

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.А. МАСЛЕННИКОВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Ч. 1

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ**

Для студентов ФБФО специальностей

СЗуст, С2013ув, СЗувт

2017

Санкт-Петербург

СОДЕРЖАНИЕ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

РГР. №1. Расчёт статически определимых систем на статическую нагрузку.

Задача №1.1 Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в шарнирной балке.

Задача № 1.2. Построение эпюр изгибающих моментов, продольных и поперечных сил в раме.

Задача № 1.3. Определение усилий в заданных стержнях фермы.

РГР. № 2. Расчёт статически определимых систем на подвижную нагрузку.

Задача № 2.1. Построение линий влияния в шарнирной балке.

Задача № 2.2. Построение линий влияния в ферме.

РГР. № 3. Расчёт статически неопределимой рамы методом сил.

Приложения

Рекомендуемая литература

ПОРЯДОК ПОЛУЧЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Исходные данные для выполнения каждой работы студент выписывает из приведённых в каждом задании таблиц и схем в соответствии со своим шифром. Шифром являются три последних цифры номера зачётной книжки или студенческого билета. Например, номер зачётной книжки 18549: первая цифра шифра – 5, вторая – 4, третья – 9.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Расчётно-графическая работа выполняется на стандартных листах писчей бумаги (формат А-4). Заполняется только одна сторона листа. (см. приложение 1, стр.32).

На титульном листе указываются номер и название работы, фамилия, имя и отчество студента, номера группы и специальности, индивидуальный номер шифра. Работа должна быть сброшюрована.

Расчётная схема изображается в масштабе длин. На ней указываются все необходимые данные в численном виде (размеры, нагрузки и др.), которые выписываются из таблиц. Все расчёты приводятся в краткой форме. *Небрежно выполненные и выполненные не по шифру работы к проверке не принимаются.*

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА СТАТИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ

Задача № 1.1. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в шарнирной балке

Задание: Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в шарнирной балке. Исходные данные определяются из таблицы 1.1 и схемам, представленным на рис. 1.1.

Таблица 1.1

Первая цифра шифра	F_1 кН	F_2 кН	l_1 м	a м	Вторая цифра шифра	q кН/м	l_2 м	b м	Опора (для РГР.2)	Сечение (для РГР.2)	Третья цифра шифра №схемы	l_3 м	c м
0	2	5	6	2	0	4	10	2	A	K	0	12	3
1	5	2	12	2	1	2	12	3	B	L	1	16	2
2	2	4	8	3	2	3	14	3	A	K	2	14	4
3	6	2	9	3	3	6	15	4	B	L	3	10	3
4	5	4	10	4	4	5	10	2	A	K	4	12	2
5	3	5	6	2	5	3	12	3	B	L	5	14	4
6	2	4	10	2	6	4	15	3	A	K	6	12	3
7	5	3	8	3	7	5	14	2	B	L	7	14	2
8	2	6	9	3	8	2	12	2	A	K	8	12	2
9	3	5	10	4	9	6	16	4	B	L	9	15	3

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе схему балки. Указать размеры и нагрузки.
2. Построить схему взаимодействия элементов системы.
3. Произвести анализ геометрической неизменяемости системы.
 $Ш = C_{оп.} - 3$, где Ш – количество шарниров, $C_{оп.}$ – количество опорных стержней. Выполнить анализ структуры взаимодействия отдельных дисков.
4. Определить опорные реакции для каждого диска, составляя уравнения равновесия. Рассматривать диски сверху вниз.
5. Произвести проверку правильности определения опорных реакций, составив уравнения равновесия для всей системы.

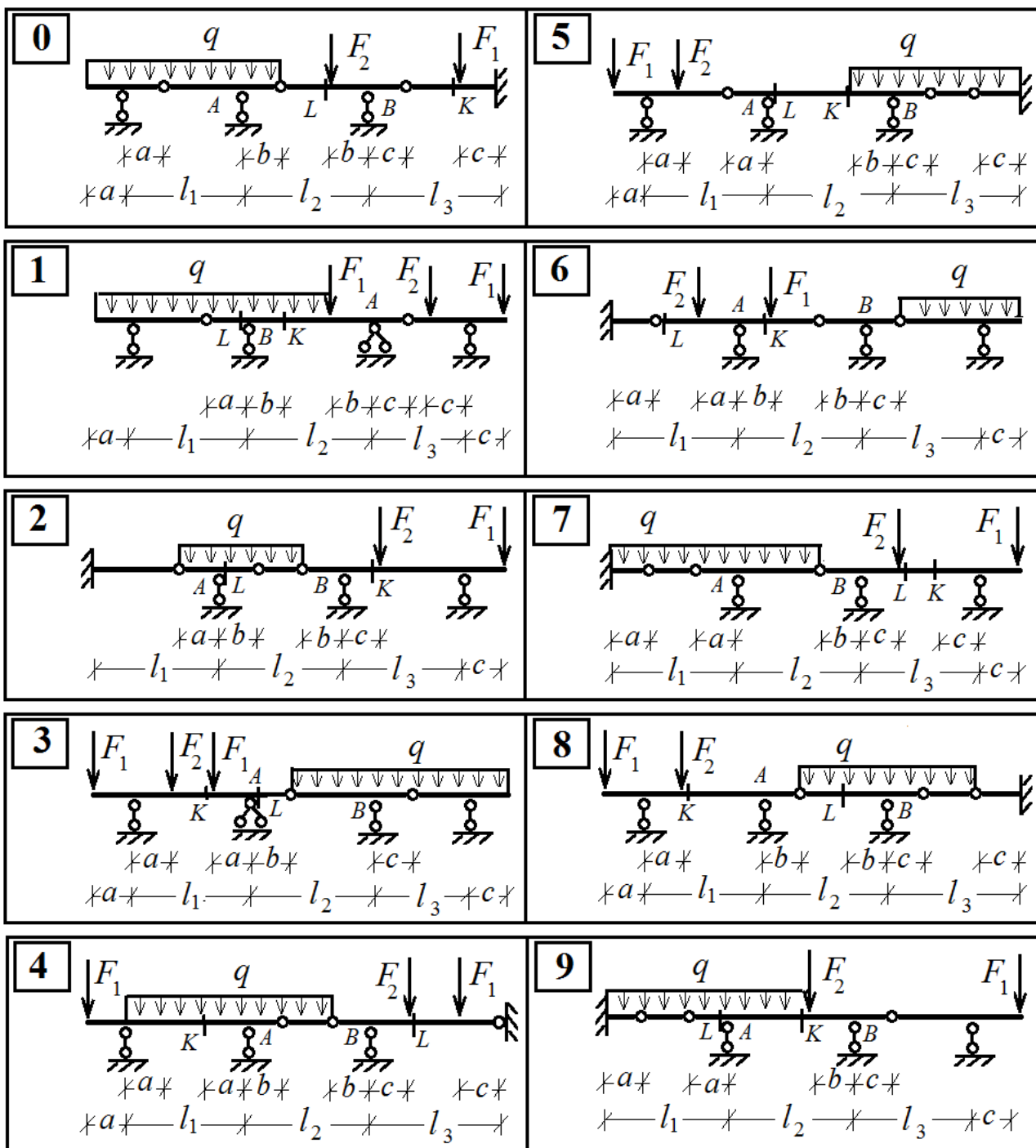


Рис.1.1. Схемы заданий к задачам: № 1.1. РГР № 1 и № 2.1. РГР № 2

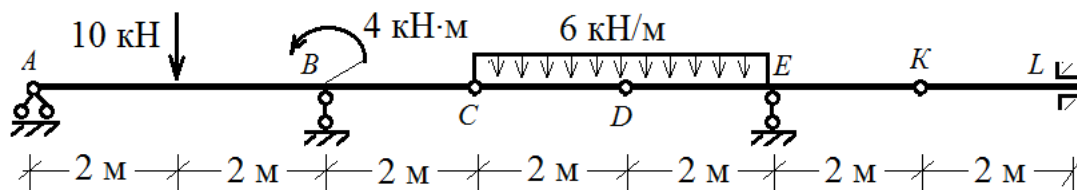
6. Показать схему взаимодействия отдельных дисков с найденными реакциями на схеме каждого диска.

