2.4.3. Транспортная задача

Постановка транспортной задачи

В практике геологоразведочных работ часто возникает потребность в составлении плана перевозок определенных грузов. Если известна стоимость перевозок, то для составления оптимального плана могут быть использованы методы линейного программирования. Подобные задачи называются *транспортными задачами*.

В ряде случаев вместо стоимости перевозок, в качестве фактора принимают расстояния. Это замена может иметь место, когда стоимость перевозки груза изменяется линейно в зависимости от расстояния.

Сформулируем транспортную задачу в общем случае. Имеется некий груз, который нужно перевести с m складов к n потребителям. Для каждого i-го склада ($i = 1, 2, \ldots, m$) известно, сколько в нем находится груза a_i, а для каждого j-го потребителя ($j = 1, 2, \ldots, n$) известна его потребность b_j в грузе. Стоимость перевозки c_{ij} от i-го склада до j-го потребителя известны. Требуется определить план перевозок (объем перевозок от i-го склада j-му потребителю) таким образом, чтобы потребности в грузе были удовлетворены и суммарная стоимость перевозок была минимальной.

Транспортная задача может быть открытого или закрытого типа. Если суммарный объем запасов равен суммарной потребности, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{62}$$

то это задача *закрытого типа*. Если это равенство не выполняется, то это задача *открытого типа*. Любая задача открытого типа может быть сведена к задаче закрытого типа путем введения фиктивного поставщика, если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{63}$$

или фиктивного потребителя, если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{64}$$

При этом стоимости всех фиктивных перевозок полагаются равными нулю.

Решающими переменными при перевозке являются количества груза x_{ij}, перевезенного из i-го склада к j-му потребителю. Тогда целевая функция может быть определена соотношением:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{nm}x_{nm} \to \min , \qquad (65)$$

где $f(x)$ – общая стоимость всех перевозок.

Ограничениями будут

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} \le a_i; \\ x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} \ge b_j; \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases} \qquad (66)$$

Рассмотрим транспортную задачу закрытого типа. В этом случае требование о вывозе груза со всех складов порождает следующее ограничение:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i , \qquad (67)$$

а требование об удовлетворении потребностей в грузе всех потребителей вызывает такое ограничение:

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j . \qquad (68)$$

Транспортная задача содержит $m \times n$ подлежащих определению переменных. Для решения транспортной задачи используются специальные *транспортные таблицы* (табл. 13), которые преобразуются по определенной методике. Сначала определяется первое, исходное опорное решение, а затем методом последовательных итераций отыскивается оптимальное решение.

В настоящее время разработано множество различных алгоритмов решения транспортной задачи: распределительный метод, метод потенциалов, дельта-метод, венгерский метод, метод дифференциальных рент, различные сетевые методы и т.д. Задачи эти часто усложняются разного рода дополнительными условиями: например, в них включается расчет не только стоимость перевозок, но и стоимость производства продукции (производственно-транспортная задача), оптимизируется совместно доставка взаимозаменяемых видов продукции, оптимизируется доставка грузов с промежуточными складами. Ниже рассматривается решение транспортной задачи методом потенциалов.

Таблица 13

Общий вид транспортной таблицы

Склады	**Потребители**				**Запас**
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{21} c_{21}	…	x_{2n} c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mn} c_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	…	b_n	–

Определение исходного опорного решения

Рассмотрим один из широко распространенных методов построения исходного опорного решения – *метод «северо-западного» угла*. Достоинством этого метода является его простота, а недостатком – относительная удаленность от оптимального решения. Для нахождения оптимального решения здесь потребуется большее количество приближений – итераций, чем в других более сложных методах (наименьших стоимостей, двойного предпочтения и др.), которые учитывают стоимость перевозок.

Метод «северо-западного» угла заключается в том, что клетки транспортной таблицы заполняются, начиная с верхнего левого угла – ячейки (1,1), двигаясь далее по строке вправо, или по столбцу вниз.

