Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»

О. М. Иванов Н. А. Бабина

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве практикума

Санкт-Петербург
2021

УДК 677.02
ББК 37.23я73
И20

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного
университет промышленных технологий и дизайна
И. А. Прохорова;
кандидат технических наук, доцент Санкт-Петербургского государственного
университет промышленных технологий и дизайна
М. И. Осипов

Иванов, О. М.
И20 Основы моделирования технологических процессов: практикум / О. М. Иванов, Н. А. Бабина. – Санкт-Петербург: ФГБОУВО «СПбГУПТД», 2021. – 31 с.
ISBN 978-5-7937-2012-0

Практикум включает описание методов построения математических моделей различных технологических процессов на основе результатов проведенных исследований и практические примеры создания моделей.

Предназначено для обучающихся по направлению 29.03.02 «Технологии и проектирование текстильных изделий».

УДК 677.02
ББК 37.23я73

ISBN 978-5-7937-2012-0

ВВЕДЕНИЕ

Разработка технологических процессов и современного оборудования для производства новых видов текстильных материалов требует не только общеинженерных и специальных знаний, но и умения сначала спланировать, поставить и провести эксперимент, а затем проанализировать полученные данные и построить математическую модель технологического процесса.

Цель преподавания дисциплины заключается в освоении основных принципов решения задач, связанных с созданием математических моделей технологических процессов на основе проведенных исследований технологических процессов текстильной промышленности. Дисциплина базируется на изучении способов выбора факторов для построения модели процесса, методики факторного анализа для оценки степени влияния факторов, излагаются основные способы построения эмпирических линейных и нелинейных моделей на основе результатов эксперимента. Студенты должны освоить методы исследования технологических процессов, применяемых в текстильной промышленности. В данном курсе изучают методы разработки эмпирических моделей различных технологических процессов текстильной промышленности. Приведены примеры построения моделей разного типа на основе экспериментальных данных.

Назначение курса – научить студентов применению современных компьютерных методов для выбора вида математической модели и расчета эмпирических коэффициентов функциональных зависимостей.

Лучшему усвоению материала способствует разработка студентами эмпирических моделей на основе данных, полученных во время производственных практик и результатов выполнения исследовательской работы.

Объем курса охватывает материал, который сообщается студентам на лекциях, практических занятиях и консультациях, изучается самостоятельно в процессе работы с учебной литературой, в том числе и специальной по технологии прядения, технологии ткачества и нетканых материалов.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ. НАИМЕНОВАНИЕ ТЕМ И ИХ СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Общие вопросы методологии моделирования. Этапы моделирования. Методы (теоретические, экспериментальные) получения математических моделей.

Тема 2. Методы выбора значимых факторов для построения моделей технологических процессов.

Практическая работа 1. Выбор значимых факторов на основе экспертного опроса.

Тема 3. Построение моделей процессов на основе эксперимента с факторным планированием для двух факторов на двух уровнях.

Практическая работа 2. Выбор значимых факторов на основе проведения эксперимента с факторным планированием для двух факторов.

Тема 4. Построение моделей процессов на основе эксперимента с факторным планированием для трех факторов на двух уровнях.

Практическая работа 3. Выбор значимых факторов на основе проведения эксперимента с факторным планированием для трех факторов.

Практическая работа 4. Получение регрессионной модели на основе эксперимента с факторным планированием. Оценка значимости коэффициентов и адекватности модели.

Тема 5. Экспериментальные методы получения моделей технологических процессов. Математическое планирование эксперимента.

Тема 6. Методы определения коэффициентов линейной эмпирической зависимости. Проверка адекватности полученной модели.

Практическая работа 5. Определение коэффициентов линейной эмпирической зависимости на основе экспериментальных данных различными способами.

Практическая работа 6. Проверка адекватности полученной эмпирической модели.

Тема 7. Определение коэффициентов для квадратичной эмпирической зависимости.

Практическая работа 7. Определение коэффициентов квадратичной эмпирической зависимости на основе экспериментальных данных различными способами.

Практическая работа 8. Проверка адекватности полученной квадратичной модели.

Тема 8. Определение коэффициентов нелинейных эмпирических зависимостей.

Практическая работа 9. Определение коэффициентов нелинейной эмпирической зависимости на основе экспериментальных данных.

Практическая работа 10. Проверка адекватности полученной нелинейной эмпирической модели.

Тема 9. Использование возможностей программы *Excel* для выбора вида математической функции для построения модели и определения численных значений коэффициентов.

Практическая работа 11. Построение нелинейной модели и определение численных значений коэффициентов с использованием программы *Excel*.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

В соответствии с учебным планом по курсу «Основы моделирования технологических процессов» студенты выполняют практические работы. Необходимые исходные данные для выполнения задания студенты получают у преподавателя. Выполнение всех практических работ является необходимым предварительным условием для получения допуска к экзамену по данному курсу.

Для выполнения практической работы, прежде всего, надо уяснить, что требуется в данном конкретном задании, изучить соответствующий материал и провести необходимые расчеты.

При использовании в задании формул, коэффициентов, критериев и значений отдельных параметров, заимствованных из литературы, следует в конце работы поместить список использованных источников. В соответствующих местах работы обязательно давать ссылки на эти источники в квадратных скобках. Все входящие в формулы или таблицы величины должны быть пояснены, указаны их наименования и размерность.

Обязательно необходимо указывать размерность полученного результата. Содержание отчета по лабораторной работе должно показать, что студент ясно представляет себе существо вопроса.

Выполняемые расчеты необходимо пояснять и комментировать, а после их завершения сделать необходимые выводы.

Содержание отчета должно показать, что студент ясно представляет себе существо используемого метода.

Качество выполненной работы оценивается по полноте и правильности выполнения, степени использования научно-технической литературы и форме изложения.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1
Выбор значимых факторов на основе экспертного опроса

Цель работы: провести опрос экспертов, оценить согласованность экспертов и степень важности выбранных показателей.

В качестве критериев выбран комплекс показателей, наиболее полно характеризующих свойства пневмомеханической пряжи ниточного назначения:

y_1 – относительная разрывная нагрузка одиночной нити, сН/текс;
y_2 – относительная разрывная нагрузка пряжи по пасме, сН/текс;
y_3 – относительное разрывное удлинение, %;
y_4 – коэффициент вариации по Устеру, %;
y_5 – коэффициент вариации по прочности, %;
y_6 – коэффициент вариации по удлинению одиночной нити, %;
y_7 – коэффициент вариации по линейной плотности, %;
y_8 – устойчивость к истиранию, циклов;
y_9 – число толстых мест, км$^{-1}$;
y_{10} – число непсов, км$^{-1}$.

Весомость показателей качества определяют на основе экспертного опроса специалистов.

Необходимо привлечь 10 экспертов для ранжирования предложенных критериев по степени важности для качества продукции.

Обработка анкет заключается в определении степени важности рассматриваемых критериев и оценке согласованности мнений экспертов.

Каждый эксперт оценивает предложенные критерии по 10-балльной шкале (все критерии должны иметь разную оценку от 1 до 10) независимо от предыдущих.

Для оценки весомости используют соотношение

$$\propto_j = \frac{{}^{1}/_{S_j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S_j}} \ ,$$

где $S_j = \sum_{i=1}^{m} r_{ij}$ – сумма рангов для j-го свойства (j = 1, 2, …, n) по всем m респондентам;

r_{ij} – ранг, присвоенный j-му свойству i-м респондентом.

При этом должно выполняться соотношение $\sum_{j=1}^{k} \propto_j = 1$.

Коэффициент конкордации

$$W = \frac{S}{S_{\max}} \ ,$$

где $S = \sum_{j=1}^{n} \left(S_j - \bar{S}\right)^2$ – сумма квадратов отклонений.

$$S_{\max} = \frac{1}{12} m^2 (n^3 - n) \ ,$$

где m – число респондентов; n – число свойств.

Значимость коэффициента конкордации в контрольном варианте 0,748 при числе свойств более 7 оценивают по распределению χ^2 для величины

$$\chi^2 = m(n-1)W \ .$$

Табличное значение $\chi^2_{\text{табл}} = 16{,}9$ при $\nu = 10 - 1 = 9$ степеней свободы и уровне значимости $P_Д$ = 0,95. При расчетном значении больше табличного можно с заданным уровнем значимости считать W значимой, т. е. гипотеза о наличии согласованности мнений экспертов принимается.

Отчет должен содержать: изложение методики расчета, данные опроса экспертов, таблицу расчета с результатами, результаты коэффициента конкордации и согласованности экспертов, вывод.

Т а б л и ц а 1. **Пример заполнения таблицы экспертного опроса**

Номер респондента	Ранговые оценки показателей качества пряжи										
	*y*1	*y*2	*y*3	*y*4	*y*5	*y*6	*y*7	*y*8	*y*9	*y*10	□
1	2	9	8	1	3	7	6	10	4	5	
2	4	10	3	2	1	5	6	7	8	9	
3	1	6	7	3	5	4	2	8	9	10	
4	1	9	7	3	2	6	5	8	4	10	
5	2	6	7	4	3	5	1	8	9	10	
6	2	7	6	4	1	5	3	8	9	10	
7	1	10	6	3	4	5	2	7	8	9	
8	3	5	7	4	2	6	1	8	10	9	
9	3	8	6	2	1	5	4	7	9	10	
10	2	7	3	1	5	6	4	8	10	9	
S_j											
$1/S_j$											
α_j											
$(S_j - S)^2$											

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2

Выбор значимых факторов на основе проведения эксперимента с факторным планированием для двух факторов

Цель работы: спланировать эксперимент по полностью рандомизированному плану. Построить матрицу планирования эксперимента для двух факторов. Оценить степень влияния факторов и их взаимодействий.