7. Для каждого диска построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и объединить их для всей расчётной схемы.

8. Выполнить проверку правильности построения эпюр на всех участках, используя дифференциальные зависимости:

$$Q = dM/dx \quad \text{и} \quad q = -dQ/dx.$$

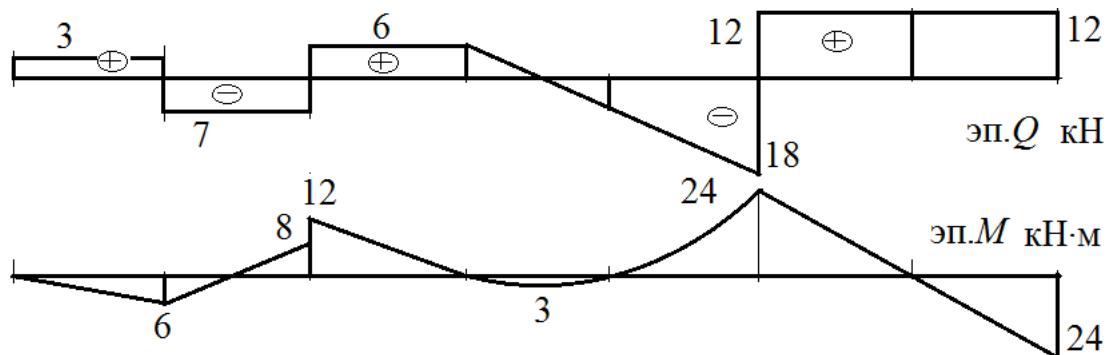
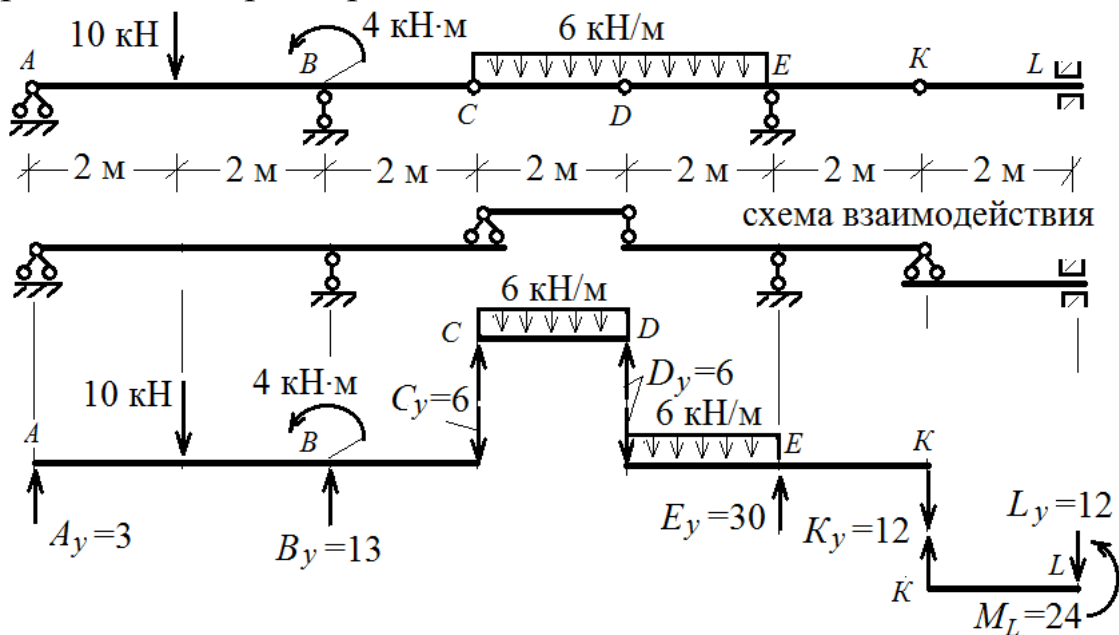
Пример решения задачи № 1.1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.



• Строим схему взаимодействия шарнирной балки. Производим анализ геометрической структуры: $\text{Ш} = C_{\text{оп.}} - 3 = 6 - 3 = 3$. Количество шарниров достаточно для геометрической неизменяемости и статической определимости системы.

Кинематический анализ: Все диски имеют общую горизонтальную связь. Диски KL и AB – главные, на них опираются последовательно все остальные диски. Все диски соединены с основанием при помощи трёх стержней, не параллельных и не пересекающихся в одной точке. Вывод: вся система – диск.

• Определяем опорные реакции для каждого диска отдельно.



Расчёт начинаем сверху: Диск CD : $C_y = D_y = 6 \cdot 2/2 = 6$ кН.

Диск AB : $\sum M_A = 0$; $6 \cdot 6 - 4 + 10 \cdot 2 - B_y \cdot 4 = 0$; $B_{yB} = 13$ кН,

$\sum M_B = 0$; $6 \cdot 2 - 4 - 10 \cdot 2 + A_y \cdot 4 = 0$; $A_y = 3$ кН,

Проверка: $\sum Y = 3 + 13 - 10 - 6 = 0$.

Диск EK : $\sum M_E = 0$; $-6 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 1 + K_y \cdot 2 = 0$; $K_y = 12$ кН,

$\sum M_K = 0$; $-6 \cdot 4 - 6 \cdot 2 \cdot 3 + E_y \cdot 2 = 0$; $E_y = 30$ кН,

Проверка: $\sum Y = 30 - 12 - 6 - 6 \cdot 2 = 0$.

Диск KL : $\sum Y = 0$; $L_y = 12$ кН, $\sum M_L = 0$; $12 \cdot 2 - M_L = 0$; $M_L = 24$ кН·м.

Проверка всей системы: $\sum Y = 3 + 13 + 30 - 12 - 10 - 6 \cdot 4 = 0$.

• Для каждого диска строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и объединяем их для всей расчётной схемы.

• Проверяем правильность построения эпюр по дифференциальным зависимостям: $Q = dM/dx$, $Q = Q^b - (M^{пр.} + M^{лев.})/l$

Участок AB : $Q^{лев} = +6/2 = +3$ кН; $Q^{пр} = -(6+8)/2 = -7$ кН;

Участок BC : $Q = 12/2 = 6$ кН;

Участок CDE : $Q^{лев} = 6 \cdot 4/2 - (0+24)/4 = 6$ кН;

$Q^{пр} = -6 \cdot 4/2 - (0+24)/4 = -18$ кН;

Участок EKL : $Q = (24+24)/4 = 12$ кН.

