

Составители:

докт. техн. наук, проф. Р. С. САНЖАРОВСКИЙ,
канд. техн. наук, доц. И. С. ДЕРЯБИН,
канд. техн. наук, доц. В. П. КОЛОСОВ,
ст. преподаватель М. Д. КОЛОСОВА,
канд. техн. наук, доц. Е. Н. АНТОНОВ.

Ответственный редактор зав. кафедрой теоретической механики,
докт. техн. наук, проф. В. А. ЛЕБЕДЕВ.

Рецензент докт. техн. наук, проф. Г. Д. ВИШНЕВЕЦКИЙ.

Методические указания, программа и контрольные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры 30 сентября 1983 г., протокол № 3.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания,
программа и контрольные задания третьей части курса по динамике
для студентов заочного отделения всех специальностей ЛИСИ

Валентин Александрович Лебедев,
Рудольф Сергеевич Санжаровский,
Евгений Николаевич Антонов,
Игорь Сергеевич Дерябин,
Владислав Петрович Колосов,
Майя Дмитриевна Колосова

Редактор Т. Л. Корняну
Технический редактор Т. Л. Корняну
Корректор А. В. Афанасьева

Сдано в набор 21.10.86. Подписано к печати 25.11.86.
Формат бумаги 60×84¹/₁₆. Бум. тип. № 3. Литерат. гарнит. Печать высокая.
Объем 2,5 печ. л.+приложение, уч.-изд. л. 2,3. Зак. 5821. Тир. 1500. Бесплатно.

Ленинградский инженерно-строительный институт
198005, Ленинград, 2-я Красноармейская, 4
Межвузовская типография (3) СППО-2 Ленгипрдат
198005, Ленинград, ул. Егорова, 5

Таблица 1

Последняя цифра шифра	Задание для выполнения контрольной работы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	I-6	I-7	I-8	I-9	I-10
2	II-1	II-2	II-3	II-4	II-5	II-6	II-7	II-8	II-9	II-10
3	III-1	III-2	III-3	III-4	III-5	III-6	III-7	III-8	III-9	III-10
4	IV-1	IV-2	IV-3	IV-4	IV-5	IV-6	IV-7	IV-8	IV-9	IV-10
5	V-1	V-2	V-3	V-4	V-5	V-6	V-7	V-8	V-9	V-10
6	VI-1	VI-2	VI-3	VI-4	VI-5	VI-6	VI-7	VI-8	VI-9	VI-10
7	VII-1	VII-2	VII-3	VII-4	VII-5	VII-6	VII-7	VII-8	VII-9	VII-10
8	VIII-1	VIII-2	VIII-3	VIII-4	VIII-5	VIII-6	VIII-7	VIII-8	VIII-9	VIII-10
9	IX-1	IX-2	IX-3	IX-4	IX-5	IX-6	IX-7	IX-8	IX-9	IX-10
0	X-1	X-2	X-3	X-4	X-5	X-6	X-7	X-8	X-9	X-10

Состав задания и порядок его выполнения

По третьей части курса студенты всех специальностей должны решить шесть задач и выполнить одну расчетно-графическую работу.

Задание на расчетно-графическую работу и пример ее выполнения приводятся в методических указаниях, изданных отдельной брошюрой: «Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания по динамике (с применением ЭВМ)¹ для студентов заочного факультета всех специальностей ЛИСИ» (Л.: ЛИСИ, 1984). При выполнении заданий рекомендуется пользоваться литературой, указанной в программе, прилагаемой к методическим указаниям.

Шесть задач включают следующие разделы курса:

Задача № 1. Принцип Даламбера и метод кинестатики.

Задача № 2. Динамика плоскопараллельного движения твердого тела.

Задача № 3. Принцип возможных перемещений.

Задача № 4. Общее уравнение динамики.

Задача № 5. Уравнение Лагранжа второго рода.

Задача № 6. Колебания механической системы с одной степенью свободы.

Указания к выбору варианта

Задание на контрольную работу определяется по табл. 1 по двум последним цифрам индивидуального номера, проставленного в зачетной книжке. В каждой клетке табл. 1 помещаются римская и арабская цифры, определяющие номера схем и исходные данные ко всем задачам. Например, шифр зачетной книжки 77—256. Последние две цифры 56 указы-

¹ Применение ЭВМ предусмотрено для городских студентов-заочников, обучающихся по вечерней схеме и посещающих лекции и практические занятия.

вают, что вариант для выполнения контрольной работы содержится в клетке, находящейся на пересечении шестой строки и пятого столба табл. 1. В указанной клетке находим цифры VI—5. Цифра VI указывает на необходимость использования для всех шести задач шестых схем, а 5 — исходных данных к ним из пятых строк соответствующих таблиц.

Задача № 1. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА И МЕТОДА КИНЕСТАТИКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И РЕАКЦИИ СВЯЗИ

Определить ускорение груза 1 (рис. 1) и реакции связей для механических систем, приведенных в табл. 2 а и 2 б.

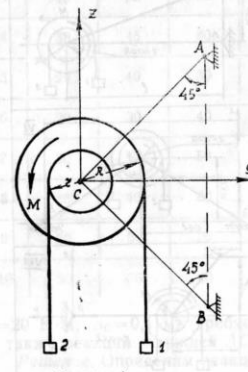


рис. 1

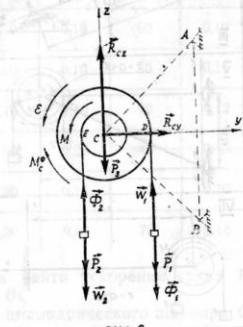
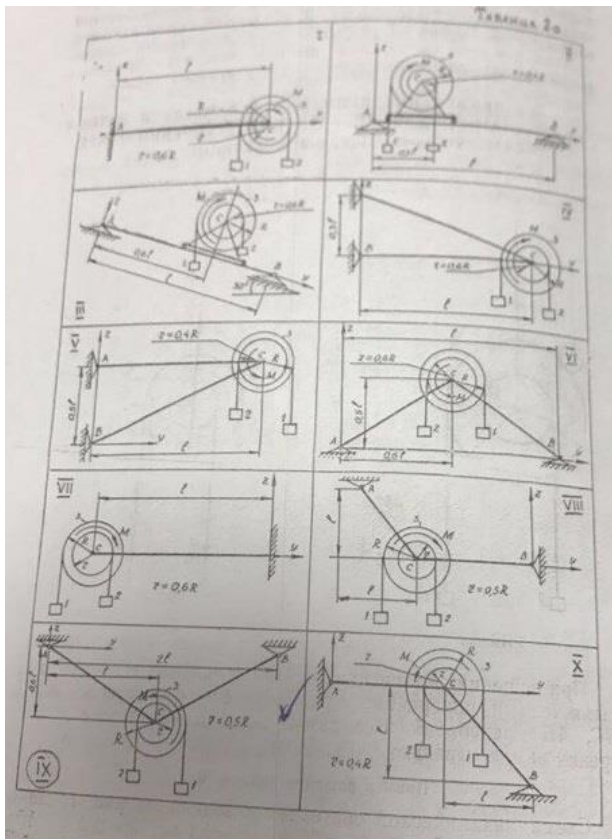


рис. 2

При решении задачи диски считать сплошными и однородными телами, поперечными размерами и весом стержней AC, BC, AB пренебречь. Все связи считать идеальными, силы трения не учитывать.