Рассмотрим получение нетканого материала по технологии иглопрокалывания. Выберем в качестве факторов плотность прокалывания (фактор A) и линейную плотность волокна (фактор B). Таким образом, при четырех комбинациях исходных данных (факторов) были изготовлены образцы материала и проведены измерения разрывной нагрузки. Для каждого варианта проведено четыре измерения, результаты которых сведены в *табл. 2*.

Таблица 2. **Результаты эксперимента с факторным планированием**

Факторы	60 (A_0)	80 (A_1)	Σ
0,3 текс (B_0)	**(1)** 21 26 18 23	***a*** 24 21 28 25	186
0,4 текс (B_1)	***b*** 18 21 16 20	***ab*** 22 25 19 21	162
Σ	163	185	348

Матрица планирования эксперимента будет выглядеть следующим образом (*табл. 3*).

Таблица 3. **Коэффициенты для эффектов факторного эксперимента типа 2^2**

Варианты испытаний	Эффекты		
	A	*B*	*AB*
(1)	–	–	+
a	+	–	–
b	–	+	–
ab	+	+	+

1. Вычисляем сумму значений в каждой ячейке:
   (1) = 88; *a* = 98; *b* = 75; *ab* = 87.
2. Вычисляем сумму значений всех ячеек:
   ***S* = (1) + *a* + *b* + *ab* = 348.**

3. Вычисляем сумму квадратов всех ячеек:
   $\boldsymbol{Sk = 21^2 + 26^2 + 18^2 + \ldots + 21^2 = 7728.}$
4. Проводим оценку влияния всех факторов и взаимодействия:
   $\boldsymbol{4A = -(1) + a - b + ab = 22;}$
   $\boldsymbol{4B = -(1) - a + b + ab = -24;}$
   $\boldsymbol{4AB = +(1) - a - b + ab = 2.}$
5. Вычисляем «контрасты» для факторов и взаимодействия:

$$\boldsymbol{SS_A = \frac{(4A)^2}{r2^2} = 30,25\ ;\ SS_B = \frac{(4B)^2}{r2^2} = 36\ ;\ SS_{AB} = \frac{(4AB)^2}{r2^2} = 0,25}\ .$$

6. Вычисляем контраст для ошибки:
   $\boldsymbol{SS_{ош.} = S_k - SS_A - SS_B - SS_{AB} - S^2/(r \cdot 2^2) = 92,5.}$ (Контраст для ошибки не может быть отрицательным).
7. Вычисляем величину ошибки:

$$O = \frac{SS_{\text{ош}}}{f} = 7,71\ ,$$

где $\boldsymbol{f = (r-1)\ 2^2} = 12$ – число степеней свободы.

8. Вычисляем расчетное значение критерия Фишера:

$$F_{1,12}^{A} = \frac{SS_A}{O} = 3,92\ ;\ F_{1,12}^{B} = \frac{SS_B}{O} = 4,67\ ;\ F_{1,12}^{AB} = \frac{SS_{AB}}{O} = 0,032\ .$$

Табличное значение критерия Фишера в данном случае равно $F_{1,12}{}^{\mathrm{T}} = 4,75$.

Если расчетное значение критерия больше табличного, значит данный фактор или взаимодействие факторов оказывает существенное влияние на выбранный критерий эффективности процесса. Если расчетное значение критерия меньше табличного, значит данный фактор или взаимодействие факторов не оказывает существенного влияния на выбранный критерий.

В нашем случае приходится констатировать, что оба фактора (A и B) и их взаимодействие (AB) не оказывают существенного влияния.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3
Выбор значимых факторов на основе проведения эксперимента с факторным планированием для трех факторов

Цель работы: спланировать эксперимент по полностью рандомизированному плану. Построить матрицу планирования эксперимента для трех факторов. Оценить степень влияния факторов и их взаимодействий.

Рассмотрим факторный эксперимент типа «$\mathbf{2^3}$». Это означает, что мы имеем дело с тремя факторами (A, B, C) на двух уровнях: нижнем (0) и верхнем (1). Предлагаемые обозначения очень удобны для дальнейших расчетов.

Оценить влияние разводки в передней зоне вытяжного прибора (мм), вытяжки в передней зоне вытяжного прибора и нагрузки на переднюю вытяжную пару (кг) на неровноту ленты. Исходные данные удобно записать в таблице следующего вида (*табл. 4*).

Т а б л и ц а 4. **Исходная таблица для анализа эксперимента с факторным планированием**

Нагрузка на переднюю вытяжную пару, кг	Разводка в передней зоне вытяжного прибора, мм			
	32 (A_0)		34 (A_1)	
	Вытяжка в передней зоне вытяжного прибора		Вытяжка в передней зоне вытяжного прибора	
	12,6 (B_0)	20,8 (B_1)	12,6 (B_0)	20,8 (B_1)
8	**(1)** 12,0 11,8 12,3	***b*** 13,2 12,7 13,4	***a*** 12,7 13,0 13,2	***ab*** 13,9 13,7 14,4
10	***c*** 11,2 10,8 11,5	***bc*** 11,7 11,9 12,1	***ac*** 11,8 12,1 12,3	***abc*** 12,2 12,6 12,8

Матрица планирования эксперимента в данном случае выглядит следующим образом (*табл. 5*).

Т а б л и ц а 5. **Коэффициенты для эффектов в факторном эксперименте типа 2^3**

Варианты испытаний	Эффект							
	Σ	*A*	*B*	*AB*	*C*	*AC*	*BC*	*ABC*
(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	+	-	-	-	-
c	+	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	+	-	-	+	+	-	-
bc	+	-	+	-	+	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Опишем алгоритм и результаты вычислений для приведенного в таблице варианта.

9. Вычисляем сумму значений в каждой ячейке: **(1), *a, b, ab, c, ac, bc, abc.***

(1) = 36,1; *a* = 38,9; *b* = 39,3; *ab* = 42,0; *c* = 33,5; *ac* = 36,2; *bc* = 35,7; *abc* = = 37,6 .

10. Вычисляем сумму значений всех ячеек:

***S* = (1) + *a* + *b* + *ab* + *c* + *ac* + *bc* + *abc* = 299,3 .**

11. Вычисляем сумму квадратов всех значений в каждой ячейке:

$\boldsymbol{Sk = 12{,}0^2 + 11{,}8^2 + 12{,}3^2 + 13{,}2^2 + \ldots + 12{,}8^2 = 3750{,}03}$ **.**

12. Проводим оценку влияния всех факторов и их взаимодействий:

8*A* = - (1) + *a* – *b* + *ab* – *c* + *ac* – *bc* + *abc* = 10,1;

8*B* = - (1) - *a* + *b* + *ab* – *c* - *ac* + *bc* + *abc* = 9,9;

8*AB* = + (1) - *a* – *b* + *ab* + *c* - *ac* – *bc* + *abc* = -0,9;

8*C* = - (1) - *a* – *b* - *ab* + *c* + *ac* + *bc* + *abc* = -13,3;
8*AC* = + (1) - *a* + *b* - *ab* – *c* + *ac* – *bc* + *abc* = -0,9;
8*BC* = + (1) + *a* – *b* - *ab* – *c* - *ac* + *bc* + *abc* = -2,7;
8*ABC* = - (1) + *a* + *b* - *ab* + *c* - *ac* – *bc* + *abc* = -0,7.

13. Вычисляем «контрасты» для всех факторов:

$$\boldsymbol{SS_A = \frac{(8A)^2}{r\cdot 2^3} = 4,25}\ ;\ \boldsymbol{SS_B = \frac{(8B)^2}{r\cdot 2^3} = 4,08}\ ;\quad \boldsymbol{SS_{AB} = \frac{(8AB)^2}{r\cdot 2^3} = 0,034};$$

$$\boldsymbol{SS_C = \frac{(8C)^2}{r\cdot 2^3} = 7,37}\ ;\boldsymbol{SS_{AC} = \frac{(8AC)^2}{r\cdot 2^3} = 0,034};\boldsymbol{SS_{BC} = \frac{(8BC)^2}{r\cdot 2^3} = 0,303};$$

$$\boldsymbol{SS_{ABC} = \frac{(8ABC)^2}{r\cdot 2^3} = 0,02}.$$

14. Вычисляем контраст ошибки:

$$\mathbf{SS_{ош} = S_k - SS_A - SS_B - SS_{AB} - SS_C - SS_{AC} - SS_{BC} - SS_{ABC} - \frac{(S)^2}{r\cdot 2^3} = 1{,}413.}$$

15. Вычисляем величину ошибки:

$$O = \frac{SS_{ош}}{f} = 0{,}088\ ,$$

где $\boldsymbol{f = (r\text{-}1)\ 2^3}$ – число степеней свободы.