Задача № 1.2. Построение эпюр изгибающих моментов, продольных и поперечных сил в раме

Задание: Построить эпюры изгибающих моментов, продольных и поперечных сил в раме. Исходные данные определяются из таблицы 1.2 и схемам, представленным на рис.1.2.

Таблица 1.2

Первая цифра шифра	F_1 кН	F_2 кН	Вторая цифра шифра	q кН/м	Третья цифра шифра (№ схемы)	h м	l м
0	2	0	0	3	0	2	4
1	0	5	1	5	1	3	2
2	3	0	2	2	2	4	3
3	0	6	3	6	3	5	2
4	4	0	4	4	4	4	5
5	0	4	5	3	5	2	4
6	5	0	6	5	6	3	2
7	0	2	7	4	7	5	3
8	6	0	8	6	8	2	5
9	0	3	9	2	9	4	2

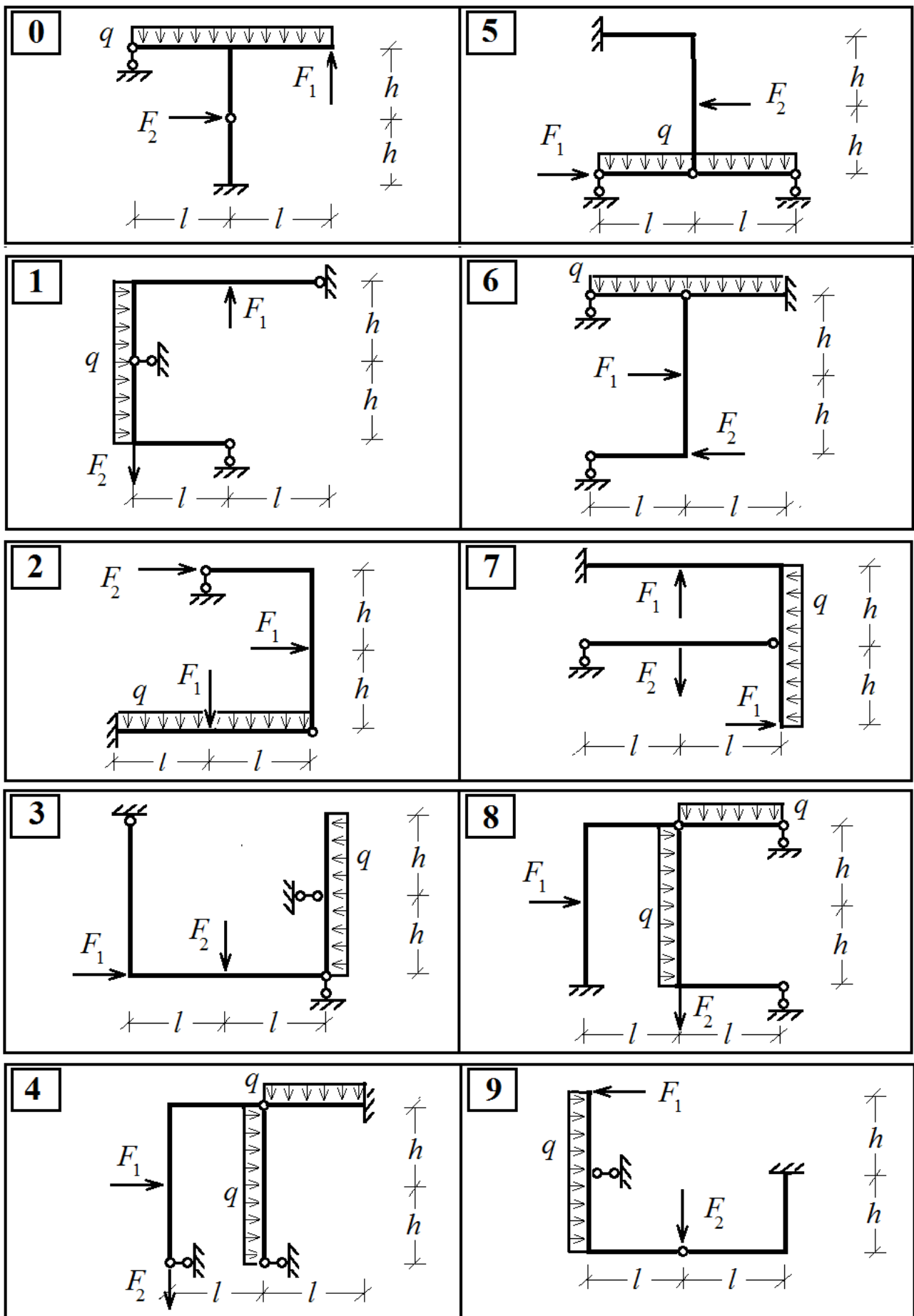


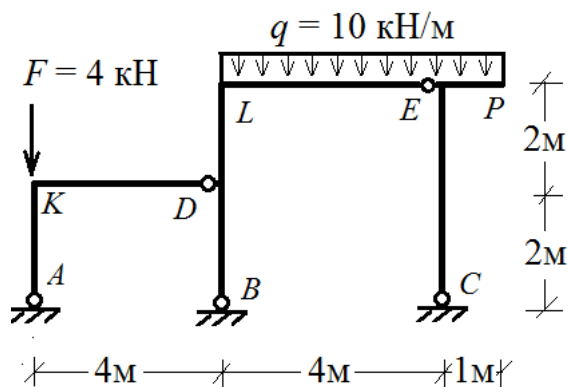
Рис. 1.2. Схемы заданий к задаче: № 1.2. РГР № 1

Последовательность расчёта

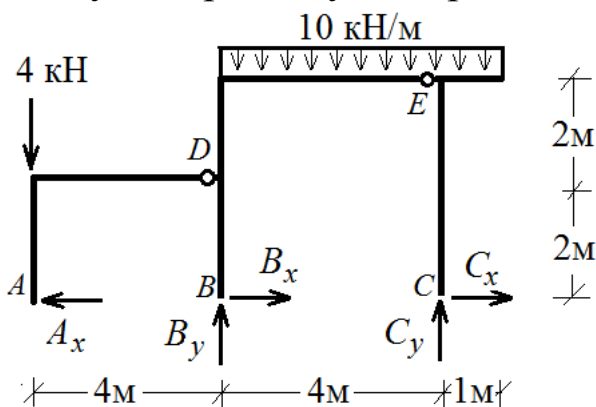
1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.
2. Определить степень свободы расчётной схемы по формуле:
 $W = 3K - Ш$, где K – количество замкнутых контуров, $Ш$ – количество простых шарниров. Произвести анализ геометрической структуры (кинематический анализ) расчётной схемы.
3. Определить опорные реакции из уравнений равновесия.
4. Построить эпюры N , Q и M для всей системы.
5. Произвести проверку правильности построения эпюр, рассмотрев равновесие узлов.
6. Произвести проверку правильности построения эпюр на всех участках, используя дифференциальные зависимости:

$$Q = dM / dx \text{ и } q = - dQ / dx.$$

Пример решения задачи № 1.2. Построить эпюры N , Q и M в раме.



- $W = 3Д - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$; Диски BLE и EC соединены между собой и с основанием при помощи трёх шарниров, не лежащих на одной прямой. Следовательно, $BLEC$ – диск. К нему присоединён диск AD (диада) по тому же признаку. Вся рама – диск.



