Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

МЕХАНИКА

Методческие указания к выполнению расчетно-графических работ для студентов заочного факультета всех направлений и специальностей

Составил:
доцент Кафедры высшей математики и механики
Ершов Д.Ю.

Санкт-Петербург
2015

Модуль 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Цикл расчетно-графических работ (РГР) по теоретической механике включает пять задач по статике (С), кинематике (К) и динамике (Д).

В заданиях к РГР для каждой задачи приведено 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С1.4 – это рис. 4 к задаче С1, т.е по статике и т.д. Номера вариантов проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Рисунок выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; все углы, действующие силы, число тел и их расположение на рисунке должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач рисунок получится более простой, чем общий. Рисунок должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять показать все необходимые векторы – силы, скорости, ускорения и др.

Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.), следует подробно излагать весь ход расчетов, обязательно указывая единицы измерения получаемых величин.

Условия равновесия произвольной плоской системы сил

Задача С1. Жесткая рама закреплена в точке а шарнирно, а в точке в прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами или к шарнирной опоре на катках (рис. С1.1–С1.10). В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P = 25 кН. На раму действуют пара сил с моментом M = 60 кНм и две силы, величины направления и точки приложения которых указаны в табл. С1. В последнем столбце табл. С1 указан участок, на котором действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q. Направление действия распределенной нагрузки на горизонтальном участке – вниз, на вертикальном – влево.

Определить реакции связей в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять a = 0,5 м.

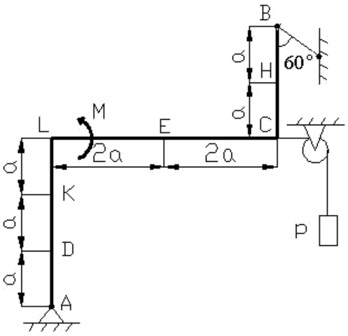


Рис. С1.1

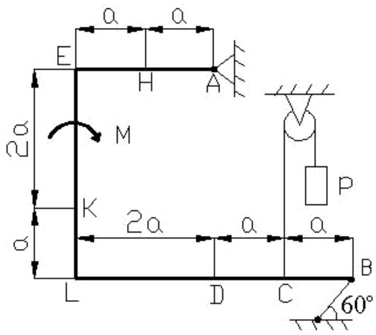


Рис. С1.2

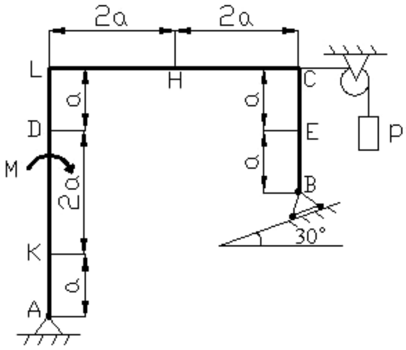


Рис. С1.3

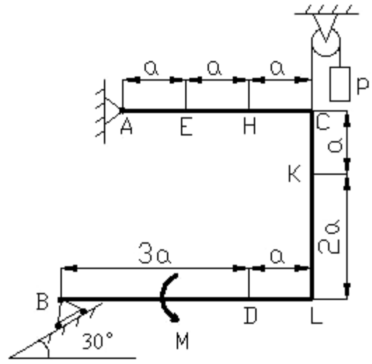


Рис. С1.4

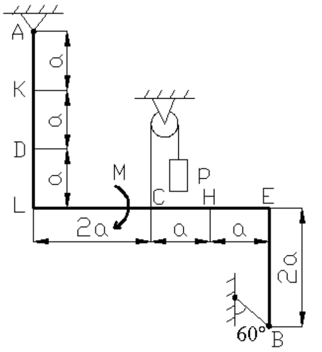


Рис. С1.5

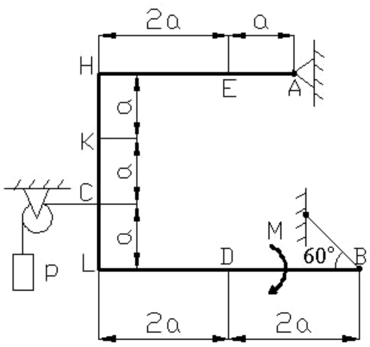


Рис. С1.6

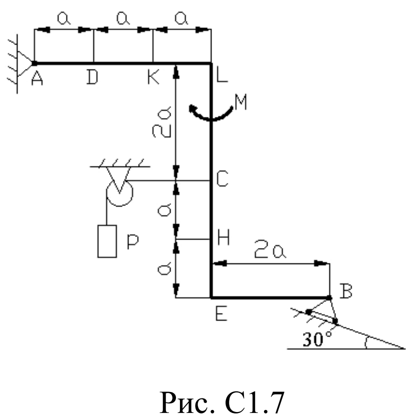


Рис. С1.7

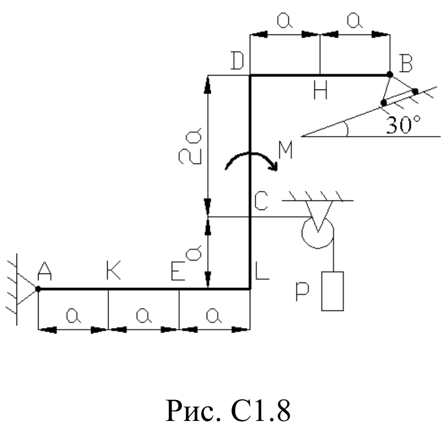


Рис. С1.8

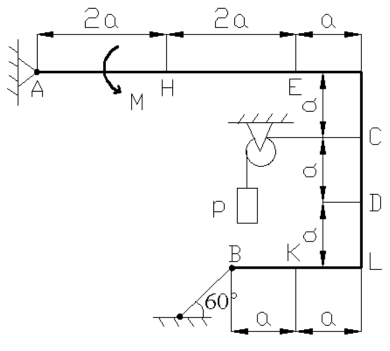


Рис. С1.9

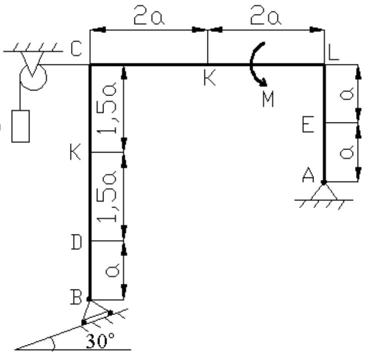
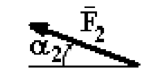
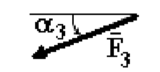
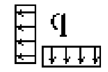


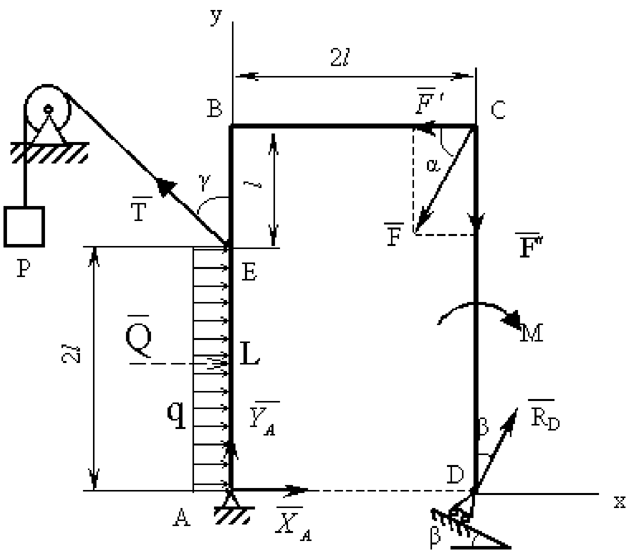
Рис. С1.10

Таблица С1

Номер Варианта	Силы								Распределенная нагрузка
	F_1 = 10 кН		F_2= 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН		q = 10 кН/м
									
	Точка приложения	α_1	Точка приложения	α_2	Точка приложения	α_3	Точка приложения	α_4	Участок приложения q
1	H	30	–	–	–	–	K	60	KL
2	–	–	D	45	E	60	–	–	LC
3	K	45	–	–	–	–	E	30	KL
4	–	–	K	60	H	30	–	–	LC
5	D	30	–	–	–	–	E	60	KL
6	–	–	H	30	–	–	D	45	LC
7	E	60	–	–	K	45	–	–	KL
8	–	–	D	60	–	–	H	45	LC
9	H	60	–	–	D	30	–	–	KL
10	–	–	E	45	K	30	–	–	LC

Указания. При решении задачи С1 следует учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, будут одинаковыми, когда трением пренебрегают. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если составлять уравнение моментов относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента вектора силы $\bar{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона, тогда $m_0(\bar{F}) = m_0(\bar{F}') + m_0(\bar{F}'')$.

Пример решения задачи С1. Жесткая рама *ABCD* (рис. С1) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору и в точке *D* – подвижную шарнирную опору (на катках). Действующие нагрузки и размеры показаны на рис. С1. В точке *E* к раме прикреплен трос с подвешенным грузом, вес которого *P*. На раму действуют сила *F*, пара сил с моментом *M* и равномерно распределенная нагрузка интенсивности *q*.



К задаче С1

Решение. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси xy и покажем действующие на раму нагрузки: силу $\bar{F}$, пару сил с моментом *M*, натяжение троса $\bar{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_D$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя её составляющими, реакция шарнирной опоры *D* на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости). Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей сосредоточенной силой $Q = q{\cdot}2l = 10{\cdot}2{\cdot}0{,}5 = 10$ кН, вектор которой приложен к середине отрезка *AE* (точка *L*) и направлен в сторону действия нагрузки.

Для полученной плоской системы произвольных сил составим уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\bar{F}$ относительно точки *A* разложим её на составляющие $F' = F\cos\alpha$ и $F'' = F\sin\alpha$:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad X_A + R_D \sin\beta - F\cos\alpha - T\sin\gamma + Q = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad Y_A + R_D\cos\beta - F\sin\alpha + T\cos\gamma = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -M + R_D\cos\beta\, 2l + F\cos\alpha\, 3l - F\sin\alpha\, 2l +$$

$$+ T\sin\gamma\, 2l - Ql = 0.$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив затем эти уравнения, найдём искомые реакции связей: X_A = 4,89 кН; Y_A = –22,5 кН; R_D = 35,57 кН.

Выполним проверку правильности решения задачи. Составим уравнение моментов относительно точки D:

$$\sum m_D(\bar{F}_k) = 0,\ -M + F\cos\alpha\, 3l - T\cos\gamma\, 2l + T\sin\gamma\, 2l - Ql - Y_A\, 2l =$$
$$= -40 + 30\cdot 0{,}5\cdot 3\cdot 0{,}5 - 25\cdot 0{,}707\cdot 2\cdot 0{,}5 +$$
$$+ 25\cdot 0{,}707\cdot 2\cdot 0{,}5 - 10\cdot 0{,}5 - (-22{,}5)2\cdot 0{,}5 = 0.$$

Полученный результат говорит о том, что задача решена верно.

Ответ: X_A = 4,89 кН;
Y_A = –22,5 кН;
R_D = 35,57 кН.

Знак «минус» перед величиной Y_A означает, что эта сила имеет направление, обратное указанному на рис. С1.

Кинематика точки

Задача К1. Движение точки в плоскости xy задано уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y – в метрах, t – в секундах (табл. К1, К1а). Найти и изобразить траекторию точки (линию, которую точка описывает при своем движении, считая, что движение начинается в момент времени t = 0). Определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения в момент времени t = 1 с и радиус кривизны в соответствующей точке в этот же момент времени.

Указания. Задача К1 решается с помощью формул, по которым определяется скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t = 1с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть знакомые из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Таблица К1

Последняя цифра варианта	Уравнение движения точки $x = f_1(t)$	Примечания
1 2 3	$4\cos(\pi t/6)$ $2 - 4\cos(\pi t/6)$ $2\cos(\pi t/6) - 3$	$y = f_2(t)$ для вариантов от 00 до 29 (две последние цифры варианта) взять из столбца 2 табл. К1а
4 5 6 7	$4 - 2t$ $2 - t$ $2t$ $t - 4$	$y = f_2(t)$ для вариантов от 30 до 69 (две последние цифры варианта) взять из столбца 3 табл. К1а
8 9 0	$8\sin(\pi t/6) - 2$ $2\sin(\pi t/6)$ $2 - 4\sin(\pi t/6)$	$y = f_2(t)$ для вариантов от от 70 до 99 (две последние цифры варианта) взять из столбца 4 табл. К1а

Таблица К1а

Последняя цифра варианта	Уравнение движения точки $y = f_2(t)$		
	Для вариантов от 00 до 29	Для вариантов от 30 до 69	Для вариантов от 70 до 99
1	2	3	4
1	$12\sin(\pi t/6)$	$2t^2 + 2$	$4\cos(\pi t/6) - 2$
2	$4 - 6\cos(\pi t/3)$	$8\sin(\pi t/4)$	$14 - 16\cos(\pi t/6)$
3	$-3\sin^2(\pi t/6)$	$(2 + t)^2$	$4\cos(\pi t/3)$
4	$9\sin(\pi t/6) - 4$	$2t^3$	$-10\cos(\pi t/6)$
5	$4\cos(\pi t/3) - 2$	$2 + 2\cos(\pi t/4)$	$-4\cos(\pi t/6)$
6	$-10\sin(\pi t/6)$	$2 - 3t^2$	$8 - 12\cos(\pi t/3)$
7	$2 - 6\sin^2(\pi t/6)$	$2 - 2\sin(\pi t/4)$	$2\cos(\pi t/6)$
8	$2\sin(\pi t/6) - 2$	$(t + 1)^3$	$2 - 8\cos(\pi t/3)$
9	$8\cos(\pi t/3) + 5$	$2 - t^3$	$8\cos(\pi t/6) - 4$
0	$3 - 8\sin(\pi t/6)$	$4\cos(\pi t/4)$	$-8\cos(\pi t/3)$

Пример решения задачи К1 Движение точки в плоскости xy задано уравнениями

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3;$$

$$y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 1,$$

где x, y – в метрах, t – в секундах.

Найти и изобразить траекторию точки (линию, которую точка описывает при своем движении, считая, что движение начинается в момент времени t = 0). Определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения в момент времени t = 1 с и радиус кривизны в соответствующей точке в этот же момент времени. Показать векторы скорости и ускорения этой точки.

Решение. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)=\frac{3-x}{2};\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)=\frac{y+1}{3}.$$

возводим обе части уравнений в квадрат и складываем:

Получим

$$\frac{(3-x)^2}{2^2}+\frac{(y+1)^2}{3^2}=1.$$

Это уравнение эллипса (рис. К1). Найдем на траектории положение точки *M*, определив ее координаты при t = 1 с:

$x_{t=1c}=-1{,}59$ м;

$y_{t=1c}=1{,}12$ м (рис. К1).

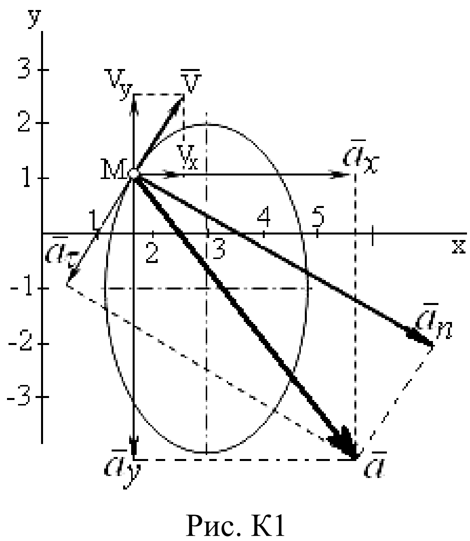


Рис. К1

Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$V_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);\quad V_y=\frac{dy}{dt}=\frac{3\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right);\quad V=\sqrt{V_x^2+V_y^2},$$

при t = 1 с

$V_x = 1{,}11$ м/с; $V_y = 1{,}67$ м/с;

$V = 2{,}0$ м/с.

Аналогично найдем ускорение точки и определим касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{3\pi^2}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ ; \ a_\tau = \frac{a_x V_x + a_y V_y}{V}; \ a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\ ; \ \rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

При t = 1 с

$a_x = 0{,}87$ м/с^2; $\qquad a_\tau = -0{,}6$ м/с^2;

$a_y = -1{,}30$ м/с^2; $\qquad a_n = 1{,}67$ м/с^2;

$a = 1{,}57$ м/с^2; $\qquad \rho = 2{,}38$ м.

Покажем векторы скорости и ускорения для соответствующей точки M траектории (см. рис. K1).