16. Вычисляем расчетное значение критерия Фишера:

$$F_{1,16}^{A} = \frac{SS_A}{O} = 48{,}1\ ;\ F_{1,16}^{B} = \frac{SS_B}{O} = 46{,}2\ ;\ F_{1,16}^{AB} = \frac{SS_{AB}}{O} = 0{,}38\ ;$$

$$F_{1,16}^{C} = \frac{SS_C}{O} = 83{,}4\ ;\ F_{1,16}^{AC} = \frac{SS_{AC}}{O} = 0{,}38\ ;\ F_{1,16}^{BC} = \frac{SS_{BC}}{O} = 3{,}44\ ;$$

$$F_{1,16}^{ABC} = \frac{SS_{ABC}}{O} = 0{,}23.$$

Табличное значение критерия Фишера $F^{Т}_{1,16}$= 4,49.

Если расчетное значение критерия больше табличного, значит данный фактор или взаимодействие факторов оказывает существенное влияние на выбранный критерий эффективности процесса. Если расчетное значение критерия меньше табличного, значит данный фактор или взаимодействие факторов не оказывает влияния на выбранный критерий.

В нашем случае существенное влияние оказывают все 3 фактора (*A, B, C*), а все взаимодействия существенного влияния не оказывают.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4
Получение регрессионной модели на основе эксперимента с факторным планированием. Оценка значимости коэффициентов и адекватности модели

Цель работы: получить регрессионную модель на основе результатов эксперимента, оценить значимость коэффициентов модели, проверить адекватность полученной модели и сделать выводы.

Для примера воспользуемся исходными данными работы 2.

Общий вид линейной зависимости, описывающей процесс, выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2}\,. \qquad (1)$$

Коэффициенты данной зависимости вычисляют из представленных соотношений:

$$a_0 = \frac{S}{r \cdot 2^2} = 21{,}75\,; \quad a_1 = \frac{4A}{r \cdot 2^2} = 1{,}375\,; \quad a_2 = \frac{4B}{r \cdot 2^2} = -1{,}5\,;$$

$$a_{12} = \frac{4AB}{r \cdot 2^2} = 0{,}125.$$

Теперь наша зависимость приобрела следующий вид.

$$\boldsymbol{Y = 21{,}75 + 1{,}375x_1 - 1{,}5x_2 + 0{,}125x_1x_2}\,. \qquad (2)$$

Проверка правильности расчета коэффициентов регрессионного уравнения

В полученном уравнении переменные являются кодированными, т. е. изменяются в пределах от – 1 до + 1 при изменении исходных факторов в пределах, указанных в таблице. Кодированные значения факторов вычисляют следующим образом.

Для фактора *A*: $\boldsymbol{x_1 = (X_1 - 70)/10}$; для фактора *B*: $\boldsymbol{x_2 = (X_2 - 0{,}35)/0{,}05}$.

Проверку правильности полученного уравнения осуществляют, подставляя кодированные значения переменных и сравнивая результаты расчетов со средними значениями для каждой ячейки таблицы. Результаты представляют в виде *табл. 6*.

Таблица 6. **Проверка модели**

Ячейка	Значения переменных	$Y_{эксп}$	$Y_{расч}$
(1)	-1, -1	22	22
a	1, -1	24,5	24,5
b	-1, 1	18,75	18,75
ab	1, 1	21,75	21,75

Как мы видим, значения коэффициентов регрессионного уравнения (2) имеют существенно отличающиеся значения. Величина коэффициента для взаимодействия факторов дает вклад, не превышающий 1 %. Вероятно, этим слагаемым можно пренебречь. Однако делать это можно лишь после оценки значимости коэффициентов модели. Если какие-либо коэффициенты оказываются незначимы, то эти слагаемые можно исключить и проверить новую модель на адекватность.

Оценка значимости коэффициентов регрессии

Для проверки значимости коэффициентов регрессии (2) используют критерий Стьюдента. Его расчетное значение $t_R\{a_i\}$сравнивают с табличным значением $t_Т$. Если $t_R > t_Т$, то гипотеза о значимости коэффициентов регрессии не отвергается.

Расчетное значение критерия Стьюдента равно

$$t_R\{b_i\} = \frac{|b_i|}{S\{b_i\}}, \tag{3}$$

где $S\{b_i\}$ – среднеквадратичное отклонение выборочного коэффициента регрессии.

Запишем результаты эксперимента из работы 2 (*табл. 2*) в виде *табл. 7.*

Т а б л и ц а 7. **Расчетные данные для оценки значимости коэффициентов**

Варианты испытаний	Кодированные значения факторов		Результат измерения *Yi* в *i*-м испытании				Статистические характеристики	
	x_1	x_2	1	2	3	4	$\overline{Y_i}$	$S_i^2\{Y\}$
-1	-1	-1	21	26	18	23	22	11,33
a	1	-1	24	21	28	25	24,5	8,33
b	-1	1	18	21	16	20	18,75	4,92
ab	1	1	22	25	19	21	21,75	6,25

Последовательность расчетов выглядит следующим образом:

$$S^2\{Y\} = \frac{1}{N}\sum S_i^2\{Y\} = \frac{30{,}83}{4} = 7{,}71;\ S^2\{\overline{Y}\} = \frac{S^2\{Y\}}{m} = \frac{7{,}71}{4} = 1{,}94;\ S^2\{b_i\} =$$

$$= \frac{S^2\{\overline{Y}\}}{N} = 0{,}485; S\{b_i\} = \sqrt{S^2\{b_i\}} = 0{,}7. \tag{4}$$

Далее вычисляем значения коэффициентов Стьюдента для всех коэффициентов регрессионной модели.

$t_R\{b_0\} = 21{,}75/0{,}7 = 31{,}1$; $t_R\{b_1\} = 1{,}96$; $t_R\{b_2\} = 2{,}14$;

$t_R\{b_{12}\} = 0{,}18$.

Табличное значение коэффициента Стьюдента t_T $[p_D = 0{,}9; f = 4(4-1) = 12] =$ $= 1{,}78$. Исходя из этого можно отбросить слагаемое для взаимодействия факторов. Модель теперь будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{Y = 21{,}75 + 1{,}375x_1 - 1{,}5x_2}. \tag{5}$$

Исследователю нужно учитывать, что значимость коэффициентов может зависеть не только от влияния данного фактора, но и от интервала варьирования или расположения этого интервала в факторном пространстве. Незначимость влияния может быть связана с большой дисперсией воспроизводимости из-за наличия неуправляемых и неконтролируемых факторов или с расположением основного уровня фактора близко к точке частного экстремума по этому фактору.

В случае незначимости какого-либо коэффициента регрессии он может быть отброшен без пересчета всех остальных коэффициентов (5).

Проверка адекватности полученной модели

Проверку адекватности регрессионной многофакторной модели (РМФМ) можно проводить только при условии $N - N_k > 0$, т. е. когда на базе матрицы ПФЭ определяют РМФМ, в которой отсутствует хотя бы одно слагаемое. Для проверки гипотезы об адекватности используют критерий Фишера, расчетное значение которого F_R сравнивают с табличным $F_Т$. Если $F_R < F_Т$, то с вероятностью $\boldsymbol{p_D}$ гипотеза об адекватности не отвергается.

Расчетное значение критерия Фишера равно:

$$F_R = \frac{S^2_{ад}\{Y\}}{S^2\{Y\}} = \frac{S^2_{над}\{Y\}}{S^2\{\overline{Y}\}} \ , \qquad (6)$$

где $S^2_{ад}\{Y\}$ – дисперсия, обусловленная неадекватностью РМФМ и определяемая из соотношения

$$S^2_{ад}\{Y\} = mS^2_{над}\{Y\} = \frac{m\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{Y}_i - Y_{Ri}\right)^2}{N - N_k} \ , \qquad (7)$$

где $S^2\{Y\}$ – дисперсия, характеризующая ошибку эксперимента и вычисляемая по формуле (4).

Теперь вновь проведем расчет $S^2_{над}\{Y\}$ для новой модели, который сведен в *табл. 8*.

Таблица 8. **Проверка адекватности модели**

Вариант испытания	Кодированные значения переменных	$\boldsymbol{Y_{эксп,\,i}}$	$\boldsymbol{Y_{расч,\,i}}$	$\boldsymbol{(Y_{эксп,\,i} - Y_{расч,\,i})^2}$
(1)	-1, -1	22	21,875	0,0156
a	1, -1	24,5	24,625	0,0156
b	-1, 1	18,75	18,875	0,0156
ab	1, 1	21,75	21,625	0,0156
			$\boldsymbol{\Sigma}$ =	0,0624

Таким образом, $S^2_{над}\{Y\} = \frac{0{,}062\,4}{4-3} = 0{,}062\,4$ меньше $S^2\{\overline{Y}\}$ =1,94. Величина критерия Фишера равна F_R = 0,032, что значительно меньше табличного значения $F_Т$ = 4,75. Следовательно, полученная модель адекватна.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5

Определение коэффициентов линейной эмпирической зависимости на основе экспериментальных данных различными способами

Цель работы: определить коэффициенты линейного уравнения на основе имеющихся экспериментальных данных по методу наименьших квадратов, способу натянутой нити и способу средней.

Основные сведения

При проведении экспериментов по выявлению зависимости между различными параметрами какого-либо процесса результаты эксперимента можно свести в таблицу следующего вида (*табл. 9*).