- Освобождаем раму от связей и определяем опорные реакции.

Затем делаем сечение в местах установки шарниров и определяем усилия в шарнирах.

$$\sum M_D^{\text{лев.}} = 0; -4 \cdot 4 + A_x \cdot 2 = 0; A_x = 8 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; -4 \cdot 4 + 10 \cdot 5 \cdot 2,5 - C_y \cdot 4 = 0; C_y = 27,25 \text{ кН};$$

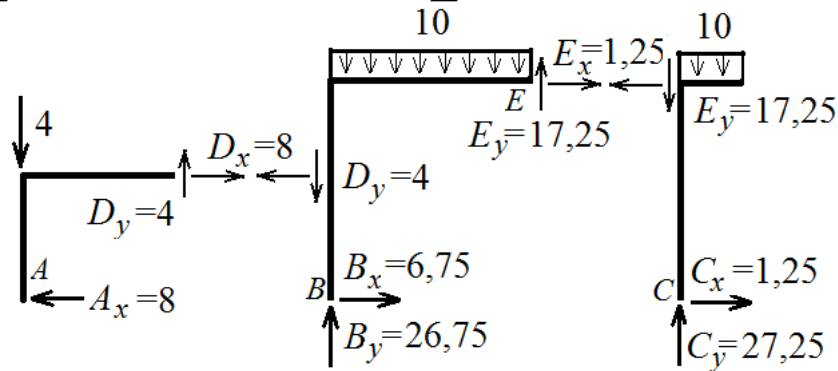
$$\sum M_C = 0; -4 \cdot 8 - 10 \cdot 5 \cdot 1,5 + B_y \cdot 4 = 0; B_y = 26,75 \text{ кН};$$

$$\sum M_E^{\text{низ.}} = 0; 10 \cdot 1 \cdot 0,5 - C_x \cdot 4 = 0; C_x = 1,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_E^{\text{лев.}} = 0; -4 \cdot 8 + A_x \cdot 4 + B_y \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 - B_x \cdot 4 = 0;$$

$$-4 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 26,75 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 - B_x \cdot 4 = 0; B_x = 6,75 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } \sum X = 1,25 + 6,75 - 8 = 0; \sum Y = 27,25 + 26,75 - 4 - 10 \cdot 5 = 0;$$



$$\text{Диск AD: } \sum X = 0; D_x - A_x = 0; D_x = 8 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0; D_y - 4 = 0; D_y = 4 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0; -4 \cdot 4 + A_x \cdot 2 = 0; A_x = 8 \text{ кН (проверка)};$$

$$\text{Диск EC: } \sum X = 0; C_x - E_x = 0; E_x = 1,25 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0; C_y - 10 \cdot 1 - E_y = 0; E_y = 27,25 - 10 = 17,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = 0; 10 \cdot 1 \cdot 0,5 - C_x \cdot 4 = 0; C_x = 1,25 \text{ кН (проверка)};$$

$$\text{Проверка: Диск BE: } \sum X = 0; 6,75 + 1,25 - 8 = 0;$$

$$\sum Y = 0; 26,75 + 17,75 - 4 - 10 \cdot 4 = 0;$$

- Строим эпюры N , Q и M :

- Определяем M_{ex} на эпюре M : $Q_x = -17,25 + 10 \cdot x = 0; x = 1,725 \text{ м}$.

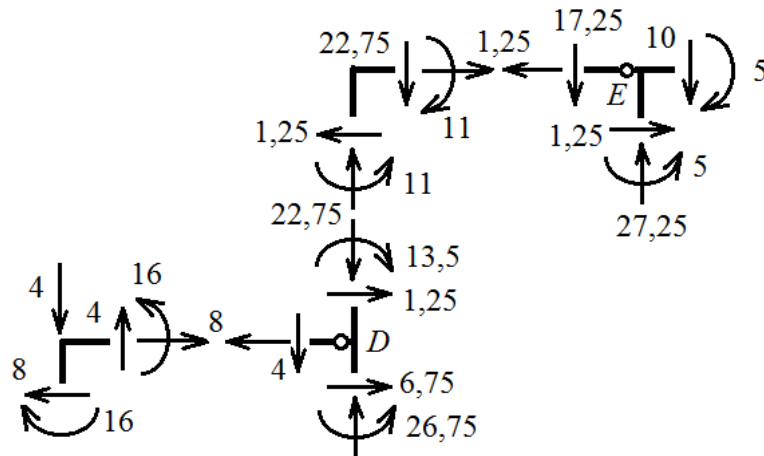
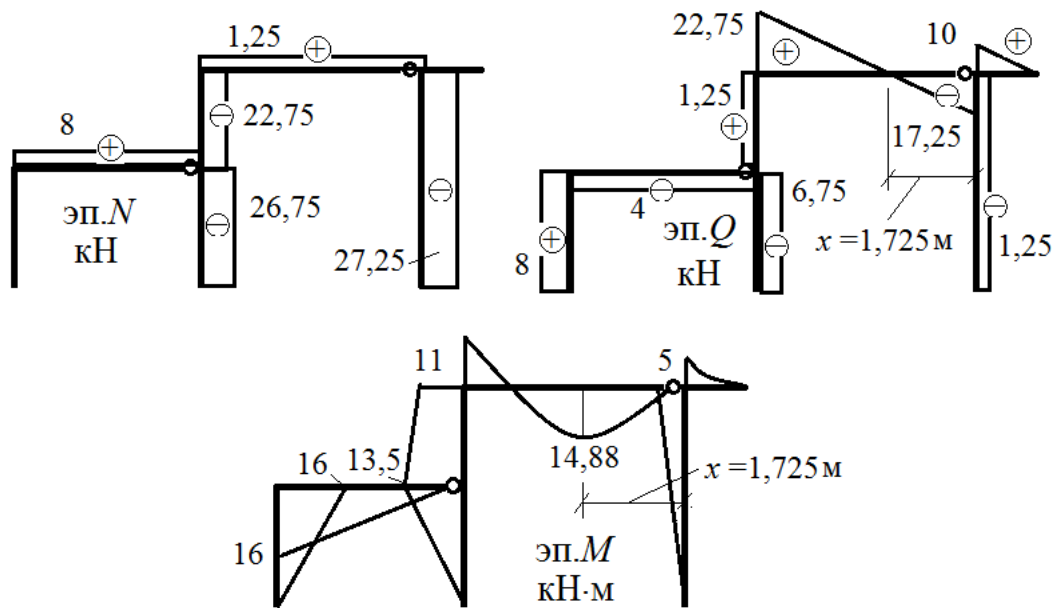
$M_{ex} = \sum M_i = 17,25 \cdot 1,725 - 10 \cdot 1,725 \cdot (1,725/2) = 14,88 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (растянуты нижние волокна).

- Рассмотрим равновесие узлов.