Ответ: $V = 2{,}0$ м/с; $a = 1{,}57$ м/с^2; $a_\tau = -0{,}6$ м/с^2; $a_n = 1{,}68$ м/с^2;
$\rho = 2{,}38$ м.

Сложное движение точки

Задача K2. Пластина вращается вокруг неподвижной оси по закону φ = φ(t), заданному в табл. K2. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой (рис. K2.1–K2.10). На рис K2.8, K2.9, K2.10 ось вращения пластины проходит через точку O_1 перпендикулярно плоскости чертежа (пластина вращается в своей плоскости). На рис. K2.1, K2.3, K2.5, K2.6 ось вращения пластины вертикальна, а на рис. K2.2 K2.4, K2.7 – горизонтальна. По пластине движется точка *M* согласно закону *s* = *OM* = s(t) (табл. K2). На всех рисунках точка *M* показана в положении, при котором *s* = *OM* положительно.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени t = 1с.

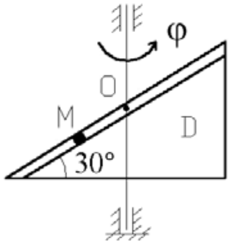


Рис. К2.1

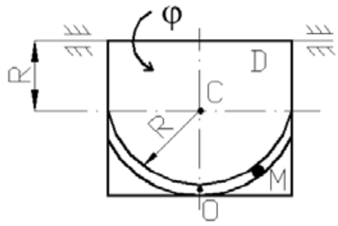


Рис. К2.2

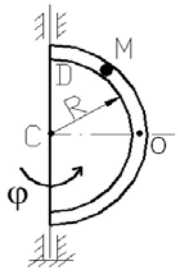


Рис. К2.3

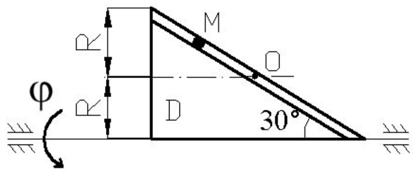


Рис. К2.4

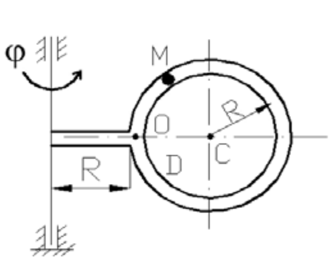


Рис. К2.5

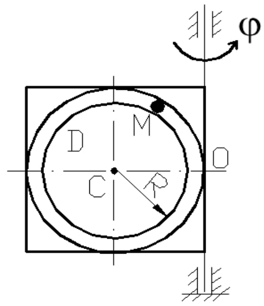


Рис. К2.6

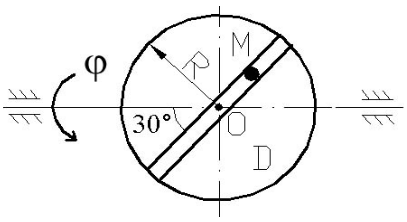


Рис. К2.7

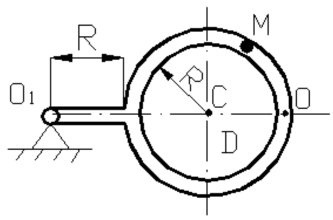


Рис. К 2.8

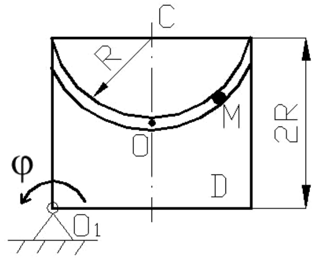


Рис. К2.9

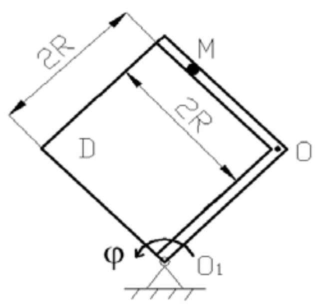


Рис. К2.10

Указания. При решении задачи К2 следует движение точки по пластине считать относительным, вращательное движение самой пластины – переносным и воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений.

Прежде всего необходимо определить, где в момент времени t = 1 с будет находиться точка *M*, и изобразить ее именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунке к задаче). В случаях, когда точка *M* движется по дуге радиуса *R*, положение точки *M* определяется углом *OCM*.

Таблица К2

Номер варианта	Закон движения пластины φ = φ (t), рад	Размер R, м	Закон движения точки s = s(t), м
1	$4(t^2 - t)$	1,2	$\frac{\pi}{6} R (4t^2 - 2t^3)$
2	$3t^2 - 8t$	1,6	$\frac{\pi}{4} R (2t^2 - t^3)$
3	$6t^3 - 12t^2$	1,0	$\frac{\pi}{3} R (2t^2 - 1)$
4	$t^2 - 2t^3$	1,6	$\frac{\pi}{3} R (2t^4 - 3t^2)$
5	$10t^2 - 5t^3$	0,8	$\frac{\pi}{6} R (3t - t^2)$
6	$2(t^2 - t)$	2,0	$\frac{\pi}{3} R (t^3 - 2t)$
7	$5t - 4t^2$	1,2	$\frac{\pi}{4} R (t^3 - 2t^2)$
8	$15t - 3t^3$	0,8	$\frac{\pi}{6} R (t - 2t^2)$
9	$2t^3 - 4t$	1,0	$\frac{\pi}{3} R (3t^2 - 2t)$
10	$6t^2 - 3t^3$	2,0	$\frac{\pi}{4} R (t - 2t^2)$

Пример решения задачи К2. Пластина вращается вокруг горизонтальной оси по закону $\varphi = 2t^2$ рад (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К2 дуговой стрелкой). По дуге радиуса R = 0,5 м движется точка *M* по закону $s = OM = \pi R \frac{t^3}{6}$ м; положительное направление отсчета криволинейной координаты s от *O* к *D*.

Определить абсолютную скорость $v_{аб}$ и абсолютное ускорение $a_{аб}$ в момент времени t = 1с.

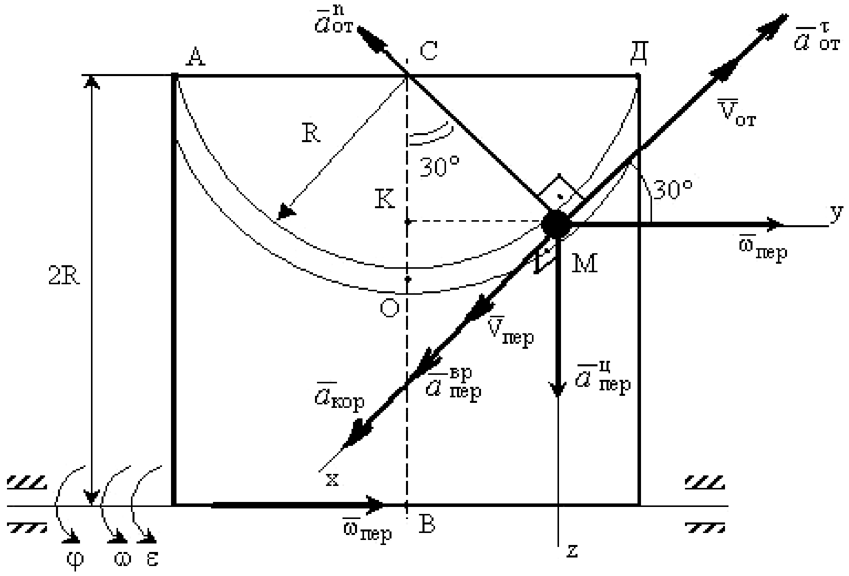


Рис. К2.

Решение: Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге относительным, а движение вместе с пластиной - переносным.

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = OM = \frac{\pi R}{4}\left(7t - 2t^2\right).$$

Сначала установим, где будет находиться точка M на дуге AOD в момент времени t=1с. Полагая в уравнении движения t=1с, получим $s_1 = \frac{5}{6}\pi R$.

Тогда $\angle OCM = \frac{s_1}{R} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$. Покажем на рисунке точку в положении, определяемом этим углом.

Теперь находим численные значения v_{om}, a^τ_{om} и a^n_{om}:

$$v_{om} = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi R}{6}3t^2;\ a^\tau_{om} = \frac{dv_{\text{от}}}{\text{dt}} = \pi Rt;\ a^n_{om} = \frac{v^2_{om}}{\rho_{om}} = \frac{v^2_{om}}{R},$$

где ρ_{om}- радиус кривизны относительной траектории.

Для момента времени t=1с, учитывая, что R = 0,5 м, получим:

$v_{от} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi}{4}$ м/с ; $a_{от}^{\tau} = \frac{\pi}{2}\, м/c^2$; $a_{от}^{n} = \frac{\pi^2}{8}\, м/c^2$.

Знаки показывают, что вектор $\bar{v}_{от}$ направлен в сторону положительного отсчета s, вектор $\bar{a}_{от}^{\tau}$ - в ту же сторону; вектор $\bar{a}_{от}^{n}$ направлен к центру *C* по радиусу *MC*.

Переносное движение. Это движение пластины (вращение) происходит по закону φ = 2t^2. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 4t,\ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 4.$$

Таким образом, при t = 1с;

$$\omega = 4c^{-1};\ \varepsilon = 4c^{-2}.$$

Для определения $v_{пер}$ и $a_{пер}$ найдем сначала расстояние точки *M* от оси вращения: $h = KB = 2R - R\cdot\cos 30°$.

Тогда в момент времени t =1с получим: h = 0,57м.

$v_{пер} = \omega \cdot h = 4 \cdot 0{,}57 = 2{,}28$ м/с;

$a_{пер}^{вр} = \varepsilon \cdot h = 4*0{,}57 = 2{,}28$ м/с^2;

$a_{пер}^{ц} = \omega^2 \cdot h = 42 \cdot 0{,}57 = 9{,}12$ м/с^2.

Показываем на рисунке вектор $\bar{v}_{пер}$ с учетом направления ω и векторы $\bar{a}_{пер}^{ц}$ (направлен к оси вращения), $\bar{a}_{пер}^{вр}$ (направлен как $\bar{v}_{пер}$).

Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\bar{v}_{от}$ и вектором $\bar{\omega}$ равен 30°, то численно в момент времени t = 1с

$a_{кор} = 2\ |\ \bar{v}_{от}\ |\ |\ \bar{\omega}\ |\ \cdot \sin 30° = 2\ \pi/4\ 4\ 1/2 = 3{,}14/c^2$.

Направление вектора $\bar{a}_{кор}$ найдем, спроецировав вектор $\bar{v}_{от}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\bar{a}_{пер}^{ц}$), и повернув затем эту проекцию в сторону ω, т.е. по ходу вращения тела, на 90°. Изображаем вектор $\bar{a}_{кор}$ на рисунке.

Определение $v_{аб}$. Так как $\bar{v}_{аб} = \bar{v}_{от} + \bar{v}_{пер}$, а векторы $\bar{v}_{от}$ и $\bar{v}_{пер}$ взаимно перпендикулярны, то в момент времени t =1с

$$v_{аб} = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (2.28)^2} = 2{,}4 \text{ м/с}.$$

Определение $a_{аб}$. По теореме о сложении ускорений

$$\overline{a}_{аб}=\overline{a}^{\tau}_{от}+\overline{a}^{n}_{от}+\overline{a}^{ц}_{пер}+\overline{a}^{вр}_{пер}+\overline{a}_{кор}.$$

Для определения $a_{аб}$ проведем координатные оси $Mxyz$ и вычислим проекции вектора $\overline{a}_{аб}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\overline{a}_{кор}$, $\overline{a}^{вр}_{пер}$ лежат на проведенной оси x, а векторы $\overline{a}^{\tau}_{от}$, $\overline{a}^{n}_{от}$, $\overline{a}^{ц}_{пер}$ расположены в плоскости Myz. Получим для момента времени t = 1с:

$a_{абx}= a_{кор}+ a^{вр}_{пер} = 5{,}42 м/с^2$;

$a_{абy}= - a^{n}_{от}\cos 60° + a^{\tau}_{от}\cos 30° = 0{,}74$ м/с^2;

$a_{абz}= - a^{\tau}_{от}\cos 60° - a^{n}_{от}\cos 30° + a^{ц}_{пер} = 7{,}27$ м/с^2.

Отсюда находим значение $a_{аб}$ в момент времени t_1 =1с:

$a_{аб}=\sqrt{a^2_{абx}+a^2_{абy}+a^2_{абz}} = 9{,}1$ м/с^2.

Ответ: $v_{аб}$ = 2,4 м/с;

$a_{аб}$ = 9,1м/с^2.

Динамика точки

Задача Д1. Тело D, имеющее массу m, получив в точке A начальную скорость V_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости (рис. Д1.1–Д1.10). На участке AB на тело, кроме силы тяжести, действуют постоянная сила $\overline{Q}$, направленная вдоль трубы, и сила трения. В точке B тело, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок ВС и движется, скользя по трубе. При этом на тело, кроме силы тяжести, действуют силы трения и переменная сила $\overline{F}$, величина проекции которой F_x на ось x задана в табл. Д1. Там же приведены величины m, V_0, Q, расстояние между точками A и B (l = AB) или τ_{AB} – время движения тела от точки A до точки B и коэффициент трения f тела о трубу.

Считая тело материальной точкой, необходимо определить закон движения x = (t) на участке BC.

Указания. Решение задачи Д1 разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки D на участке AB, учитывая начальные условия. Затем, зная время движения на участке AB (τ_{AB}) или его длину l, определить, какую скорость будет иметь тело в точке B. Эта скорость будет начальной для движения тела на участке BC. После этого необходимо составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения на участке ВС тоже с учетом начальных условий.

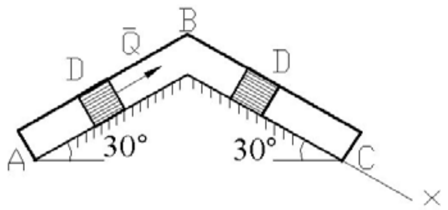


Рис. Д1.1

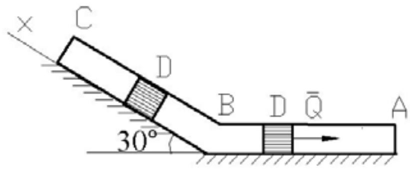


Рис. Д12

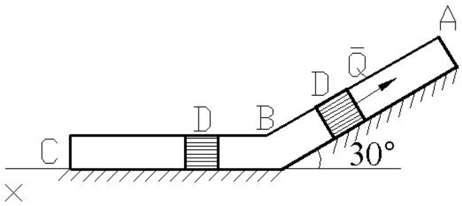


Рис. Д1.3

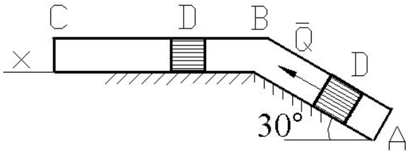


Рис. Д1.4

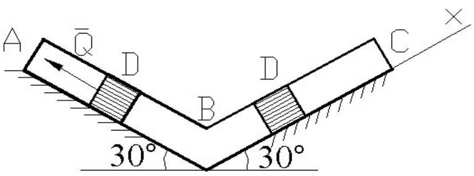


Рис. Д1.5

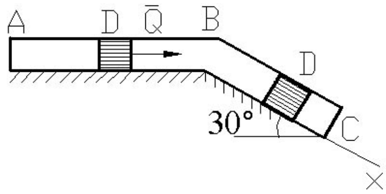


Рис. Д1.6

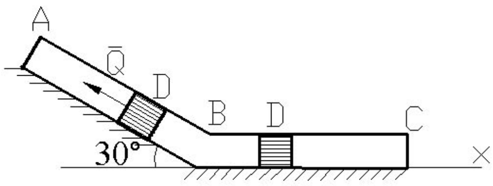


Рис. Д1.7

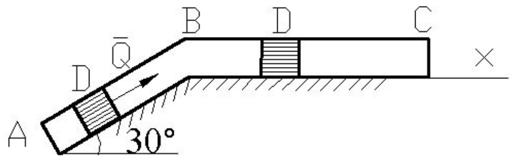


Рис. Д1.8

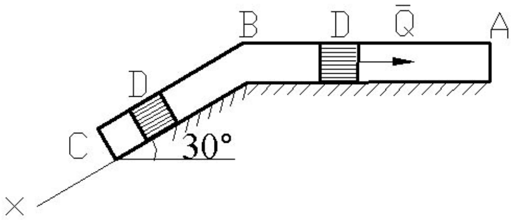


Рис. Д19

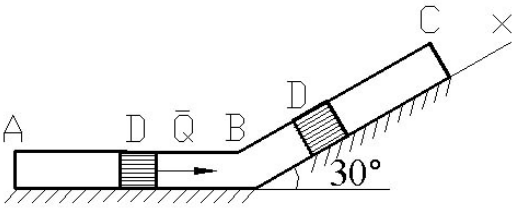


Рис. Д1.10

Таблица Д1

Номер варианта	m, кг	V_0, м/с	Q, Н	f	l, м	τ_{AB}, с	F_x, Н	Най-ти
1	2,4	12	5	0,2	1,5	–	4 sin (4t)	V_1
2	2	20	6	0,4	–	2,5	–5cos (4t)	X_1
3	8	10	16	0,3	4	–	6t	V_1
4	1,8	24	5	0,3	–	2	2 cos (2t)	X_1
5	6	15	12	0,2	5	–	5 sin (2t)	V_1
6	4,5	22	9	0,3	–	3	3t	X_1
7	4	12	10	0,1	2,5	–	6 cos (4t)	V_1
8	1,6	18	4	0,4	–	2	3 sin (4t)	X_1
9	4,8	10	10	0,2	4	–	4 cos (2t)	V_1
10	3	22	9	0,3	–	3	4 sin (2t)	X_1

Пример решения задачи Д1.

