МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»

ИНФОРМАЦИОННО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Программа, методические указания,
задание к контрольной работе

Санкт-Петербург
2015

1. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Содержание разделов и тем лекционного курса

Модуль 1. Общая характеристика информационно-измерительных систем.

Тема 1.1. Основные понятия и назначение информационно-измерительных систем

Задачи, назначение и место в контуре управления летательным аппаратом бортовых информационно-измерительных систем.

Тема 1.2. Классификация информационно-измерительных систем летательных аппаратов.

Классификация осуществляется по назначению, принципу действия, по характеру представления выходного сигнала, по принципу передачи измерительной информации, по виду математической модели и по способу индикации выходной информации в информационно-измерительных системах.

Тема 1.3. Основные свойства и качество информационно-измерительных систем (ИИС).

В качестве основных свойств ИИС рассматриваются следующие: эффективность, точность, достоверность, надёжность, помехозащищённость, робастность, инвариантность, адаптивность.

Модуль 2. Модели сигналов.

Тема 2.1. Характеристики, параметры и классификация сигналов и помех.

Характеристики и параметры реализаций случайных сигналов и моделей сигналов и помех в виде случайных процессов . Классификация моделей случайных сигналов.

Тема 2.2. Описание типовых сигналов.

Функция знака., единичная функция, дельта-функция, прямоугольный стробирующий импульс, модулированные сигналы, квазидетерминированные сигналы, дискретизированные сигналы, цифровые сигналы.

Тема 2.3. Пространство сигналов.

Пространство детерминированных и случайных сигналов.

Тема 2.4. Дискретные представления сигналов в виде рядов. Модели сигналов и помех в виде обобщённых рядов Фурье, Карунена-Лоэва, канонических рядов Пугачёва, рядов Котельникова.

Тема 2.5. Спектральное представление сигналов.

Частотное представление случайных сигналов на конечном интервале времени. Частотное представление стационарных случайных процессов на бесконечном интервале времени. Соотношения Винера-Хинчина. Понятие формирующего фильтра. Белый шум.

Тема 2.6. Интегральные представления сигналов.

Интегралы Фурье и преобразование Гильберта.

Тема 2.7. Представление сигналов в пространстве состояний.

Представление модели реализаций сигналов в пространстве состояний. Представление случайных сигналов в пространстве состояний.

Тема 2.8. Представление дискретных во времени сигналов.

Дискретные представления Фурье и Лапласа.

Модуль 3. Статистический анализ и оценка точности линейных систем.

3.1. Общие правила преобразования случайных сигналов линейными системами.

Постановка задачи анализа ИИС. Анализ линейных систем в одномерном и многомерном случае.

Тема 3.2. Статистические характеристики выходных сигналов во временном представлении.

Анализ линейных, в общем случае, нестационарных линейных систем в случае использования моделей входных сигналов в виде нестационарных случайных процессов.

Тема 3.3. Статистические характеристики выходных случайных стационарных сигналов в частотном представлении.

Методы анализа линейных стационарных систем после окончания переходного процесса при воздействии входных сигналов, модели которых стационарные случайные процессы.

Модуль 4. Оптимальный синтез информационно-измерительных систем.

Тема 4.1. Задачи и основные этапы синтеза информационно-измерительных систем.

Методы представления сигналов и помех, структура информационной модели обработки сигналов в ИИС.

Тема 4.2. Критерии оптимальности информационно-измерительных систем.

Простая допустимая функция потерь, правила решений, средний риск, апостериорный и априорный риски, условия существования и единственности оптимальных правил решений, оценка сигнала и её свойства (несмещённость, состоятельность, регулярность, достаточность, эффективность).

Тема 4.3. Теоретические основы оптимальной оценки сигналов при использовании простых допустимых функций потерь

Теорема о байесовой оценке сигнал, теорема Шермана, теорема Калмана..

Тема 4.4. Оптимальные оценки сигналов по критерию минимума среднего квадрата ошибки оценки.