Пример решения задачи № 1

Схема механической системы приведена на рис. 1. Дано: $t_1=10$ кг, $t_2=15$ кг, $t_3=20$ кг, $r=0,1$ м, $R=0,2$ м, $M=$



Исходные данные к схеме задачи № 1

Таблица 20

Номер строки	m_1	m_2	m_3	l	R	M	Радиус шарика, м
	кг			м		Н·м	
1	20	30	60	1,20	0,15	70	0,11
2	30	40	40	1,40	0,20	75	0,10
3	40	55	50	1,50	0,10	80	0,12
4	30	45	80	1,20	0,20	90	0,14
5	25	40	30	1,30	0,15	60	0,10
6	20	30	40	1,40	0,10	50	0,11
7	30	40	50	1,10	0,10	70	0,12
8	25	40	60	1,00	0,20	40	0,15
9	30	50	30	1,30	0,15	60	0,10
10	20	35	40	1,20	0,20	70	0,15

$= 20 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $\rho_C = 0,1 \text{ м}$. Требуется найти ускорения груза 1, а также реакции стержней AC и BC.
Решение. Определим реакции цилиндрического шарнира C на диск. На основе принципа освобожденности от связей рассмотрим механическую систему, состоящую из диска и грузов 1, 2, как свободную.
 Действие шарнира C на диск заменяем реакциями \vec{R}_{Cy} и \vec{R}_{Cz} (рис. 2). Воспользуемся принципом Даламбера и приложим к точкам механической системы силы инерции.
 Силы инерции $\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{W}_1$, $\vec{\Phi}_2 = -m_2 \vec{W}_2$ направлены противоположно ускорениям \vec{W}_1 и \vec{W}_2 грузов 1 и 2 (предполага-

ется, что груз 2 опускается). Силы инерции вращающегося диска приводятся к паре сил, момент которой

$$\vec{M}_C^{\Phi} = -I_C \vec{\epsilon},$$

где I_C — момент инерции диска относительно оси вращения; $\vec{\epsilon}$ — вектор углового ускорения диска.

В соответствии с этим направляем момент пары \vec{M}_C^{Φ} противоположно угловому ускорению $\vec{\epsilon}$ (см. рис. 2).

На рассматриваемую механическую систему действуют также задаваемые силы: силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ и момент M пары сил действующей на диск.

Согласно принципу Даламбера в любой момент времени для всякой несвободной механической системы геометрическая сумма главных векторов и главных моментов задаваемых сил, реакций связей и сил инерции относительно любого неподвижного центра равна нулю. Отсюда следует, что посредством введения сил инерции задача динамики механической системы сводится к задаче о равновесии совокупности задаваемых сил и сил инерции, т. е. к задаче статики.

Так как в рассматриваемом примере мы имеем плоскую систему сил, то составляем три уравнения равновесия метода кинестатики:

$$\sum (Y_i + \Phi_{iy}) = 0; \quad \sum (Z_i + \Phi_{iz}) = 0; \quad \sum (M_{iC} + M_{iC}^{\Phi}) = 0.$$

Проектируя заданные силы и силы инерции (см. рис. 2) на координатные оси Cy и Cz и составляя сумму моментов заданных сил и сил инерции относительно точки C, получаем

$$R_{Cy} = 0; \\ R_{Cz} + \Phi_2 - P_2 - P_3 - P_1 - \Phi_1 = 0; \\ M + P_2 r - P_1 R - \Phi_1 R - \Phi_2 r - M_C^{\Phi} = 0.$$

Модули сил инерции Φ_1 и Φ_2 выражаем через ускорения грузов 1 и 2:

$$\Phi_1 = m_1 W_1; \quad \Phi_2 = m_2 W_2.$$

Модуль момента сил инерции M_C^{Φ} выражаем через угловое ускорение: $M_C^{\Phi} = I_C \epsilon$, здесь $I_C = m_3 \rho^2$, где ρ^2 — радиус инерции.

Учитывая, что вращательные ускорения точек D и E дисков равны ускорениям грузов 1 и 2, выражаем угловое ускорение дисков ϵ и ускорение W_2 груза через ускорение W_1 :

$$\epsilon = \frac{W_1}{R}; \quad W_2 = \frac{r}{R} W_1.$$

Подставляя значения Φ_1, Φ_2 и M_C^{Φ} в третье уравнение равновесия

$$M + P_2 r - P_1 R - m_1 W_1 R - m_2 W_1 \frac{r}{R} R - m_3 \rho^2 \frac{W_1}{R} = 0,$$

находим ускорение груза 1

$$W_1 = \frac{M + P_2 r - P_1 R}{m_1 R^2 + m_2 r^2 + m_3 \rho^2} R = \frac{M + m_2 g r - m_1 g R}{m_1 R^2 + m_2 r^2 + m_3 \rho^2} R.$$

Подставляя численные значения величин, получаем

$$W_1 = \frac{20 + 15 \cdot 9,81 \cdot 0,1 - 10 \cdot 9,81 \cdot 0,2}{10 \cdot 0,2^2 + 15 \cdot 0,1^2 + 20 \cdot 0,1^2} \cdot 0,2 = 4,02 \text{ м/с}^2.$$

Первые два уравнения равновесия позволяют найти реакции R_{Cy}, R_{Cz} , действующие на ось C диска:

$$R_{Cy} = 0; \\ R_{Cz} = P_1 + P_2 + P_3 + \Phi_1 - \Phi_2 = P_1 + P_2 + P_3 + m_1 W_1 - m_2 W_2 = m_1 g + m_2 g + m_3 g + m_1 W_1 - m_2 \frac{r}{R} W_1.$$

Подставляя численные значения величин, получаем

$$R_{Cz} = 10 \cdot 9,81 + 15 \cdot 9,81 + 20 \cdot 9,81 + 10 \cdot 4,02 - 15 \cdot \frac{0,1}{0,2} \cdot 4,02 = 451,54 \text{ Н}.$$

На узел стержневой системы CAB действует сила \vec{R}'_{Cz} , $\vec{R}'_{Cy} = 0$, равная по модулю силе R'_{Cz} и противоположно ей направленная (рис. 3). Для определения реакций стержней AC и BC вырезаем узел C и прикладываем к нему силы \vec{R}'_{CA} и \vec{R}'_{CB} (рис. 4). Составляем два уравнения равновесия сил, действующих на узел C,

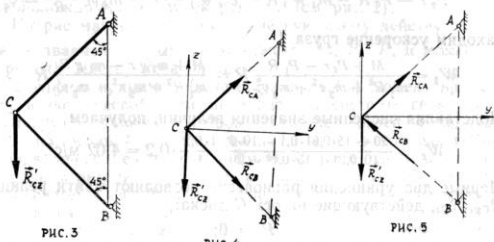
$$\sum Y_i = 0; \quad R'_{CA} \cos 45^\circ + R'_{CB} \cos 45^\circ = 0; \\ \sum Z_i = 0; \quad -R'_{Cz} + R'_{CA} \cos 45^\circ - R'_{CB} \cos 45^\circ = 0,$$

откуда находим

$$R_{CA} = -R_{CB};$$

$$R_{CB} = -\frac{R'_{Cz}}{2 \cos 45^\circ} = -\frac{451,54}{\sqrt{2}} = -319,3 \text{ Н.}$$

Знак минус показывает, что направление реакции \vec{R}_{CB} по отношению к расчетной схеме надо изменить на противополож-



ное, как это показано на схеме действительных реакций (рис. 5), где стержень CA растянут, а CB сжат.

Задача № 2. СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Катушка весом $P=20$ кН катится без скольжения по шероховатой плоскости под действием сил веса \vec{Q} двух одинаковых грузов (схемы даны в табл. 3а). Грузы подвешены на нитях, переброшенных через блоки. В табл. 3б исходных данных ρ — радиус инерции катушки относительно оси, проходящей через центр масс C . Во всех вариантах принимать $R=1,5r$; $Q=kP$. Пренебрегая сопротивлением качению, определить кинематические уравнения движения катушки и наименьшее значение коэффициента трения f между катушкой и поверхностью, при котором возможно качение катушки без скольжения.

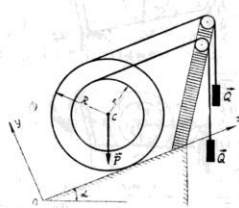
10

Исходные данные к задаче № 2 Таблица 3б

Номер строки	r , м	ρ , м	D , кН	k
1	0,20	0,25	11,0	1,5
2	0,25	0,32	13,0	1,4
3	0,30	0,38	15,0	1,2
4	0,35	0,41	17,0	1,3
5	0,40	0,50	21,0	1,1
6	0,45	0,53	23,0	1,6
7	0,50	0,64	25,0	1,0
8	0,55	0,70	27,0	0,9
9	0,60	0,72	31,0	0,8
10	0,65	0,81	33,0	0,7

Пример решения задачи № 2

Пусть для катушки, изображенной на рис. 6, дано: $r=0,2$; $\rho=0,26$ м; $P=20$ кН; $k=1,5$; $\alpha=30^\circ$.