На вертикальном участке *AB* трубы (рис. Д1) на груз массой m действует сила тяжести и постоянная сила сопротивления $\bar{R}$. Длина участка AB l_1 = 2 м. В точке *A* груз имеет начальную скорость V_0 = 6 м/с. На наклонном участке *BC* на груз действует сила тяжести, сила трения (коэффициент трения груза о плоскость равен *f*) и переменная сила *F* = *F*(t), заданная в ньютонах.

Дано: m = 5 кг; R = 40 Н; V_0 = 6 м/с; l_{AB} = 2 м; f = 0,2; F_x = 45 sin (3t).

Определить: закон движения груза на участке *BC*: $x = x$(t).

Решение. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P}$ и $\bar{R}$.

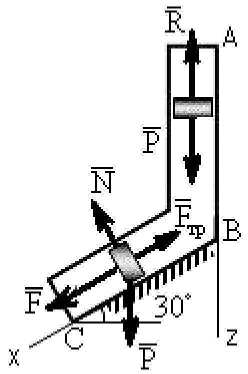


Рис. Д1

Проводим ось Az в направлении движения груза и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz}, \quad \text{или} \quad m\frac{dV_z}{dt} = P_z + R_z$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R$.

При $V_z = V$ получим

$$m\frac{dV}{dt} = mg - R \text{ или } \frac{dV}{dt} = g - \frac{R}{m}. \tag{1}$$

Тогда, разделяя в уравнении (1) переменные и интегрируя обе части равенства, приняв $g \approx 10$ м/с^2, получим

$$V = \left(g - \frac{R}{m}\right)t + C_1 = 2t + C_1. \tag{2}$$

Из начальных условий при $t = 0$ скорость $V = V_0$, что даёт $C_1 = V_0$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$V = 2t + 6. \tag{3}$$

Учитывая, что $V = \frac{dz}{dt}$, получим

$$\frac{dz}{dt} = 2t + 6.$$

Откуда при разделении переменных и интегрировании

$$z = t^2 + 6t + C_2. \tag{4}$$

Из начальных условий при t = 0 и начальной координате $z_0 = 0$ находим $C_2 = 0$, следовательно

$$z = t^2 + 6t. \qquad (5)$$

С учётом условий задачи при $z = l_{AB} = 2$ м в точке *B* можно найти время $t = \tau_{AB}$ движения груза по участку *AB*:

$$2 = t^2 + 6t \quad \text{или} \quad t^2 + 6t - 2 = 0.$$

Извлекая корни, получим $t_1 = 0{,}3$ с; $t_2 = –6{,}3$ с, в физическом смысле $t = \tau_{AB} = 0{,}3$ с. Тогда по уравнению (3) скорость в точке B

$$V_B = 2\tau_{AB} + 6 = 6{,}6 \text{ м/с}. \qquad (6)$$

Теперь рассмотрим движение груза на участке *BC*; найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_0 = V_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и показываем действующие на него силы $\bar{P}$, $\bar{N}$, $\bar{F}$ и $\bar{F}_{ТР}$. Проведём из точки B ось Bx и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_x + F_{òð}. \qquad (7)$$

Определим проекции сил на ось x:

$$P_x = P \sin 30° = 0{,}5mg; \qquad N_x = 0; \qquad F_x = 45 \sin (3t);$$
$$F_{тр\,x} = –fN = – fP \cos 30° = – 0{,}17mg,$$

тогда уравнение (8) примет вид

$$m\frac{dV_x}{dt} = 0{,}5mg + 45\sin (3t) – 0{,}17mg = 0{,}33mg + 45\sin (3t). \qquad (8)$$

Разделив обе части равенства на $m = 5$кг и принимая $g \approx 10$ м/с^2, получим

$$\frac{dV_x}{dt} = 3{,}3 + 9\sin(3t). \qquad (9)$$

Умножая обе части уравнения (9) на dt и интегрируя, найдём V_x:

$$V_x = 3{,}3t – 3\cos (3t) + C_2. \qquad (10)$$

На участке *BC* будем отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке *B*, считая в этот момент t = 0. Тогда при t = 0 скорость груза $V = V_0 = V_B = 6{,}6$ м/с. Подставляя эти величины в уравнение (10), получим

$$C_2 = V_B + 3\cos (0) = 6{,}6 + 3 = 9{,}6.$$

При найденном значении C_2 уравнение (10) даёт

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3,3t - 3\cos(3t) + 9,6.$$

Умножая обе части на dt и снова интегрируя, найдём

$$x = 1,65t^2 + 9,6t - \sin(3t) + C_3.$$

Так как на участке BC при t = 0 начальная координата $x = 0$, то $C_3 = 0$. Окончательно закон движения груза примет вид

$$x = 1,65t^2 + 9,6t - \sin(3t),$$

где x – в метрах, t – в секундах.

Ответ: $x = 1,65t^2 + 9,6t - \sin(3t)$.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Задача Д3. Механическая система состоит из грузов 3 и 4 (коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0,1$), сплошного однородного цилиндрического катка 5 и ступенчатых шкивов 1 и 2 с радиусами ступеней $R_1 = 0,3$ м; $r_1 = 0,1$ м; $R_2 = 0,2$ м; $r_2 = 0,1$ м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу) (рис. Д3.1–Д3.10, табл. Д3). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Под действием силы $F = F(S)$, зависящей от перемещения S точки приложения силы, система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 1 и 2 действуют постоянные моменты сил сопротивлений, равные, соответственно, M_1 и M_2.

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы $\bar{F}$ равно S. Искомая величина указана в столбце «Найти» табл. Д3, где V_3 – скорость груза 3; V_{C_5} – скорость центра масс катка 5; ω_1 – угловая скорость тела 1 и т.д.

Указания. При решении задачи Д3 следует учесть, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении кинетической энергии катка, движущегося плоскопараллельно, для установления зависимости между его угловой скоростью и скоростью его центра масс нужно воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей (кинематика). При определении работы все перемещения следует выразить через заданное перемещение S, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Если по данным табл. Д3 масса груза равна 0, то этот груз на чертеже изображать не надо. Шкивы 1 и 2 всегда входят в систему

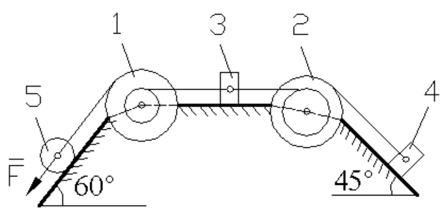


Рис. Д3.1

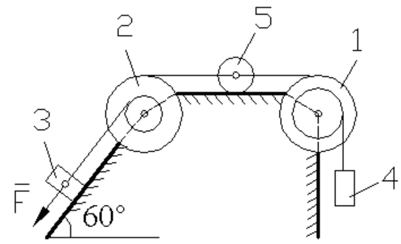


Рис. Д3.2

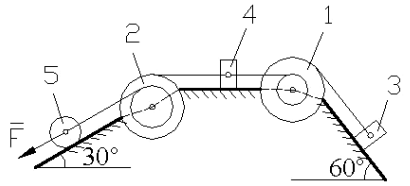


Рис. Д3.3

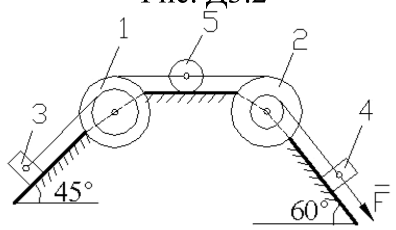


Рис. Д3.4

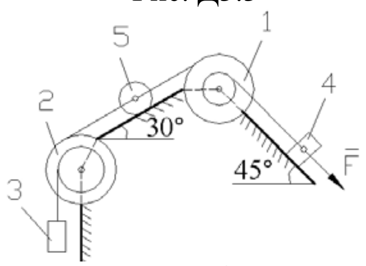


Рис. Д3.5

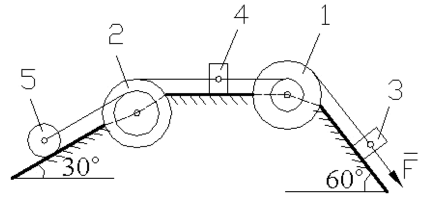


Рис. Д3.6

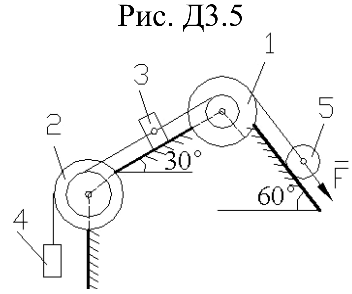


Рис. Д3.7

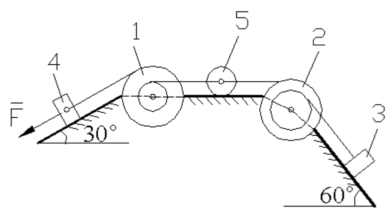


Рис. Д3.8

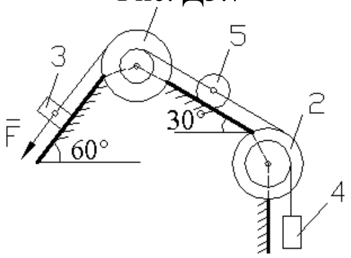


Рис. Д3.9

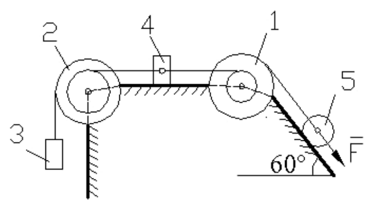


Рис. Д3.10

Таблица Д3

Номер варианта	Масса тел системы, кг					Момент сил сопротивления, Нм		Движущая сила $F = F(S)$, Н	Перемещение S, м	Найти
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	M_1	M_2			
0	2	0	0	6	4	0	0,8	50(2 + 3S)	1,0	V_4
1	6	0	8	0	2	0,6	0	20(5 + 2S)	1,2	ω_5
2	0	4	0	8	6	0	0,4	80(3 + 4S)	0,8	V_{C5}
3	0	2	10	0	4	0,3	0	40(4 + 5S)	0,6	V_3
4	8	0	0	6	2	0	0,6	30(3 + 2S)	1,4	ω_1
5	8	0	6	0	4	0,9	0	40(3 + 5S)	1,6	V_3
6	0	6	0	8	2	0	0,8	60(2 + 5S)	1,0	ω_2
7	0	4	10	0	6	0,6	0	30(8 + 3S)	0,8	ω_5
8	6	0	8	0	4	0,3	0	50(2 + 5S)	1,6	V_{C5}
9	0	4	0	10	6	0	0,4	50(3 + 2S)	1,4	V_4

Пример решения задачи Д3.

Механическая система (рис. Д3) состоит из сплошного цилиндрического катка 1, ступенчатого шкива 2 с радиусами ступеней R_2 и r_2 (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза 3 (коэффициент трения груза о плоскость равен f).Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 2.

Под действием силы F = f(S), зависящей от перемещения S точки её приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив 2 действует постоянный момент M_2 сил сопротивления.

Дано: m_1 = 4 кг; m_2 = 10 кг; m_3 = 2 кг; R_2 = 0,2 м; r_2 = 0,1 м; f = 0,1; M_2 = 0,6 Нм; F = 2 (1 + 2S) Н.

Определить: скорость V_{C_1} центра масс катка, когда $S = S_1$ = 1 м.

Решение. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, соединенных нитями. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные $\bar{F}, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$, момент сопротивления M_2, реакции $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{N}_3$ и силы трения $\bar{F}_1^{тр}$ и $\bar{F}_3^{тр}$.

Для определения V_{C1} воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e . \tag{1}$$

Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2)$$

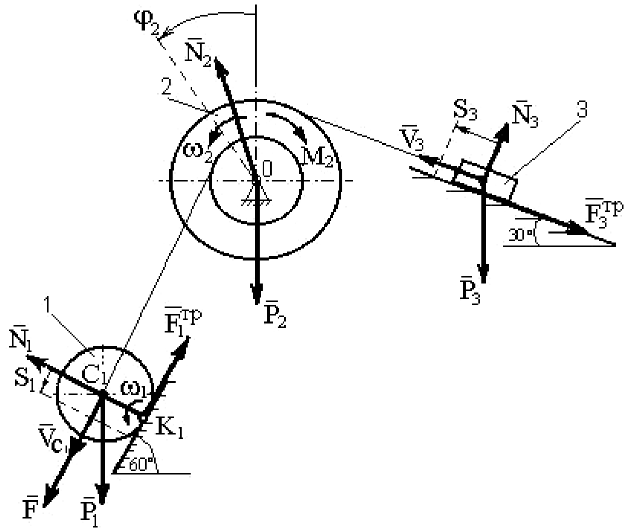


Рис. Д3

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 3 – поступательно, а тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{m_1 V_{C_1}^2}{2} + \frac{I_{C_1}\omega_1^2}{2};\ T_2 = \frac{I_2\omega_2^2}{2};\ \ T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}. \qquad (3)$$

Все входящие сюда скорости следует выразить через искомую V_{C1}. Приняв во внимание, что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка l, и обозначив радиус катка через r_1, получим

$$\omega_1 = \frac{V_{C_1}}{K_1 C_1} = \frac{V_{C_1}}{r_1};\ \omega_2 = \frac{V_{C_1}}{r_2};\ V_3 = \omega_2 R_2 = V_{C_1}\frac{R_2}{r_2} \qquad (4)$$

Кроме того, входящие в уравнение (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C_1} = 0{,}5 m_1 \cdot r_1^2;\quad I_2 = m_2 \cdot R_2^2. \qquad (5)$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), получим кинетическую энергию системы:

$$T = \left(\frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{2}m_2\frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2}m_3\frac{R_2^2}{r_2^2}\right)V_{C_1}^2 = 27V_{C_1}^2 \quad . \qquad (6)$$

Найдём сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет путь S_1, для чего учтем, что здесь зависимость между перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями в равенствах (4), т.е.

$$\varphi_2 = \frac{S_1}{r_2},\ S_3 = S_1\frac{R_2}{r_2}.$$

В результате получим

$$A(\overline{F}) = \int_0^{S_1} 2(1+2S)\,dS = 2(S_1 + S_1^2);$$

$$A(\overline{P}_1) = P_1 S_1 \sin 60°; \quad A(M_2) = -M_2\varphi_2 = -M_2\frac{S_1}{r_2};$$

$$A(\overline{P}_3) = -P_3 S_3 \sin 30° = -P_3 S_1 \frac{R_2}{r_2}\sin 30°;$$

$$A(F_3^{ТР}) = -F_3^{ТР} S_3 = fN_3 S_3 = -fP_3 \cos 30^{o} S_1 \frac{R_2}{r_2}$$

Работа остальных сил равна нулю, так как точка K_1 – мгновенный центр скоростей, точка О неподвижна, а реакция $\overline{N}_3$ перпендикулярна перемещению груза 3. Тогда окончательно

$$\sum A_k^e = 2(S_1 + S_1^2) + P_1 S_1 \sin 60° - M_2\frac{S_1}{r_2} - P_3 S_1 \frac{R_2}{r_2}(\sin 30° + f\cos 30°). \qquad (7)$$

С учетом значений заданных величин получим величину работ всех сил:

$$\sum A_k^e = 8,96. \qquad (8)$$

Подставив выражения (6) и (8) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, получим

$$27\cdot v_{C_1}^2 = 8,96.$$

Отсюда находим искомую скорость.