- Проверяем правильность построения эпюр по дифференциальным

зависимостям $Q = \frac{dM}{dx}$, $Q = Q^{\text{б}} - \frac{M_{\text{пр}} + M_{\text{лев}}}{\ell}$: $Q_{AK} = \frac{16}{2} = 8 \text{ кН};$

$$Q_{DK} = -\frac{16}{4} = -4 \text{ кН}; \quad Q_{BD} = -\frac{13,5}{2} = -6,75 \text{ кН}; \quad Q_{CE} = -\frac{5}{4} = -1,25 \text{ кН};$$



$$Q_{DL} = \frac{13,5 - 11}{2} = 1,25 \text{ кН}; \quad Q_{LE}^{\text{лев.}} = \frac{10 \cdot 4}{2} - \frac{-11}{4} = 22,75 \text{ кН};$$

$$Q_{LE}^{\text{пр.}} = -\frac{10 \cdot 4}{2} - \frac{-11}{4} = -17,25 \text{ кН};$$

Задача № 1.3. Определение усилий в заданных стержнях фермы

Задание: Способом сечений, а при необходимости способом вырезания узлов, определить усилия в стержнях заданной панели, а также в стойках слева и справа от этой панели. Исходные данные к задаче определить по таблице №1.3 и схемам, представленным на рис.1.3.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе длин расчётную схему фермы с указанием размеров и нагрузки.
2. Определить опорные реакции.
3. Отметить «нулевые стержни».
4. Определить усилия в заданных стержнях фермы.

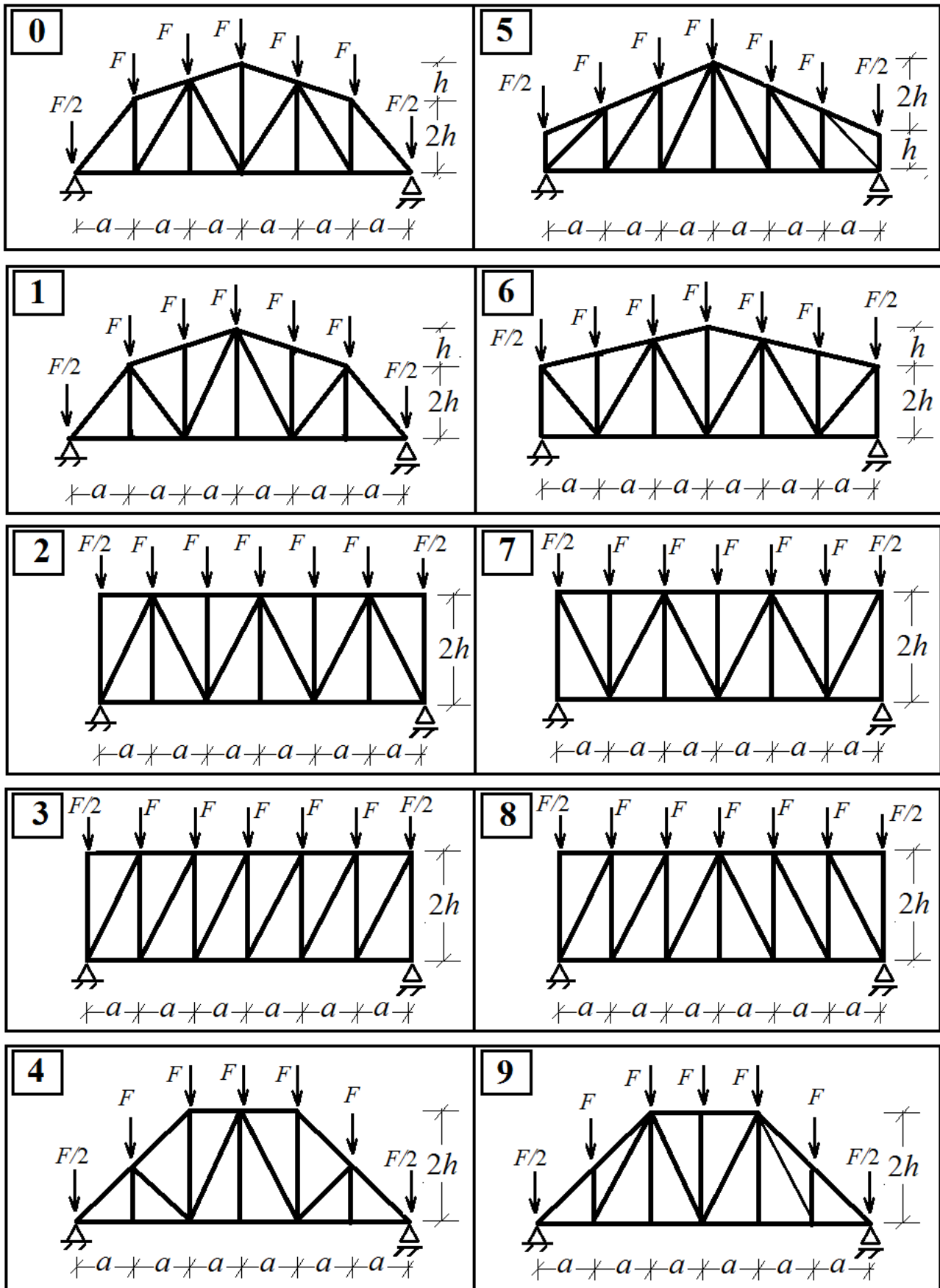
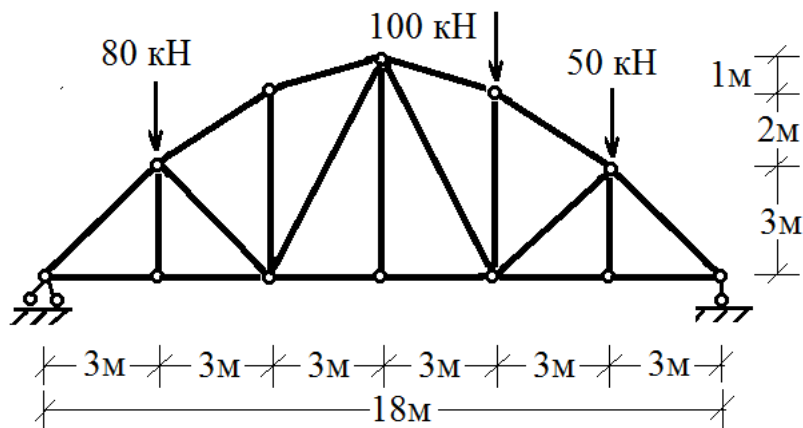


Рис. 1.3. Схемы заданий к задаче: № 1.3. РГР № 1

Таблица 1.3.

Первая цифра шифра	F_1 кН	№ панели	Вторая цифра шифра	a м	Третья цифра шифра (№ схемы)	h м
0	20	5	0	4	0	4
1	30	3	1	5	1	6
2	40	4	2	6	2	4
3	50	5	3	4	3	4
4	60	4	4	5	4	5
5	70	3	5	6	5	3
6	80	4	6	4	6	3
7	100	5	7	5	7	2
8	40	3	8	6	8	4
9	50	4	9	4	9	3

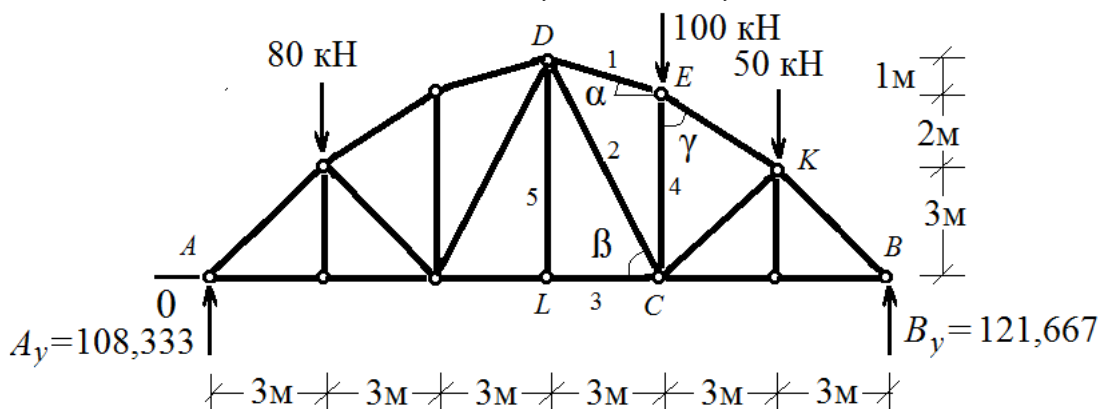
Пример решения задачи № 1.3. Определить усилия в стержнях четвёртой панели фермы, а также в правой и левой стойках (в стержнях №№ 1-5).



