МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Методы цифровой обработки измерительной информации

Программа дисциплины и методические указания к выполнению контрольной работы

Санкт-Петербург

Дисциплина «Методы цифровой обработки измерительной информации» входит в вариативную часть образовательной программы подготовки студентов по направлению «12.03.01 «Приборостроение», направленность «Авиационные приборы и измерительно-вычислительные комплексы».

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с изучением способов математического описания алгоритмов цифровой обработки сигналов в информационно-измерительных системах при различном объёме априорной информации относительно характеристик сигналов и помех, а также особенностей анализа и принципов осуществления основных этапов цифровой обработки измерительной информации.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, лабораторные работы, самостоятельная работа обучающегося, консультации.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости, промежуточная аттестация в форме дифференцированного зачёта.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Дискретизация аналоговых сигналов.

Тема 1.1. Дискретное по времени представление сигналов.
Тема 1.2. Квантование сигналов по уровню.
Тема 1.3. Статистическое оценивание вероятностных характеристик сигналов и помех при цифровом моделировании.

Раздел 2. Способы математического описания цифровых систем обработки сигналов измерений.

Тема 2.1. Конечно-разностные уравнения динамических систем.
Тема 2.2. Рекурсивные и нерекурсивные цифровые фильтры.
Тема 2.3. Z-преобразование.

Раздел 3. Основные методы цифровой обработки измерений.

Тема 3.1.Методы наименьших квадратов.
Тема 3.2. Метод максимального правдоподобия.
Тема 3.3. Байесовский подход к обработке измерений.

Раздел 4. Обработка измерений в ортогональных базисах.

Тема 4.1. Представление сигналов с использованием систем ортогональных функций.
Тема 4.2. Дискретное преобразование Фурье.
Тема 4.3. Алгоритм быстрого преобразования Фурье.

ЗАДАНИЕ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Задан непрерывный (аналоговый) фильтр, предназначенный для выполнения необходимого амплитудно-частотного и фазо-частотного преобразования сигнала измерений y в выходной сигнал x. Фильтр представляет собой последовательное соединение двух звеньев с известными передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$ (рис. 1).

Рис.1

Вид передаточной функции $W_1(p)$ определяется по первой букве фамилии студента, а $W_2(p)$ – по второй букве фамилии согласно табл. 1.

Таблица 1

	$W_1(p)$	$W_2(p)$
А–Д	$\frac{K_1 p}{T_1 p+1}$	$\frac{K_2 p}{T_2 p+1}$
Е–К	$\frac{K_1(T_1 p+1)}{p}$	$\frac{K_2(T_2 p+1)}{p}$
Л–П	$\frac{K_1(T_{12} p+1)}{T_{11} p+1}$	$\frac{K_2(T_{22} p+1)}{T_{21} p+1}$
Р–Х	$\frac{K_1(p+1)}{T_1 p+1}$	$\frac{K_2(p+1)}{T_2 p+1}$
Ц–Я	$\frac{K_1(p+1)}{T_1 p}$	$\frac{K_2(p+1)}{T_2 p}$

Требуется получить:

1. Дифференциальное уравнение непрерывного фильтра.
2. Разностное уравнение дискретного (цифрового) фильтра, соответствующего непрерывному фильтру.

Коэффициенты уравнений должны быть выражены через параметры передаточных функций (K, T).

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Методику решения рассмотрим применительно к $W_1(p)$ и $W_2(p)$ следующего вида:

$$W_1(p) = \frac{K_1}{(T_{11}p+1)(T_{12}p+1)}, \qquad W_2(p) = K_2 p(p+1).$$

Передаточная функция непрерывного фильтра, при последовательном соединении звеньев равна произведению передаточных функций звеньев:

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) = \\ = \frac{K_1}{(T_{11}p+1)(T_{12}p+1)}K_2 p(p+1) = \\ = \frac{K_1K_2 p(p+1)}{(T_{11}p+1)(T_{12}p+1)}.$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение фильтра, необходимо, раскрыв скобки в числителе и знаменателе, привести выражение для $W(p)$ к виду, при котором слагаемые сгруппированы по степеням переменной p:

$$W(p) = \frac{K_1K_2 p(p+1)}{(T_{11}p+1)(T_{12}p+1)} = \\ = \frac{K_1K_2p^2 + K_1K_2p}{T_{11}T_{12}p^2 + (T_{11}+T_{12})p+1}.$$