Ответ: $V_{C_1} = 0,58$ м/с.

Модуль 2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Цикл расчетно-графических работ по сопротивлению материалов включает пять заданий.

1. Каждый студент выполняет те задания, которые предусмотрены учебным графиком.

2. Приступая к работе, необходимо выбрать из таблицы, прилагаемой к условию задачи, данные в соответствии со своим личным шифром (его указывает преподаватель). Работы, выполненные с нарушением этого требования, не принимаются.

3. Перед выполнением расчетно-графической работы следует изучить соответствующий теоретический раздел курса.

4. Перед решением каждой задачи необходимо вычертить рисунок в выбранном масштабе и проставить на нем численные значения всех заданных в задании величин.

5. Решение должно сопровождаться последовательными и грамотными пояснениями (без сокращения слов), расчетными формулами и чертежами. Формулы записывают в общем виде, проставляют значения величин, входящих в эти формулы и записывают ответ, указывая его размерность.

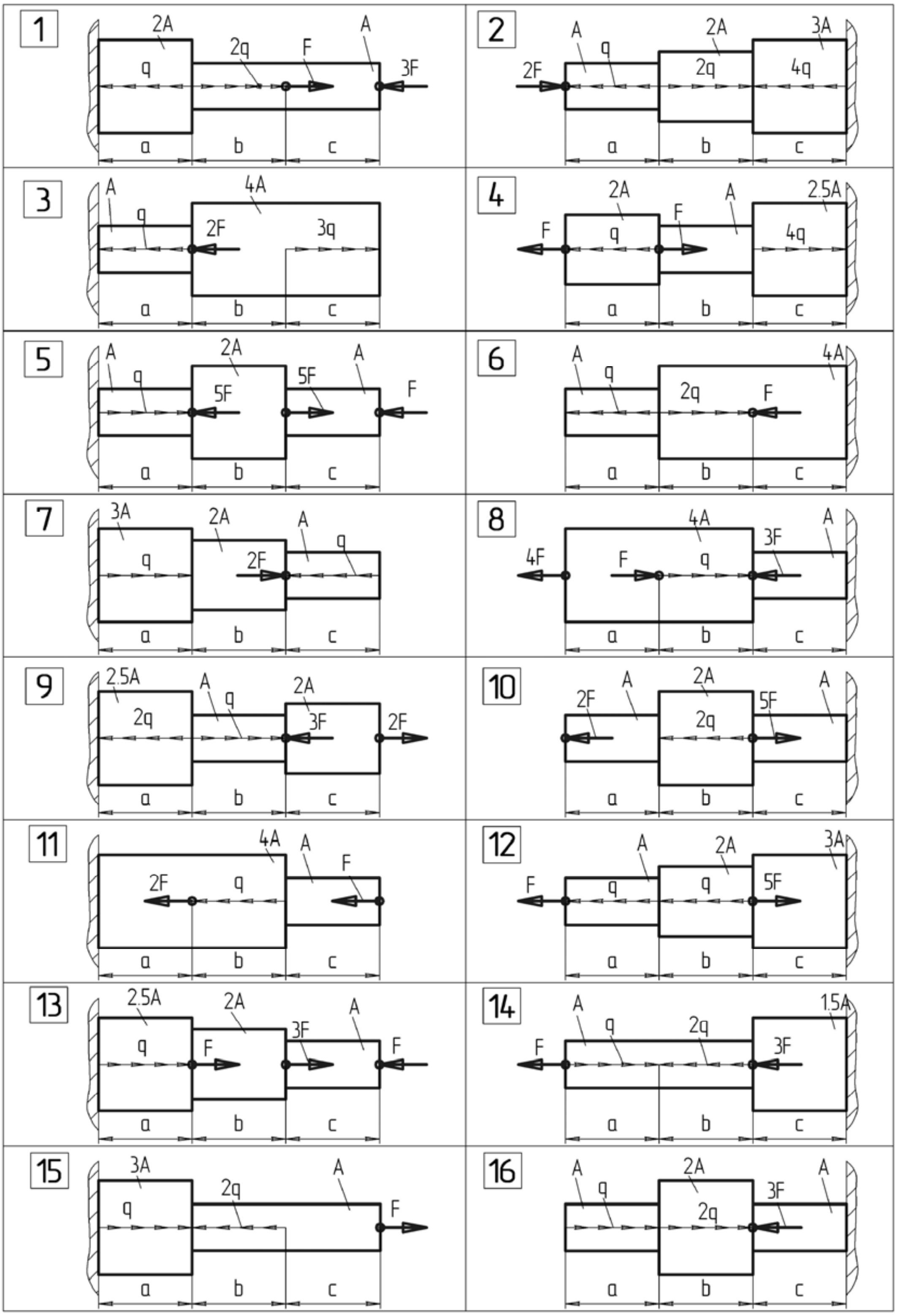
6. В заключении выполненной работы должен быть вывод.

Растяжение

Задание 1. Из условия прочности подобрать поперечное сечение стального ступенчатого стержня в виде прямоугольника с отношением сторон b/h = 0,25; округлить полученные в результате расчёта размеры b и h по нормальному ряду размеров. Схема нагружения стержня показана на рис.1. Вычислить напряжение в опасном сечении. Построить эпюры напряжений по высоте опасного сечения. Определить перемещение свободного сечения стержня и построить эпюру перемещений. Данные для расчетов приведены в табл. 1

Таблица 1

Данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F, kH	10	20	20	10	30	20	20	10	30	0
q, kH/м	10	10	20	40	30	10	30	40	30	40
M, kHм	10	30	40	30	10	30	40	30	50	20
m, kHм/м	10	10	20	20	20	10	20	20	10	30
a, м	4	3	4	2	4	4	3	5	4	6
b, м	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4
c, м	3	6	4	6	3	3	4	4	2	4
[σ], МПа	160	180	200	170	190	160	170	180	190	200
[τ], МПа	80	90	100	80	90	100	80	90	100	80
E, МПа	$2\cdot10^5$									
G, МПа	$8\cdot10^4$									


1
2A
A
2q
F
q
3F
a
b
c
2
A
2A
3A
q
2F
2q
4q
a
b
c
3
A
4A
q
2F
3q
a
b
c
4
2A
A
2.5A
F
F
q
4q
a
b
c
5
A
2A
A
q
5F
5F
F
a
b
c
6
A
4A
q
2q
F
a
b
c
7
3A
2A
A
q
2F
q
a
b
c
8
4A
A
3F
4F
F
q
a
b
c
9
2.5A
A
q
2A
2q
3F
2F
a
b
c
10
A
2A
A
2F
2q
5F
a
b
c
11
4A
A
F
2F
q
a
b
c
12
A
2A
3A
F
q
q
5F
a
b
c
13
2.5A
2A
A
3F
q
F
F
a
b
c
14
A
q
2q
1.5A
F
3F
a
b
c
15
3A
2q
A
q
F
a
b
c
16
A
q
2A
A
2q
3F
a
b
c

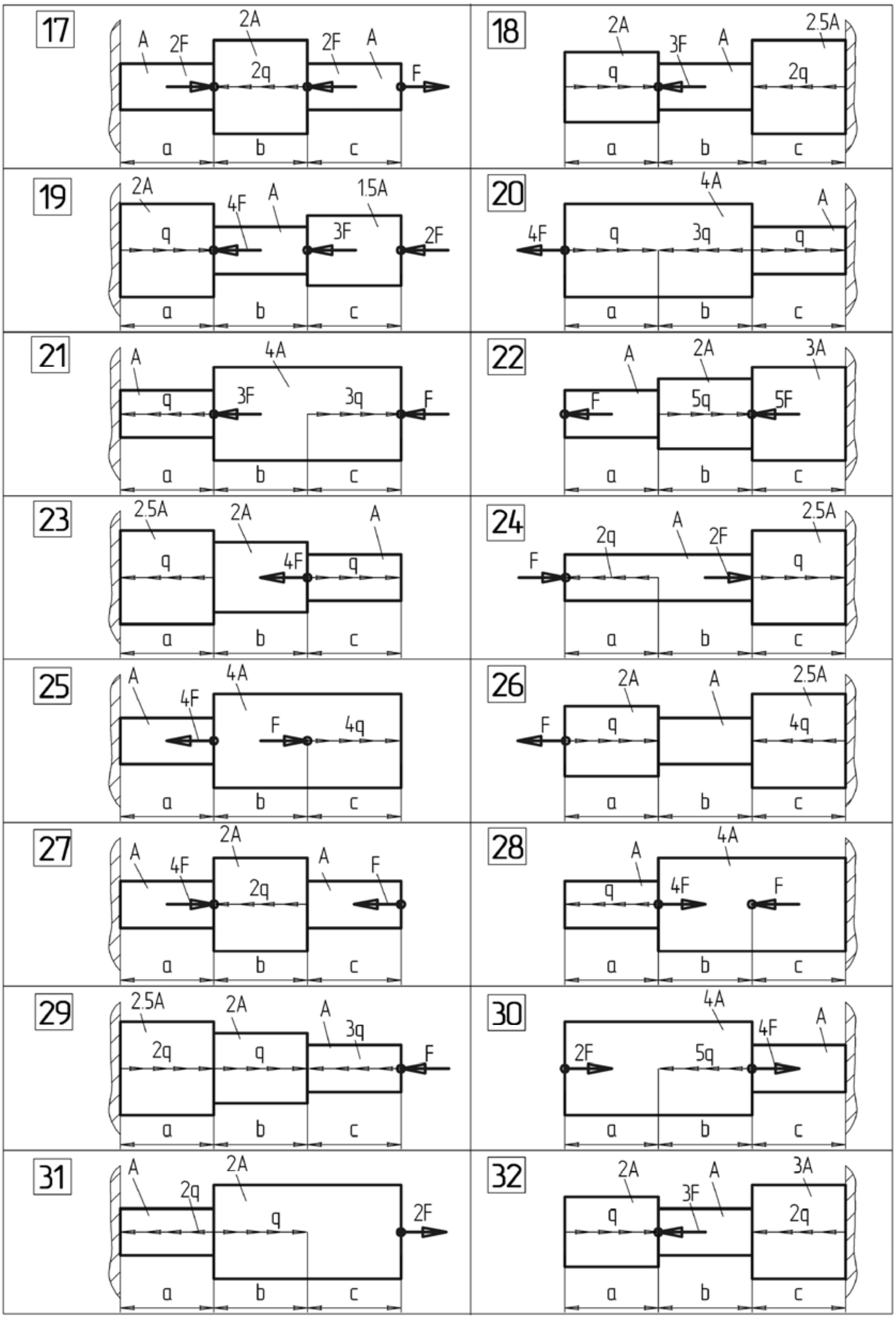


Рис. 1. Схема нагружения стержня

Пример решения задачи 1. Подобрать из условия прочности квадратное поперечное сечение стального ступенчатого стержня. Вычислить напряжение в опасном сечении. Построить эпюры напряжений по высоте опасного сечения и длине стержня. Определить перемещение свободного сечения стержня и построить эпюру перемещений. При вычислениях принять $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 35$ кН; $q = 15\frac{кН}{м}$; $a = b = 2$ м; $E = 2{\cdot}105$ МПа; $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение. 1. Построим эпюру внутренних силовых факторов, т.е. продольных сил N. Для этого разобьём стержень на два характерных участка, начиная от свободного конца. Для определения внутренних силовых факторов применяем метод сечений.

Проведём сечение в пределах первого характерного участка длиной a в произвольном месте и рассмотрим равновесие отсечённой правой части. Продольную силу N_1 в этом сечении найдём, проектируя на ось стержня внешние и внутренние силы, действующие на отсеченную часть стержня.

Для 1-го участка при $0 \le z_1 \le a$

$N_1 = F_1 - qz_1$

при $z_1 = 0$

$N_1 = F_1 = 10$ кН;

при $z_1 = a$

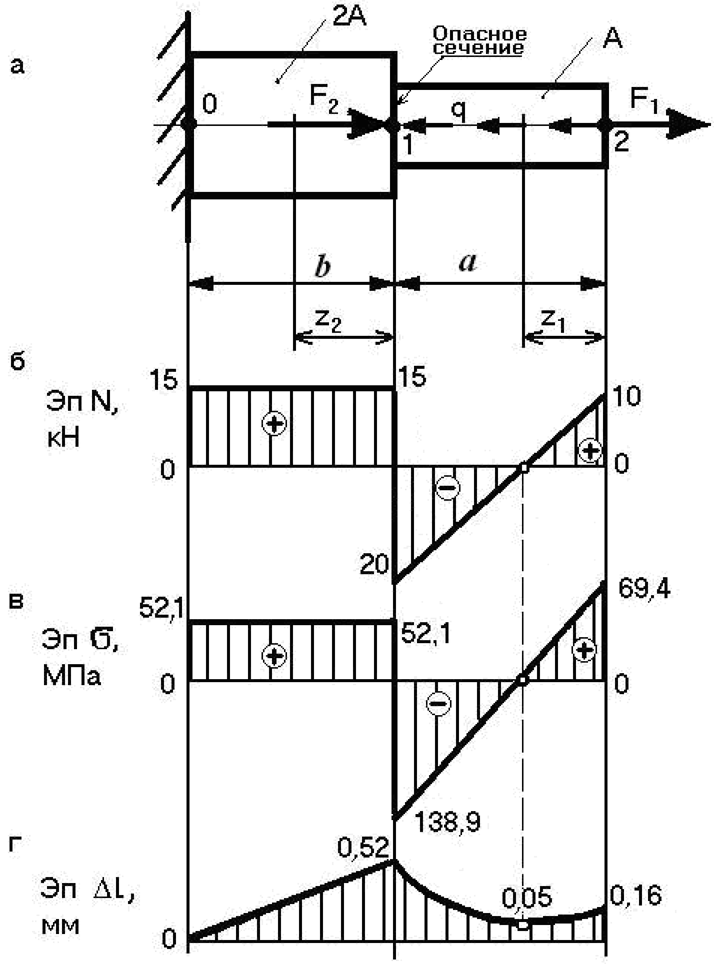
$N_1 = F_1 - qa = 10 - 15{\cdot}2 = -20$ кН.

Проведём сечение на втором характерном участке длиной b и определим продольную силу N_2

Для 2-го участка при $0 \le z_2 \le b$

$N_2 = F_1 - qa + F_2 = 10 - 15{\cdot}2 + 35 = 15$ кН.

Построим эпюру N. Для этого проводим базу эпюры параллельно оси стержня, откладываем в произвольно выбранном масштабе значения продольных сил N по оси ординат, причём вверх – положительные значения, вниз – отрицательные, и строим графики зависимостей $N=N(z)$. Эпюру заштрихуем линиями, перпендикулярными базе эпюры, проставим значения N и укажем знаки.



Выполним проверку правильности построения эпюры N: на участке, где действует распределённая нагрузка, должна быть наклонная линия, где нет распределённой нагрузки – линия, параллельная базе эпюры. В сечениях стержня, где приложены внешние сосредоточенные силы, на эпюре N должны быть скачки, равные этим силам.

2. Определим положение опасного сечения стержня. Для этого оценим максимальные напряжения по участкам, разделив $N_{\max}$ для каждого участка на соответствующие площади поперечных сечений стержня.

$$\sigma_{\max 1} = \frac{|N_{\max 1}|}{A} = \frac{20}{A}, \qquad \sigma_{\max 2} = \frac{|N_{\max 2}|}{2A} = \frac{15}{2A} = \frac{7{,}5}{A},$$

т. к. $\sigma_{\max 1} > \sigma_{\max 2}$, следовательно, опасное сечение находится на первом участке, где $N = N_{max1}$. Укажем место опасного сечения на рисунке, *б*.

3. Найдём размер квадратного поперечного сечения стержня h с учетом условия прочности в опасном сечении стержня.

Запишем условие прочности.

$$\sigma_{\max 1} = \frac{N_{\max 1}}{A} \le [\sigma],$$

учитывая, что площадь квадрата $A = h^2$, получим

$$h \ge \sqrt{\frac{|N_{\max 1}|}{[\sigma]}} \ge \sqrt{\frac{20 \cdot 10^3}{160}} \ge 11{,}18 \textit{ мм.}$$

Этот размер следует округлить по нормальному ряду размеров, поэтому принимаем h = 12 мм.