Решение. Катушка совершает плоское движение в плоскости чертежа. Помещаем в этой плоскости систему неподвижных координатных осей Oxy . Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела имеют вид

$$m\ddot{x}_C = \sum X_i^E = X^E;$$

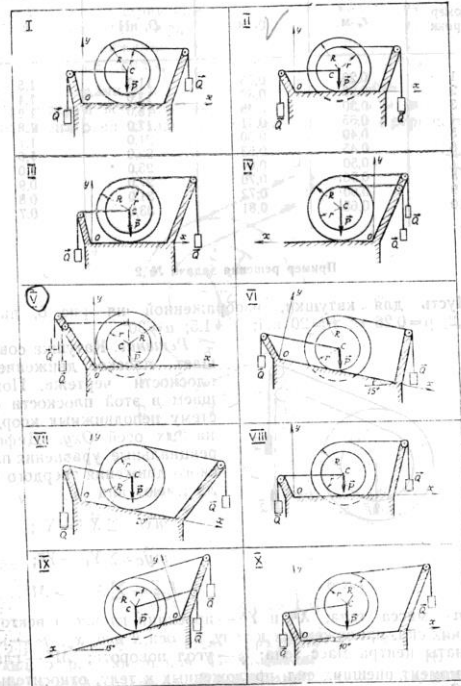
$$m\ddot{y}_C = \sum Y_i^E = Y^E;$$

$$J_C \ddot{\varphi} = \sum M_i^E = M^E,$$

где m — масса тела; X^E и Y^E — проекции главного вектора внешних сил, приложенных к телу, на оси x и y ; x_C , y_C — координаты центра масс тела; φ — угол поворота; M^E — главный момент внешних сил, приложенных к телу, относительно оси C , проходящей через центр масс перпендикулярно чертежу; J_C — момент инерции относительно оси C .

12

Таблица 3а



Первые два уравнения характеризуют поступательное движение тела вместе с центром масс (в динамике за полюс принимаем не произвольную точку, а центр масс тела). Третье уравнение характеризует вращение тела вокруг оси C .

Для составления дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения катушки изображаем на расчетной схеме внешние силы, действующие на нее в соответствии с условием задачи (рис. 7) и реакции поверхности N , F_{cu} .

Проектируя все силы на координатные оси и определяя моменты сил относительно оси C , составляем дифференциаль-

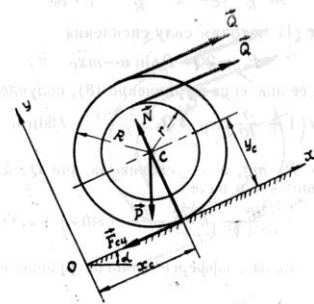


Рис. 7

ные уравнения движения катушки, предполагая, что она катится в направлении положительного отсчета координаты x_C .

$$m\ddot{x}_C = 2Q - F_{cu} - P \sin \alpha; \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = N - P \cos \alpha; \quad (2)$$

$$m\rho^2 \ddot{\varphi} = F_{cu}R + QR + Qr. \quad (3)$$

При составлении третьего уравнения рекомендуется следующее правило знаков. Направление вращения тела считаем положительным. Тогда моменты сил, направленные в сторону вращения, положительны, направленные противоположно, — отрицательны.

13

Система трех уравнений (1), (2), (3) содержит пять неизвестных x_c , y_c , φ , $F_{сц}$, N . Для решения задачи составим еще два уравнения связи катушки с наклонной плоскостью

$$y_c = R \quad (4); \quad x_c = R\varphi \quad (5),$$

откуда

$$\ddot{y}_c = 0 \quad (6); \quad \ddot{x}_c = R\ddot{\varphi} \quad (7).$$

Подставляя значение $\ddot{\varphi}$ из (7) в (3), получим

$$m \frac{r^2}{R^2} \ddot{x}_c = Q \frac{(r+R)}{R} + F_{сц}. \quad (8)$$

Из уравнения (1) находим силу сцепления

$$F_{сц} = 2Q - P \sin \alpha - m\ddot{x}_c \quad (9)$$

и, подставляя ее значение в уравнение (8), получаем

$$m \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) \ddot{x}_c = Q \frac{(r+3R)}{R} - P \sin \alpha. \quad (10)$$

Учитывая, что $P = mg$, а по условию задачи $Q = kP$, запишем последнее уравнение в виде

$$\ddot{x}_c = g \frac{R^2}{R^2 + r^2} \left(k \frac{r+3R}{R} - \sin \alpha\right) = 2,85g. \quad (11)$$

Интегрируя дважды дифференциальное уравнение (11), получим

$$\dot{x}_c = 2,85gt + C_1; \quad (12)$$

$$x_c = 1,425gt^2 + C_1t + C_2. \quad (13)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из начальных условий движения:

$$\text{при } t=0; \quad x_c=0; \quad \dot{x}_c=0$$

$$C_1 = C_2 = 0;$$

$$x_c = 1,425gt^2. \quad (14)$$

Из уравнения (5) находим угол поворота катушки $\varphi = x_c/R$, что с учетом значения x_c из (14) позволяет записать $\varphi = 4,75gt^2$.

Подставляя значение x_c из (11) в (9), найдем силу сцепления

14

$$F_{сц} = 2Q - P \sin \alpha - m \cdot 2,85g = \\ = 2 \cdot 1,5P - P \sin \alpha - 2,85P = -0,35P. \quad (15)$$

Знак минус означает, что в действительности для данных параметров направление силы сцепления (рис. 8) противоположно принятому на расчетной схеме (см. рис. 7).

На основании законов трения, сформулированных в статике, известно, что модуль силы статического трения изменяется от $F_{ст\ тр} = 0$ до $F_{ст\ тр} = F_{ст\ тр}^{\max}$ в момент начала скольжения. Модуль максимальной силы статического трения, как

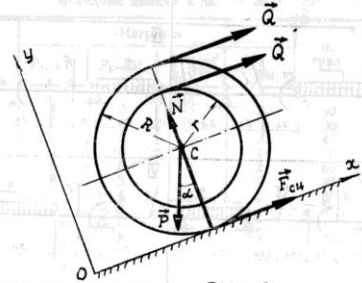


Рис. 8

показывает опыт, пропорционален величине нормальной реакции N плоскости:

$$F_{ст\ тр}^{\max} = fN.$$

Следовательно, при движении без скольжения модуль силы сцепления должен быть больше или равен модулю $F_{ст\ тр}^{\max}$. При $F_{сц} \leq F_{ст\ тр}^{\max}$ начнется скольжение. Тогда

$$F_{сц} \leq fN. \quad (16)$$

Так как из (2) с учетом (6) нормальная реакция

$$N = P \cos \alpha = 0,866P, \quad (17)$$

то из (15) и (16) имеем $0,35 \leq f \cdot 0,866$, откуда $f \geq 0,404$. Таким образом, наименьшее значение коэффициента трения, при котором возможно качение катушки без скольжения, $f_{\min} = 0,404$.

15

Задача № 3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ РЕАКЦИИ ОПОР СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Используя принцип возможных перемещений совместно с принципом освобожденности от связей, определить реакции опор в точках A, C, D для системы двух сочлененных балок, приведенных в табл. 4а. Исходные данные для решения задач приведены в табл. 4б.