Вариант I. Если запасы первого склада больше потребностей первого потребителя ($a_1>b_1$), то в ячейку (1,1) заносится потребность первого потребителя ($x_{11}=b_1$), т.е. количество груза, перевезенного из первого склада к первому потребителю, приравнивается его потребности. Таким образом, потребности первого потребителя удовлетворены полностью, это позволяет закрыть первый столбец.

Далее двигаемся вправо по первой строке, и в ячейку (1,2) заносим меньшее из чисел $a_1–b_1$ и b_2, т.е. $x_{12}= \min\{a_1–b_1;\ b_2\}$. Если в ячейку (1,2) записано число $a_1–b_1$, то следующим шагом перемещаемся вниз, в ячейку (2,2), продолжая удовлетворять потребности второго потребителя. Если в ячейку (1,2) занесено число b_2, то потребности второго потребителя удовлетворены полностью и следующим шагом перемещаемся в клетку (1,3) к третьему потребителю.

Вариант II. Если запасы первого склада меньше потребностей первого потребителя ($a_1<b_1$), то в ячейку (1,1) заносятся запасы первого склада ($x_{11}=a_1$), т.е. количество груза, перевезенного из первого

склада к первому потребителю, приравнивается всем запасам, находящимся на первом складе. Таким образом, запасы первого склада вывезены полностью, и закрываем первую строку.

Далее двигаемся вниз по первому столбцу в ячейку (2,1), и заносим меньшее из чисел $b_1 – a_1$ и a_2, т.е. $x_{21} = \min\{b_1 – a_1;\ a_2\}$. Если в ячейку (2,1) записано число a_2, то следующим шагом перемещаемся вниз, в ячейку (3,1), продолжая удовлетворять потребности первого потребителя. Если в ячейку (2,1) занесено число $b_1 – a_1$, то потребности первого потребителя удовлетворены полностью и следующим шагом перемещаемся в ячейку (2,2) ко второму потребителю.

Аналогично двигаемся от ячейки к ячейке, пока на заключительном этапе не исчерпаются все ресурсы и потребности. В результате
$m+n-1$ ячеек будут заполнены, остальные ячейки останутся пустыми, т.к. количество перевезенного груза в этих пустых ячейках будет равно нулю.

Пример. Имеется три глинзавода (склада), которые поставляют свою продукцию четырем участкам буровых работ (потребителям). Объемы производства на каждом глинзаводе (запасы – в м^3), потребности в глинистом буровом растворе на каждом буровом участке (также в м^3) и удельная стоимость перевозки с i-го глинзавода к j-му буровому участку
(в руб./м^3) заданы транспортной таблицей (табл. 14). Требуется методом «северо-западного» угла построить исходное опорное решение транспортной задачи.

Сначала определим тип задачи. Вычислим полный объем производства глинистого раствора – суммарные запасы:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 90 + 90 + 250 = 430 \text{ м}^3$$

и суммарные потребности:

$$\sum_{j=1}^{4} b_i = 30 + 200 + 70 + 130 = 430 \text{ м}^3.$$

Поскольку суммарные запасы и суммарные потребности равны, то решаемая задача относится к задачам закрытого типа.

Таблица 14

Транспортная таблица к решению задачи о минимальной стоимости грузоперевозок

Склады	**Потребители**				**Запас**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1					90

	7	6	5	7	
A_2	6	8	4	3	90
A_3	5	7	4	6	250
Потребность	30	200	70	130	–

Построим исходное опорное решение (табл. 15). Поскольку $a_1 > b_1$, то в ячейку (1,1) заносим потребность первого потребителя $x_{11} = b_1 = 30$ м^3, т.е. количество глинистого раствора, необходимого первому буровому участку, полностью удовлетворяется первым глинзаводом. Потребности первого участка удовлетворены полностью, и, следовательно, количество раствора, полученного первым участком со второго и третьего глинзаводов, равны нулю.