Т а б л и ц а 9. **Результаты эксперимента**

X_i :	X_1	X_2	…	X_n
Y_i :	Y_1	Y_2	…	Y_n

Очень часто функция является линейной или близкой к ней, т. е. $\boldsymbol{y = ax + b}$.

Метод наименьших квадратов

Целью метода наименьших квадратов (МНК) является нахождение наилучших значений a и b. Первым этапом исследования должно быть нанесение экспериментальных точек на график. Исходя из вида полученной зависимости легко оценить – можно ли апроксимировать данные результаты как прямую.

Если это так, то параметры зависимости определяют следующим образом:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}, \qquad (8)$$

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (9)$$

Расчётная таблица для этого случая имеет следующий вид (*табл. 10*).

Т а б л и ц а 10. **Расчетная таблица**

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	$y(x_i)$	$y_i - y(x_i)$	$[y_i - y(x_i)]^2$
1 2 … n							
Σ	Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	Σx_iy_i	–	Σ	Σ
Ср.	$\Sigma x_i/n$	$\Sigma y_i/n$	$\Sigma x_i^2/n$	$\Sigma x_iy_i/n$	–	–	–

Построив таблицу, легко определить коэффициенты a и b по формулам (8) и (9).

Рассчитанные с помощью МНК параметры зависимости можно получить и другими, более простыми, хотя и менее точными методами: методом натянутой нити и методом средней.

Метод натянутой нити

Основан на геометрическом подборе прямой на глаз. Нанеся экспериментальные значения на миллиметровку, подбирают графически прямую, ближе всего подходящую к полученным точкам (*рис. 1*).

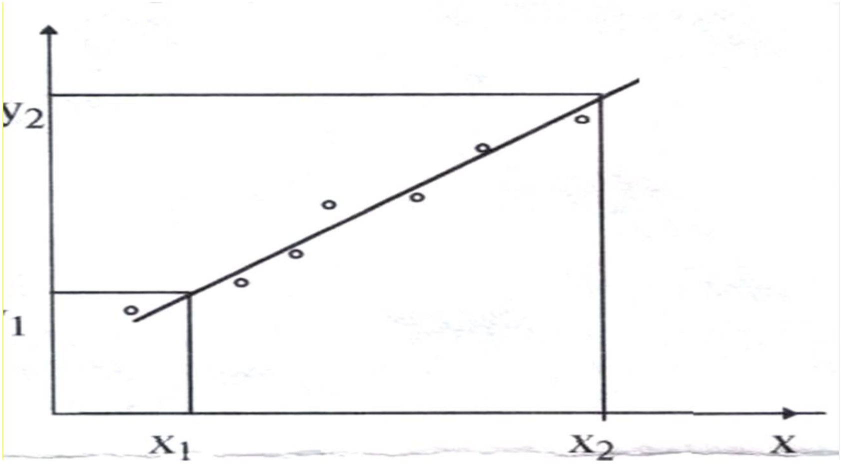

Рис. 1. Иллюстрация к методу натянутой нити

Выбрав две произвольные точки на прямой (достаточно далеко отстоящих друг от друга), определяют их координаты (X_1, $У_1$) и (X_2, $У_2$).

Теперь для определения коэффициентов a и b можно записать два простых уравнения:

$$ax_1 + b = y_1,$$
$$ax_2 + b = y_2. \qquad (10)$$

Из уравнений (10) вычисляют значения a и b.

Способ средней

Экспериментальные данные $(x_1,y_1),(x_2,y_2), ...,(x_n,y_n)$ разделяют на две приблизительно равные части: m и $n - m$ пар измерений. Если n – четное, то $m = n/2$, если нечетное, то $m = (n \pm 1)/2$. Записывают следующую систему уравнений:

$$a\sum_{i=1}^{m} x_i + mb = \sum_{i=1}^{m} y_i \ ,$$

$$a\sum_{i=m+1}^{n} x_i + (n-m)b = \sum_{i=m+1}^{n} y_i \ .$$

Решая систему уравнений, вычисляют коэффициенты a и b.

Выбор модели, наилучшим образом отражающей результаты эксперимента

Для сравнения точности коэффициентов прямой a и b, полученных разными методами, вычисляют сумму квадратов отклонений экспериментальных данных y_i от рассчитанных по формулам значений y в тех же точках.

Т а б л и ц а 11. **Выбор наилучшей модели**

x_i	y_i	y_{1i}	y_{2i}	y_{3i}	$y_i - y_{1i}$	$y_i - y_{2i}$	$y_i - y_{3i}$	$(y_i - y_{1i})^2$	$(y_i - y_{2i})^2$	$(y_i - y_{3i})^2$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
								Σ_1	Σ_2	Σ_3

Здесь y_{1i} значения, рассчитанные по формулам МНК; y_{2i} – по методу натянутой нити; y_{3i} – по методу средней.

Методика и порядок выполнения

1. Получить у преподавателя набор исходных данных (x_i, y_i).
2. Определить коэффициенты прямой a и b тремя описанными способами.
3. Сравнить полученные разными методами коэффициенты между собой.

Отчёт должен содержать: исходные данные, краткое изложение расчетных методов, таблицу для расчёта по методу наименьших квадратов и результаты, график с исходными данными, прямой и точками для расчёта по методу натянутой нити, расчёт методом средней, таблицу сравнения коэффициентов, определённых разными способами и выводы о достоинствах и недостатках каждого метода.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6
Проверка адекватности полученной эмпирической модели

Цель работы: необходимо оценить, насколько хорошо полученная регрессионная модель описывает экспериментальные результаты.

Для проверки адекватности модели необходимо вычислить сумму квадратов отклонений экспериментальных данных $\boldsymbol{y_i}$ от рассчитанных по найденным формулам значений $\boldsymbol{y_{pi}}$ в тех же точках.

Пример выполнения работы

В *табл. 12* представлены исходные экспериментальные данные (столбцы 2 и 3). Для $\boldsymbol{y_i}$ указаны средние значения из 5 измерений и определена средняя дисперсия для всех 5 уровней фактора, равная $S^2_{(1)} = 287{,}1$.

Т а б л и ц а 12. **Расчетная таблица**

i	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i}$	$\boldsymbol{y_{pi}}$	$\boldsymbol{(y_i - y_{pi})^2}$
1	300	514,6	671,6	24 637,1
2	350	769,3	717,1	2 720,5
3	400	986,8	762,6	50 251,3
4	450	843,0	808,1	1 214,4
5	500	706,1	853,6	21 745,3
			Σ =	100 568,6

Вычислим дисперсию ${S_{(2)}}^2$, которая характеризует точность аппроксимации зависимости ***y = f(x)*** и определяется соотношением

$$S_{(2)}^2(y) = \frac{m}{N-2} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - y_{pi} \right)^2 = \frac{5}{5-2} 100\ 568{,}6 = 167\ 614{,}2\ . \qquad (11)$$

Число степеней свободы этой дисперсии $f = N - 2$. Теперь можно оценить адекватность регрессионного уравнения с использованием критерия Фишера.

$$F_R = \frac{S_{(2)}^2}{S_{(1)}^2} = \frac{167\ 614{,}2}{287{,}1} = 583{,}9\ .$$

Табличное значение данного коэффициента, получаемое из приложения [1], будет равно

$$F_T\{p_д = 0{,}95;\ f_1 = 4; f_2 = 4\} = 8{,}66\ .$$

Поскольку расчетное значение критерия значительно больше табличного значения, можно сделать вывод, что линейная модель не адекватно описывает результаты эксперимента. Поэтому в дальнейшем попробуем воспользоваться квадратичной однофакторной моделью для описания имеющихся экспериментальных данных.

На *рис. 2* показаны экспериментальные данные в виде точек и прямая аппроксимации.

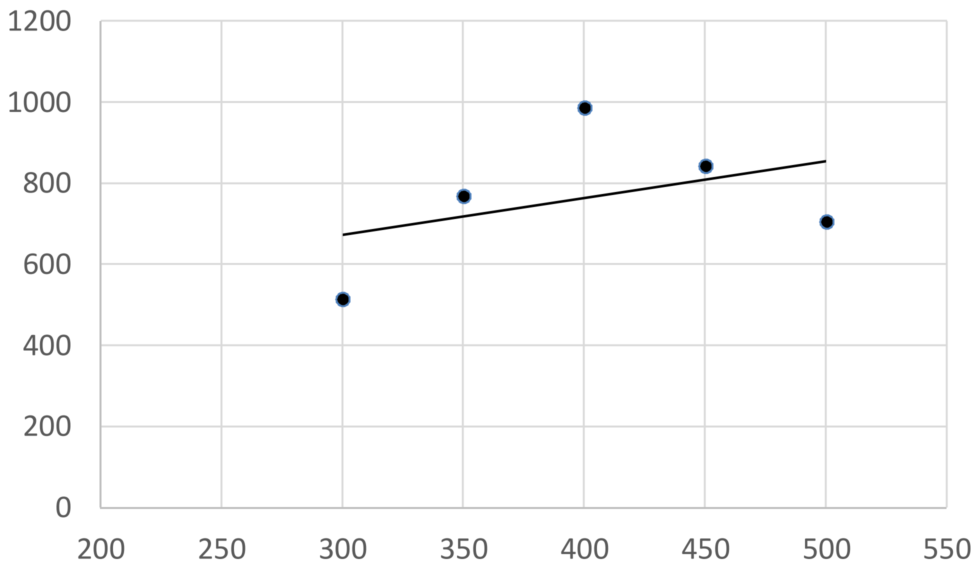

Рис. 2. Экспериментальные данные и результат линейной аппроксимации

Из *рис. 2* хорошо видно, что линейная функция не годится для описания таких экспериментальных данных. Поэтому закономерно, что предлагаемая функция не адекватна.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 7
Определение коэффициентов квадратичной эмпирической зависимости на основе экспериментальных данных различными способами

Цель работы: необходимо определить коэффициенты для квадратичной регрессионной модели на основе экспериментальных данных с использованием метода наименьших квадратов.