Таблица 4б

Исходные данные к задаче № 3

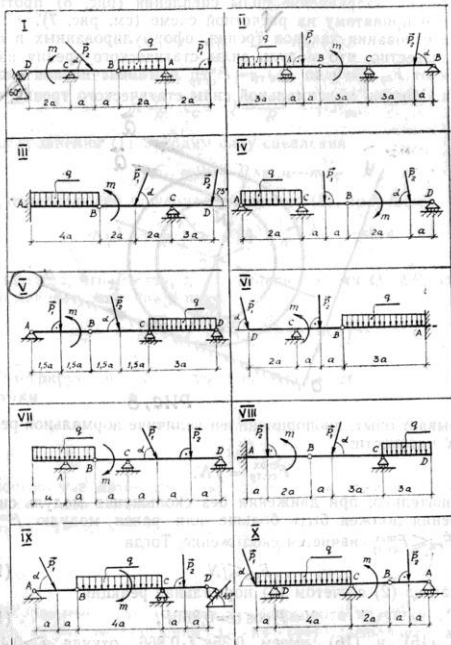
Номер строки	Нагрузка				α , град	a , м
	P_1 , кН	P_2 , кН	m , кН·м	q , кН/м		
1	4	3	5	1	60	1
2	3	4	2	6	30	2
3	2	2	5	3	45	3
4	4	6	3	4	30	2
5	6	8	4	2	60	1
6	8	3	5	5	45	2
7	3	4	3	2	60	3
8	4	3	6	1	30	3
9	5	6	4	2	45	1
10	6	8	3	4	60	2

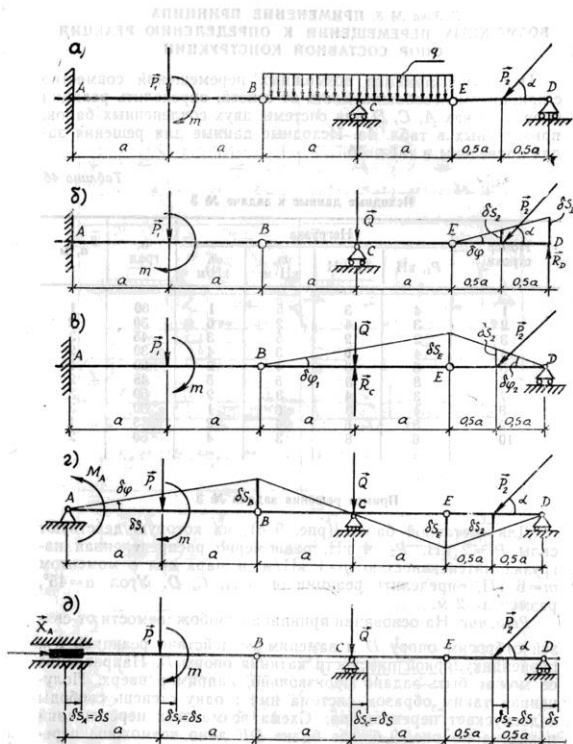
Пример решения задачи № 3

Для составной балки (рис. 9а), на которую действуют силы $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 4$ кН, равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 1$ кН/м и пара сил с моментом $m = 6$ кН, определить реакции опор A, C, D. Угол $\alpha = 45^\circ$, размер $a = 2$ м.

Решение. На основании принципа освобожденности от связей отбросим опору D и заменим ее действие реакцией \vec{R}_D , перпендикулярной плоскости катания опоры D. Направление ее может быть задано произвольно, например вверх. Полученная таким образом система имеет одну степень свободы и допускает перемещения. Схема возможных перемещений показана на рис. 9б, где балке DE дано возможное перемещение — бесконечно малый угол поворота $\delta\varphi$. Все остальные точки системы не имеют возможных перемещений.

Таблица 4а





угол $\delta\varphi_2$ вокруг цилиндрического шарнира D . Точки приложения сил получают возможные перемещения δs_C и δs_2 , показанные на рис. 9, в.

Уравнение возможных работ имеет вид

$$R_C \delta s_C - Q \delta s_C - P_2 \sin \alpha \delta s_2 = 0.$$

Учитывая вытекающие из подобия треугольников (рис. 9, в) соотношения $\delta s_C = \delta s_2 = 0,5 \delta s_E$, получаем, сокращая на δs_E ,

$$R_C 0,5 - Q \cdot 0,5 - P_2 \sin \alpha \cdot 0,5 = 0,$$

откуда находим $R_C = 6,82$ кН.

Опора A представляет жесткое защемление. Реакции такой опоры представляются силой \vec{R}_A , направление которой заранее не известно, и реактивным моментом M_A . Реакцию \vec{R}_A удобно представить в виде двух составляющих \vec{X}_A и \vec{Y}_A . Для определения горизонтальной составляющей \vec{X}_A жесткое защемление заменяем опорой в виде ползуна, жестко скрепленного с балкой (рис. 9, д). Такое представление позволяет исключить только ту связь в точке A , которая соответствует искомой реакции \vec{X}_A . В этом случае система получает одну степень свободы. Возможные перемещения тел системы δs будут только горизонтальными, одинаковыми для всех тел. Уравнение работ получает вид

$$X_A \delta s - P_2 \cos \alpha \delta s = 0,$$

откуда

$$X_A = 2,82 \text{ кН.}$$

На рис. 9, е представлена схема возможных перемещений для определения вертикальной составляющей \vec{Y}_A . Жесткое защемление в точке A заменено опорой, допускающей вертикальные перемещения, но не допускающей горизонтальные перемещения и поворот балки AB . Отброшенная связь компенсирована реакцией \vec{Y}_A . При сообщении системе возможных перемещений балка AB получит поступательное перемещение, балка BE повернется вокруг цилиндрического шарнира C , а балка DE — вокруг цилиндрического шарнира D . На основании данных рис. 9, е

$$\delta s_A = \delta s_1 = \delta s_B = \delta s_E, \quad \delta s_2 = 0,5 \delta s_E.$$

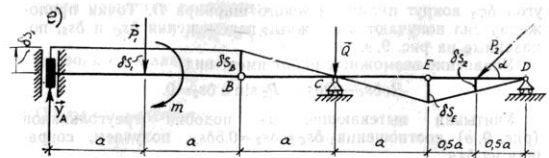


Рис. 9

удобства расчета здесь и далее распределенная в пределах одного тела (балка BE) нагрузка q заменена сосредоточенной силой $Q = q \cdot 2a = 4$ кН.

На основании принципа возможных перемещений для равновесия механической системы с идеальными, стационарными и двусторонними связями (такowymi являются все системы, приведенные в табл. 4а) необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех заданных сил и реакций связей, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы:

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i^{(r)} = 0, \text{ или } \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0.$$

Составим уравнение работ всех сил на возможных перемещениях, учитывая, что действие связи опоры D заменено ее реакцией

$$R_D \cdot \delta s_D - P_2 \sin \alpha \delta s_2 = 0.$$

На основании данных рис. 9, б, используя свойство подобия треугольников, находим связь между возможным перемещением опоры D и точки приложения силы \vec{P}_2 . Это дает возможность исключить в уравнении работ бесконечно малую величину δs_2 и найти значение реакции R_D :

$$R_D \cdot 2\delta s_2 - P_2 \sin \alpha \delta s_2 = 0; \quad R_D = 0,5 P_2 \sin \alpha = 1,41 \text{ кН.}$$

Аналогично составляется расчетная схема для определения реакции опоры C (рис. 9, в). Опора C заменяется реакцией \vec{R}_C . Система допускает возможные перемещения — балка BE может быть повернута на бесконечно малый угол $\delta\varphi_1$ вокруг цилиндрического шарнира B , а балка DE — на

Тогда уравнение возможных работ

$$Y_A \delta s_A - P_1 \delta s_1 + P_2 \sin \alpha \delta s_2 = 0$$

приводится к виду

$$Y_A - P_1 + P_2 \sin 45^\circ \cdot 0,5 = 0.$$

Отсюда определяется

$$Y_A = 0,59 \text{ кН.}$$

Для определения реактивного момента опоры A заменяем жесткое защемление балки шарнирно-неподвижной опорой, а отброшенную связь — реактивным моментом M_A (рис. 9, з). Даем системе возможные перемещения и определяем зависимости между возможными перемещениями, которые допускаются оставшимися связями. Получаем (рис. 9, з)

$$\delta s_B = \delta s_E = \delta s = 2a \delta\varphi; \quad \delta s_1 = \delta s_2 = 0,5 \delta s a \delta\varphi.$$

Уравнение возможных работ сил на соответствующих возможных перемещениях имеет вид

$$M_A \delta\varphi - m \delta\varphi - P_1 \delta s_1 + P_2 \sin \alpha \delta s_2 = 0.$$