• Определяем опорные реакции.

$$\sum M_A = 0; 80 \cdot 3 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 15 - B_y \cdot 18 = 0; B_y = 121,667 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; -80 \cdot 18 - 100 \cdot 6 - 50 \cdot 3 + A_y \cdot 18 = 0; A_y = 108,333 \text{ кН};$$



Проверка: $\sum Y = 108,333 + 121,667 - 80 - 100 - 50 = 0$.

- Выявляем «нулевые стержни». $N_5 = 0$ (по признаку).

- Определяем необходимые тригонометрические величины:

Из треугольника DEe' : $DE = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3,162$;

$\cos\alpha = 3/3,162 = 0,949$; $\sin\alpha = 1/3,162 = 0,316$;

Из треугольника DLC : $DC = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6,708$;

$\cos\beta = 3/6,708 = 0,447$; $\sin\beta = 6/6,708 = 0,894$;

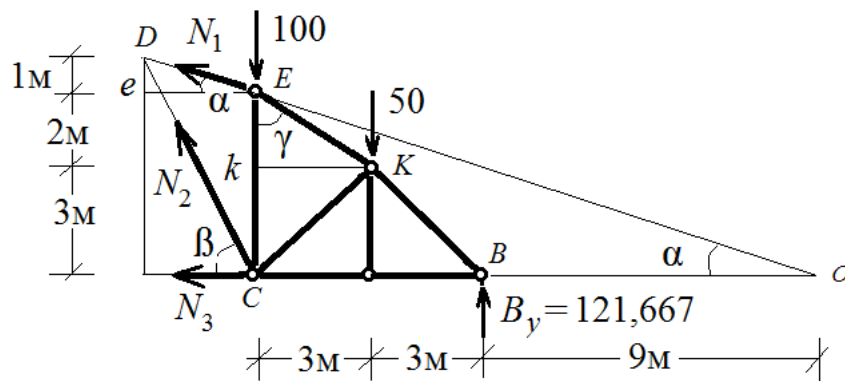
Из треугольника KEk' : $KE = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,606$;

$\cos\gamma = 2/3,606 = 0,555$; $\sin\gamma = 3/3,606 = 0,832$; $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0,707$;

- Разрезаем ферму по заданной панели. Определяем усилия в стержнях:

$\sum M_C \text{ прав.} = 0$; $-N_1 \cos\alpha \cdot 5 + 50 \cdot 3 - 121,667 \cdot 6 = 0$;

$-N_1 \cdot 0,949 \cdot 5 + 150 - 730 = 0$; $N_1 = -122,234$ кН (стержень сжат);



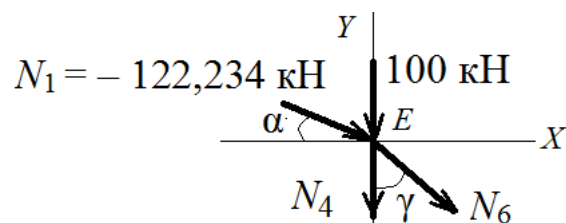
$\sum M_O \text{ прав.} = 0$; $N_2 \cdot \sin\beta \cdot 15 - 100 \cdot 15 - 50 \cdot 12 + 121,667 \cdot 9 = 0$; $N_2 \cdot 0,894 \cdot 15 - 1500 - 600 + 1095 = 0$; $N_2 = 74,944$ кН (стержень растянут);

$\sum M_D \text{ прав.} = 0$; $N_3 \cdot 6 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 6 - 121,667 \cdot 9 = 0$;

$N_3 = 82,5$ кН (стержень растянут); $\alpha \quad \beta \quad \gamma$ Проверка:

$\sum X = N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\beta + N_3 = 122,234 \cdot 0,949 + 74,944 \cdot 0,447 + 82,5 = 0$.

- Вырезаем узел E:



$\sum X = 0$; $N_1 \cdot \cos\alpha + N_6 \cdot \sin\gamma = 0$; $122,234 \cdot 0,949 + N_6 \cdot 0,832 = 0$;

$N_6 = -139,423$ кН (стержень сжат);

$\sum Y = 0$; $-100 - 122,234 \cdot \sin\alpha - N_6 \cdot \cos\gamma - N_4 = 0$; $-100 - 122,234 \cdot 0,316 -$

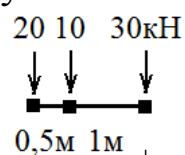
$-(-139,423) \cdot 0,555 - N_4 = 0$; $N_4 = -61,246$ кН (стержень сжат).

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

Задача № 2.1. Построение линий влияния в шарнирной балке

Задание: Построить линии влияния в шарнирной балке для заданной опорной реакции и усилий для заданного сечения. По линиям влияния определить величину этой опорной реакции и этих усилий от заданной нагрузки. Сравнить результаты с результатами, полученными аналитическим путём в задаче № 1.1. Определить по линиям влияния максимальные и минимальные значения опорной реакции и усилий в сече-



нии от заданной системы связанных подвижных грузов: .

Исходные данные определяются из таблицы 1.1 и схемам, представленным на рис.1.1. (см. РГР. № 1).

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе схему балки. Указать размеры и нагрузки, положение заданной опоры и сечения.
2. Построить схему взаимодействия элементов системы (поэтажную схему).
3. Построить линии влияния заданной опорной реакции, поперечной силы и изгибающего момента для заданного сечения.
4. По построенным линиям влияния определить величины этой опорной реакции, поперечной силы и изгибающего момента для заданного сечения от неподвижной нагрузки по формуле:

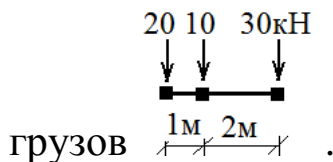
$$S = \sum F_i \cdot y_i + \sum q_i \cdot \omega_i + \sum M_i \cdot \operatorname{tg} \varphi_i$$

где y_i – ордината линии влияния под сечением, к которому приложена сила F_i , ω_i – площадь линии влияния под равномерной нагрузкой, φ_i – угол наклона линии влияния. Ординаты и площади линии влияния вводятся в формулу со своими знаками. Полученные значения сравнить с результатами задачи 1.1. в табличной форме.

5. Для системы связанных подвижных грузов определить по линиям влияния максимальные и минимальные значения опорной реакции, поперечной силы и изгибающего момента.