Учитывая, что передаточная функция по определению равна отношению изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала

$$W(p) = \frac{x(p)}{y(p)} = \frac{K_1K_2p^2 + K_1K_2p}{T_{11}T_{12}p^2 + (T_{11}+T_{12})p+1},$$

дифференциальное уравнение непрерывного фильтра в операторной форме примет вид

$$[T_{11}T_{12}p^2 + (T_{11}+T_{12})p+1]x(p) = [K_1K_2p^2 + K_1K_2p]y(p).$$

С учётом соответствия между сигналами и их производными во временной области и операторными изображениями

$$x(p) \Leftrightarrow x(t),\, p^m x(p) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m};\; y(p) \Leftrightarrow y(t),\, p^m y(p) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^m y(t)}{\mathrm{d}t^m}$$

получаем дифференциальное уравнение непрерывного фильтра (решение пункта 1 задания):

$$T_{11}T_{12}\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + (T_{11}+T_{12})\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + x(t) = K_1K_2\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + K_1K_2\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Приступая к решению пункта 2 задания, напомним, что в дискретном времени все сигналы представлены последовательностями своих отсчётов:

$$x(t) \Rightarrow x(t_k) = x(k), \quad y(t) \Rightarrow y(t_k) = y(k),$$

где k – номер текущего отсчёта.

Переход от дифференциального уравнения в непрерывном времени к разностному уравнению в дискретном времени основан на замене производных от функций времени на разности первого порядка (при условии малости Δt):

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{x(k)-x(k-1)}{\Delta t}, \quad \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{y(t)-y(t-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{y(k)-y(k-1)}{\Delta t}.$$

где $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ – шаг дискретизации по времени.

Для перехода к разностному уравнению целесообразно воспользоваться z-преобразованием дискретных сигналов $x(k)$ и $y(k)$:

$$Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(z), \quad Z\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = y(z).$$

При этом умножению сигнала на z^{-n} в пространстве z-преобразования соответствует запаздывание сигнала во временной области на n шагов:

$$x(k-n) \Leftrightarrow z^{-n}x(z), \quad y(k-n) \Leftrightarrow z^{-n}y(z). \qquad (1)$$

Для разностей первого порядка (используются отсчёты сигналов с n=0,1) z-преобразование имеет вид

$$Z\left\{\frac{x(k)-x(k-1)}{\Delta t}\right\}=\frac{1-z^{-1}}{\Delta t}x(z),\quad Z\left\{\frac{y(k)-y(k-1)}{\Delta t}\right\}=\frac{1-z^{-1}}{\Delta t}y(z).$$

Таким образом, производным первого порядка во временной области ставятся в соответствие следующие выражения в пространстве z-преобразования:

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}\Leftrightarrow Z\left\{\frac{x(k)-x(k-1)}{\Delta t}\right\}=\frac{1-z^{-1}}{\Delta t}x(z),$$
$$\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t}\Leftrightarrow Z\left\{\frac{y(k)-y(k-1)}{\Delta t}\right\}=\frac{1-z^{-1}}{\Delta t}y(z).$$

Входящим в дифференциальное уравнение производным более высокого порядка ($m\geq 2$) ставятся в соответствие в дискретном времени разности такого же порядка (разности от разностей) и в пространстве z-преобразования им соответствуют

$$\frac{\mathrm{d}^m\,x(t)}{\mathrm{d}\,t^m}\Leftrightarrow\left(\frac{1-z^{-1}}{\Delta t}\right)^m x(z),\quad \frac{\mathrm{d}^m\,y(t)}{\mathrm{d}\,t^m}\Leftrightarrow\left(\frac{1-z^{-1}}{\Delta t}\right)^m y(z).$$