Используя найденные зависимости между перемещениями, получаем

$$M_A - m - P_1 a + P_2 \sin \alpha a = 0,$$

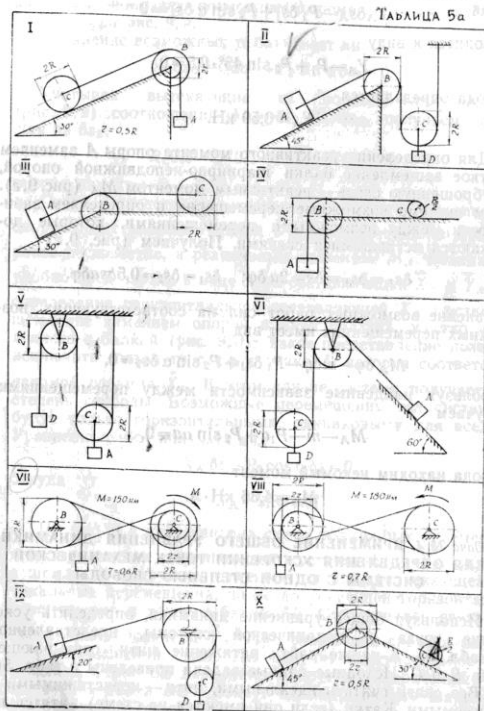
отсюда находим искомый момент

$$M_A = 4,36 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Задача № 4. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Используя общее уравнение динамики, определить ускорение груза A механической системы, представленной в табл. 5а, а также найти натяжение нити, связывающей тела B и C . Исходные данные задачи приведены в табл. 5б.

Все связи считать идеальными, нити — нерастяжимыми и невесомыми. Катки (если они имеются на схеме) катятся по плоскости без скольжения, сопротивление качению катков C характеризуется коэффициентом трения качения.



Исходные данные к задаче № 4

Номер строки	Весы Н				R, м	Радиусы инерции, м		Коэффициент трения скольжения f	Коэффициент трения качения lambda, м
	P _A	P _B	P _C	P _D		P _C	P _B		
1	90	70	150	30	0,4	0,3	0,4	0,2	0,001
2	100	60	40	40	0,6	0,4	0,5	0,1	0,003
3	120	70	80	50	0,5	0,5	0,6	0,2	0,002
4	100	60	50	40	0,6	0,4	0,5	0,4	0,001
5	80	90	60	70	0,5	0,3	0,4	0,3	0,002
6	100	70	80	120	0,4	0,5	0,2	0,1	0,001
7	60	70	90	60	0,5	0,4	0,3	0,2	0,003
8	60	70	80	70	0,6	0,5	0,4	0,4	0,002
9	100	50	90	90	0,7	0,3	0,4	0,1	0,001
10	70	80	60	80	0,6	0,5	0,3	0,2	0,002

Примечания: 1. Коэффициенты трения скольжения f учитываются только для тех схем, у которых груз A движется по наклонной плоскости.
 2. В схемах — I, III, IV, X катки C катятся без скольжения и коэффициенты трения качения λ учитываются только для этих схем.
 3. Весы грузов P_D учитываются только для схем II, V, VI, IX.

Пример решения задачи № 4

Для механической системы (рис. 10) определить ускорение точки A , а также натяжение нити, связывающей каток C с блоком B . $P_A = P_B = P_C = P = 100$ Н; $r_A = r_B = r_C = r = 0,3$ м. Катки A и C катятся по плоскостям без скольжения. Каток C опускается по наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Коэффициент трения качения катков A и C по плоскостям $d = 0,001$ м.

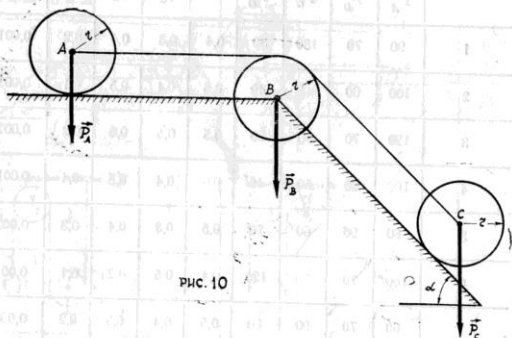


рис. 10

Решение. Общее уравнение динамики, объединяющее принцип Даламбера и принцип возможных перемещений Лагранжа, формулируется следующим образом: в каждый момент движения механической системы с идеальными удерживающими связями сумма элементарных работ заданных сил, реакций связей и сил инерции на возможных перемещениях системы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i^{(F)} + \sum_{i=1}^n \delta A_i^{(I)} = 0.$$

В соответствии с этим прикладываем к точкам механической системы две группы сил. Первая группа — заданные силы $\vec{P}_A, \vec{P}_B, \vec{P}_C$ и реакции связей $\vec{R}_A, \vec{F}_{CA}, \vec{R}_C, \vec{F}_{CB}$ (рис. 11). В данной задаче сил трения скольжения нет. Для других

схем табл. 4а, где имеется скольжение груза A по наклонной плоскости, учитываются силы трения скольжения, модуль которых пропорционален нормальной реакции N :

$$F = fN,$$

где f — коэффициент трения скольжения.

Силы, характеризующие сопротивление качению, приводятся к паре сил (\vec{R}_A, \vec{P}_A) для катка A и к паре сил (\vec{R}_C, \vec{P}'_C) для катка C . Линии действия нормальных реакций \vec{R}_A и \vec{R}_C

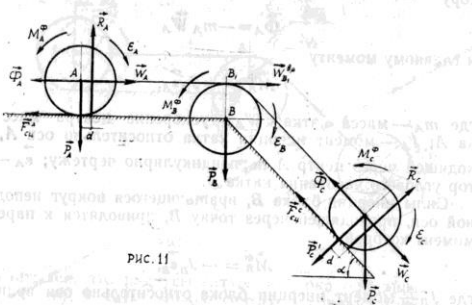


рис. 11

оказываются смещенными в сторону движения катка на расстояние d от линии действия сил тяжести \vec{P}_A и \vec{P}'_C . Плечо каждой пары равно величине, называемой коэффициентом трения качения.

Вторая группа сил — силы инерции.

Силы инерции катка C , совершающего плоскопараллельное движение, приводятся (рис. 11) к главному вектору

$$\vec{\Phi}_C = -m_C \vec{W}_C$$

и главному моменту

$$\vec{M}_C^{\Phi} = -J_C \vec{\epsilon}_C,$$

где m_C — масса катка; \vec{W}_C — ускорение центра масс катка; I_C — момент инерции катка относительно оси C , проходящей через центр масс C перпендикулярно чертежу; ϵ_C — вектор углового ускорения катка. В соответствии с этими формулами направляем силу инерции \vec{F}_C противоположно ускорению \vec{W}_C , а момент пары \vec{M}_C^Φ — противоположно угловому ускорению ϵ_C .

Силы инерции катка A , также совершающего плоскопараллельное движение, приводятся (рис. 11) к главному вектору

$$\vec{F}_A = -m_A \vec{W}_A$$

и главному моменту

$$\vec{M}_A^\Phi = -J_A \epsilon_A,$$

где m_A — масса катка; \vec{W}_A — ускорение центра масс катка A ; I_A — момент инерции катка относительно оси A , проходящей через центр A перпендикулярно чертежу; ϵ_A — вектор углового ускорения катка A .

Силы инерции блока B , вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через точку B , приводятся к паре сил, момент которой

$$\vec{M}_B^\Phi = -J_B \epsilon_B,$$

где J_B — момент инерции блока относительно оси вращения B , перпендикулярной чертежу; ϵ_B — вектор углового ускорения блока.

Сообщим системе возможные перемещения δs_C , δs_A , $\delta \varphi_C$, $\delta \varphi_A$, $\delta \varphi_B$ (рис. 12) и запишем общее уравнение динамики, составив сумму возможных работ заданных сил, реакций связей и сил инерции на соответствующих возможных перемещениях:

$$P_C \delta s_C \sin \alpha - \Phi_C \delta s_C - M_C^\Phi \delta \varphi_C - M_{TK}^C \delta \varphi_C - M_B^\Phi \delta \varphi_B - \Phi_A \delta s_A - M_A^\Phi \delta \varphi_A - M_{TK}^A \delta \varphi_A = 0,$$

где $M_{TK}^C = R_C d = P_C \cos \alpha d$ и $M_{TK}^A = R_A d = P_A d$ — моменты пар трения-качения; R_C и R_A — величины нормальных реакций плоскостей качения катков C и A ; d — коэффициент трения качения; δs_C и δs_A — возможные перемещения точек C и A ;

26

$\delta \varphi_C$, $\delta \varphi_A$ и $\delta \varphi_B$ — возможные угловые перемещения (углы поворота) катков C , A и блока B (рис. 12).