Теорема Дуба, оптимальные оценки сигнала, принадлежащие данному классу оценок, оптимально-инвариантная линейная оценка, оптимальная линейная фильтрация сигналов (фильтр Винера), фильтр Калмана-Бьюси.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

В соответствии с учебным планом изучение дисциплины предполагает изучение теоретического (лекционного) материала, наличие практических занятий и выполнение одной контрольной работы.

Перед изучением разделов программы необходимо повторить основные понятия теории вероятностей: вероятность случайного события, функция распределения и плотность вероятности случайных величин, числовые характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, ковариационный момент), формулы Байеса, вероятностные характеристики случайных процессов, включая марковские, по [4] и учебному пособию [5] либо любому другому для вузов. Рекомендуется осваивать разделы программы в той последовательности, которая предусмотрена программой.

Материал модуля 1 изложен в пособиях [1]; модуля 2 – в [1,3]; модуля 3 – в [1,3,4]; модуля 4 – в [2,3].

3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

3.1. Задание к контрольной работе

На вход стационарной линейной системы с частотной характеристикой $W(j\omega)$ поступает стационарный случайный процесс $X(t)$ с ковариационной функцией $K_x(\tau)$.

Требуется определить:

1) спектральную плотность выходного сигнала $S_Y(\omega)$;
2) дисперсию выходного сигнала D_Y в установившемся режиме.

Виды ковариационной функции $K_x(\tau)$ и частотной характеристики системы $W(j\omega)$ выбираются в соответствии с первой буквой фамилии, а номер варианта в соответствии с последней цифрой шифра студента.

Студенты, фамилии которых начинаются с букв А, Б, В, Г, Д, Е, выполняют контрольное задание для следующих ковариационной функции и частотной характеристики системы:

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} ,$$

$$W(j\omega) = \frac{K(1 + T_1 j\omega)}{1 + T_2 j\omega} .$$

Студенты, фамилии которых начинаются с букв Ж, З, И, К, Л, М, выполняют контрольное задание для следующих ковариационной функции и частотной характеристики системы:

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau ,$$

$$W(j\omega) = \frac{K(1 + T_1 j\omega)}{1 + T_2 j\omega} .$$

Студенты, фамилии которых начинаются с букв Н, О, П, Р, выполняют контрольное задание для следующих ковариационной функции и частотной характеристики системы:

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau ,$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + T_2 j\omega} .$$

Студенты, фамилии которых начинаются с букв С, Т, У, Ф, Х, Ц, выполняют контрольное задание для следующих ковариационной функции и частотной характеристики системы:

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right) ,$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + T_2 j\omega} .$$

Студенты, фамилии которых начинаются с букв Ч, Ш, Щ, Э, Ю, Я, выполняют контрольное задание для следующих ковариационной функции и частотной характеристики системы:

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} ,$$

$$W(j\omega) = \frac{K(1 + T_1 j\omega)}{T_2^2 (j\omega)^2 + 2 T_2 \xi j\omega + 1} .$$

Например, студент Архипов М.В., имеющий шифр ....7, выбирает

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} ,$$

$$W(j\omega) = \frac{K(1 + T_1 j\omega)}{1 + T_2 j\omega} ,$$

а исходные данные σ, α, K, T_1, T_2 , необходимые для определения ковариационной функции и частотной характеристики системы, из табл. 2 в соответствии с вариантом 7.

Таблица 2

Исходные данные к контрольной работе

№ вари-анта	Значение параметров ковариационной функции входного сигнала, $K_x(\tau)$			Значения параметров частотной характеристики системы, $W(jw)$			
	σ, м	α, с$^{-1}$	β, с$^{-1}$	K	T_1, с	T_2, с	ξ
1	4	0.9	0.05	0.95	1	5	
2	1	0.2	0.01	0.99	0.5	1.5	
3	30	1.5	0.1	0.90	3	7	
4	9	0.6	0.03	0.93	7	10	
5	11	0.05	0.001	0.99	5	8	0.714
6	3	0.95	0.08	0.96	1	3	
7	15	1.0	0.06	0.98	6	12	
8	7	0.7	0.07	0.97	4	7	
9	5	0.8	0.02	0.92	2	13	
10	18	0.3	0.009	0.94	8	11	

3.2. Методические указания к выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы рекомендуется использовать [1,3,4].