Определяемая величина	Значение определяемой величины при аналитическом расчёте, кН	Значение определяемой величины по линии влияния, кН	Погрешность к аналитическому расчёту в %
A			
Q_k			
M_k			

Пример решения задачи № 2.1. Задание: Построить линии влияния для реакций опор A и E , линии влияния поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях 1 и 2. Определить значения реакций в указанных опорах и усилия в указанных сечениях. Сравнить результаты с результатами, полученными в задаче №1.1. Определить по линиям влияния максимальные и минимальные значения опорных реакции, поперечных сил и изгибающих моментов от системы связанных подвижных



- Строим схему взаимодействия шарнирной балки.
- Строим линии влияния: A_y , E_y , Q_1 , Q_2 , M_1 , M_2 .
- Определяем значения:

$$A_y = 10 \cdot 0,5 + 6(-0,5 \cdot 0,5 \cdot 2) - 4 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = 5 - 3 + 1 = 3 \text{ кН}; (\operatorname{tg} \varphi_1 = -0,25);$$

$$E_y = 6(0,5 \cdot 2 \cdot 2 + 1,5 \cdot 2) = 30 \text{ кН}; \quad Q_2 = 6 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 12 \text{ кН};$$

$$Q_1 = 10 \cdot 0,5 - 6 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 2 - 4 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = 5 - 3 + 1 = 3 \text{ кН}; (\operatorname{tg} \varphi_2 = -0,25);$$

$$M_1 = 10 \cdot 1 - 4 \cdot \operatorname{tg} \varphi_3 + 6 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 2 = -10 - 4 \cdot (-0,5) + 6 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$(\operatorname{tg} \varphi_3 = -0,5); \quad M_2 = 6 \cdot 1/2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

- Полученные значения сравниваем с результатами задачи 1.1. в табличной форме.
- Определяем по линиям влияния максимальные и минимальные значения опорных реакции, поперечных сил и изгибающих моментов от системы связанных подвижных грузов:

$$A_y^{\max} = 0; \quad A_y^{\min} = 20 \cdot 1,5 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 1,5 = 105 \text{ кН};$$

$$E_y^{\max} = 20 \cdot 1 + 30 \cdot 0,875 + 10 \cdot 0,625 = 52,5 \text{ кН};$$

$$E_y^{\min} = -(20 \cdot 0,375 + 30 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,625) = -25 \text{ кН};$$

$$Q_1^{\max} = 20 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,375 + 10 \cdot 0,125 = 22,5 \text{ кН};$$

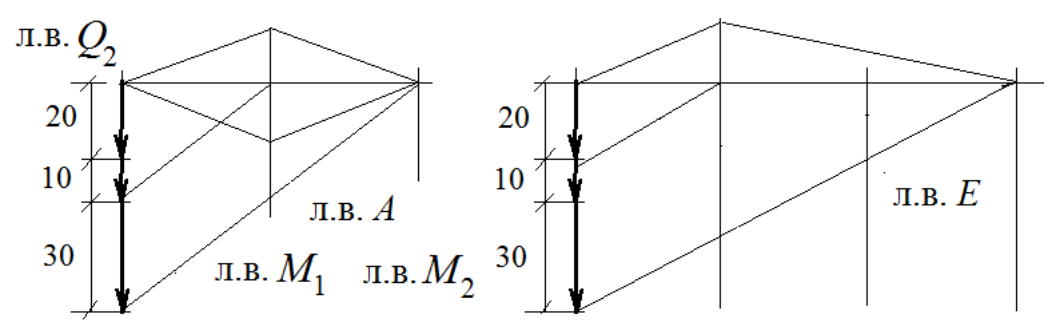
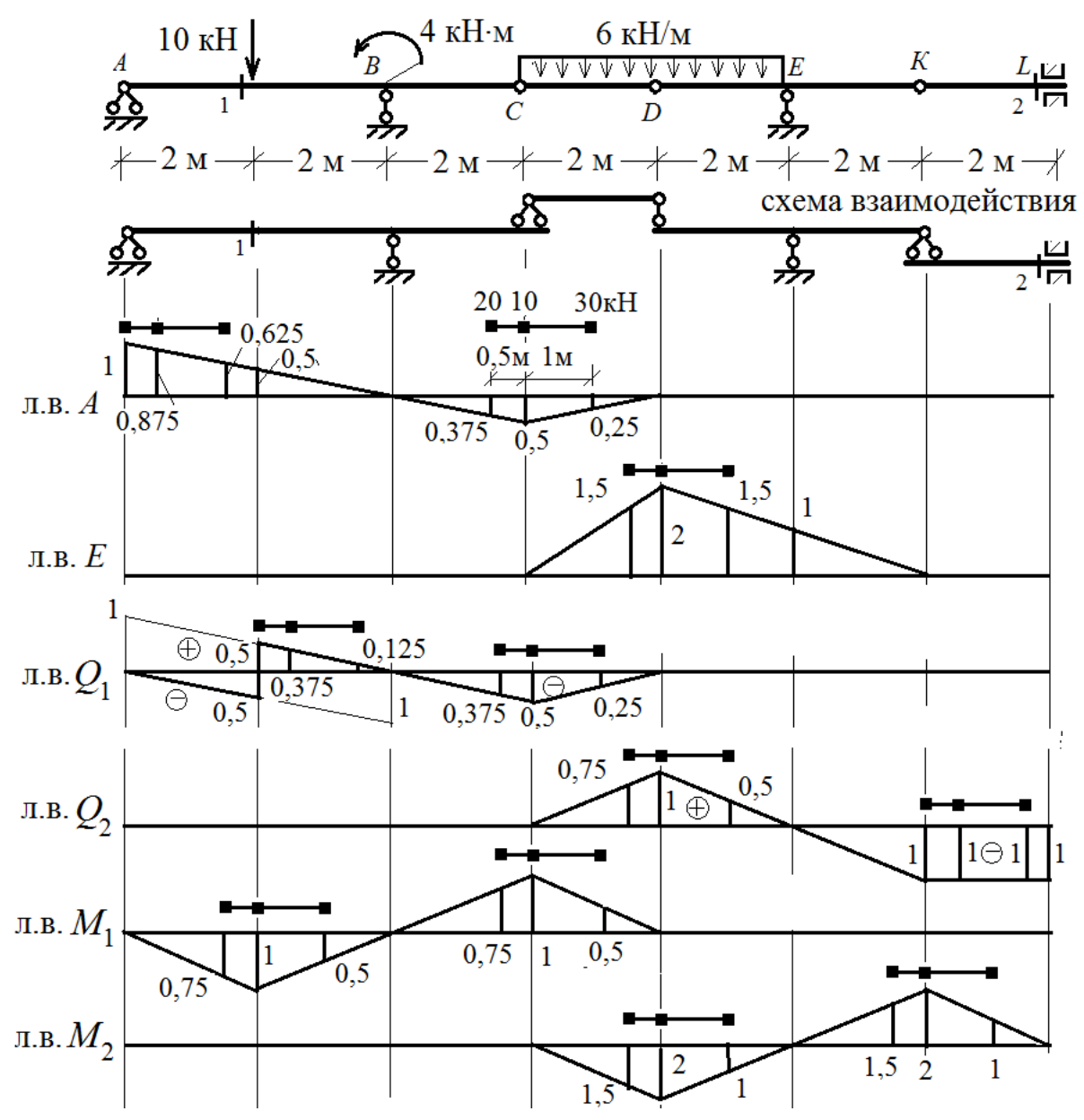
$$Q_1^{\min} = -(20 \cdot 0,375 + 30 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,625) = -25 \text{ кН};$$

$$Q_2^{\max} = (20 + 30 + 10) \cdot 1 = 60 \text{ кН};$$

$$Q_2^{\min} = -(20 \cdot 0,75 + 30 \cdot 1 + 10 \cdot 0,5) = -50 \text{ кН};$$

$$M_1^{\max} = M_1^{\min} = 20 \cdot 0,75 + 30 \cdot 1 + 10 \cdot 0,5 = 50 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_2^{\min} = M_2^{\min} = 20 \cdot 1,5 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$