Находим зависимости между возможными перемещениями. Так как система имеет одну степень свободы (катки A и C катятся без скольжения) и, по условию задачи, нити нерастяжимы, то

$$\delta s_A = \delta s_C = \delta s_B,$$

где B_1 — верхняя точка блока B .

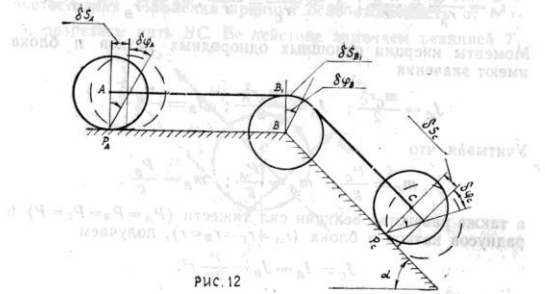


рис. 12

Учитывая, что радиусы катков и блока одинаковы ($r_A = r_B = r_C = r$), а катки можно считать вращающимися в данный момент вокруг своих мгновенных центров вращения P_A и P_C , расположенных в точках соприкосновения катков с плоскостями, можно записать

$$\delta \varphi_A = \frac{\delta s_A}{r_A}; \quad \delta \varphi_B = \frac{\delta s_{B_1}}{r_B}; \quad \delta \varphi_C = \frac{\delta s_C}{r_C},$$

откуда следует

$$\delta \varphi_A = \delta \varphi_B = \delta \varphi_C = \frac{\delta s_A}{r}.$$

Модули сил инерции \vec{F}_A и \vec{F}_C выражаем через ускорения точек A и C :

$$\Phi_A = m_A W_A; \quad \Phi_C = m_C W_C,$$

27

а величины моментов пар сил инерции M_C^Φ , M_A^Φ , M_B^Φ через угловые ускорения $M_C^\Phi = J_C \epsilon_C$, $M_A^\Phi = J_A \epsilon_A$, $M_B^\Phi = J_B \epsilon_B$. Так как нити нерастяжимы, то $W_A = W_C = W_{B_1}^{np}$ (см. рис. 11).

Используя соотношения кинематики вращательного движения блока относительно оси B и катков A и C относительно мгновенных центров скоростей P_A и P_C , выражаем ускорения ϵ_A , ϵ_C и ϵ_B через ускорения точек \vec{W}_A , \vec{W}_C и $\vec{W}_{B_1}^{np}$:

$$\epsilon_A = \frac{W_A}{r_A} = \frac{W_A}{r}; \quad \epsilon_C = \frac{W_C}{r_C} = \frac{W_C}{r}; \quad \epsilon_B = \frac{W_{B_1}^{np}}{r_B} = \frac{W_A}{r}.$$

Моменты инерции сплошных однородных катков и блока имеют значения

$$J_C = \frac{m_C r^2}{2}; \quad J_A = \frac{m_A r^2}{2}; \quad J_B = \frac{m_B r^2}{2}.$$

Учитывая, что

$$m_C = \frac{P_C}{g}; \quad m_A = \frac{P_A}{g}; \quad m_B = \frac{P_B}{g},$$

а также равенство величин сил тяжести ($P_A = P_B = P_C = P$) и радиусов катков и блока ($r_A = r_C = r_B = r$), получаем

$$J_C = J_A = J_B = \frac{P}{2g} r^2.$$

Выражая модули главных векторов сил инерции и моментов пар сил инерции через ускорение точки A , получаем

$$\Phi_A = \frac{P}{g} W_A; \quad \Phi_C = \frac{P}{g} W_A; \quad M_C^\Phi = \frac{P}{2g} W_A r;$$

$$M_A^\Phi = \frac{P}{2g} W_A r; \quad M_B^\Phi = \frac{P}{2g} W_A r.$$

Подставляя найденные значения возможных перемещений, модулей главных векторов сил инерции и моментов пар сил инерции в общее уравнение динамики, получаем

$$P \delta s_A \sin \alpha - \frac{P}{g} W_A \delta s_A - \frac{P}{2g} W_A r \frac{\delta s_A}{r} - P \cos \alpha d \frac{\delta s_A}{r} - \frac{P}{2g} W_A r \frac{\delta s_A}{r} - \frac{P}{g} W_A \delta s_A - \frac{P}{2g} W_A r \frac{\delta s_A}{r} - P d \frac{\delta s_A}{r} = 0.$$

28

Сокращая на δs_A и P , находим ускорение точки A

$$W_A = \frac{2g}{7r} [r \sin \alpha - d (\cos \alpha + 1)].$$

Подставляя численные значения величин в это равенство, находим

$$W_A = \frac{2 \cdot 9,81}{7 \cdot 0,3} [0,3 \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,001 (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)] = 1,96 \text{ м/с}^2.$$

После нахождения ускорения \vec{W}_A можно приступить к определению натяжения нити, связывающей тела B и C , методом кинестатики. Применяя принцип освобождаемости от связей, разрезаем нить BC . Ее действие заменяем реакцией \vec{T}_1

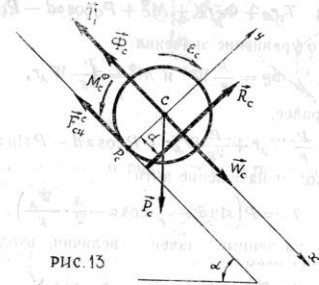


рис. 13

(рис. 13). Рассматриваем равновесие сил, приложенных к катку C . В соответствии с методом кинестатики к катку C прикладываем три группы сил: заданные силы, реакции связей и силы инерции. Заданной силой является сила \vec{P}_C ; реакциями связей — сила сцепления $\vec{F}_{сц}^C$, нормальная реакция плоскости качения \vec{R}_C и сила натяжения нити \vec{T}_1 . (Сила \vec{T}_1 для механической системы, состоящей из одного катка (рис. 13), является внешней, а для системы, состоящей из двух катков и блока (рис. 10) — внутренней.) Силы инерции катка C приводятся к главному вектору \vec{F}_C и моменту \vec{M}_C^Φ (рис. 13).

29

Расчетная схема, изображенная на рис. 13 содержит четыре неизвестных $\vec{F}_{\text{тр}}^C$, \vec{R}_C , \vec{T}_1 и \vec{W}_C , а уравнений равновесия метода кинестатики можно составить только три, но так как ускорение $W_C = W_A$ уже найдено при решении первой части задачи, то с помощью трех уравнений равновесия метода кинестатики можно найти величины неизвестных сил $F_{\text{тр}}^C$, R_C , T_1 . По условию задачи требуется найти только натяжение нити T_1 . Для этого достаточно составить одно уравнение равновесия метода кинестатики в виде суммы моментов относительно мгновенного центра вращения P_C катка C :

$$\sum M_{P_C} = 0; \quad T_1 r_C + \Phi_C r_C + M_C^0 + P_C \cos \alpha d - P_C \sin \alpha r_C = 0.$$

Введем в это уравнение значения

$$\Phi_C = \frac{P}{g} W_A \quad \text{и} \quad M_C^0 = \frac{P}{2g} W_A r,$$

найденные ранее,

$$T_1 r + \frac{P}{g} W_A r + \frac{P}{2g} W_A r + P \cos \alpha d - P \sin \alpha r = 0.$$

Отсюда находим натяжение нити

$$T_1 = P \left(\sin \alpha - \frac{d}{r} \cos \alpha - \frac{3}{2} \cdot \frac{W_A}{g} \right).$$

Подставляя численные значения величин, входящих в это равенство, получаем

$$T_1 = 100 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{0,091}{0,1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1,96}{9,81} \right) = 40,59 \text{ Н.}$$

Задача № 5. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ВЫВОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Используя уравнение Лагранжа второго рода, выведите дифференциальное уравнение движения механической системы с одной степенью свободы, рассмотренной при решении задачи № 4 и представленной в табл. 5а и 5б.