В качестве примера мы используем экспериментальные данные предыдущей работы. Поскольку линейная аппроксимация экспериментальных данных оказалась неудовлетворительной, попробуем использовать квадратичную регрессионную модель. Она будет выглядеть следующим образом:

$$y = b_0 + b_1 x + b_{11} x^2.$$

Принцип поиска коэффициентов аналогичен изложенному выше для линейной зависимости.

$$F = \sum\left(y_i - b_0 - b_1 x_i - b_{11} x_i^2\right)^2 = \min. \qquad (12)$$

Коэффициенты эмпирической зависимости вычисляют, решая систему уравнений относительно коэффициентов.

$$\frac{\partial F}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_{11}} = 0.$$

Решение системы уравнений дает следующие значения коэффициентов.

$$b_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^4 - \sum x_i^2 y_i \sum x_i^2}{n \sum x_i^4 - \left(\sum x_i^2\right)^2}, \qquad (13)$$

$$b_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \qquad (14)$$

$$b_{11} = \frac{n \sum x_i^2 y_i - \sum y_i \sum x_i^2}{n \sum x_i^4 - \left(\sum x_i^2\right)^2}. \qquad (15)$$

Представленные значения коэффициентов записаны для кодированных значений переменных. Если исходные значения переменных обозначить $\boldsymbol{x}$, то кодированные переменные $\boldsymbol{X}$ вычисляют следующим образом:

Определяем натуральное значение основного уровня фактора

$$\boldsymbol{x_0 = x_{ср} = (x_{\min} + x_{\max})/2.}$$

Вычисляем интервал варьирования фактора

$$\boldsymbol{I_x = (x_{\max} - x_{\min})/(n - 1).}$$

Кодированное значение переменной записывают в виде

$$\boldsymbol{X_i = (x_i - x_0)/I_x.}$$

После вычисления коэффициентов легко возвратиться к исходным (натуральным) значениям фактора, заменив в уравнении кодированные значения переменных согласно приведенному выше соотношению.

В нашем случае кодировка выглядит следующим образом:

$$X_i = \frac{x_i - 400}{100}.$$

Для вычисления коэффициентов квадратичной зависимости необходимо заполнить расчетную *табл. 13*.

Таблица 13. **Расчетная таблица**

x_i	X_i	y_i	X_i^2	X_i^4	$X_i y_i$	$X_i^2 y_i$
300	-1	514,65	1	1	-514,65	514,65
350	-0,5	769,27	0,25	0,0625	-384,63	192,32
400	0	986,78	0	0	0	0
450	+0,5	842,96	0,25	0,0625	421,48	210,74
500	+1	706,15	1	1	706,15	706,15
Σ	**0**	**3 819,81**	**2,5**	**2,125**	**228,34**	**1 623,86**

Определяем коэффициенты квадратичной зависимости согласно приведенным выше соотношениям (11), (12), (13).

$$b_0 = \frac{3\,819{,}8 \cdot 2{,}125 - 1623{,}9 \cdot 2{,}5}{5 \cdot 2{,}125 - 2{,}5^2} = 927{,}4\ ;$$

$$b_1 = \frac{228{,}3}{2{,}5} = 91{,}3\ ;$$

$$b_{11} = \frac{5 \cdot 1\,623{,}8 - 2{,}5 \cdot 3\,819{,}8}{5 \cdot 2{,}125 - 2{,}5^2} = -326{,}9\ .$$

Теперь можно записать регрессионное уравнение для переменной в кодированном виде.

$$y = 927{,}4 + 91{,}3X - 326{,}9X^2.$$

На *рис. 3* представлена полученная зависимость и результаты эксперимента.

Как мы видим, данная аппроксимация гораздо лучше, чем линейная, описывает предлагаемые экспериментальные результаты.

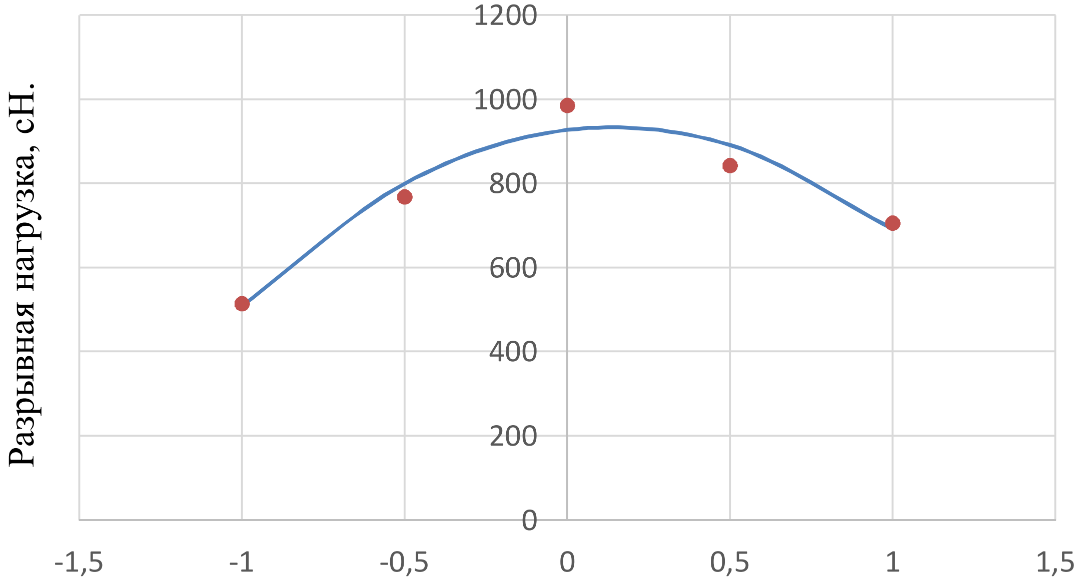

Рис. 3. Регрессионная квадратичная зависимость и результаты измерений

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 8
Проверка адекватности, полученной квадратичной эмпирической модели

Цель работы: необходимо оценить, насколько хорошо полученная квадратичная регрессионная модель описывает экспериментальные результаты.

Для примера возьмем исходные данные (*табл. 13*) и модель, полученную в предыдущей работе.

$$y = 927{,}4 + 91{,}3X - 326{,}9X^2.$$

Проверяем адекватность полученной зависимости путем сравнения расчетных и экспериментальных значений. Данные сводим в *табл. 14*.

Т а б л и ц а 14. **Расчетная таблица**

X_i	y_i	y_{ir}	$(y_i - y_{ir})^2$
-1	514,65	509,17	30,03
-0,5	769,27	800,02	945,56
0	986,78	927,42	3 523,61
0,5	842,96	891,36	2 342,56
1	706,15	691,84	204,78
		Σ =	7 046,54

Вновь, как и для линейной модели, вычислим дисперсию $S_{(2)}^2$, которая характеризует точность аппроксимации зависимости (в данном случае квадратичной) $y = f(x)$ и определяется соотношением

$$S^2_{(2)}(y) = \frac{m}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - y_{pi}\right)^2 = \frac{5}{5-2}7\,046{,}54 = 11\,744{,}3\,. \qquad (16)$$

Число степеней свободы этой дисперсии $f = N - 2$. Адекватность регрессионного уравнения оцениваем с использованием критерия Фишера.

$$F_R = \frac{S^2_{(2)}}{S^2_{(1)}} = \frac{11\,744{,}3}{287{,}1} = 40{,}9\,.$$

Табличное значение данного коэффициента, получаемое из приложения 4 [1], будет равно

$$F_T\{p_д = 0{,}95;\ f_1 = 4; f_2 = 4\} = 8{,}66\,.$$

Расчетное значение критерия больше табличного значения, поэтому квадратичная модель не вполне адекватно описывает результаты эксперимента, хотя и гораздо лучше, чем линейная модель.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 9
Определение коэффициентов нелинейной эмпирической зависимости на основе экспериментальных данных

Рассмотренная выше модель в виде полинома второй степени является, конечно, нелинейной, но она не охватывает всех возможных вариантов нелинейных зависимостей. В данной работе необходимо выбрать вид модели и вычислить коэффициенты для описания экспериментальных данных.

Мы будем опираться на то, что вычислять коэффициенты линейной зависимости на основе экспериментальных данных мы уже умеем. Поэтому, в случае нелинейной зависимости, достаточно преобразовать ее в линейную и задача будет решена. Рассмотрим несколько нелинейных функций, для которых такое преобразование возможно.

1. Экспоненциальная зависимость вида $\boldsymbol{y = a\, e^{bx}}$. Логарифмирование этой зависимости делает ее линейной для других переменных:

$$\boldsymbol{Y = \ln(y) = \ln(a) + bx}\,.$$

Поэтому, делая замену переменных $\boldsymbol{Y = \ln(y)}$, мы получим линейное уравнение вида $\boldsymbol{Y = a' + bx\ (a' = a)}$. Следовательно, первым этапом является преобразование исходных данных (*табл. 15*).

