(x-3) - \ln x)$.
48. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x-3}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x/2)}{x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{x/(3x-3)}$.

$$49. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 5x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{2x/(x^2-4)}.$$

$$50. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^2 + 9}{2x^5 + 2x^2 + 5}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{2x} - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{2/(x-3)}.$$

51-60. Заданы функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x_1, x_2 . Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точке разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

$$51. f(x) = 9^{1/(2-x)}, x_1 = 0, x_2 = 2.$$

$$52. f(x) = 4^{1/(3-x)}, x_1 = 1, x_2 = 3.$$

$$53. f(x) = 12^{1/x}, x_1 = 0, x_2 = 2.$$

$$54. f(x) = 3^{1/(4-x)}, x_1 = 2, x_2 = 4.$$

$$55. f(x) = 8^{1/(5-x)}, x_1 = 3, x_2 = 5.$$

$$56. f(x) = 10^{1/(7-x)}, x_1 = 5, x_2 = 7.$$

$$57. f(x) = 14^{1/(6-x)}, x_1 = 4, x_2 = 6.$$

$$58. f(x) = 15^{1/(8-x)}, x_1 = 6, x_2 = 8.$$

$$59. f(x) = 11^{1/(4+x)}, x_1 = -4, x_2 = -2.$$

$$60. f(x) = 13^{1/(5+x)}, x_1 = -5, x_2 = -3.$$

3. Производная и ее приложения

61-70. Найти производные dy/dx данных функций .

$$61. \text{ а) } y = \frac{2\sqrt{4x+3} - 3}{\sqrt{x^3+x+1}}; \quad \text{б) } y = e^{\cos x + 3x};$$

$$\text{в) } y = \ln(\sin(2x+5)); \quad \text{г) } y = x^{\sqrt{x}}.$$

$$62. \text{ а) } y = \sqrt{1-x^2} \cos x; \quad \text{б) } y = 4 \sin x / \cos^2 x;$$

$$\text{в) } y = \operatorname{tg}(e^{2x}); \quad \text{г) } y = x^{1/x}.$$

$$63. \text{ а) } y = x\sqrt{1+x^2}; \quad \text{б) } y = \operatorname{tg}^2 2x;$$

$$\text{в) } y = \arcsin(\sqrt{1-3x}); \quad \text{г) } y = x^{\ln x}.$$

$$64. \text{ а) } y = 3/\sqrt{3-4x+5x^2}; \quad \text{б) } y = \sin x - x \cos x;$$

$$\text{в) } y = x^5 \ln x; \quad \text{г) } y = x^{\operatorname{tg} x}.$$

65. а) $y = x/\sqrt{4 - x^2}$; б) $y = \sin^2 x/(2 + 3 \cos^2 x)$;
 в) $y = x \ln x/(x - 1)$; г) $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$.
 66. а) $y = 5\sqrt[5]{x^3 + 1} + 1/x$; б) $y = \operatorname{tg}^3(x^2 + 1)$;
 в) $y = 3^{\operatorname{arctg} x}$; г) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$.
 67. а) $y = \sqrt[3]{(1 + x^2)/(1 - x^2)}$; б) $y = \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$;
 в) $y = \operatorname{arctg}(x/(1 + \sqrt{1 - x^2}))$; г) $y = (x + x^2)^x$.
 68. а) $y = \sqrt{x^5 + 5x^4 - 5}$; б) $y = \ln \sqrt{(1 - \sin x)/(1 + \sin x)}$;
 в) $y = \operatorname{arctg} \ln x$; г) $y = (\sin x)^{\ln x}$.
 69. а) $y = \sqrt[5]{x^2 + x + 1/x}$; б) $y = 2^x e^{-x}$;
 в) $y = \arcsin x/\sqrt{1 - x^2}$; г) $y = (\cos x)^x$.
 70. а) $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^3 + 1}$; б) $y = \operatorname{tg}^3 x/3 - \operatorname{tg} x + x$;
 в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{3 - x}$; г) $y = x^{\cos x}$.
 71-80. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$

на отрезке $[a, b]$.

71. $f(x) = x^3 - 12x + 7$; $[0, 3]$.
 72. $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$; $[0, 2]$.
 73. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$; $[0, \pi/2]$.
 74. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$; $[-3, 1]$.
 75. $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $[1/2, 2]$.
 76. $f(x) = x^4 + 4x$; $[-2, 2]$.
 77. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x$; $[0, \pi/2]$.
 78. $f(x) = 81x - x^4$; $[-1, 4]$.
 79. $f(x) = 3 - 2x^2$; $[-1, 3]$.
 80. $f(x) = x - \sin x$; $[-\pi, \pi]$.