Таблица 15

Исходное опорное решение задачи о минимальной стоимости грузоперевозок

Склады	**Потребители**				**Запас**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	**30** → 7	**60** ↓ 6	0 5	0 7	90
A_2	0 6	**90** ↓ 8	0 4	0 3	90
A_3	0 5	**50** → 7	**70** → 4	**130** 6	250
Потребность	30	200	70	130	–

Далее перемещаемся в ячейку (1,2) и заносим меньшее из чисел $a_1 – b_1 = 90 – 30 = 60$ м^3 и $b_2 = 200$ м^3, т.е. число 60 м^3. Первый глинзавод полностью исчерпал свои запасы. Поскольку потребности второго участка удовлетворены не полностью, двигаемся по столбцу вниз, в ячейку (2,2). Выбираем меньшее из чисел $a_2 = 90$ м^3 и $b_2 – x_{12} = 200 – 60 = 140$ м^3, т.е. число 90 м^3. Таким образом, второй глинзавод полностью исчерпал свои запасы, но потребность второго участка в глинистом растворе еще существует. Поэтому перемещаемся опять ниже, в ячейку (3,2), и т.д.

В результате имеем таблицу с заполненными шестью ячейками, что соответствует теории:

$$m + n – 1 = 3 + 4 – 1 = 6.$$

Заметим, что суммарная стоимость перевозок исходного опорного решения равна

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 7 \cdot 30 + 6 \cdot 60 + 8 \cdot 90 + 7 \cdot 50 + 4 \cdot 70 + 6 \cdot 130 = 2700 \text{ руб.}$$

Определение оптимального решения

Построив исходное опорное решение, необходимо определить некоторую последовательность решений, при котором каждое следующее решение должно быть лучше предыдущего. Для этого используем *метод потенциалов*, основанный на следующей теореме.

Для того чтобы решение транспортной задачи было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы существовала система чисел U_1, $U_2,\ldots,U_m$ и V_1, $V_2,\ldots$, V_n, удовлетворяющих условиям (*условиям оптимальности*):

$$V_j - U_i = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} \geq 0; \tag{69}$$

$$V_j - U_i \leq c_{ij}, \text{ если } x_{ij} = 0. \tag{70}$$

Набор величин U_1, $U_2,\ldots,U_m$ приписывается строкам транспортной таблицы: U_1 – первой строке, U_2 – второй строке и т.д. Аналогично, набор величин V_1, $V_2,\ldots$, V_n приписывается столбцам транспортной таблицы: V_1 – первому столбцу, V_2 – второму столбцу и т.д. Эти величины называются потенциалами соответствующих столбцов или строк.

Алгоритм получения оптимального решения методом потенциалов включает в себя последовательное выполнение следующих шагов:

- *шаг 1* – по соотношению (69) рассчитываем систему потенциалов для опорного решения;
- *шаг 2* – используя соотношение (70), выявляем нарушения и проверяем решение на оптимальность (если условие выполняется для всех ячеек без перевозок, то решение является оптимальным и процесс оптимизации закончен; в противном случае переходим к следующему шагу);
- *шаг 3* – улучшаем план перевозок, получаем новое опорное решение и переходим к шагу 1.

Выполнение шага 1 заключается в определении $m+n$ неизвестных (общее число величин потенциалов $U_2,\ldots,U_m$ и V_1, $V_2,\ldots$, V_n) в системе $m+n-1$ уравнений (количество ячеек с перевозками в опорном решении). Для решения системы потенциалов задаемся потенциалом одного из поставщиков или потребителей (произвольно выбранным числом!), а далее вычисляем потенциалы для всех остальных строк и столбцов.

Соотношение (70), используемое в шаге 2, можно переписать в виде

$$v_{ij} \le 0 \text{, где } v_{ij} = V_j - U_i - c_{ij} \text{, если } x_{ij} = 0 . \qquad (71)$$

Величины v_{ij} называют *невязками*, их вычисляют для всех ячеек без перевозок. Если хотя бы в одной ячейке невязка больше нуля, то план перевозок может быть улучшен. Если все невязки неположительные, то опорное решение является оптимальным.