Т а б л и ц а 15. **Преобразование исходных данных**

Исходные данные	x_i :	x_1	…	x_n
	y_i :	y_1	…	y_n
Преобразование	$Y_i = \ln(y_i)$:	Y_1	…	Y_n

Теперь для комплекта исходных данных ($x_i;\ Y_i$) методом наименьших квадратов () и () вычисляем коэффициенты $\boldsymbol{a'}$ и $\boldsymbol{b}$. Значение коэффициента $\boldsymbol{a}$ вычисляют как $\boldsymbol{e^{a'}}$.

2. Гиперболическая зависимость вида $y = a/(1 + bx)$. Эту зависимость можно преобразовать к виду $1/y = (1 + bx)/a = 1/a + (b/a)x$. Мы получили линейное уравнение относительно переменной $Y = 1/y$ с коэффициентами $a' = 1/a$ и $b' = b/a$. В этом случае мы будем иметь следующую *табл. 16*.

Т а б л и ц а 16. **Преобразование исходных данных**

Исходные данные	x_i :	x_1	…	x_n
	y_i :	y_1	…	y_n
Преобразование	$Y_i = \ln y_i$:	Y_1	…	Y_n

Теперь для комплекта исходных данных (x_i; Y_i) методом наименьших квадратов () и () вычисляем коэффициенты a' и b'. Значение коэффициента a вычисляют как $1/a'$, а $b = a\,b'$.

3. Степенная функция вида $y = a\,x^b$. Для преобразования такой зависимости к линейному виду следует, как и в первом случае, применить операцию логарифмирования:

$$\ln(y) = \ln(a) + b\ln(x).$$

Поэтому, делая замену переменных $Y = \ln(y)$ и $X = \ln(x)$, мы получим линейное уравнение вида $Y = a' + bX$, где $a' = \ln(a)$. Следовательно, первым этапом является преобразование исходных данных (*табл. 17*).

Т а б л и ц а 17. **Преобразование исходных данных**

Исходные данные	x_i :	x_1	…	x_n
	y_i :	y_1	…	y_n
Преобразование переменных	$Y_i = \ln(y_i)$:	Y_1	…	Y_n
	$X_i = \ln(x_i)$	X_1	...	X_n

Теперь для комплекта исходных данных (X_i; Y_i) методом наименьших квадратов () и () вычисляем коэффициенты a' и b. Значение коэффициента a вычисляют как $e^{a'}$.

Методика выполнения работы

1. Построить график зависимости для исходных данных в виде точечной зависимости.

2. Выбрать два варианта функциональной зависимости, которые могут описывать экспериментальные данные. Определить коэффициенты выбранных зависимостей по описанной выше методике.

Пример выполнения работы

Т а б л и ц а 18. **Исходные данные**

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	13,1	8,1	6,2	4,8	3,4	2,7	2,5	2,05

Данные *табл. 18* можно показать в виде графика (*рис. 4*).

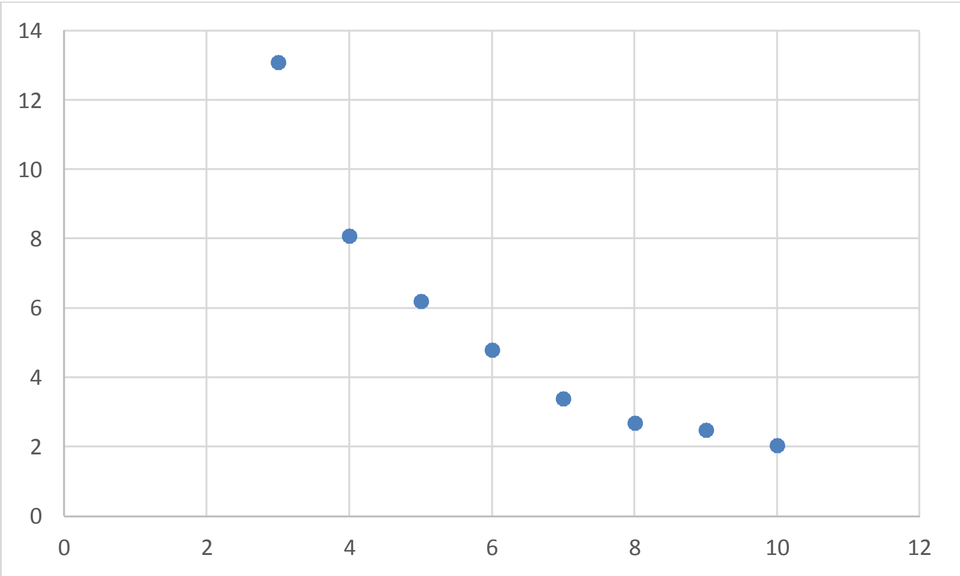

Рис. 4. Исходные данные *табл. 18*

Сделаем замены переменных в соответствии с тремя предложенными выше вариантами (*табл. 19*).

Взаимосвязь переменных после преобразования показана на *рис. 5* и *6*.

Таблица 19. **Замена переменных**

Вариант 1	x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
	y_i	2,573	2,092	1,825	1,569	1,224	0,993	0,916	0,718
Вариант 2	x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
	y_i	0,076	0,123	0,161	0,208	0,294	0,370	0,400	0,488
Вариант 3	x_i	1,099	1,386	1,609	1,792	1,946	2,079	2,197	2,303
	y_i	2,573	2,092	1,825	1,569	1,224	0,993	0,916	0,718

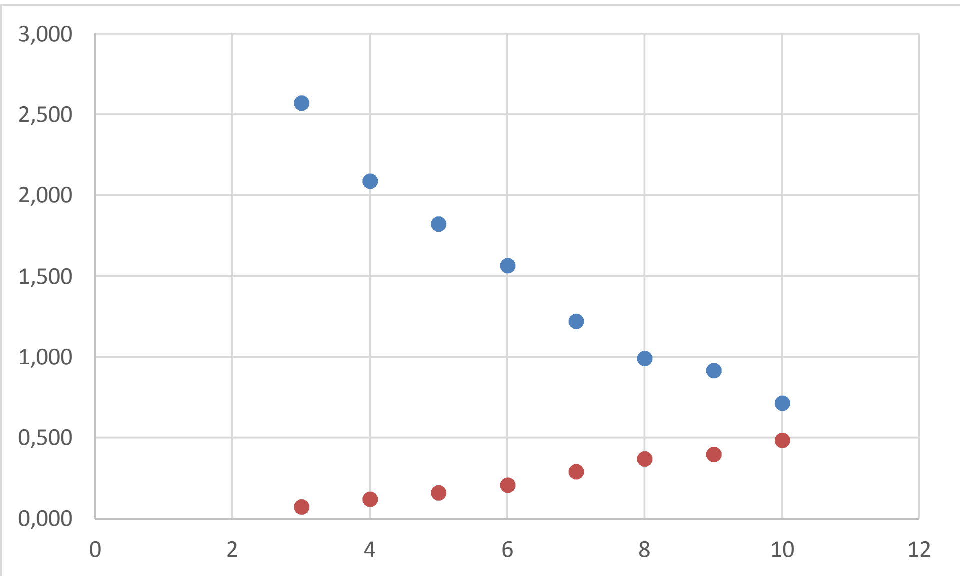

Рис. 5. Взаимосвязь переменных после преобразования (варианты 1 и 2)

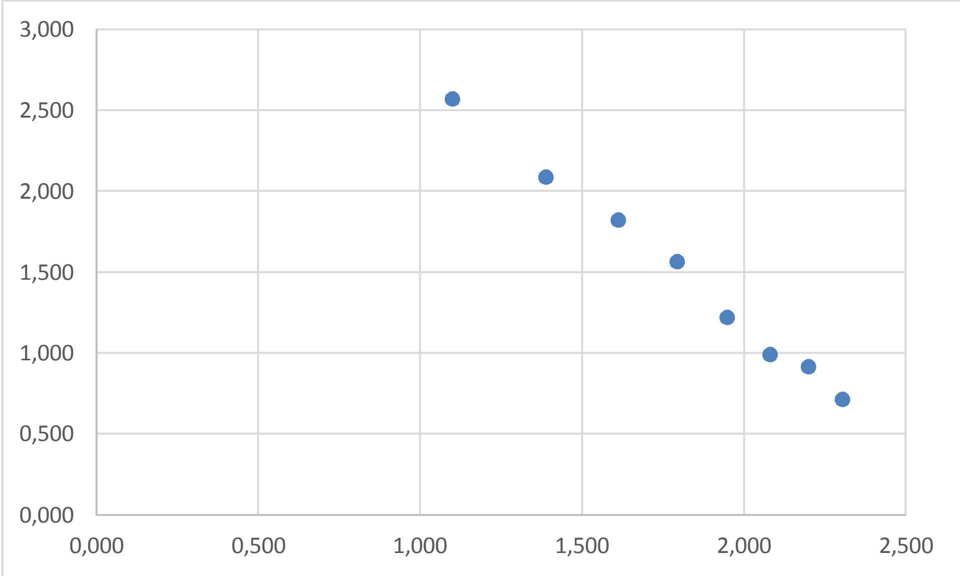

Рис. 6. Взаимосвязь переменных после преобразования (вариант 3)

Полученные по методу наименьших квадратов зависимости имеют следующий вид:

1. $\boldsymbol{Y = -\,0{,}2584\,x + 3{,}1684}$.
2. $\boldsymbol{Y = 0{,}0593\,x - 0{,}1205}$.
3. $\boldsymbol{Y = -\,1{,}5439\,x + 4{,}27}$.