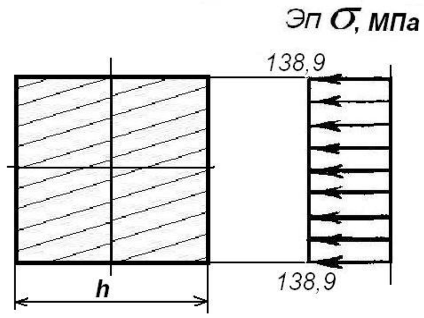
Найдём площади поперечных сечений

$A = h^2 = 12^2 = 144$ мм^2; $2A = 2 \cdot 144 = 288$ мм^2.

Вычислим напряжение в опасном сечении стержня

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max 1}}{A} = -\frac{20 \cdot 10^3}{144} = -138{,}9 \text{ МПа},$$

покажем эпюру σ по высоте сечения (сечение повёрнуто в плоскость чертежа):



4. Вычислим напряжения ($\sigma = \frac{N}{A}$) и построим их эпюру по длине стержня.

- на первом участке по обеим границам характерного участка, т.к. $\sigma_1 \ne$ const

$$\sigma_1 = \frac{10 \cdot 10^3}{144} = 69{,}4 \text{ МПа}; \qquad \sigma_1 = -\frac{20 \cdot 10^3}{144} = -138{,}9 \text{ МПа};$$

- на втором участке, т.к. σ_2 = const

$$\sigma_2 = \frac{15 \cdot 10^3}{288} = 52{,}1 \text{ МПа};$$

5. Определим перемещение свободного сечения стержня. Обозначим, начиная от заделки стержня, границы характерных участков цифрами 0, 1, 2 (рисунок, *а*).

Найдем удлинения обоих участков стержня.

$$\Delta l_{01} = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 288} = 0{,}52 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{12} = \int_0^a \frac{N_1 \cdot dz_1}{E \cdot A} = \int_0^a \frac{(F_1 - qz_1)dz_1}{E \cdot A} = \frac{F_1 \cdot a}{E \cdot A} - \frac{qa^2}{E \cdot A \cdot 2} =$$

$$= \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 144} - \frac{15 \cdot (2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 10^5 \cdot 144 \cdot 2} = -0{,}36 \text{ мм}.$$

Перемещение сечения 0 равно нулю, т.е. $\Delta l_0 = 0$.

Перемещение сечения 1 равно удлинению участка 01 плюс перемещение сечения 0, т. е. $\Delta l_1 = \Delta l_{01} + \Delta l_0 = 0{,}52$ мм.

Перемещение сечения 2 найдем аналогично: $\Delta l_2 = \Delta l_{12} + \Delta l_1 = (-0{,}36) + 0{,}52 = 0{,}16$ мм.

На участке 12 продольная сила $N \neq \text{const}$, поэтому эпюра Δl_{12} представляет собой параболу с выраженным минимумом в точке, где $N_1 = 0$:

$$N_1 = F_1 - qz_1 = 0,$$

отсюда

$$z_1 = F_1 / q = 10/15 = 0{,}67 \text{ м}.$$

$$\Delta l_{z_1} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0{,}67 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 144} - \frac{15 \cdot (0{,}67 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 10^5 \cdot 144 \cdot 2} = 0{,}11 \text{ мм}.$$

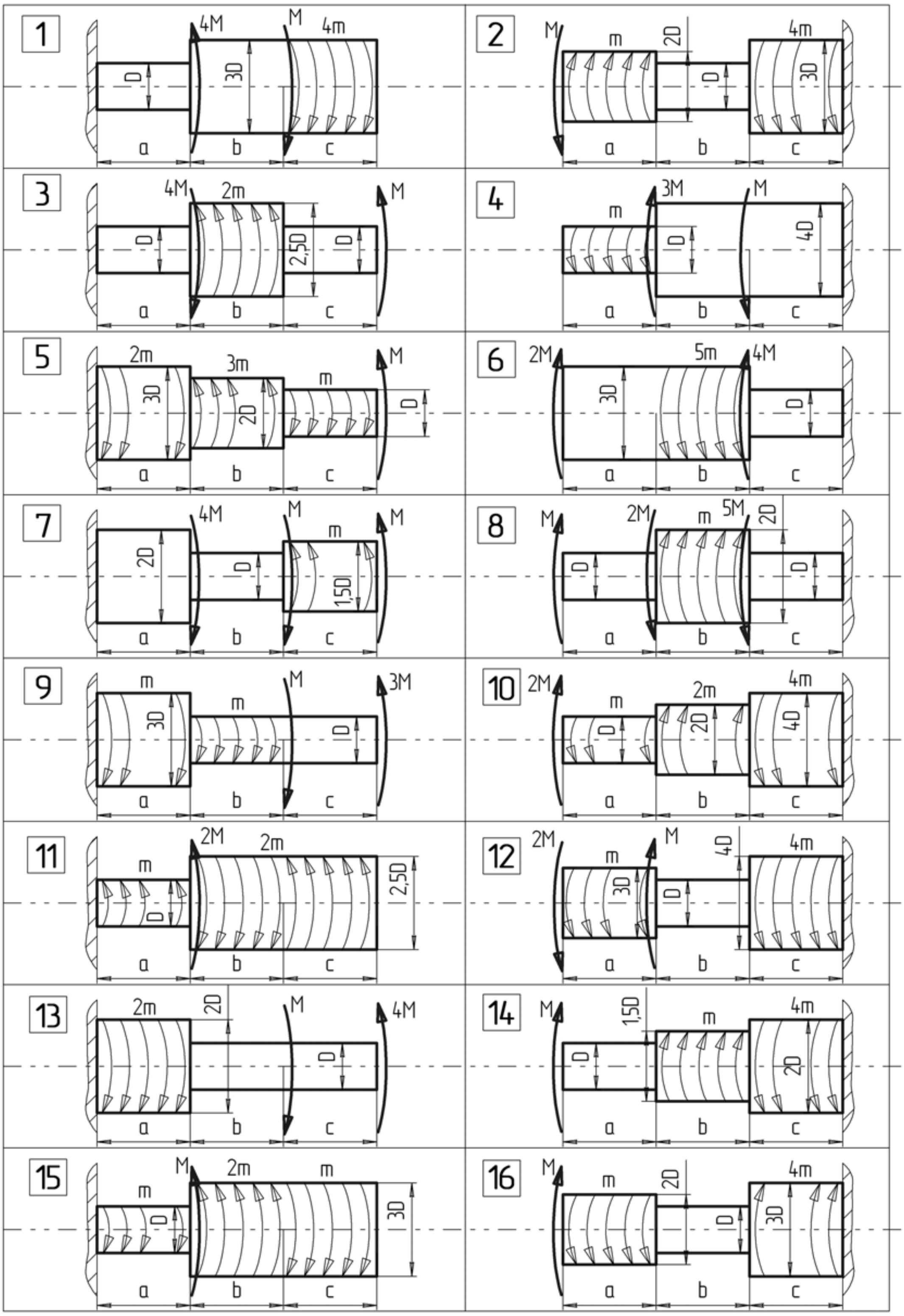
Найдем Δl^*:

$$\Delta l^* = \Delta l_2 - \Delta l_{z_1} = 0.16 - 0.11 = 0.05 \text{ мм}.$$

Покажем эпюру перемещений, откладывая значения Δl_0, Δl_1, Δl_2, Δl^* (параболу на эпюре Δl, ввиду малости величин можно условно заменять прямой пунктирной линией).

Кручение

Задание 2. Из условия прочности подобрать поперечное сечение круглого стального вала; полученный в результате расчёта диаметр округлить по нормальному ряду размеров. Схема нагружения вала показана на рис.2. Вычислить напряжение в опасном сечении и показать эпюру этого напряжения. Определить угол закручивания свободного сечения вала и построить его эпюру. Данные для расчетов приведены в табл. 1


1
4M
M
4m
D
3D
a b c
2
M
m
2D
4m
D
3D
a b c
3
4M
2m
M
D
2,5D
D
a b c
4
3M
M
m
D
4D
a b c
5
2m
3m
m
M
3D
2D
D
a b c
6
2M
5m
4M
3D
D
a b c
7
4M
M
M
m
2D
D
1,5D
a b c
8
M
2M
m
5M
2D
D
D
a b c
9
m
M
3M
m
3D
D
a b c
10
2M
m
2m
4m
D
2D
4D
a b c
11
2M
2m
m
2,5D
D
a b c
12
2M
M
m
4D
4m
3D
D
a b c
13
2m
2D
M
4M
D
a b c
14
M
1,5D
m
4m
D
2D
a b c
15
M
2m
m
m
D
3D
a b c
16
M
m
2D
4m
D
3D
a b c

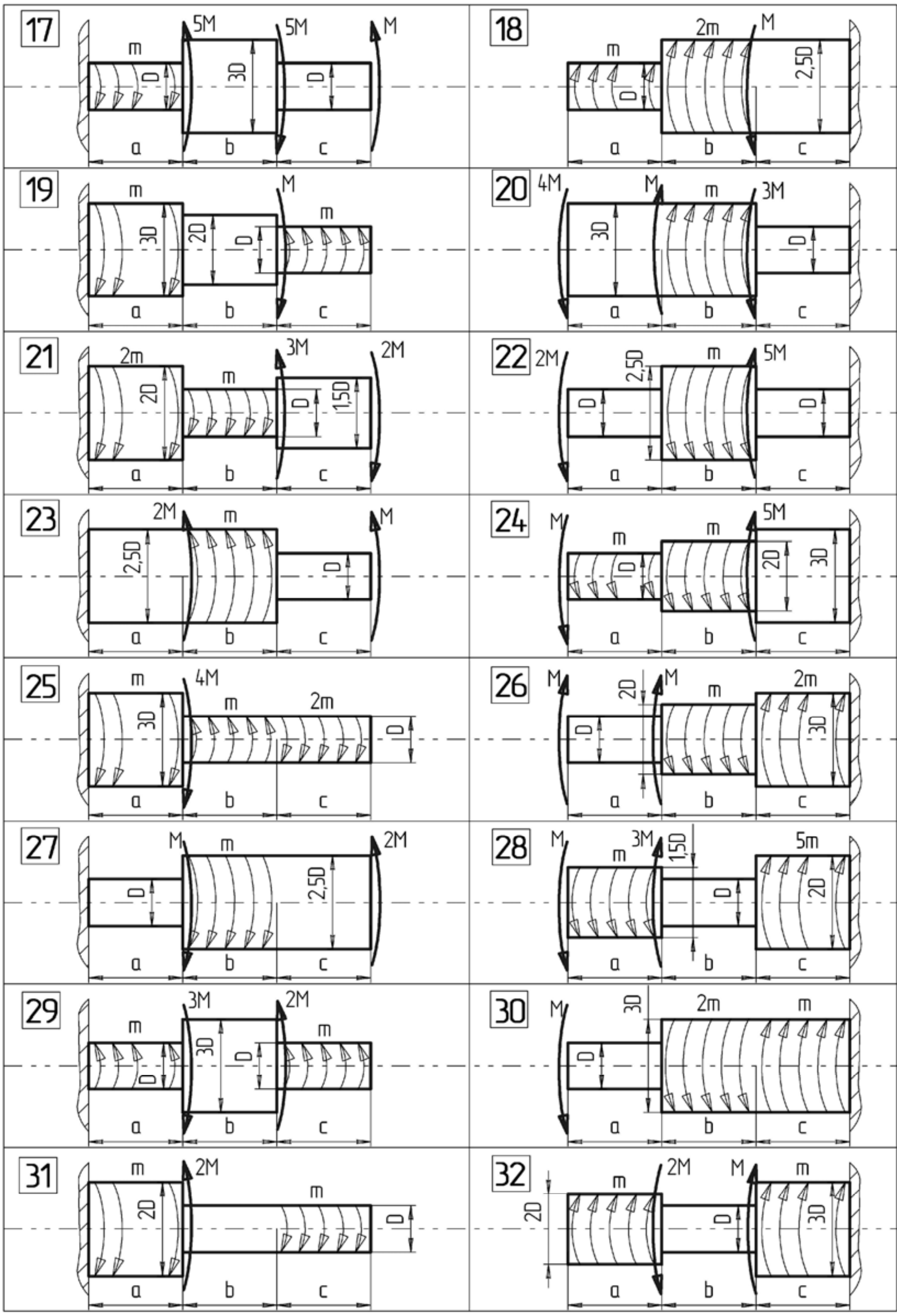
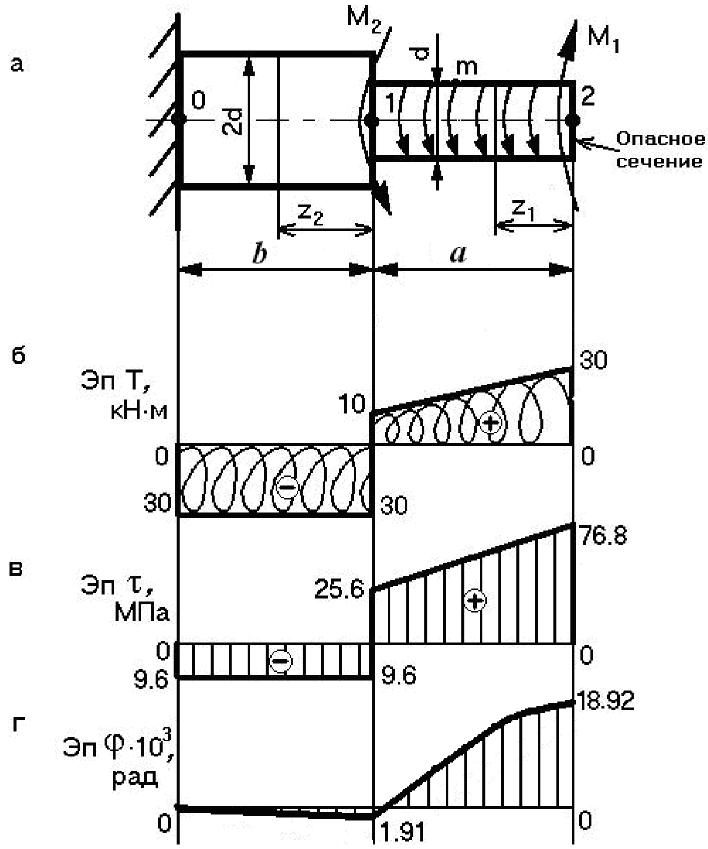


Рис.2. Схема нагружения вала

Пример решения задачи 2. Подобрать из условия прочности круглое поперечное сечение стального ступенчатого вала, схема нагружения которого показана на рисунке. Вычислить напряжение в опасном сечении и показать эпюру этого напряжения. Построить эпюру напряжений по длине вала. Определить угол закручивания свободного сечения вала и построить его эпюру. При вычислениях принять $M_1 = 30$ кН·м, $M_2 = 40$ кН·м, $m = 10$ кН·м/м, $a = b = 2$ м , $G = 8\cdot10^4$ МПа, $[\tau] = 80$ МПа.

Решение. 1. Построим эпюру крутящих моментов. Для этого разобьем вал на два характерных участка, начиная со свободного конца. Для определения внутренних силовых факторов, т.е. крутящих моментов, применяем метод сечений.



Проведем сечение в пределах первого характерного участка и рассмотрим равновесие отсеченной части. Крутящий момент T_1 в этом сечении найдем как алгебраическую сумму внешних моментов, действующих на отсеченную часть вала, относительно оси вала.

Для 1-го участка при $0 \le z_1 \le a$

$T_1 = M_1 - m\, z_1$

при $z_1 = 0$

$T_1 = M_1 = 30$ кН·м;

при $z_1 = a$

$T_1 = M_1 - m\, a = 30 - 10\cdot2 = 10$ кН·м.

Проведем сечение на втором характерном участке и определим крутящий момент T_2

Для 2-го участка при $0 \le z_2 \le b$

$T_2 = M_1 - m\,a + M_2 = 30 - 10 \cdot 2 - 40 = -30$ кН·м.

Построим эпюру, показывающую как меняется значение T по длине вала. Для этого проведем базу эпюры параллельно оси вала и отложим в произвольно выбранном масштабе величины крутящих моментов по оси ординат, причем вверх – положительные значения, вниз – отрицательные. Полученную эпюру заштрихуем (рисунок, *б*), проставим значения T и укажем их знаки.

Проверим правильность построения эпюры T. На участке, где действует распределенный момент, должна быть наклонная линия, где нет распределенного момента – линия, параллельная базе эпюры. В сечениях, где приложены сосредоточенные моменты, должны быть скачки равные им по величине.