Таким образом, исходному дифференциальному уравнению соответствует следующее уравнение в пространстве z-преобразования:

$$T_{11}T_{12}\left(\frac{1-z^{-1}}{\Delta t}\right)^2 x(z)+(T_{11}+T_{12})\frac{1-z^{-1}}{\Delta t}x(z)+x(z)=$$
$$=K_1K_2\left(\frac{1-z^{-1}}{\Delta t}\right)^2 y(z)+K_1K_2\frac{1-z^{-1}}{\Delta t}y(z).$$

Раскрыв скобки у степеней 2-го порядка, получим

$$\frac{T_{11}T_{12}}{(\Delta t)^2}(1-2z^{-1}+z^{-2})x(z)+\frac{T_{11}+T_{12}}{\Delta t}(1-z^{-1})x(z)+x(z)=$$
$$=\frac{K_1K_2}{(\Delta t)^2}(1-2z^{-1}+z^{-2})y(z)+\frac{K_1K_2}{\Delta t}(1-z^{-1})y(z).$$

Раскрыв скобки ещё раз, получим

$$\frac{T_{11}T_{12}}{(\Delta t)^2}x(z)-\frac{2T_{11}T_{12}}{(\Delta t)^2}z^{-1}x(z)+\frac{T_{11}T_{12}}{(\Delta t)^2}z^{-2}x(z)+\frac{T_{11}+T_{12}}{\Delta t}x(z)-\frac{T_{11}+T_{12}}{\Delta t}z^{-1}x(z)+x(z)=$$
$$=\frac{K_1K_2}{(\Delta t)^2}y(z)-\frac{2K_1K_2}{(\Delta t)^2}z^{-1}y(z)+\frac{K_1K_2}{(\Delta t)^2}z^{-2}y(z)+\frac{K_1K_2}{\Delta t}y(z)-\frac{K_1K_2}{\Delta t}z^{-1}y(z).$$

Группируя теперь слагаемые с одинаковыми степенями z, получим

$$\left(\frac{T_{11}T_{12}}{(\Delta t)^2}+\frac{T_{11}+T_{12}}{\Delta t}+1\right)x(z)+\left(-\frac{2T_{11}T_{12}}{(\Delta t)^2}-\frac{T_{11}+T_{12}}{\Delta t}\right)z^{-1}x(z)+\frac{T_{11}T_{12}}{(\Delta t)^2}z^{-2}x(z)=$$
$$=\left(\frac{K_1K_2}{(\Delta t)^2}+\frac{K_1K_2}{\Delta t}\right)y(z)+\left(-\frac{2K_1K_2}{(\Delta t)^2}-\frac{K_1K_2}{\Delta t}\right)z^{-1}y(z)+\frac{K_1K_2}{(\Delta t)^2}z^{-2}y(z).\qquad(2)$$

Выполняя с учётом (1) обратное z-преобразование уравнения (2), получаем требуемое разностное уравнение цифрового фильтра

$$\left(\frac{T_{11}T_{12}}{(\Delta t)^2}+\frac{T_{11}+T_{12}}{\Delta t}+1\right)x(k)+\left(-\frac{2T_{11}T_{12}}{(\Delta t)^2}-\frac{T_{11}+T_{12}}{\Delta t}\right)x(k-1)+\frac{T_{11}T_{12}}{(\Delta t)^2}x(k-2)=$$
$$=\left(\frac{K_1K_2}{(\Delta t)^2}+\frac{K_1K_2}{\Delta t}\right)y(k)+\left(-\frac{2K_1K_2}{(\Delta t)^2}-\frac{K_1K_2}{\Delta t}\right)y(k-1)+\frac{K_1K_2}{(\Delta t)^2}y(k-2).$$

Таким образом, коэффициенты полученного разностного уравнения, стоящие при отсчётах сигналов, зависят от параметров непрерывного фильтра, а также от шага дискретизации Δt.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2007.
2. Воробьёв С.Н. Цифровая обработка сигналов. М.: Академия, 2013.
3. Информационно-статистическая теория измерений. Ч.1 и Ч.2. Учебное пособие. СПб.: ГУАП, 2011.
4. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем М.: Радио и связь, 2004.