Спектральная плотность выходного сигнала стационарной линейной устойчивой системы в установившемся режиме при стационарном входном сигнале равна произведению квадрата модуля частотной характеристики данной системы и спектральной плотности входного сигнала

$$S_Y(\omega) = \left| W(j\omega) \right|^2 S_x(\omega) \ , \tag{1}$$

где $S_Y(\omega)$ - спектральная плотность выходного сигнала; $W(j\omega)$ - частотная характеристика стационарной линейной устойчивой системы; $S_x(\omega)$ - спектральная плотность входного сигнала.

Учитывая, что ковариационная функция и спектральная плотность стационарного случайного процесса связаны преобразованием Хинчина

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} K(\tau) d\tau \ , \tag{2}$$

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} S(\omega) d\omega \ , \tag{3}$$

спектральную плотность входного сигнала $S_x(\omega)$ можно представить в следующем виде:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} K_X(\tau) d\tau \ . \tag{4}$$

Согласно (3) и (1) ковариационную функцию выходного сигнала можно представить в виде

$$K_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| W(j\omega) \right|^2 S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \ , \tag{5}$$

тогда дисперсия выходного сигнала D_Y в установившемся режиме будет иметь вид

$$D_Y = K_Y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| W(j\omega) \right|^2 S_X(\omega) d\omega \ , \tag{6}$$

или

$$D_Y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega) d\omega \ . \tag{7}$$

Для того, чтобы найти интеграл (7), воспользуемся методикой [1].

Представим подынтегральное выражения в виде

$$S_Y(\omega) = \frac{G(j\omega)}{A(j\omega) A(-j\omega)} \ , \tag{8}$$

где полином $G(j\omega)$ содержит только четные степени переменной $j\omega$, а полином $A(j\omega)$ может иметь корни только в левой полуплоскости переменной $j\omega$. Представление (8) всегда возможно для дробно-рациональных спектральных плотностей $S_Y(\omega)$.

Примем наивысшую степень знаменателя равной $2n$. Наивысшая степень числителя не может быть выше $2n$-2, поскольку рассматриваются процессы в реальной системе (реальные сигналы должны иметь ограниченную дисперсию). Тогда полиномы $A(j\omega)$ и $G(j\omega)$ можно записать в виде

$$A(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n \ ; \tag{9}$$

$$G(j\omega) = b_0 (j\omega)^{2n-2} + b_1 (j\omega)^{2n-4} + \ldots + b_{n-1} \ , \tag{10}$$

где a_0, a_1, ... , a_n, b_0, b_1, ..., b_{n-1} - коэффициенты, которые могут быть однозначно определены по исходному подынтегральному выражению в (7). Обозначим через I_n искомый интеграл

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(j\omega) d\omega}{A(j\omega) A(-j\omega)} \ . \tag{11}$$

Интеграл I_n табулирован и для $n = \overline{1,4}$ определяется по следующим формулам:

$$I_1 = \frac{b_0}{2 a_0 a_1} \ ,$$

$$I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{2 a_0 a_1} \ ,$$

$$I_3 = \frac{-a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3}}{2 a_0 (a_0 a_3 - a_1 a_2)} \ ,$$

$$I_4 = \frac{b_0 (-a_1 a_4 + a_2 a_3) - a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2 + \frac{a_0 b_3}{a_4}(a_0 a_3 - a_1 a_2)}{2 a_0 \left(a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3 \right)} \ .$$

Главным вопросом при вычислении интеграла (11) является факторизация знаменателя подынтегрального выражения, т.е. представление знаменателя в виде произведения двух комплексно-сопряженных функций $A(j\omega)$ и $A(-j\omega)$. Так как спектральная плотность является вещественной четной неотрицательной функцией частоты, то полином знаменателя имеет вещественные коэффициенты и содержит только четные степени ω, и его факторизация всегда выполнима, но решение может быть не единственным