2. Определим опасное сечение вала. Для этого вычислим максимальные напряжения по участкам:

$$\tau_{\max 1} = \frac{|T_{\max 1}|}{W_{\rho 1}} = \frac{|T_{\max 1}|}{0{,}2d^3} = \frac{30}{0{,}2d^3};$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{|T_{\max 2}|}{W_{\rho_2}} = \frac{|T_{\max 2}|}{0{,}2(2d)^3} = \frac{30}{0{,}2 \cdot (8d^3)} = \frac{3.75}{0{,}2d^3}.$$

Так как $\tau_{\max 1} > \tau_{\max 2}$, следовательно, опасное сечение - на первом участке, где $T = T_{max1}$. Укажем опасное сечение на рис.4.8, б.

3. Найдем диаметр вала d из условия прочности в опасном сечении:

$$\tau_{\max 1} = \frac{|T_{\max 1}|}{W_{\rho_1}} \le \frac{T_{\max 1}}{0{,}2d^3} \le [\tau],$$

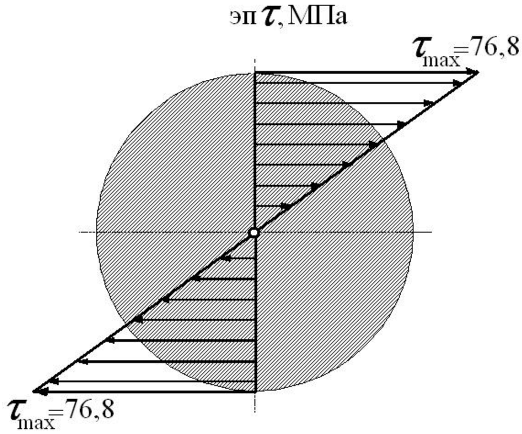
тогда $d \ge \sqrt[3]{\dfrac{T_{\max 1}}{0{,}2 \cdot [\tau]}} \ge \sqrt[3]{\dfrac{30 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 80}} \ge 123{,}3\,мм$

Полученный размер следует округлить по нормальному ряду размеров, поэтому принимаем $d = 125$ мм.

Вычислим напряжение в опасном сечении стержня.

$$\tau_{\max} = \frac{|T_{\max 1}|}{0{,}2d^3} = \frac{30 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 125^3} = 76{,}8\,МПа.$$

Покажем эпюру τ по диаметру опасного сечения вала.



4. Вычислим напряжения $(\tau = \dfrac{T}{W_\rho})$ и построим их эпюру по длине вала (рисунок, *в*). Для первого участка вычислим напряжения в начале и в конце участка, т.к. $\tau_1 \neq \text{const}$

$$\tau_1 = \frac{30 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 125^3} = 76{,}8 \text{ МПа}, \quad \tau_1 = \frac{10 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 125^3} = 25{,}6 \text{ МПа}.$$

Для второго участка $\tau_2 = \text{const}$, $\tau_2 = \dfrac{30 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot (2 \cdot 125)^3} = 9{,}6$ МПа.

5. Определим угол закручивания свободного сечения вала. Обозначим сечения цифрами 0,1,2, начиная от заделки вала.

Определим углы закручивания участков:

$$\varphi_{01} = \frac{T_2 \cdot b}{G \cdot I_{\rho_{01}}} = -\frac{30 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 3{,}91 \cdot 10^8} = -1{,}91 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

где $I_{\rho_{01}} = 0{,}1(2d)^4 = 0{,}1(2 \cdot 125)^4 = 3{,}91 \cdot 10^8$ мм^4

$$\varphi_{12} = \int_0^a \frac{T_1 dz_1}{GI_{\rho_{12}}} = \int_0^a \frac{(M_1 - mz_1)dz_1}{G \cdot I\rho_{12}} = \frac{M_1 a}{GI\rho_{12}} - \frac{ma^2}{GI\rho_{12} \cdot 2} =$$

$$= \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}24 \cdot 10^8} - \frac{10 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^3)^2}{8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}24 \cdot 10^8 \cdot 2} = 20{,}83 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

где $I_{\rho_{12}} = 0{,}1(d)^4 = 0{,}1(125)^4 = 0{,}24 \cdot 10^8$ мм^4

Вычислим углы закручивания сечений:

для сечения 0 $\varphi_0 = 0$;

для сечения 1 $\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_{01} = -1{,}91 \cdot 10^{-3}$ рад,

для сечения 2 $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_{12} = -1{,}91 \cdot 10^{-3} + 20{,}83 \cdot 10^{-3} = 18{,}92 \cdot 10^{-3}$ рад

Построим эпюру углов закручивания, начиная от закрепленного конца (рисунок, *г*). На участке 12 эпюра φ представляет собой параболу, которую ввиду малости величин можно условно заменять прямой пунктирной линией.

Изгиб

Задание 3. Из условия прочности подобрать круглое поперечное сечение консольной стальной балки. Вычислить напряжение в опасном сечении балки и построить эпюру напряжения. Схема нагружения балки показана на рис.3. Данные для расчетов приведены в табл. 1

Пример решения задачи 3. Для консольно закрепленной деревянной балки, нагруженной, как показано на рисунке, необходимо из условия прочности подобрать круглое поперечное сечение. При вычислениях принять $[\sigma]$ = 8 МПа, q = 10 кН/м, M = 10 кНм, a = 1 м, b = 1,5 м.

Решение. 1. Балка закреплена в одном сечении, поэтому опорные реакции в заделке не определяем, а построение эпюр внутренних силовых факторов начнем со свободного конца. Разобъем балку на два характерных участка *BC* и *CA* и, используя метод сечений запишем выражения для поперечной силы Q и изгибающего момента M.

Для 1-го участка при $0 \le z_1 \le 1$ м

$Q_1 = qz_1$,

$$M_1 = -q\frac{z_1^2}{2}$$

при $z_1 = 0$,

$Q_1 = 0$,

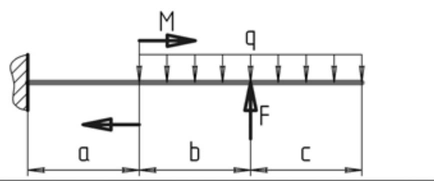
$M_1 = 0$,

при $z_1 = a = 1$ м,

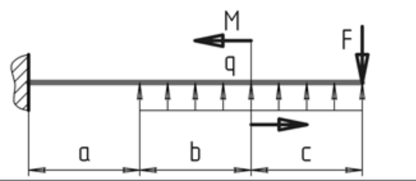
$Q_1 = qa = 10 \cdot 1 = 10$ кН,

$$M_1 = -q\frac{a^2}{2} = -10\frac{1^2}{2} = -5 \text{ кНм.}$$

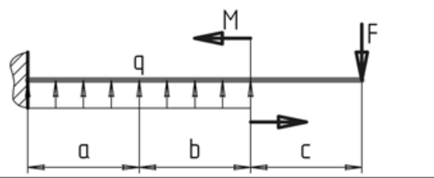
1



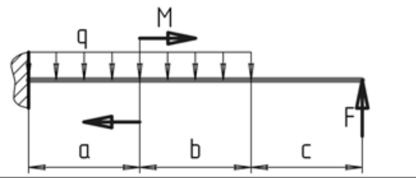
2



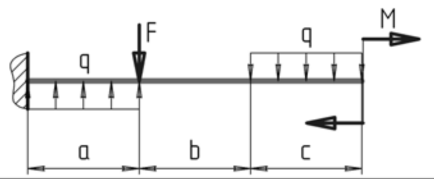
3



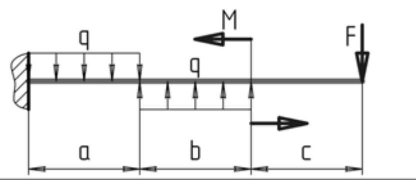
4



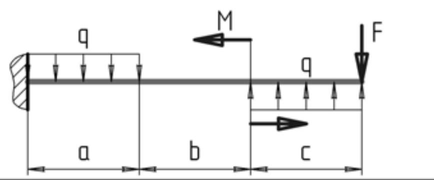
5



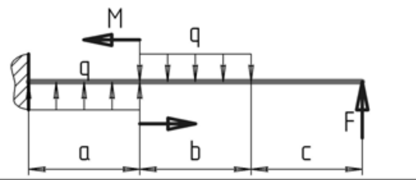
6



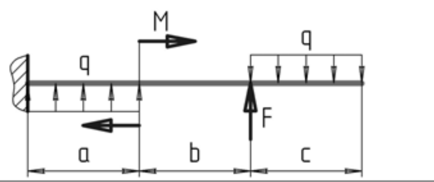
7



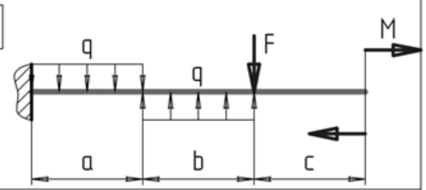
8



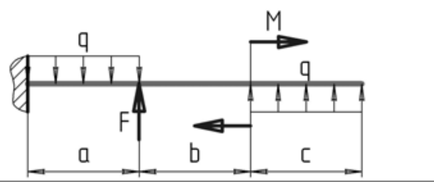
9



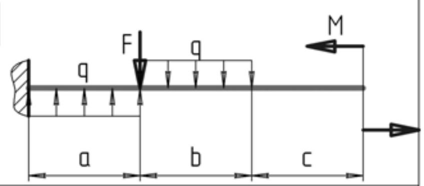
10



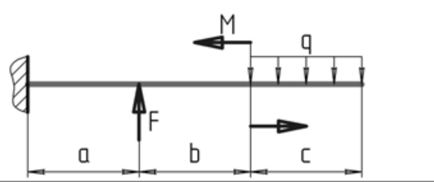
11



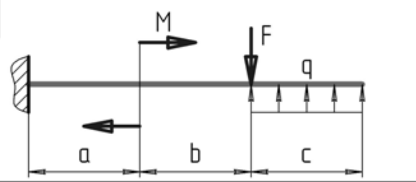
12



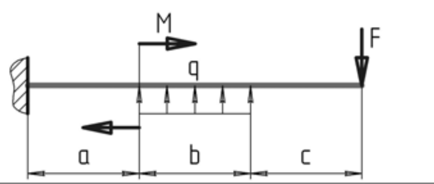
13



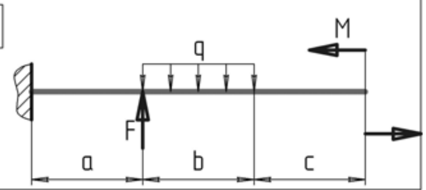
14



15



16



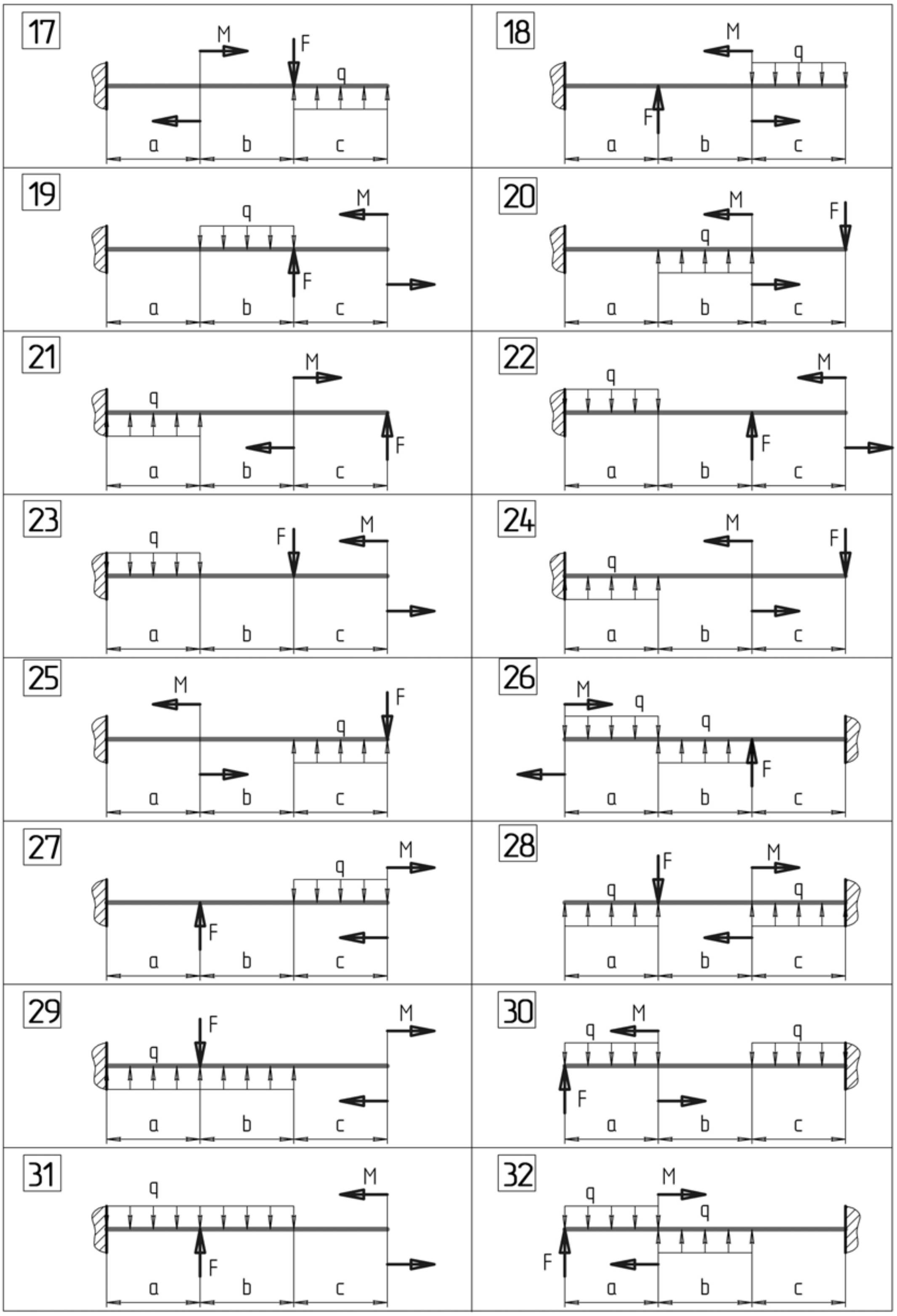


Рис. 3. Схема нагружения консольной балки

Для 2-го участка при $0 \le z_2 \le 1{,}5$ м

$Q_2 = qa = 10 \cdot 1 = 10$ кН,

$$M_2 = -qa\left(\frac{a}{2} + z_2\right) + M,$$

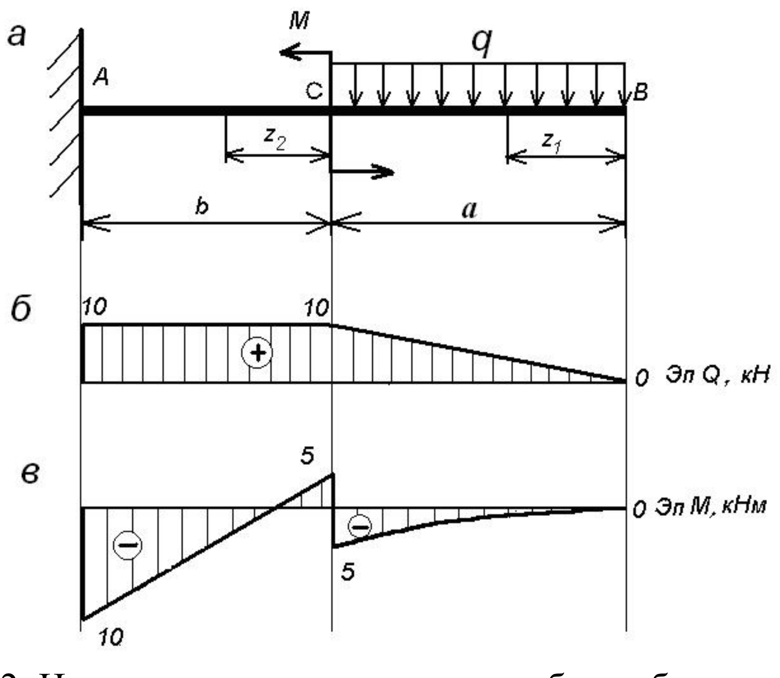
при $z_2 = 0$,

$$M_2 = -qa\frac{a}{2} + M = -10 \cdot 1\frac{1}{2} + 10 = 5 \text{ кНм},$$

при $z_2 = b = 1{,}5$ м,

$$M_2 = -qa\left(\frac{a}{2} + b\right) + M = -10 \cdot 1\left(\frac{1}{2} + 1{,}5\right) + 10 = -10 \text{ кНм}.$$

По полученным данным построим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (рисунок, *б, в*). По эпюре моментов найдем опасное сечение балки, т.е. сечение, где $M_{max} = 10$ кНм.