Шаг 3 приведенного выше алгоритма направлен на улучшение плана перевозок и состоит в организации *замкнутого контура* (цикла) по следующим правилам:

- контур начинается с ячейки, имеющей максимальную невязку $v_{\max}$ (вершине контуре в этой ячейке присваивается номер 1);
- все остальные вершины контура обязательно содержат перевозки;
- все линии контура являются ортогональными (т.е. горизонтальными или вертикальными);
- допускаются самопересечения контура.

Примеры замкнутых контуров приведены на рис. 11.

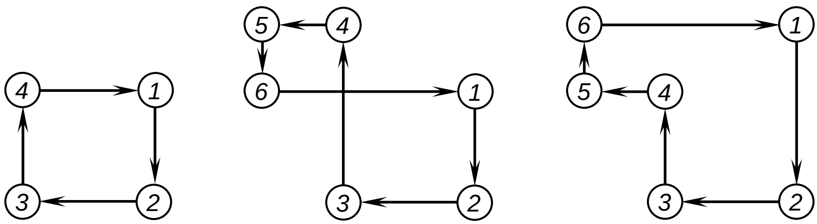

Рис. 11

Контур всегда содержит четное количество вершин. При улучшении плана перевозок в ячейках с нечетными вершинами объемы перевозок увеличиваются, а в ячейках с четными вершинами – уменьшаются.

Величина перераспределения q равна наименьшему значению из перевозок, стоящих в четных вершинах цикла. Объемы перевозок в вершинах контура перераспределяют следующим образом: к объемам перевозок в нечетных вершинах добавляют величину q, а из объемов в четных вершинах вычитают эту же величину. В результате получают улучшенный план, в котором общие затраты на перевозку меньше, чем в предыдущем на величину $q \cdot v_{max}$.

Новый план также является опорным. В каждой строке и столбце в одной ячейке объем увеличился, а в другой – уменьшился на одну и ту же величину. Количество вершин с перевозками в новом плане по-прежнему должно быть не больше, чем $m+n-1$.

В случаях, когда количество ячеек с перевозками уменьшилось, то такой план называется *вырожденным*. Здесь невозможно решить систему потенциалов. Для выхода из этой ситуации, в одну из ячеек без перевозок проставляют фиктивную перевозку малого объема – ε. И далее решают задачу как невырожденную, а в оптимальном плане величину ε заменяют нулем.

Пример. Для условий предыдущей задачи требуется определить оптимальное решение, т.е. составить план перевозок глинистого бурового раствора с минимальными затратами. Используем метод потенциалов.

Шаг 1 – определяем потенциалы исходного опорного решения (см. табл. 15). Строкам этого решения назначаем потенциалы U_1, U_2, U_3, а столбцам – потенциалы V_1, V_2, V_3, V_4. Для их расчета составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} V_1 - U_1 = 7 \\ V_2 - U_1 = 6 \\ V_2 - U_2 = 8 \\ V_2 - U_3 = 7 \\ V_3 - U_3 = 4 \\ V_4 - U_3 = 6 \end{cases}.$$

Имеем семь неизвестных величин и шесть уравнений. Значение любой неизвестной величины задаем произвольным числом, например, $U_3=0$. Тогда, остальные величины потенциалов будут равны:

$$U_1=1;\ U_2=-1;\ V_1=8;\ V_2=7;\ V_3=4;\ V_4=6.$$

В исходном опорном решении введем дополнительный столбец U_i и дополнительную строку V_j, и занесем вычисленные значения потенциалов в соответствующие ячейки (табл. 16).

Шаг 2 – вычисляем значения невязок для всех ячеек без перевозок по соотношению (71). Запишем значения невязок в правый верхний угол каждой ячейки (значения невязок выделены полужирным шрифтом). В ряде клеток наблюдаются нарушения (невязки больше нуля): (2,1), (2,3), (2,4) и (3,1), и, следовательно, план может быть улучшен.