Как мы видим, все три зависимости близки к линейной. Какой вариант является более близким к экспериментальным данным, можно определить после возврата к исходным зависимостям и сравнив результаты расчетов с экспериментальными данными, используя метод наименьших квадратов.

В исходном виде эти зависимости будут выглядеть следующим образом:

1. $\boldsymbol{Y = 23{,}77e^{-0{,}258x}}$;
2. $\boldsymbol{Y = -\,8{,}3/(1 - 0{,}492x)}$;
3. $\boldsymbol{Y = 71{,}52\,x^{-1{,}544}}$.

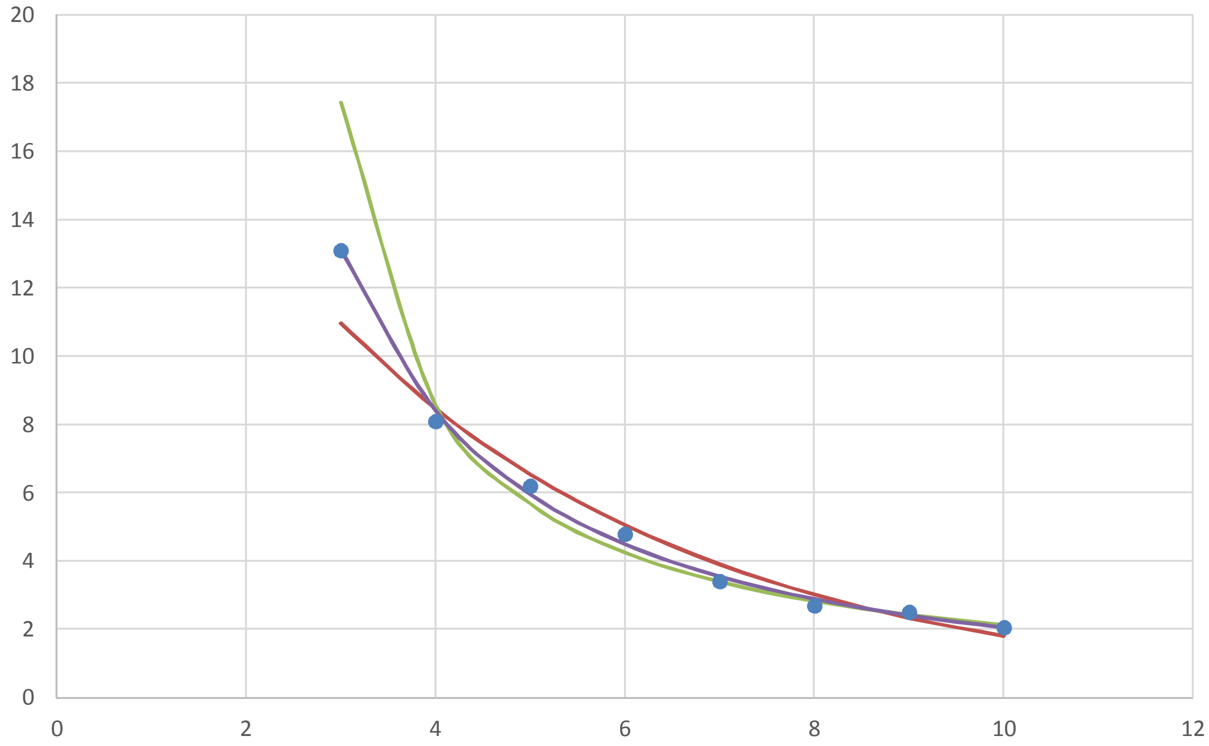

Рис. 7. Модели, описывающие экспериментальные данные

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 10
Проверка адекватности, полученной нелинейной эмпирической модели

Цель работы: проверка адекватности нелинейной модели путем сравнения расчетных и экспериментальных данных.

Для проверки адекватности полученной математической модели необходимо сначала оценить точность полученных экспериментальных результатов. Воспользуемся исходными данными и моделью работы 9. Однако здесь нам необходим полный набор исходных данных, а не только средние значения. В *табл. 20* для каждого $\boldsymbol{y_i}$ указаны значения 5 измерений, вычислено среднее значение, вычислена дисперсия и определена средняя дисперсия из соотношения

$$S_{(1)}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} S_i^2}{N} \quad .$$

Результаты расчета для значений, приведенных в *табл. 20*, дают величину $S_{(1)}{}^2 = 0{,}344$.

Т а б л и ц а 20. **Исходные данные и первичные расчеты**

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
y_{i1}	12,1	7,2	5,4	4,2	2,8	2,2	2,1	1,65
y_{i2}	14,2	8,1	6,2	4,8	3,4	2,7	2,5	2,05
y_{i3}	13	9	7	5,4	4	3,2	2,9	2,45
y_{i4}	12,2	7,6	5,8	4,4	3,1	2,4	2,3	1,8
y_{i5}	14	8,6	6,6	5,2	3,7	3	2,7	2,3
y_{icp}	13,1	8,1	6,2	4,8	3,4	2,7	2,5	2,05
S_i^2	0,96	0,53	0,4	0,26	0,225	0,17	0,1	0,111 25

В предыдущей работе для представленных исходных данных была получена нелинейная модель следующего вида:

$$\boldsymbol{Y = 71{,}52\, x^{-1{,}544}}. \qquad (17)$$

Вновь, как и для линейной модели, вычислим дисперсию $S_{(2)}{}^2$, которая характеризует точность аппроксимации зависимости $\boldsymbol{y = f(x)}$. Предварительные данные для расчета представлены в *табл. 21*.

Т а б л и ц а 21. **Сравнение расчетных и экспериментальных значений**

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
y_{icp}	13,1	8,1	6,2	4,8	3,4	2,7	2,5	2,05
y_{ip}	13,11	8,41	5,96	4,4974	3,54	2,88	2,40	2,04
$(y_{icp} - y_{ip})^2$	0,000 21	0,096 7	0,057 8	0,091 6	0,021	0,034	0,009 1	3,9 10^{-5}

Далее вычисляет нужную нам дисперсию:

$$S_{(2)}^2(y) = \frac{m}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - y_{pi}\right)^2 = \frac{5}{8-2}0{,}31 = 0{,}259\,. \qquad (18)$$

Число степеней свободы этой дисперсии $f = N - 2$. Адекватность регрессионного уравнения оцениваем с использованием критерия Фишера:

$$F_R = \frac{S_{(2)}^2}{S_{(1)}^2} = \frac{0{,}259}{0{,}344} = 0{,}75\,.$$

Табличное значение данного коэффициента, получаемое из приложения 4 [1], будет равно

$$F_T\{p_д = 0{,}95;\ f_1 = 6; f_2 = 4\} = \ 6{,}2.$$

Расчетное значение критерия меньше табличного значения, поэтому полученная нелинейная модель (17) вполне адекватно описывает результаты эксперимента (*рис. 8*).

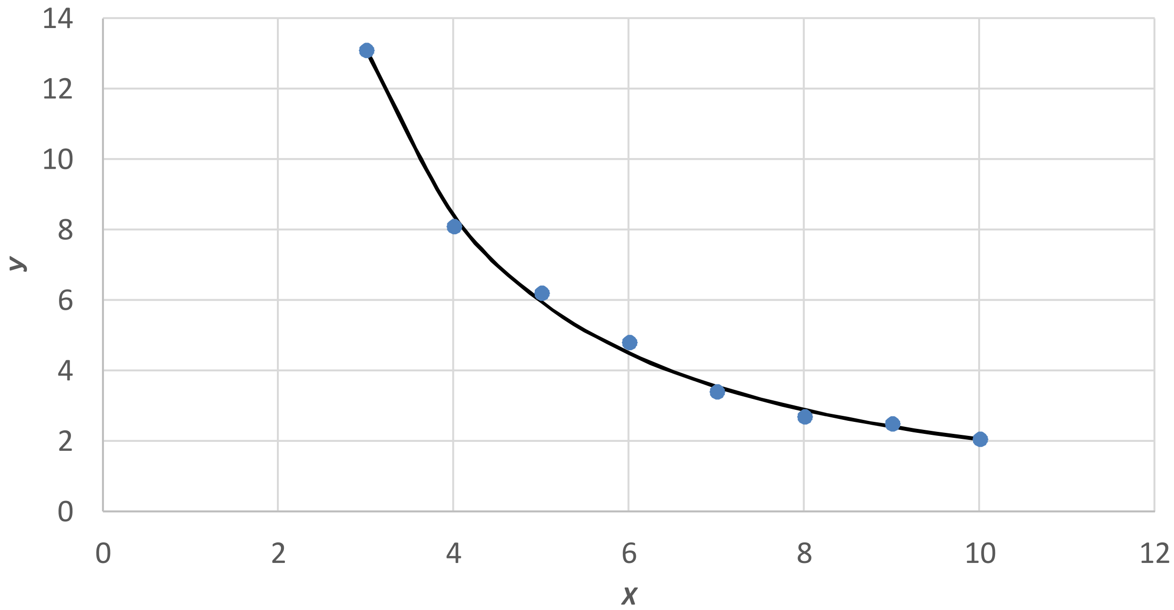

Рис. 8. Расчетная модель и результаты эксперимента

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 11
Построение нелинейной модели и определение численных значений коэффициентов с использованием программы *Excel*

Данная работа посвящена использованию программы *Excel* для получения нелинейных моделей на основе результатов экспериментальных исследований.