2. Из условия прочности при изгибе подберем поперечное сечение балки в форме круга:

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}.$$

Так как $W_x = 0{,}1d^3$, то

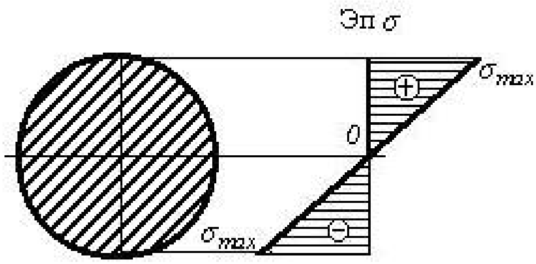
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{0{,}1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 10^6}{0{,}1 \cdot 8}} = 232 \text{ мм}.$$

Примем по нормальному ряду линейных размеров $d = 235$ мм.

Определим напряжение в опасном сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{10 \cdot 10^6}{0{,}1 \cdot 235^3} = 7{,}7 \text{ МПа}$$

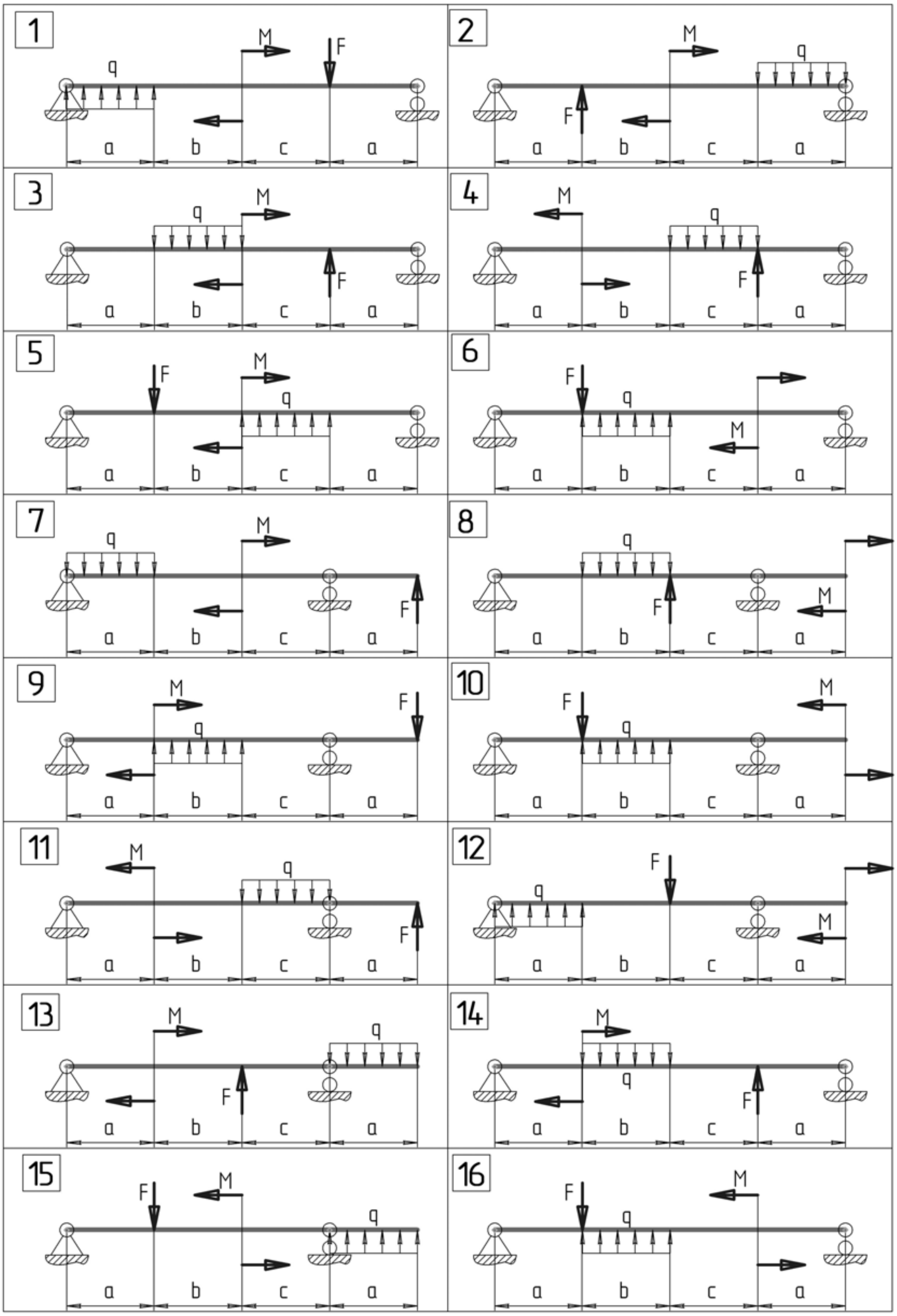
Покажем эпюру напряжений σ по высоте опасного сечения (сечение повернуто в плоскость чертежа)



Результаты расчетов позволяют сделать вывод о том, что прочность спроектированной балки обеспечена, т.к. $\sigma_{\max} \prec [\sigma]$.

Задание 4. Из условия прочности подобрать поперечное сечение балки на двух опорах в виде двутавра. Вычислить действительные нормальные и касательные напряжения, построить их эпюры для опасного сечения балки. Определить прогиб по середине длины балки и углы поворота на опорах. Схема нагружения балки показана на рис.4. Данные для расчетов приведены в табл. 1

Пример решения задачи 4. Из условия прочности подобрать поперечное сечение стальной балки в виде двутавра. Вычислить действительные нормальные σ и касательные τ напряжения, построить их эпюры для опасного сечения балки. Определить прогиб посередине балки и углы поворота на опорах. Схема нагружения балки показана на рис. 5.16, а. При вычислениях принять: F = 10 кН, q = 2 кН/м, M = 14 кН·м, a = 2 м, b = 4 м, c = 6 м, $[\sigma]$= 160 МПа, $E = 2{\cdot}10^5$ МПа.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
q
M
F
a
b
c

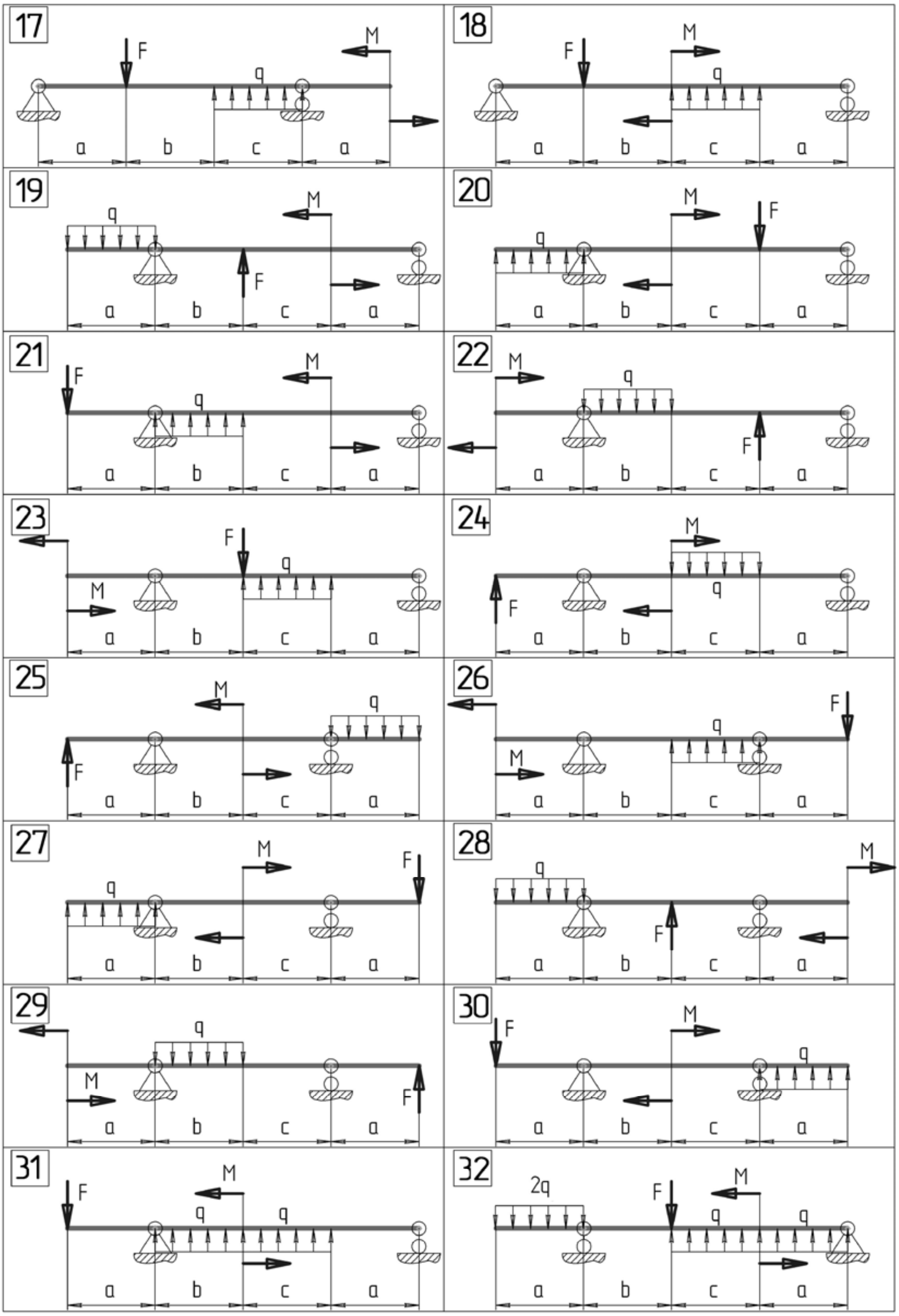


Рис.4. Схема нагружения балки на опорах

Решение. 1**.** Из условий равновесия определим реакции опор:

$\Sigma m_B(\overline{F}_к) = 0;\ F(a + b + c) - R_A(b + c) + qb(\frac{b}{2} + c) – M = 0;$

$$R_A = \frac{F\cdot(a+b+c)+qb\cdot(\frac{b}{2}+c)-M}{b+c} = \frac{10\cdot(2+4+6)+2\cdot4\cdot(\frac{4}{2}+6)-14}{4+6} = 17 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_A(\overline{F}_к) = F\cdot a - qb\frac{b}{2} - M + R_B(b + c) = 0.$$

$$R_B = \frac{-Fa + qb\frac{b}{2} + M}{b+c} = \frac{-10\cdot2+2\cdot4\cdot\frac{4}{2}+14}{4+6} = 1 \text{ кН}.$$

Проверка:

$\Sigma F_{ку} = - F + R_A – qb + R_B = - 10 + 17 - 2\cdot4 + 1 = 0.$

Проверка показала, что реакции опор найдены верно.

2. Методом сечений вычислим значения поперечной силы Q и изгибающего момента M. Балка имеет три характерных участка

Для 1-го участка при $0 \le z_1 \le a$

$Q_1 = - F = - 10$ кН,

$M_1 = - Fz_1,$

при $z_1 = 0,$

$M_1 = 0,$

при $z_1 = a;$

$M_1 = - F\cdot a = - 10\cdot2 = - 20$ кН·м.

Для 2-го участка при $0 \le z_2 \le b$

$Q_2 = - F + R_A – qz_2;$

$M_2 = - F(a + z_2) + R_Az_2 – qz_2\frac{z_2}{2};$

при $z_2 = 0$

$Q_2 = - F + R_A = - 10 + 17 = 7$ кН,

$M_2 = - Fa = - 10\cdot2 = - 20$ кН·м,

при $z_2 = b;$

$Q_2 = - F + R_A – qb = -10 + 17 - 2\cdot4 = -1$ кН.

$M_2 = - F(a + b) + R_Ab - qb\frac{b}{2} = -10(2 + 4) + 17\cdot4 - 2\cdot4\cdot\frac{4}{2} = - 8$ кН·м.

Для 3-го участка при $0 \le z_3 \le c$

$Q_3 = - R_B = - 1$кН;

$M_3 = R_B \cdot z_3;$

при $z_3 = 0;$

$M_3 = 0;$

при $z_3 = c;$

$M_3 = R_B \cdot c = 1 \cdot 6 = 6$ кН·м.

Так как на втором участке величина Q_2 меняет знак (эпюра Q пересекает базу эпюры), значение M_2 будет иметь экстремум. Определим экстремальное значение M_2. Вычислим значение z_2, при котором $Q_2 = 0$:

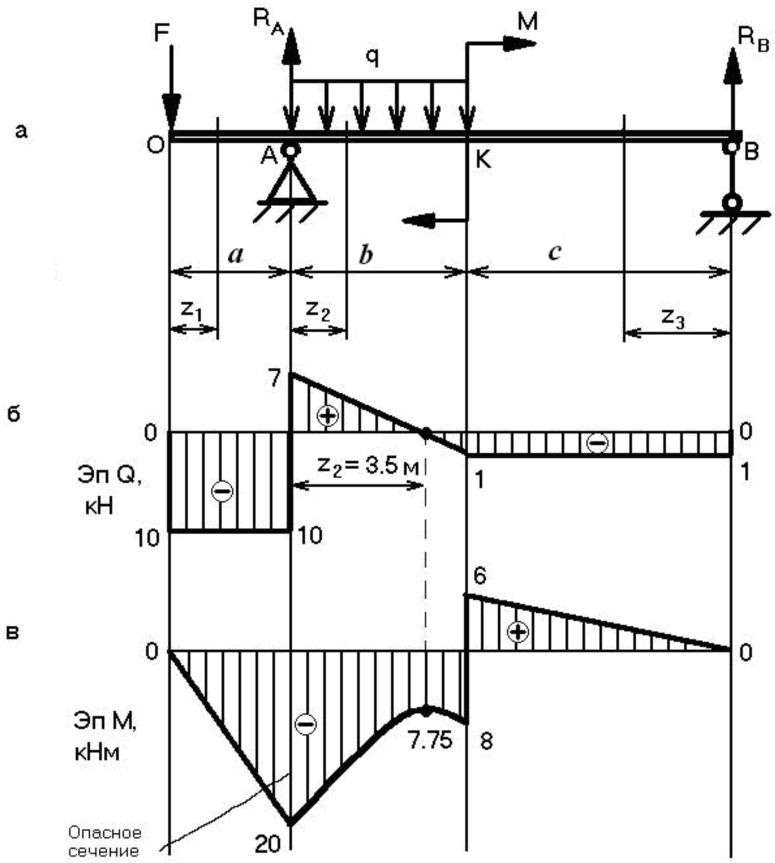
$Q_2 = - F + R_A - qz_2 = 0;$

$$z_2 = \frac{-F + R_A}{q} = \frac{-10 + 17}{2} = 3{,}5 \text{ м.}$$

При $z_2 = 3{,}5$м:

$$M_2 = -10(2 + 3{,}5) + 17 \cdot 3{,}5 - 2 \cdot 3{,}5 \frac{3{,}5}{2} = -7{,}75 \text{ кН·м.}$$

Построим эпюры Q и M (рисунке, *б*, *в*).



По эпюре M определим опасное сечение с максимальным по модулю моментом $|M_{max}|$ =20 кНм.

2. Запишем условие прочности для опасного сечения балки

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \le [\sigma].$$

Отсюда $$W_x \ge \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} \ge \frac{20 \cdot 10^6}{160} \ge 125 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$$

Требуемое значение момента сопротивления сечения $W_x \ge 125$ см^3.