Таблица 16

Транспортная таблица с вычисленными значениями потенциалов

Склады	Потребители				Запас	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	30 7	60 6	0 **–2** 5	0 **–2** 7	90	1
A_2	0 **3** 6	90 (4) 8	0 **1** 4	0 **4** (1) 3	90	–1
A_3	0 **3** 5	50 (3) 7	70 4	130 (2) 6	250	0
Потребность	30	200	70	130	–	–
v_j	8	7	4	6	–	–

Шаг 3 – организуем замкнутый контур с началом в ячейке (2,4), имеющей максимальную положительную невязку $v_{\max}=4$:

вершина 1 (2,4) → вершина 2 (3,4) → вершина 3 (3,2) → вершина 4 (2,2).

Величина перераспределения q равна наименьшему значению из перевозок, стоящих в четных вершинах цикла, т.е. $q=\min\{130;90\}=90$ м^3. Вычислим новые значения перевозок для вершин контура: в нечетных вершинах добавляем величину q, а в четных вершинах – вычитаем эту величину:

- в вершине 1 (2,4) $x_{24}=0+90=90$ м^3;
- в вершине 2 (3,4) $x_{34}=130-90=40$ м^3;
- в вершине 3 (3,2) $x_{32}=50+90=140$ м^3;
- в вершине 4 (2,2) $x_{22}=90-90=0$ м^3.

Получим новое, второе опорное решение (табл. 17). Вычислим суммарную стоимость перевозок для полученного опорного плана:

$$f_1(x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij} = 7\cdot 30+6\cdot 60+3\cdot 90+7\cdot 140+4\cdot 70+6\cdot 40 = 2340 \text{ руб}$$

.

Уменьшение стоимости перевозок по отношению к исходному опорному плану составит:

$$f_0(x)-f_1(x)=2700-2340=360 \text{ руб.}$$

Теоретически это уменьшение равно $q\cdot v_{\max}=90\cdot 4=360$ руб., что совпадает с рассчитанным выше значением.

Начинаем проверку оптимальности сначала.

Таблица 17

Второе опорное решение

Склады	**Потребители**				**Запас**	U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	30 (2) / 7	60 (3) / 6	0 **-2** / 5	0 **-2** / 7	90	1
A_2	0 **-1** / 6	0 **-4** / 8	0 **-3** / 4	90 / 3	90	3
A_3	0 **3** (1) / 5	140 (4) / 7	70 / 4	40 / 6	250	0
Потребность	30	200	70	130	–	–
V_j	8	7	4	6	–	–

Шаг 1 – составляем новую систему потенциалов:

$$\begin{cases} V_1 - U_1 = 7 \\ V_2 - U_1 = 6 \\ V_2 - U_3 = 7 \\ V_3 - U_3 = 4 \\ V_4 - U_2 = 3 \\ V_4 - U_3 = 6 \end{cases}.$$

Пусть $U_3 = 0$. Тогда

$$U_1 = 1;\ U_2 = 3;\ V_1 = 8;\ V_2 = 7;\ V_3 = 4;\ V_4 = 6.$$

Занесем эти значения потенциалов в транспортную таблицу взамен старых (см. табл. 17).

Шаг 2 – определяем значения невязок для всех ячеек с «нулевыми» перевозками по соотношению (71). Значения невязок записаны в правом верхнем углу ячеек и выделены полужирным шрифтом.

Только в одной ячейке (3,1) наблюдается нарушение $v_{\max} = 3$.

Шаг 3 – строим замкнутый контур с началом в этой ячейке:

вершина 1 (3,1) $\rightarrow$ вершина 2 (1,1) $\rightarrow$ вершина 3 (1,2) $\rightarrow$ вершина 4 (3,2).

Величина перераспределения q равна наименьшему значению из перевозок, стоящих в четных вершинах цикла, т.е. $q = \min\{30;140\} = 30$ м^3. Вычислим новые значения перевозок для вершин контура: в нечетных вершинах перевозка увеличится на величину q, а в четных вершинах – уменьшится эту величину:

- в вершине 1 (3,1) $x_{31} = 0 + 30 = 30$ м^3;
- в вершине 2 (1,1) $x_{11} = 30 - 30 = 0$ м^3;
- в вершине 3 (1,2) $x_{12} = 60 + 30 = 90$ м^3;

- в вершине 4 (3,2) $x_{22}=140-30=110$ м^3.