Пример решения задачи № 5

Рассматривается механическая система, приведенная на рис. 10 и исследованная в предыдущем параграфе с помощью

30

$$T_C = \frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2,$$

где ω_A и ω_C — угловые скорости катков A и C .

Блок B совершает вращательное движение; его кинетическая энергия

$$T_B = \frac{1}{2} J_B \omega_B^2,$$

где ω_B — угловая скорость блока B .

Тогда кинетическая энергия всей механической системы

$$T = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_A^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 + J_C \omega_C^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2.$$

Выражаем теперь все линейные и угловые скорости через обобщенную скорость \dot{s} . Скорость точки A $v_A = \dot{s}$. Так как нити растяжимы, то скорости точек C , B и A одинаковы:

$$v_C = v_B = v_A = \dot{s}.$$

На основе соотношений кинематики вращательного движения блока B и плоскопараллельного движения катков A и C выражаем угловые скорости тел ω_C , ω_A , ω_B через скорости точек v_C , v_A , v_B :

$$\omega_C = \frac{v_C}{r_C}; \quad \omega_A = \frac{v_A}{r_A}; \quad \omega_B = \frac{v_B}{r_B},$$

откуда находим

$$\omega_C = \omega_A = \omega_B = \frac{\dot{s}}{r}.$$

Моменты инерции катков A , C и блока B были вычислены при решении задачи № 4.

$$J_C = J_A = J_B = \frac{P}{2g} r^2.$$

Подставляя полученные значения скоростей и моментов инерции в выражение для кинетической энергии системы, получаем

$$T = \frac{7}{4} \cdot \frac{P}{g} \dot{s}^2.$$

Из этого выражения следует, что кинетическая энергия системы зависит только от обобщенной скорости \dot{s} и не зависит от обобщенной координаты s .

32

общего уравнения динамики. Исходные данные принимаются такие же, как и при решении задачи № 4.

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты принимаем линейное перемещение s точки A (рис. 14). Записываем урав-

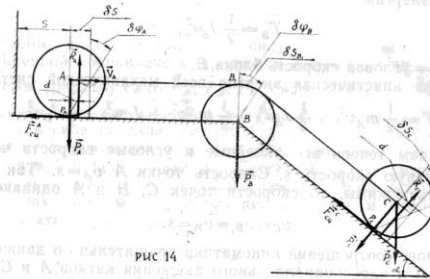


рис 14

нение Лагранжа второго рода, соответствующие выбранной обобщенной координате,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s,$$

где T — кинетическая энергия механической системы; s — обобщенная координата; \dot{s} — обобщенная скорость; Q_s — обобщенная сила, соответствующая выбранной обобщенной координате s . Если рассматривается система, которая имеет не идеальные связи — связи с трением, то все силы трения причисляются к разряду задаваемых сил и учитываются при нахождении обобщенной силы Q_s .

Определим кинетическую энергию системы как функцию обобщенной координаты s и обобщенной скорости \dot{s} , равной величине скорости v_A центра масс катка.

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий катков A , C и блока B : $T = T_A + T_C + T_B$.

Катки C и A совершают плоскопараллельное движение. Их кинетическая энергия определяется по теореме Кёнига:

$$T_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_A^2;$$

Найдем значения производных, входящих в уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{P}{g} \dot{s};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{P}{g} \ddot{s}.$$

Чтобы найти обобщенную силу Q_s , соответствующую обобщенной координате s , приложим к точкам механической системы (рис. 14) силы \vec{P}_A , \vec{P}_B , \vec{P}_C , силы сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}^A$, $\vec{F}_{\text{сц}}^C$, а также пары сил (\vec{P}_A, \vec{R}_A) и (\vec{P}_C, \vec{R}_C) , характеризующие сопротивление качению катков A и C . Дадим системе возможное перемещение (см. рис. 14), сообщив обобщенной координате s приращение δs . Составим сумму возможных работ заданных сил и реакций связей на возможных перемещениях системы, вызванных приращением δs обобщенной координаты s (рис. 14):

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i^{(P)} = P_C \delta s_C \sin \alpha - R_C d \delta \varphi_C - R_A d \delta \varphi_A.$$

Работа сил сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}^A$ и $\vec{F}_{\text{сц}}^C$ равна нулю ввиду того, что эти силы приложены в неподвижных точках (мгновенных центрах скоростей). Учитывая значения сил

$$P_C = P_A = P; \quad R_C = P \cos \alpha; \quad R_A = P$$

и принимая во внимание соотношения между возможными перемещениями (см. пример решения задачи № 4)

$$\delta \varphi_C = \delta \varphi_A = \frac{\delta s}{r},$$

получим

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i^{(P)} = \frac{P}{r} [r \sin \alpha - d (\cos \alpha + 1)] \delta s.$$

Обобщенной силой Q_s , соответствующей обобщенной координате s , называют скалярную величину, определяемую отношением суммы возможных работ действующих сил, на перемещениях механической системы, вызванных возможным приращением δs обобщенной координаты s , к величине приращения δs :

$$Q_s = \frac{\sum_{i=1}^n \delta A_i^{(P)}}{\delta s}.$$

3—5821

33

На основании этого находим

$$Q_s = \frac{P}{r} [r \sin \alpha - d (\cos \alpha + 1)] \tan \alpha = \frac{P}{r} [r \sin \alpha - d (\cos \alpha + 1)].$$

Подставляя найденные значения производных и обобщенной силы в уравнение Лагранжа второго рода, имеем

$$\frac{7}{2} \frac{P}{k} \ddot{s} - 0 = \frac{P}{r} [r \sin \alpha - d (\cos \alpha + 1)].$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение движения системы.

$$\ddot{s} = \frac{2kr}{7r} [r \sin \alpha - d (\cos \alpha + 1)].$$

Вторая производная обобщенной координаты s — величина $\ddot{s} = W_A$ в точности совпадает со значением величины ускорения W_A , найденного при решении предыдущей задачи.

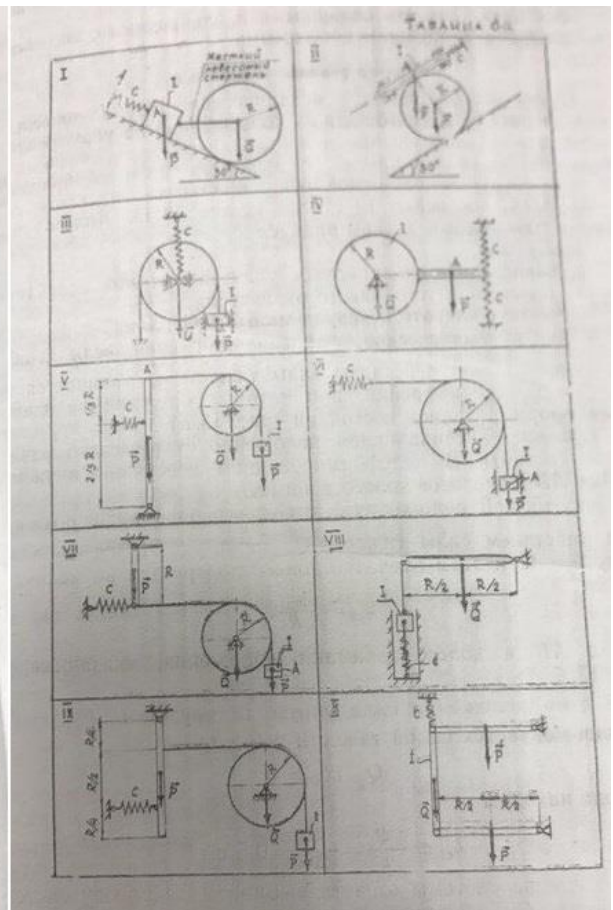
Задача № 6. ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Для механической системы (табл. 6а, 6б) требуется: составить дифференциальное уравнение малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия;

Таблица 6б

Номер строки	P, Н	Q, Н	R, м	c, Н/см
1	1,0	0,50	1,0	40
2	0,8	0,25	1,5	60
3	0,6	0,40	2,0	20
4	0,6	0,30	0,5	30
5	1,0	0,25	1,5	50
6	0,8	0,50	0,5	20
7	0,6	0,40	2,0	40
8	0,8	0,25	1,0	30
9	1,0	0,30	0,5	20
10	1,2	0,40	2,0	40

вычислить частоту и период малых колебания системы; найти кинематическое уравнение движения тела I, если движение системы под действием силы тяжести начинается



из такого положения, при котором пружина находится в недеформированном состоянии.