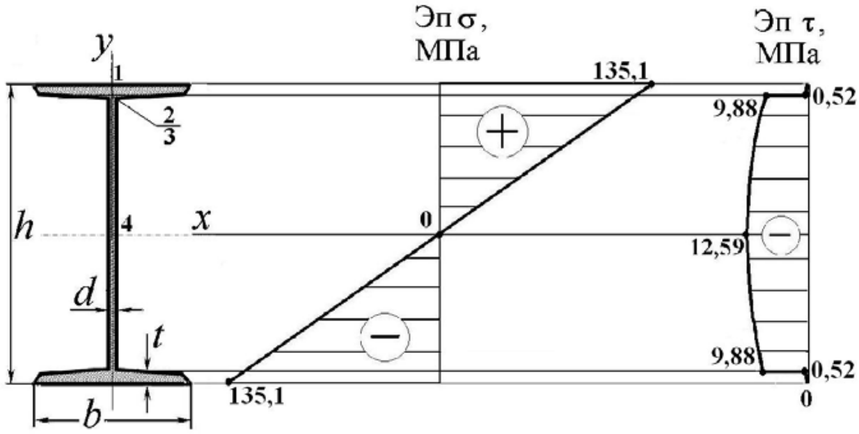
По сортаменту прокатных профилей подбираем двутавр № 18 и выписываем его геометрические характеристики:

h = 180 мм, b = 95 мм, d = 5,0 мм, t = 8,0 мм,

W_x =148 см^3, I_x = 1330 см^4, S_x = 83,7 см^3,

Вычислим напряжение в опасном сечении балки и построим эпюру σ по высоте двутавра:

$$\sigma = \frac{|M_{\max}|}{W_x} = \frac{20 \cdot 10^6}{148 \cdot 10^3} = 135{,}1 \text{ МПа}.$$



4. Для построения эпюры касательных напряжений по высоте опасного сечения балки представим двутавр в первом приближении как фигуру, составленную из трех условных прямоугольников, размерами

b x t (горизонтальный);

d x (h -2t) (вертикальный);

b x t (горизонтальный).

Обозначим точки по высоте двутавра цифрами 1, 2, 3, 4. Вычислим значения касательного напряжения в указанных точках:

$\tau_1 = 0$.

$$\tau_2 = \frac{Q \cdot bt\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}{I_x \cdot b} = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 95 \cdot 8.0\left(\frac{180}{2} - \frac{8.0}{2}\right)}{1330 \cdot 10^4 \cdot 95} = -\ 0{,}52 \text{ МПа},$$

$$\tau_3 = \frac{Q \cdot bt\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}{I_x \cdot d} = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 95 \cdot 8.0\left(\frac{180}{2} - \frac{8.0}{2}\right)}{1330 \cdot 10^4 \cdot 5{,}0} = -\ 9{,}88 \text{ МПа}$$

$$\tau_4 = \frac{Q \cdot S_x}{I_x \cdot d} = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 83.7 \cdot 10^3}{1330 \cdot 10^4 \cdot 5{,}0} = -12{,}59 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру τ в опасном сечении балки.

5. Определим углы поворота сечений на опорах *A* (θ_A) и *B* (θ_B) и прогиб (y_K) посередине балки в точке *K*, применяя универсальное уравнение упругой линии:

$$EI_x\theta_A = EI_x\ \theta_0 - F\frac{a^2}{2},$$

$$EI_x\theta_B = EI_x\theta_0 - F\frac{(a+b+c)^2}{2} + R_A\frac{(a+b+c-a)^2}{2} - q\frac{(a+b+c-a)^3}{6} +$$

$$+q\frac{(a+b+c-a-b)^3}{6} + M(a+b+c-a-b),$$

$$EI_x y_\kappa = EI_x y_0 + EI_x\theta_0(a+b) - F\frac{(a+b)^3}{6} + R_A\frac{(a+b-a)^3}{6} -$$

$$-q\frac{(a+b-a)^4}{24}.$$

Необходимо вычислить неизвестные значения θ_0 и y_0. Для этого составим дополнительные уравнения:

$$EI_x y_A = EI_x y_0 + EI_x\theta_0 a - F\frac{a^3}{6},$$

$$EI_x y_B = EI_x y_0 + EI_x\theta_0(a+b+c) - F\frac{(a+b+c)^3}{6} + R_A\frac{(a+b+c-a)^3}{6} -$$

$$-q\frac{(a+b+c-a)^4}{24} + q\frac{(a+b+c-a-b)^4}{24} + M\frac{(a+b+c-a-b)}{2}.$$

Учитывая, что $y_A = 0$, $y_B = 0$ и решая совместно два этих уравнения, найдем

$$EI_x\theta_0 = 50{,}67 \text{ Нмм}^2,$$
$$EI_x y_0 = -\ 88{,}04 \text{ Нмм}^3.$$

Тогда, принимая $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $I_x = 1330 \cdot 10^4$ мм^4, получим значения

$\theta_A = 11{,}5 \cdot 10^{-3}$ рад,

$\theta_B = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ рад,

$y_к = 6{,}01$ мм.

Таким образом, деформированная ось балки (упругая линия) в опорах *A* и *B* будет повернута против хода часовой стрелки $\theta_A > 0$, $\theta_B > 0$, а в точке *K* смещена вверх на 6,01 мм. Согласно эпюре *M*, упругая линия будет иметь выпуклую форму на участке *OK* ($M < 0$) и вогнутую – на участке *KB* ($M > 0$).

Устойчивость

Задание 5. Стальной стержень длиной *l* сжимается силой *F*. Необходимо:

1. Вычислить размеры поперечного сечения стержня при условии прочности на сжатие, принимая пониженные допускаемые напряжения. Расчет выполнять методом последовательных приближений. Первоначально задать величину коэффициента снижения допускаемых напряжений φ = 0,5.

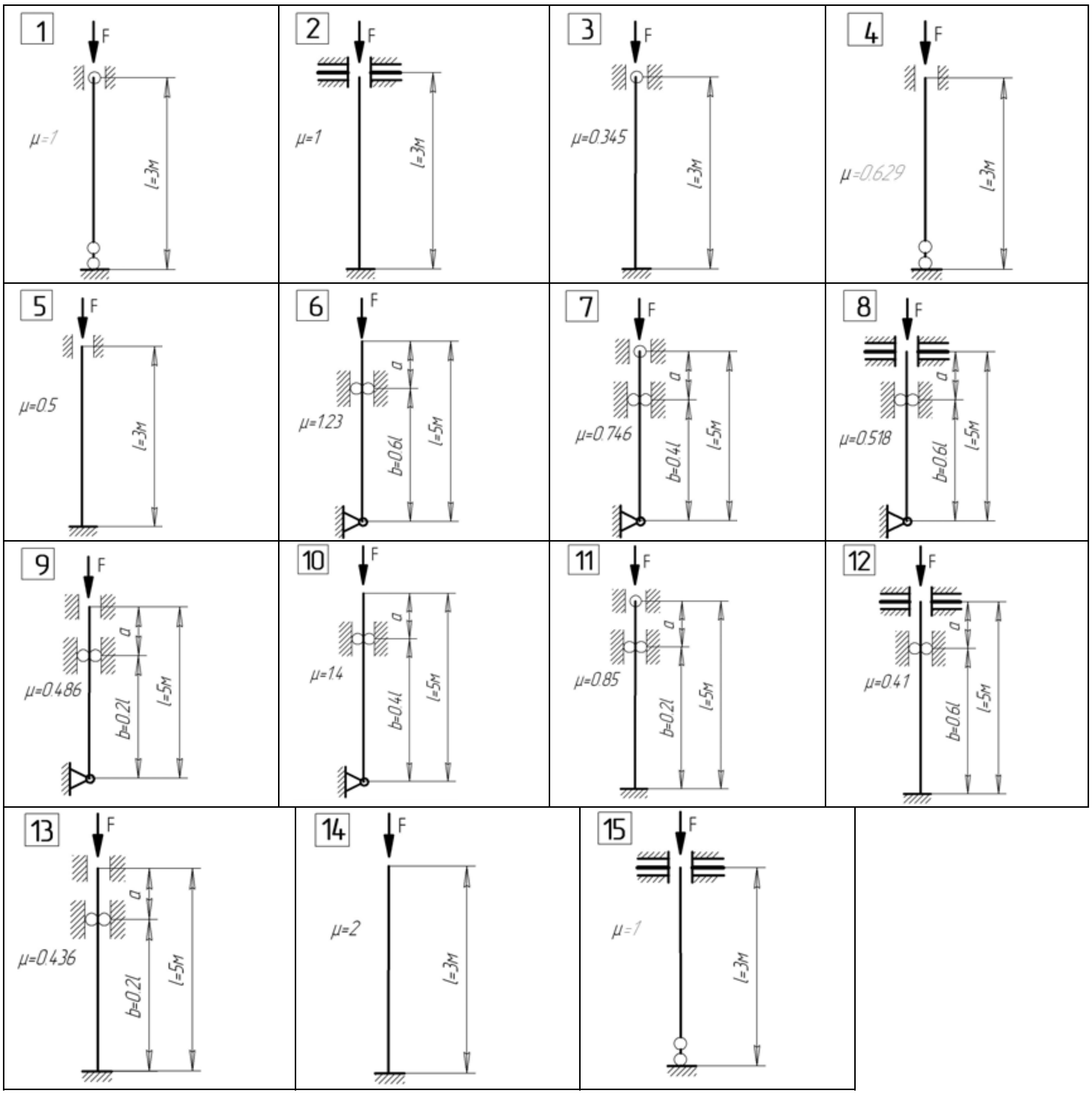
2. Определить величину критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

Схема нагружения стержня показана на рис.5. Данные для расчетов приведены в табл. 2

Таблица 2.

Вариант	Номер		F, кН	Вариант	Номер		F, кН
	схемы	Сечения			схемы	сечения	
1	1	I	2 00	16	1	V I	75
2	2	I I	2 05	17	2	V II	80
3	3	I II	2 10	18	3	V III	85
4	4	I V	2 15	19	4	I X	90
5	5	V	2 20	20	5	X	95
6	6	V I	2 25	21	6	I	00
7	7	V II	2 30	22	7	I I	10

8	8	V III	2 35	23	8	I II	20
9	9	I X	2 40	24	9	I V	30
10	1 0	X	2 45	25	1 0	V	40
11	1 1	I	2 50	26	1 1	V I	50
12	1 2	I I	2 55	27	1 2	V II	60
13	1 3	I II	2 60	28	1 3	V III	70
14	1 4	I V	2 65	29	1 4	I X	80
15	1 5	V	2 70	30	1 5	X	90



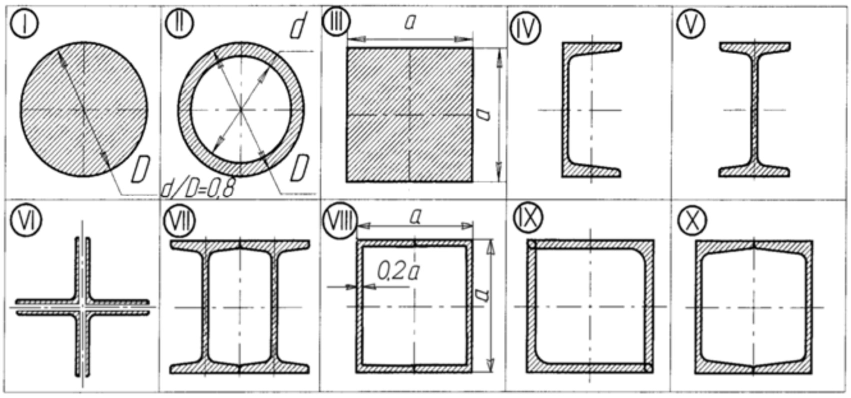


Рис. 5. Схема нагружения стержня и виды его сечения

Пример решения задачи 5. Определить из расчета на устойчивость размер поперечного сечения стальной сжатой стойки ($[\sigma_c]$ = 160 МПа). Расчет производить последовательными приближениями, предварительно задать коэффициент продольного изгиба $\varphi_1 = 0{,}5$. Нагрузка F = 500 кН, для стойки длиной l = 2,5 м, коэффициент приведения длины $\mu = 0{,}7$. Найти критическую силу F_k и коэффициент запаса устойчивости n_y.

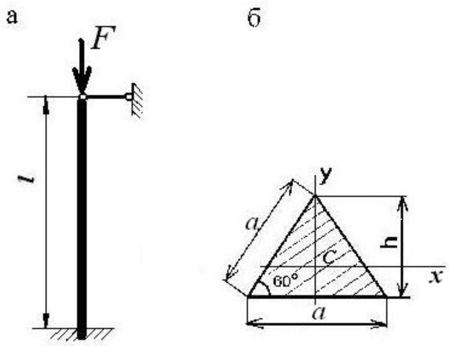


Рисунок к задаче 5

Решение. 1. Для определения гибкости стойки вычисляем:

- минимальный момент инерции ее поперечного сечения

$$I_{\min} = I_x = I_y = \frac{ah^3}{36} = \frac{a(a\sin 60°)^3}{36} = 0{,}018a^4,$$

- площадь сечения

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{a \cdot a\sin 60°}{2} = 0{,}433a^2,$$

- радиус инерции сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0{,}018a^4}{0{,}433a^2}} = 0{,}204a,$$

- гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0{,}7 \cdot 2{,}5}{0{,}204a} = \frac{8{,}578}{a}.$$

2. Рассматриваем первое приближение, $\varphi_1 = 0{,}5$.

Из условия устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \varphi[\sigma_c]$$

находим $A \ge \dfrac{F}{\varphi_1[\sigma_c]} = \dfrac{500 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 160} = 6250$ мм^2,

тогда $a = \sqrt{\dfrac{A}{0{,}433}} = \sqrt{\dfrac{6250}{0{,}433}} = 120{,}1$ мм.

Принимаем a = 120 мм, тогда

$$\lambda = \frac{8{,}578}{0{,}120} = 71{,}5.$$

При λ = 70 φ = 0,81 и при λ = 80 φ = 0,75. Используя интерполяцию, находим

$$\varphi_1' = 0{,}81 - \frac{0{,}81 - 0{,}75}{10} \cdot 1{,}5 \approx 0{,}80.$$

3. Второе приближение, $\varphi_2 = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \dfrac{0{,}5 + 0{,}80}{2} = 0{,}65.$

Находим $A = \dfrac{F}{\varphi_2[\sigma_c]} = \dfrac{500 \cdot 10^3}{0{,}65 \cdot 160} = 4808$ мм^2 ,

тогда $a = \sqrt{\dfrac{4808}{0{,}433}} = 105{,}4$ мм.

Принимаем a = 105 мм, тогда

$$\lambda = \frac{8{,}578}{0{,}105} = 81{,}7.$$

Определяем $\varphi_2' = 0{,}75 - \dfrac{0{,}75 - 0{,}69}{10} \cdot 1{,}7 = 0{,}74.$

4. Третье приближение, $\varphi_3 = \dfrac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \dfrac{0{,}65 + 0{,}74}{2} = 0{,}70.$

Находим $A = \dfrac{F}{\varphi_3[\sigma_c]} = \dfrac{500 \cdot 10^3}{0{,}70 \cdot 160} = 4464\,\text{мм}^2$,

тогда $a = \sqrt{\dfrac{4464}{0{,}433}} = 101{,}5\,\text{мм}$,

принимаем a = 102 мм,

$$\lambda = \frac{8{,}578}{0{,}102} = 84{,}1$$

Находим $\varphi_3' = 0{,}75 - \dfrac{0{,}75 - 0{,}69}{10} \cdot 4{,}1 = 0{,}73.$

5. Четвертое приближение, $\varphi_4 = \dfrac{\varphi_3 + \varphi_3'}{2} = \dfrac{0{,}7 + 0{,}73}{2} = 0{,}72.$

Находим $A = \dfrac{F}{\varphi_4[\sigma_c]} = \dfrac{500 \cdot 10^3}{0{,}72 \cdot 160} = 4340\,\text{мм2}$,

тогда $a = \sqrt{\dfrac{4340}{0{,}433}} = 100{,}1\,\text{мм}$,

принимаем a = 100 мм,

$$\lambda = \frac{8{,}578}{0{,}100} = 85{,}78$$

Находим $\varphi_4' = 0{,}75 - \dfrac{0{,}75 - 0{,}69}{10} 5{,}78 = 0{,}715.$

Так как $\varphi_4' \approx \varphi_4$, то окончательно принимаем размер a = 100 мм.

6. Критическое напряжение находим по формуле Ясинского, т.к. $\lambda < 100$,

$\sigma_k = 310 - 1{,}14\lambda = 310 - 1{,}14 \cdot 85{,}75 = 212{,}2$ МПа.

7. Вычислим критическую силу:

$F_k = \sigma_k \cdot A = 212{,}2 \cdot 4340 = 920948$ Н = 921 кН

8. Определим коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{F_k}{F} = \frac{921}{500} = 1{,}8.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч.1,2. Статика. Кинематика. Динамика. [Текст]: СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 800 с

2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. [Текст]: В двух томах. СПб.: Издательство «Лань», 1998. – 736 с.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. [Текст]: М., Высшая школа, 1998. - 367с.

4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. [Текст]: М., Наука, 1986. - 560с.

5. Александров А.В. и др. Сопротивление материалов. [Текст]: М., Высшая школа, 1995 - 560с

6. Степин П.А. Сопротивление материалов. [Текст]: М., Высшая школа, 1997 . -344с

ОГЛАВЛЕНИЕ