Получаем новое, третье опорное решение (табл. 18). Вычислим суммарную стоимость перевозок для полученного опорного плана:

$$f_1(x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}=90\cdot 6+90\cdot 3+30\cdot 5+110\cdot 7+70\cdot 4+40\cdot 6=2250\ \text{руб}$$

Таблица 18

Третье опорное решение – оптимальное решение

Склады	**Потребители**				**Запас**	U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	0 **–3** 7	90 6	0 **-2** 5	0 **-2** 7	90	1
A_2	0 **-4** 6	0 **-4** 8	0 **-3** 4	90 3	90	3
A_3	30 5	110 7	70 4	40 6	250	0
Потребность	30	200	70	130	–	–
V_j	5	7	4	6	–	–

Уменьшение стоимости перевозок по отношению к предыдущему опорному плану составит:

$$f_1(x)-f_2(x)=2340-2250=90\ \text{руб.},$$

что совпадает с теорией: $q\cdot v_{\max}=30\cdot 3=90$ руб.

Начинаем проверку оптимальности сначала.

Шаг 1 – рассчитаем очередную систему потенциалов:

$$\begin{cases} V_1-U_3=5\\ V_2-U_1=6\\ V_2-U_3=7\\ V_3-U_3=4\\ V_4-U_2=3\\ V_4-U_3=6 \end{cases}.$$

Положим $U_3=0$. Тогда

$$U_1=1;\ U_2=3;\ V_1=5;\ V_2=7;\ V_3=4;\ V_4=6.$$

Запишем эти значения потенциалов в соответствующие строки и столбцы транспортной таблицы взамен предыдущих (см. табл. 18).

Шаг 2 – вычисляем значения невязок для всех ячеек без перевозок, пользуясь соотношением (71). Все невязки неположительные, следовательно, оптимальное решение найдено.

Решение транспортной задачи в электронных таблицах MS Excel

Для решения сложных оптимизационных задач в инструментарии электронных таблиц *MS Excel* имеется специальная надстройка **Поиск решения**. Подключение этой надстройки проводится через меню **Сервис** – **Надстройки**. В появившемся окне надо поставить флажок рядом с опцией *Поиск решения* и нажать **ОК** (рис. 12).

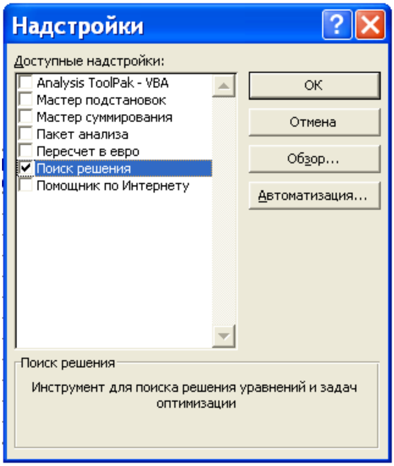

Рис. 12

После подключения команда **Поиск решения** становится доступна через пункт меню **Сервис**. После вызова этой команды на экране появляется соответствующее диалоговое окно, в котором необходимо выполнить следующие действия:

1. В поле *Установить целевую ячейку* ввести адрес ячейки, содержащей формулу для вычисления значений оптимизируемой функции.

2. Для минимизации включить переключатель *минимальному значению*.

3. В поле *Изменяя ячейки* ввести адреса изменяемых ячеек, т.е. аргументов целевой функции, разделяя их знаком «;» (или щелкая мышью при нажатой клавише *Ctrl* на соответствующих ячейках), для автоматического поиска всех влияющих на решение ячеек используется кнопка **Предположить**.

4. В поле *Ограничения* с помощью кнопки **Добавить** ввести все ограничения, которым должен отвечать результат поиска.

5. Активизировав кнопкой **Параметры** соответствующее диалоговое окно, ввести, если это необходимо, *максимальное время* расчета, *предельное число итераций*, *допустимое отклонение* и другие параметры.