Единственным решение становится при наложении условия нахождения корней полинома $A(j\omega)$ в левой полуплоскости, чего требует рассматриваемая методика вычисления интеграла (11). Следовательно, чтобы факторизовать полином знаменателя и удовлетворить указанному условию, требуется в общем случае определять его корни. Однако факторизация полинома, порядок которого не превышает четырех (порядок $A(j\omega)$ не превышает двух), может быть выполнена без определения корней - методом неопределенных коэффициентов (рассматривается в примере). Условие, наложенное на корни, при этом будет выполнено, если все коэффициенты полинома $A(j\omega)$ взять положительными (для полинома порядка не выше второго положительность коэффициентов гарантирует нахождение корней в левой полуплоскости).

Пример.

Пусть $K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$, $\alpha, \beta > 0$,

$$W(j\omega) = \frac{K}{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)}, \quad T_1, T_2 > 0.$$

Для нахождения спектральной плотности выходного сигнала $S_Y(\omega)$, согласно (1), необходимо найти вначале спектральную плотность входного сигнала, которая, согласно (4), имеет вид

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau \; e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Используя формулы Эйлера

$\cos t = 1/2\ (\exp\{jt\} + \exp\{-jt\})$, $\sin t = 1/(2j)\ (\exp\{jt\} - \exp\{-jt\})$,

получим

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{j\beta\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\beta\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau\right).$$

Далее раскрываем модуль и перемножаем экспоненты

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega\tau+\alpha\tau+j\beta\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-j\omega\tau-\alpha\tau+j\beta\tau} d\tau\right) +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega\tau+\alpha\tau-j\beta\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-j\omega\tau-\alpha\tau-j\beta\tau} d\tau\right).$$

Произведя замену переменных $\omega-\beta$ на ω_1 и $\omega+\beta$ на ω_2, будем иметь

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(-j\omega_1+\alpha)\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{(-j\omega_1-\alpha)\tau} d\tau\right) +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(-j\omega_2+\alpha)\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{(-j\omega_2-\alpha)\tau} d\tau\right).$$

Нетрудно заметить, что выше представленное выражение состоит из суммы одинаковых интегралов с разными аргументами ω_1 и ω_2.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(-j\omega+\alpha)\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-(j\omega+\alpha)\tau} d\tau =$$

$$= \left.\frac{e^{(\alpha-j\omega)\tau}}{\alpha-j\omega}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-(\alpha+j\omega)\tau}}{-(\alpha+j\omega)}\right|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-j\omega} - 0 - 0 + \frac{1}{\alpha+j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Тогда

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega_1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega_2^2}\right),$$

и подставляя $\omega_1 = \omega-\beta$, $\omega_2 = \omega+\beta$, получим

$$S_X(\omega) = \sigma^2\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2}\right) = \frac{2\alpha\sigma^2\left(\alpha^2+\beta^2+\omega^2\right)}{\left(\omega^2+\alpha^2+\beta^2\right)^2 - 4\omega^2\beta^2}$$

Спектральная плотность выходного сигнала $S_Y(\omega)$, согласно (1), имеет вид

$$S_Y(\omega) = \left|\frac{K}{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)}\right|^2 \frac{2\alpha\sigma^2\left(\alpha^2+\beta^2+\omega^2\right)}{\left(\omega^2+\alpha^2+\beta^2\right)^2 - 4\omega^2\beta^2}.$$

Учитывая, что квадрат модуля комплексной функции равен произведению комплексно-сопряженных функций, т.е.

$$|W(j\omega)|^2 = W(j\omega)W(-j\omega) = \frac{K^2}{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)(1-T_1 j\omega)(1-T_2 j\omega)},$$

получим

$$S_Y(\omega)=\frac{K^2}{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)(1-T_1 j\omega)(1-T_2 j\omega)}\times$$
$$\times\frac{2\alpha\sigma^2\left(\alpha^2+\beta^2+\omega^2\right)}{\left(\omega^2+\alpha^2+\beta^2\right)^2-4\omega^2\beta^2}$$