Все диски считать сплошными и однородными, все связи идеальными, а пружины невесомыми.

Пример решения задачи № 6

Пусть рассматривается механическая система, приведенная на рис. 15, а, состоящая из подвешенной на упругой пружине рейки, движущейся в вертикальных направляющих и находящейся в зацеплении с зубчатым колесом, вращающимся вокруг неподвижной оси. Жесткость пружины $c = 20$ Н/см, вес рейки 10 Н, вес колеса 50 Н. Колесо считается однородным диском радиуса R.

Требуется: составить дифференциальное уравнение малых колебаний около положения устойчивого равновесия; вычислить частоту и период малых колебаний; найти кинематическое уравнение движения, если движение системы под действием силы тяжести Q начинается из такого положения рейки, при котором пружина находится в недеформированном состоянии (рис. 15, а).

Решение. Устанавливаем положение статического равновесия системы. В недеформированном состоянии пружины рейка AB и зубчатое колесо занимают положения, указанные на рис. 15, а. В положении статического равновесия пружина под действием силы тяжести Q рейки растянется на величину $\delta_{ст}$. При этом зубчатое колесо повернется на величину

$$\varphi_{ст} = \frac{\delta_{ст}}{R}.$$

Рейка AB и колесо занимают положения, указанные на рис. 15, б.

В этом положении сила упругости пружины $F_{упр} = c\delta_{ст}$ уравновешивается силой тяжести рейки Q.

$$Q - c\delta_{ст} = 0.$$

Отсюда находим

$$\delta_{ст} = \frac{Q}{c} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ см.}$$

В качестве системы отсчета выбираем декартову систему координат xOy, совмещая начало координат (точку O) с точкой A₁.

Выводим систему из положения статического равновесия, смещая конец рейки A на величину x (рис. 15, в). При этом зубчатое колесо повернется на угол $\varphi = x/R$. Рейка AB и зубчатое колесо занимают положения, указанные на рис. 15, в. Так как нам необходимо получить кинематическое уравнение

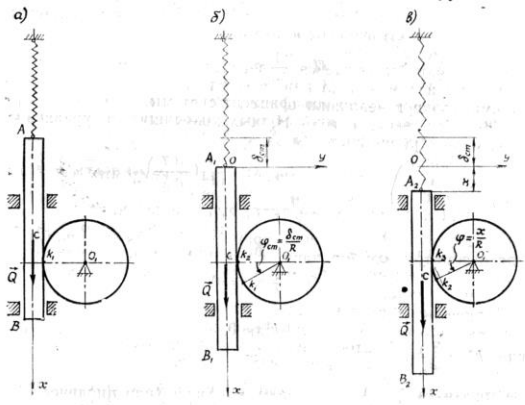


Рис. 15

движения рейки, то в качестве обобщенной координаты целесообразно принять отклонение x конца рейки A от положения статического равновесия (рис. 15, в).

В данной задаче обобщенная сила сопротивления среды и возмущающая сила отсутствуют, поэтому система совершает малые свободные колебания.

Выведем дифференциальное уравнение задачи с помощью уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

Выражение кинетической энергии записываем в виде квадратичной формы

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{x}^2,$$

где величина a_{11} — инерционный коэффициент системы.

Квадратичная форма для потенциальной энергии системы с одной степенью свободы имеет вид

$$П = \frac{1}{2} c_{11} x^2,$$

где c_{11} — квазиупругий коэффициент системы.

Найдем значения производных, входящих в уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = a_{11} \dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = a_{11} \ddot{x};$$

$$\frac{\partial П}{\partial x} = c_{11} x.$$

Подставляя эти значения в уравнение Лагранжа, получим для рассматриваемой задачи

$$O_{11} \ddot{x} + c_{11} x = 0$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (1)$$

где $k^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$.

Величину $k = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$ называют круговой (или циклической) частотой колебаний; она равна по величине числу полных колебаний системы за время 2π секунд.

Для нахождения значений коэффициентов c_{11} и a_{11} составим выражения потенциальной и кинетической энергии системы. Для составления выражения потенциальной энергии подсчитаем взятую со знаком минус сумму работ сил системы на перемещениях системы из положения статического равновесия в заданное положение, определяемое обобщенной координатой $q = x$ (рис. 15, б):

$$П = -A = - \left[Qx - \int_{\delta_{cr}}^{\delta_{cr} + x} c x dx \right] = Qx + \left. \frac{c x^2}{2} \right|_{\delta_{cr}}^{\delta_{cr} + x} =$$

$$= -Qx + \frac{c(\delta_{cr} + x)^2}{2} - \frac{c \delta_{cr}^2}{2} = -Qx + \frac{c \delta_{cr}^2}{2} +$$

$$+ \frac{2c\delta_{cr} + x}{2} + \frac{c x^2}{2} - \frac{c \delta_{cr}^2}{2} = (-Q + c \delta_{cr}) x + \frac{c x^2}{2}.$$

Отсюда, учитывая, что $(-Q + c \delta_{cr}) = 0$, находим

$$П = \frac{1}{2} c x^2.$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии рейки AB , совершающей поступательное движение, и зубчатого колеса, совершающего вращательное движение вокруг оси O_1 :

$$T = T_{AB} + T_1 = \frac{1}{2} m_{AB} v_C^2 + \frac{1}{2} J_{O_1} \omega_1^2.$$

Учитывая, что $v_C = \dot{x}$, а $\omega_1 = \dot{\varphi} = \dot{x}/R$, находим

$$T = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{P R^2}{2g} \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{\dot{x}^2}{4g} (2Q + P).$$

Сравниваем полученные выражения потенциальной и кинетической энергии с их квадратичными формами:

$$П = \frac{1}{2} c_{11} q^2 = \frac{1}{2} c x^2;$$

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}^2 = \frac{1}{4g} (2Q + P) \dot{x}^2.$$

Находим значения квазиупругого и инерционного коэффициентов

$$c_{11} = c;$$

$$a_{11} = \frac{1}{2g} (2Q + P)$$

и

$$k^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{2g c}{2Q + P}. \quad (2)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (1), находим его общее решение:

$$x = A_1 \cos kt + A_2 \sin kt. \quad (3)$$

Значение k определено выражением (2). Величины A_1 и A_2 представляют постоянные интегрирования.

Уравнение (3) можно преобразовать к более простому виду, заменив постоянные A_1 и A_2 постоянными a и β , по формулам

$$A_1 = a \sin \beta; \quad A_2 = a \cos \beta.$$

Вводя значения A_1 и A_2 в (3), находим

$$x = a \sin(kt + \beta). \quad (4)$$

Уравнение (4) показывает, что обобщенная координата x изменяется по гармоническому закону, т. е. рейка, входящая в рассматриваемую систему, совершает простые гармонические колебания с амплитудой a , частотой k и начальной фазой β .

Для определения постоянных интегрирования a и β (амплитуды и начальной фазы) используем начальные условия движения. При $t=0$ имеем (рис. 15, а) $x = x_0 = -\delta_{ст}$, $\dot{x} = \dot{x}|_{t=0} = 0$.

Дифференцируя выражение (4) по переменной t , получаем

$$\dot{x} = ak \cos(kt + \beta). \quad (5)$$

Полагая в выражениях (4) и (5) $t=0$ и используя начальные условия движения, находим

$$-\delta_{ст} = a \sin \beta; \quad 0 = ak \cos \beta.$$

Решая эту систему уравнений относительно переменных a и β , находим

$$a = \delta = 0,5 \text{ см}; \quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Используя выражение (2), вычисляем частоту колебаний

$$k = \sqrt{\frac{2gc}{2Q + P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 980 \cdot 20}{2 \cdot 10 + 50}} = 23,6 \text{ рад/с}$$

и период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{23,6} = 0,266 \text{ с.}$$

(6) Вводя найденные значения a , k и β в выражение (4), находим кинематическое уравнение движения рейки

$$x = -0,5 \sin(23,6t + \pi/2). \quad (6)$$