81 – 90. Исследовать методами дифференциального исчисления функции и, используя результаты исследования, построить ее график.

81. $y = \frac{4x}{4 + x^2}$. 82. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. 89. $y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}$.
 83. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. 84. $y = \frac{x^2}{x - 1}$. 90. $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$.
 85. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$. 86. $y = \frac{4x^3 + 5}{x}$.
 87. $y = \frac{x^2 + 5}{x - 3}$. 88. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

91. Дана функция

$$z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}.$$

Показать, что

$$1/x \frac{\partial z}{\partial x} + 1/y \frac{\partial z}{\partial y} = z/y^2.$$

92. Дана функция

$$z = y^2/(3x) + \arcsin(xy).$$

Показать, что

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

93. Дана функция

$$z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1).$$

Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

94. Дана функция

$$z = e^{xy}.$$

Показать, что

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

95. Дана функция

$$z = \ln(x + e^{-y}).$$

Показать, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

96. Дана функция

$$z = x/y.$$

Показать, что

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

97. Дана функция

$$z = x^y.$$

Показать, что

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}.$$

98. Дана функция

$$z = x e^{y/x}.$$

Показать, что

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

99. Дана функция

$$z = \sin(x + ay).$$

Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

100. Дана функция

$$z = \cos y + (y - x) \sin y.$$

Показать, что

$$(x - y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

101 – 110. Даны: функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор \mathbf{a} .

1) Найти $\text{grad}(z)$ в точке A ; 2) Производную в точке A по направлению \mathbf{a} .

101. $z = x^2 + xy + y^2$; $A(1; 1)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

102. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$; $A(2; 1)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

103. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$; $A(1; 1)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

104. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; $A(1; 1)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

105. $z = 5x^2 + 6xy$; $A(2; 1)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

106. $z = \text{arctg}(xy^2)$; $A(2; 3)$, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

107. $z = \arcsin(x^2/y^2)$; $A(1; 2)$, $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$.

108. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$; $A(1; 3)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

109. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$; $A(-1; 2)$, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

110. $z = 3x^2y^2 + 5y^2x$; $A(1; 1)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

5. Неопределенный и определенный интегралы

111 – 120. Найти неопределенные интегралы. В двух первых примерах (п. а и б) проверить результаты дифференцированием.

111. а) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$; б) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3 + 8}$; г) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$.

112. а) $\int \frac{x dx}{(x^2 + 4)^6}$; б) $\int e^x \ln(1 + 3e^x) dx$;

в) $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$.

113. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x 3^x dx$;

в) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3 + 4x^2 + 4x + 16}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

114. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \operatorname{tg} x + 1)}$; б) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$; г) $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$.

115. а) $\int \frac{\cos 3x dx}{4 + \sin 3x}$; б) $\int x^2 e^{3x} dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$; г) $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}$.

116. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x \arcsin(1/x) dx$;

в) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3 + x^2 - 2x}$; г) $\int \frac{(\sqrt[4]{x} + 1)dx}{(\sqrt{x} + 4)\sqrt[4]{x^3}}$.

117. а) $\int \frac{(x + \operatorname{arctg} x)dx}{1 + x^2}$; б) $\int x \ln(x^2 + 1) dx$;

в) $\int \frac{(x^3 - 3)dx}{x^4 + 5x^2 + 6}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+5} dx}{1 + \sqrt[3]{x+5}}$.

118. а) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; б) $\int x \sin x \cos x dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - 81}$; г) $\int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x}$.

$$119. \text{ а) } \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3 + 2 \cos x}}; \quad \text{ б) } \int x^2 \sin 4x dx;$$

$$\text{ в) } \int \frac{(x^2 - x + 1) dx}{x^4 + 2x^2 - 3}; \quad \text{ г) } \int \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[6]{x} + 1) dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$120. \text{ а) } \int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x} dx}{x}; \quad \text{ б) } \int x^2 \ln^2 x dx;$$

$$\text{ в) } \int \frac{(x^3 - 6) dx}{x^4 + 6x^2 + 8}; \quad \text{ г) } \int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 2}.$$

121 – 130. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

$$121. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx. \quad 122. \int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$123. \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}. \quad 124. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^3}}.$$

$$125. \int_1^2 \frac{dx}{(x - 1)^2}. \quad 126. \int_{-3}^2 \frac{dx}{(x + 3)^2}.$$

$$127. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}. \quad 128. \int_0^3 \frac{dx}{(x - 2)^2}.$$

$$129. \int_0^4 \frac{dx}{(x - 3)^2}. \quad 130. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

131. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 3x + 7$.

132. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и осью Ox .

133. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 3(1 + \cos \varphi)$.

134. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r = 4 \sin 2\varphi$.

135. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

136. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной полуэллипсом $y = 3\sqrt{1 - x^2}$, параболой $y = \sqrt{1 - x}$ и осью Oy .

137. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y = 2/(1 + x^2)$ и $y = x^2$.

138. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{(x - 2)^3}$ от точки $A(2; 0)$ до точки $B(6; 8)$.

139. Вычислить длину кардиоиды $r = 3(1 - \cos \varphi)$.

140. Вычислить длину одной арки циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Таблицы контрольных заданий

В первом семестре студенты выполняют контрольную работу № 1 .

Во втором семестре студенты выполняют контрольную работу № 2.

Вариант	Контрольная работа № 1					
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66
7	17	27	37	47	57	67
8	18	28	38	48	58	68
9	19	29	39	49	59	69
10	20	30	40	50	60	70

Вариант	Контрольная работа № 2						
1	71	81	91	101	111	121	131
2	72	82	92	102	112	122	132
3	73	83	93	103	113	123	133
4	74	84	94	104	114	124	134
5	75	85	95	105	115	125	135
6	76	86	96	106	116	126	136
7	77	87	97	107	117	127	137
8	78	88	98	108	118	128	138
9	79	89	99	109	119	129	139
10	80	90	100	110	120	130	140

Правила оформления контрольных работ

При выполнении контрольных работ надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного. В работе следует оставлять поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы, название дисциплины; здесь же следует указать дату отсылки работы в институт и почтовый адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и расписаться.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, в соответствии с положенным вариантом. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задания не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной работы студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки.

8. К сдаче зачета или экзамена допускаются только те студенты, у которых зачтены контрольные работы.

Список основных теоретических вопросов, изучаемых в первом семестре

1. Определители второго порядка. Формула вычисления определителя третьего порядка путем разложения по первой строке.
2. Расстояние между двумя точками на плоскости. Координаты середины отрезка.
3. Уравнение прямой: общее и с угловым коэффициентом.

4. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, с заданным угловым коэффициентом; уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
5. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
6. Окружность. Каноническое уравнение, изображение.
7. Эллипс. Каноническое уравнение, изображение.
8. Векторы. Определение, равенство, операции над векторами.
9. Векторы i, j, k . Координаты вектора, действия над векторами в координатной форме, условие коллинеарности.
10. Скалярное произведение: определение, выражение через координаты, условия перпендикулярности.
11. Векторное произведение: определение, выражение через координаты.
12. Общее уравнение плоскости, геометрический смысл коэффициентов.
13. Канонические уравнения прямой в пространстве. Геометрический смысл коэффициентов.
14. Предел числовой последовательности.
15. Определение предела функции.
16. Первый и второй замечательные пределы.
17. Определение непрерывной функции. Примеры разрывных функций.
18. Определение производной. Её геометрический и физический смысл.
19. Правила дифференцирования.
20. Таблица производных. Примеры.
21. Производная сложной функции. Примеры.

Список основных теоретических вопросов, изучаемых во втором семестре

1. Возрастание и убывание функции.
2. Экстремум функции одной переменной, необходимое условие экстремума.
3. Достаточное условие экстремума функции одной переменной.
4. Функции двух переменных. Частные приращения. Частные производные.
5. Частные производные второго порядка, теорема о равенстве смешанных

производных.

6. Экстремумы функций двух переменных. Необходимое условие экстремума функции двух переменных.
7. Градиент функции.
8. Первообразная: определение, свойства.
9. Неопределенный интеграл: определение, свойства.
10. Таблица неопределенных интегралов.
11. Замена переменной в неопределенном интеграле.
12. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
13. Определенный интеграл: определение, геометрический смысл.
14. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница.
15. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
16. Замена переменной в определенном интеграле.
17. Площадь плоской фигуры.

Библиографический список

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. – М.: Наука, 1978. Т. 1,2.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов / под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1978.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980.

Содержание

Предисловие	3
Рекомендации к выполнению контрольных работ	3
Задачи для контрольных заданий	5
Таблицы контрольных заданий	14
Правила оформления контрольных работ	15
Список основных теоретических вопросов, изучаемых в первом семестре.....	15
Список основных теоретических вопросов, изучаемых во втором семестре.....	16
Библиографический список	17

Редактор и корректор В. А. Басова

Техн. редактор Л. Я. Титова

Темплан 2018 г., поз. 15.

Подп. к печати 05.03.2018. Формат 60×84 / 16. Бумага тип № 3. Печать офсетная. Объем 1,25 печ. л.; 1,25 уч. изд. л. Тираж 100 экз. Изд. № 15. Цена «С». Заказ .

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.