Заметим, что $S_Y(\omega)$ действительно зависит от аргумента ω а не от $j\omega$, поскольку квадрат модуля $|W(j\omega)|^2$ является вещественной функцией:

$$(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)(1-T_1 j\omega)(1-T_2 j\omega)=(1+T_1 j\omega)\,(1-T_1 j\omega)\,(1+T_2 j\omega)\,(1-T_2 j\omega)=$$
$$=(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)\ .$$

Дисперсия выходного сигнала D_Y, согласно (7), в установившемся режиме будет определяться выражением

$$D_Y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K^2}{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)(1-T_1 j\omega)(1-T_2 j\omega)}\times$$
$$\times\frac{2\alpha\sigma^2\left(\alpha^2+\beta^2+\omega^2\right)}{\left(\omega^2+\alpha^2+\beta^2\right)^2-4\omega^2\beta^2}d\omega=2K^2\alpha\sigma^2\frac{1}{2\pi}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\omega^2+\alpha^2+\beta^2\right)d\omega}{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)(1-T_1 j\omega)(1-T_2 j\omega)\left((\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\omega^2\beta^2\right)}$$

Приведём данное выражение для дисперсии к виду (11). В нашем случае n=4. Для числителя получим

$$G(j\omega)=\omega^2+(\alpha^2+\beta^2)=-1\,(j\omega)^2+(\alpha^2+\beta^2)=b_0(j\omega)^6+b_1(j\omega)^4+b_2(j\omega)^2+b_3\ .$$

Таким образом, $b_0=0$, $b_1=0$, $b_2=-1$, $b_3=\alpha^2+\beta^2$.

В знаменателе имеем произведение двух полиномов; обозначим их

$$P_1(\omega)==(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)\ ;$$

$$P_2(\omega)=P_2(\omega)=(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\omega^2\beta^2=(\omega^4+\omega^2(2\alpha^2-2\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)^2)\ .$$

Так как в данном примере знаменатель является произведением $P_1(\omega)$ и $P_2(\omega)$, то факторизация всего знаменателя сводится к факторизации $P_1(\omega)$ и $P_2(\omega)$ по отдельности и его можно представить в виде

$$A(j\omega)\,A(-j\omega)=P_1(\omega)\,P_2(\omega)=$$
$$=[P_1^+(j\omega)\,P_1^-(j\omega)][P_2^+(j\omega)\,P_2^-(j\omega)]=[P_1^+(j\omega)\,P_2^+(j\omega)][\,P_1^-(j\omega)\,P_2^-(j\omega)]\ ,$$

$$A(j\omega)=P_1^+(j\omega)\,P_2^+(j\omega),\qquad A(-j\omega)=P_1^-(j\omega)\,P_2^-(j\omega),$$

где полиномы $P_1^+(j\omega)$ и $P_1^-(j\omega)$ есть результат факторизации $P_1(\omega)$, а $P_2^+(j\omega)$ и $P_2^-(j\omega)$ - результат факторизации $P_2(\omega)$. Заметим, что

$$P_1^-(j\omega)=P_1^+(-j\omega)\ ,\ P_2^-(j\omega)=P_2^+(-j\omega)\ .$$

Полином $P_1(\omega)$ фактически уже представлен в факторизованном виде, т.е.

$$P_1(\omega)=P_1^+(j\omega)\,P_1^-(j\omega)=(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)(1-T_1 j\omega)(1-T_2 j\omega),$$

$$P_1^+(j\omega)=(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)\ ,\ P_1^-(j\omega)=(1-T_1 j\omega)(1-T_2 j\omega)\ .$$

Так как порядок $P_2(\omega)$ не превышает четырех, то допустимо использовать для его факторизации метод неопределенных коэффициентов. Представим $P_2(\omega)$ в виде произведения двух комплексно-сопряженных полиномов второго порядка с неопределенными положительными коэффициентами a, b, c:

$$P_2(\omega)=P_2^+(j\omega)\,P_2^-(j\omega)=$$
$$=((j\omega)^2a+j\omega\,b+c)\,((-j\omega)^2a+(-j\omega)\,b+c)\ .$$