5. Для запуска процесса поиска решения нажать кнопку **Выполнить**.

Чтобы сохранить полученное решение, необходимо использовать переключатель *Сохранить найденное решение* в открывшемся окне диалога **Результаты поиска решения**.

С помощью команд этого окна можно провести анализ оптимального решения и вызвать отчеты трех типов: *результаты*, *устойчивость*, *пределы*. Для вызова нужного отчета, надо выделить его курсором и нажать **ОК**. Вызванный отчет появится на новом листе рабочей книги, в заголовке которого указано его название.

Пример. Используя надстройку **Поиск решения**, необходимо решить транспортную задачу, разобранную аналитически в предыдущем примере.

Заполним рабочий лист *MS Excel*, как показано на рис. 13. Для заполнения транспортной таблицы используем данные табл. 14.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Решение транспортной задачи с помощью надстройки "Поиск решения"**							
2								
3	**Транспортная таблица (исходная матрица стоимости перевозок)**							
4	Склады	Потребители						
5		B1	B2	B3	B4			
6	A1	7	6	5	7			
7	A2	6	8	4	3			
8	A3	5	7	4	6			
9								
10	**Транспортная таблица (объемы перевозок)**							
11	Склады	Потребители				Запасы		Запасы
12		B1	B2	B3	B4	вычисленные		заданные
13	A1	0	0	0	0	0	=	90
14	A2	0	0	0	0	0	=	90
15	A3	0	0	0	0	0	=	250
16	Потребности вычисленные	0	0	0	0			
17		=	=	=	=			
18	Потребности заданные	30	200	70	130			
19								
20	Общая стоимость перевозок	**0**						

Рис. 13

Запасы вычисленные рассчитываются суммированием:

- в ячейке F13 **=СУММ(B13:E13)**;
- в ячейке F14 **=СУММ(B14:E14)**;
- в ячейке F15 **=СУММ(B15:E15)**.

Потребности вычисленные также суммируются:

- в ячейке B16 **=СУММ(B13:B15)**;

- в ячейке C16 **=СУММ(C13:C15)**;
- в ячейке D16 **=СУММ(D13:D15)**.

В ячейке B20 значение целевой функции *Общая стоимость перевозок* вычисляется по формуле **=СУММПРОИЗВ(B6:E8;B13:E15)**. Эта функция позволяет вычислить сумму произведений одноименных элементов. В нашем случае результат вычисления по этой формуле равен

B6×B13+C6×C13+D6×D13+E6×E13+
+B7×B14+C7×C14+D7×D14+E7×E14+
+B8×B15+C8×C15+D8×D15+E8×E15.

Активизируем надстройку **Поиск решения** из пункта меню **Сервис** и заполняем диалоговое окно так, как это показано на рис. 14.

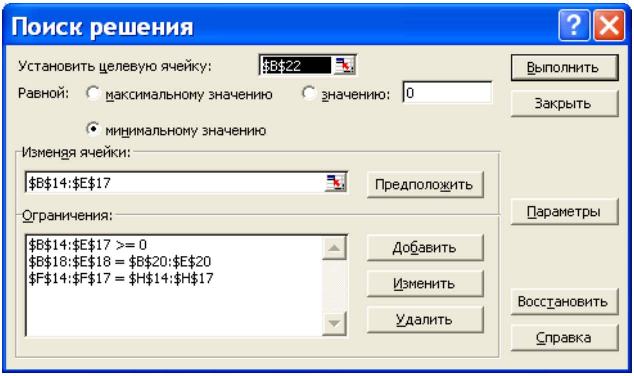

Рис. 14

Кнопкой **Параметры** открываем соответствующее диалоговое окно и обязательно отмечаем линейность модели (рис. 15). Остальные параметры, предложенные системой, оставляем без изменений и нажимаем кнопку **ОК**.