Цель работы

Работа основана на использовании возможностей предоставляемой программой *Excel*, а именно применением опции «линия тренда». Рассмотрим пример выполнения работы для конкретного набора экспериментальных данных (*табл. 22*).

Таблица 22. **Исходные данные**

X_i		1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Y_i		5,7	12	20,4	33,1	47,7	68,6	90,2	114,3

На графике (*рис. 9*) результаты эксперимента имеют следующий вид. Измеренная величина (Y_i) возрастает с ростом переменной X_i. При этом искомая модель имеет явно нелинейный характер. Поэтому выбор модели ограничен следующими вариантами: экспоненциальная ($Y = ae^{bx}$), полиномиальная различной степени (например $Y = ax^2 + bx + c$) или степенная ($Y = ax^b$). Выделив на графике экспериментальные точки (для этого достаточно подвести курсор к любой точке и нажать левую кнопку мыши), нажать правую кнопку и в появившемся окне выбрать «линию тренда». Внизу рекомендуется отметить позиции «показывать уравнение» (это даст возможность видеть вид модели с численными значениями коэффициентов) и «достоверность», количественно показывающую степень совпадения экспериментальных и расчетных значений (*рис. 10*).

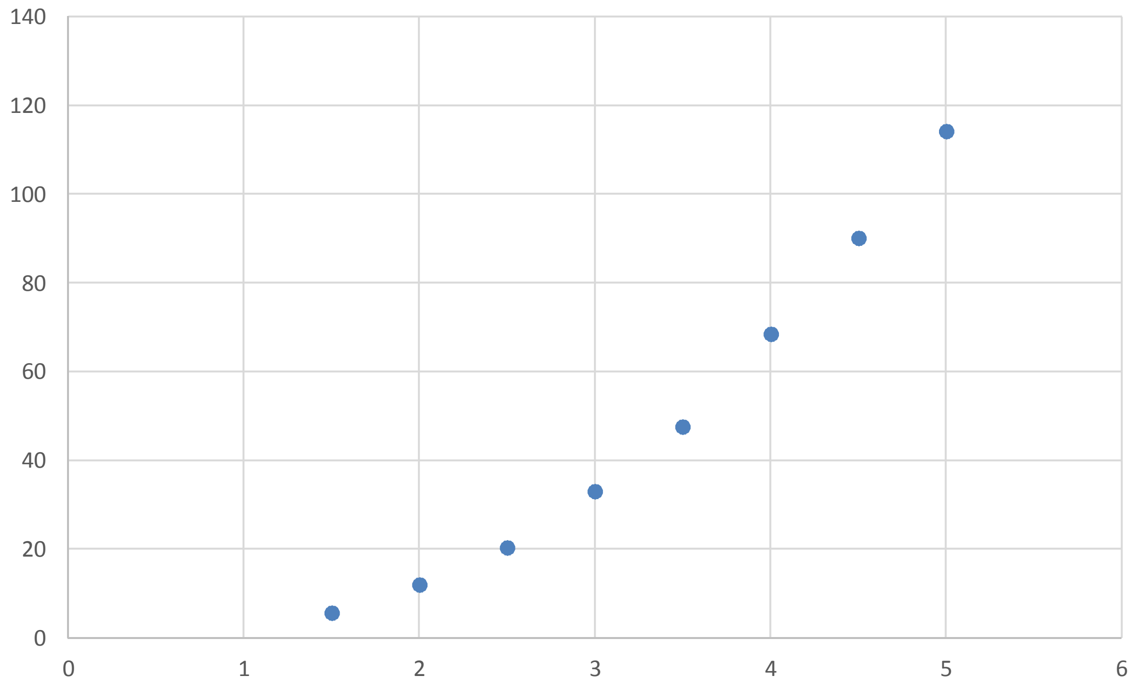

Рис. 9. Исходные данные для получения модели

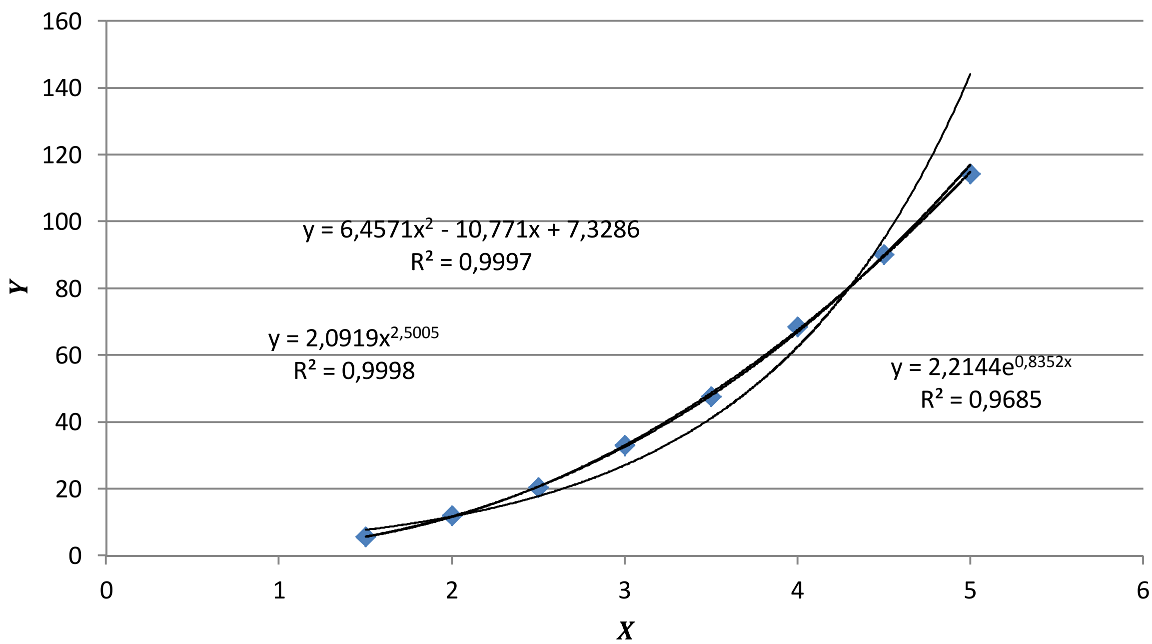

Рис. 10. Исходные данные и описывающие их модели

Полученные модели имеют следующий вид (в скобках приведена достоверность аппроксимации):

1. $Y = 2{,}2144e^{0{,}835x}$ ($R^2 = 0{,}9685$);
2. $Y = 6{,}46x^2 - 10{,}77x + 7{,}33$ ($R^2 = 0{,}9997$);
3. $Y = 2{,}092\,x^{2{,}5}$ ($R^2 = 0{,}9998$).

Как мы видим, степень достоверности моделей весьма велика. Лучшими моделями можно считать 2-ю и 3-ю. Следовательно, в реальных исследованиях необходимо оценить, какая модель имеет больший физический смысл. Так, например, вторая модель является параболой и, следовательно, имеет минимум. Необходимо проанализировать исследуемый процесс и определить, может ли измеряемый параметр иметь минимум. Только после этого можно окончательно выбрать вид модели.

Следует отметить, что использование опции «Линия тренда» имеет ограниченную применимость, поскольку выбор вида моделей не слишком велик. Некоторые, часто используемые зависимости нельзя определить с применением данной опции и необходимо использовать иные методы.

Библиографический список

1. **Примаченко, Б. М.** Моделирование технологических процессов и материалов: учебное пособие / Б. М. Примаченко. – Санкт-Петербург: ФГБОУВПО «СПГУТД», 2012.

2. **Иванов, О. М.** Методы оптимизации технологических процессов текстильной промышленности: учебное пособие / О. М. Иванов, Б. С. Михайлов. – Санкт-Петербург: ФГБОУВПО «СПГУТД», 2011. – 148 с.

3. **Иванов, О. М.** Моделирование технологических процессов текстильного производства: учебное пособие / О. М. Иванов, Б. С. Михайлов. – Санкт-Петербург: ФГБОУВПО «СПГУТД», 2013.

4. **Методы** обработки результатов эксперимента: методические указания / сост. О. М. Иванов. – Санкт-Петербург: ФГБОУВПО «СПГУТД», 2012. – 41 с.

5. **Методы** обработки результатов эксперимента: методические указания / сост. О. М. Иванов. – Санкт-Петербург: ФГБОУВПО «СПГУТД», 2015.

6. **Планирование** эксперимента: методические указания / сост. О. М. Иванов. – Санкт-Петербург: ФГБОУВПО «СПГУТД», 2018. – 32 с.

Практикум

Иванов Олег Михайлович
Бабина Наталья Александровна

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Издательский редактор Н. А. Ерина

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=2021158, по паролю.
– Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 21.10.2021 г. Рег. № 158/21

ФГБОУВО «СПбГУПТД»
Юридический и почтовый адрес:
191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18.
http://sutd.ru/