Перемножив скобки и приведя подобные слагаемые, получим (слагаемые при нечётных степенях $j\omega$ сокращаются)

$$((j\omega)^2a+j\omega\,b+c)\,((-j\omega)^2a-j\omega\,b+c)=(j\omega)^4a^2+(j\omega)^2(2ac-b^2)+c^2=$$
$$=\omega^4a^2-\omega^2(2ac-b^2)+c^2\ .$$

Теперь учтем, что полученный полином должен быть равен исходному:

$$\omega^4a^2-\omega^2(2ac-b^2)+c^2=(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\omega^2\beta^2=\omega^4+\omega^2(2\alpha^2-2\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)^2\ .$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ω, получим систему из трех уравнений для определения трех неизвестных a, b, c

$$\begin{cases} a^2 = 1 , \\ -\left(2ac - b^2\right) = 2\alpha^2 - 2\beta^2 , \\ c^2 = \left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2 . \end{cases}$$

Решив данную систему, получим

$$\begin{cases} a = 1 , \\ b = 2\alpha , \\ c = \alpha^2 + \beta^2 , \end{cases}$$

$$P_2^+(j\omega) = (j\omega)^2 a + j\omega\, b + c = (j\omega)^2 + j\omega\, 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2 .$$

Полином $A(j\omega)$ получим как произведение $P_1^+(j\omega)$ и $P_2^+(j\omega)$:

$$A(j\omega) = (1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)((j\omega)^2 + j\omega\, 2\alpha + \alpha^2+\beta^2) =$$

$$=(j\omega)^4\, T_1T_2 + (j\omega)^3\, (2T_1T_2\alpha + T_1 + T_2) + (j\omega)^2\, (T_1T_2(\alpha^2+\beta^2) + (T_1 + T_2)\, 2\alpha + 1) +$$

$$+ j\omega((T_1 + T_2)(\alpha^2+\beta^2) + 2\alpha) + \alpha^2+\beta^2 = a_0(j\omega)^4 + a_1(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_3 j\omega + a_4 ,$$

где

$$a_0 = T_1 T_2 ,$$
$$a_1 = 2T_1T_2\alpha + T_1 + T_2 ,$$
$$a_2 = T_1T_2(\alpha^2+\beta^2) + (T_1 + T_2)\, 2\alpha + 1 ,$$
$$a_3 = (T_1 + T_2)(\alpha^2+\beta^2) + 2\alpha ,$$
$$a_4 = \alpha^2+\beta^2 .$$

Заметим, что требование расположения корней $A(j\omega)$ в левой полуплоскости выполнено, поскольку каждый из трех полиномов, входящих в $A(j\omega)$, имеет порядок не выше второго и положительные коэффициенты.

Воспользуемся теперь решением табулированного интеграла (11) для n=4 и получим окончательное выражение для дисперсию выходного сигнала D_Y :

$$D_Y = \frac{2K^2\alpha\sigma^2}{T_1 T_2} I_4 = \frac{2K^2\alpha\sigma^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{a_0 a_1 b_2 + \dfrac{a_0 b_3}{a_4}\left(a_0 a_3 - a_1 a_2\right)}{2a_0\left(a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3\right)} .$$

Вычисляя коэффициенты a_i , $i = \overline{0,4}$ и b_j , $j = \overline{0,3}$ в соответствии с исходными данными, представленными в табл. 2, определим дисперсию выходного сигнала D_Y в установившемся режиме в численном виде.

3. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информационно-статистическая теория измерений. Ч1.Модели сигналов и анализ точности систем: Учеб. пособие/ СПбГУАП.
2. Информационно-статистическая теория измерений. Ч2.Методы оптимального синтеза информационно-измерительных систем, критерии оптимизации и свойства оценок: Учеб. пособие/ СПбГУАП.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд.- М.: Радио и связь, 1989.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования.- М.: Наука, 1975.
5. Пугачёв В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Физматлит, 2002.