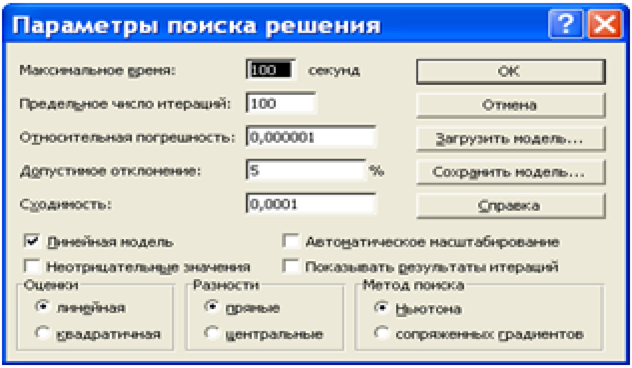

Рис. 15

В ставшем снова активном окне **Поиск решения** для запуска надстройки нажимаем кнопку **Выполнить**.

После успешного решения задачи на экране появляется окно **Результаты поиска решения** с сообщением «*Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.*» (рис. 16). Включаем переключатель **Сохранить найденное решение**. Проведем анализ найденного решения по пределам (выделим его курсором в поле **Тип отчета**) и нажимаем **ОК**.

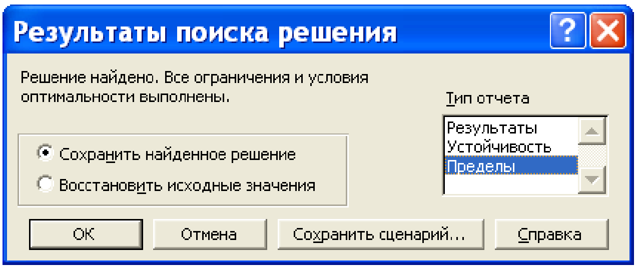

Рис. 16

Оптимальные объемы перевозок содержатся в ячейках B13:E15 (рис. 17).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Решение транспортной задачи с помощью надстройки "Поиск решения"**							
2								
3	**Транспортная таблица (исходная матрица стоимости перевозок)**							
4	Склады	Потребители						
5		B1	B2	B3	B4			
6	A1	7	6	5	7			
7	A2	6	8	4	3			
8	A3	5	7	4	6			
9								
10	**Транспортная таблица (объемы перевозок)**							
11	Склады	Потребители				Запасы		Запасы
12		B1	B2	B3	B4	вычисленные		заданные
13	A1	0	90	0	0	90	=	90
14	A2	0	0	0	90	90	=	90
15	A3	30	110	70	40	250	=	250
16	Потребности вычисленные	30	200	70	130			
17		=	=	=	=			
18	Потребности заданные	30	200	70	130			
19								
20	Общая стоимость перевозок	**2250**						

Рис. 17

Рассчитанные программой величины полностью совпадают с результатами, полученными ранее аналитически.

Проанализируем возможность использования других значений грузоперевозок, дающих такой же оптимальный результат. Вызванный отчет по пределам находится на отдельном листе рабочей книги (рис. 18). В нем показано, в каких пределах может изменяться величина перевозки, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения.

В нашем случае значения в оптимальном решении, нижние и верхние пределы изменения этих значений полностью совпадают. Это означает, что исследуемая функция при ее линейной интерпретации имеет единственное решение.

Microsoft Excel 10.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Транспортная задача.xls]Отчет по пределам 1
Отчет создан: 29.11.2008 11:29:43

Ячейка	Целевое Имя	Значение
B20	Общая стоимость перевозок =	2250

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение		Нижний предел	Целевой результат		Верхний предел	Целевой результат
B13	A1 B1	0		0	2250		0	2250
C13	A1 B2	90		90	2250		90	2250
D13	A1 B3	0		0	2250		0	2250
E13	A1 B4	0		0	2250		0	2250
B14	A2 B1	0		0	2250		0	2250
C14	A2 B2	0		0	2250		0	2250
D14	A2 B3	0		0	2250		0	2250
E14	A2 B4	90		90	2250		90	2250
B15	A3 B1	30		30	2250		30	2250
C15	A3 B2	110		110	2250		110	2250
D15	A3 B3	70		70	2250		70	2250
E15	A3 B4	40		40	2250		40	2250

Рис. 18