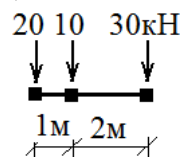
Определяемая величина	Значение определяемой величины при аналитическом расчёте, кН	Значение определяемой величины по линии влияния, кН	Погрешность к аналитическому расчёту в %
A_y	3	3	0
E_y	30	30	0
Q_1	3	3	0
Q_2	12	12	0
M_1	6	6	0
M_2	24	24	0

Задача 2.2. Расчёт фермы на подвижную нагрузку.

Построение линий влияния усилий в стержнях фермы

Задание: Построить линии влияния для опорных реакций и для усилий в стержнях заданной панели фермы, а также в стойках справа и слева от указанной панели при езде поверху и понизу. Определить значения реакций в указанных опорах и усилия в указанных стержнях. Сравнить результаты с результатами, полученными в задаче 1.3.

Определить по линиям влияния максимальные и минимальные значения опорных реакций и продольных сил в заданных стержнях от задан-



ной системы связанных подвижных грузов 1 м 2 м . Исходные данные определяются из таблицы 1.3 и схем, представленным на рис. 1.3 РГР №1, Задача 1.3 «Определение усилий в стержнях фермы».

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе схему фермы. Указать размеры и узловую нагрузку.
2. Построить линии влияния опорных реакций.
3. Построить линии влияния продольных сил для заданных стержней при езде поверху, затем при езде понизу.
4. По построенным линиям влияния определить величины опорных реакций и усилий в заданных стержнях от неподвижной нагрузки по формуле: $S = \sum F_i \cdot y_i$.

где y_i – ордината линии влияния под точкой приложена сила F_i .

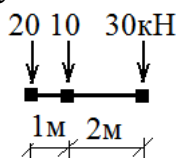
Ординаты линии влияния вводятся в формулу со своими знаками.

Полученные значения сравнить с результатами задачи 1.3 в табличной форме.

5. Определить по линиям влияния максимальные и минимальные значения реакций и усилий в заданных стержнях от заданной системы связанных подвижных грузов.

Определяемая величина	Значение определяемой величины при аналитическом расчёте, кН	Значение определяемой величины по линии влияния, кН	Погрешность к аналитическому расчёту (%)
N_1			
N_2			
N_3 и т.д.			

Пример решения задачи № 2.2. Построить линии влияния для опор A и B , линии влияния продольных сил в стержнях четвёртой панели фермы, а также в правой и левой стойках. Определить значения реакций в опорах и усилия в заданных стержнях. Сравнить результаты с результатами, полученными аналитическим путём. Определить по линиям влияния максимальные и минимальные значения опорных реакции и усилий в заданных стержнях от системы связанных подвижных



- Определяем необходимые тригонометрические функции:
 $\cos\alpha = 3/3,162 = 0,949$; $\sin\alpha = 1/3,162 = 0,316$; $\cos\beta = 3/6,708 = 0,447$;
 $\sin\beta = 6/6,708 = 0,894$; $\cos\gamma = 2/3,606 = 0,555$; $\sin\gamma = 3/3,606 = 0,832$;
 $\cos(\alpha + \gamma) = 0,2635$;
- Строим линии влияния опорных реакций A и B при верхнем ездовом поясе.
- Строим линию влияния усилия N_1 при верхнем ездовом поясе:
 1) Груз слева: $\sum M_C^{\text{прав.}} = 0$; $-N_1 \cdot \cos\alpha \cdot 5 - B \cdot 6 = 0$; $N_1 = 1,2645B$.
 2) Груз справа: $\sum M_C^{\text{лев.}} = 0$; $A \cdot 12 + N_1 \cdot \cos\alpha \cdot 6 - N_1 \cdot \sin\alpha \cdot 3 = 0$;
 $N_1 = -2,5284 A$. Линия влияния усилия N_1 при нижнем ездовом поясе такая же, как при верхнем, так как разрез проходит через ту же панель.
- Строим линию влияния усилия N_2 при верхнем ездовом поясе:
 1) Груз слева: $\sum M_O^{\text{прав.}} = 0$; $N_2 \cdot \sin\beta \cdot 15 + B \cdot 9 = 0$; $N_2 = -0,671B$.

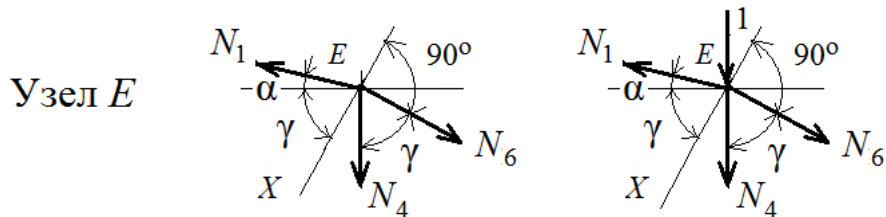
2) Груз справа: $\sum M_O^{\text{лев.}} = 0; A \cdot 27 + N_2 \cdot \cos\beta \cdot 6 - N_2 \cdot \sin\beta \cdot 18 = 0;$
 $N_2 = 2,013 A$. Линия влияния усилия N_2 при нижнем ездовом поясе та-
 какая же, как при верхнем.

• Строим линию влияния усилия N_3 при верхнем ездовом поясе:

1) Груз слева: $\sum M_D^{\text{прав.}} = 0; N_3 \cdot 6 - B \cdot 9 = 0; N_3 = 1,5B$.

2) Груз справа: $\sum M_D^{\text{лев.}} = 0; A \cdot 9 - N_3 \cdot 6 = 0; N_1 = 1,5 A$. Линия влияния
 усилия N_3 при нижнем ездовом поясе такая же, как при верхнем.

• Строим линию влияния усилия N_4 при верхнем ездовом поясе:



1) Груз везде, кроме узла E : (проводим ось X перпендикулярно N_6).

$$\sum X = 0; N_4 \cdot \sin\gamma + N_1 \cdot \cos(\alpha + \gamma) = 0; N_4 \cdot 0,832 + N_1 \cdot 0,2635 = 0;$$

$$N_4 = -0,3167 N_1.$$

2) Груз в узле E : $\sum X = 0; 1 \cdot \sin\gamma + N_4 \cdot \sin\gamma + N_1 \cdot \cos(\alpha + \gamma) = 0;$

$$1 \cdot 0,832 + N_4 \cdot 0,832 + (-0,843) \cdot 0,82635 = 0; N_4 = -0,733.$$

Линия влияния усилия N_4 при нижнем ездовом поясе такая же, как при
 грузе везде, кроме узла E .

• Линия влияния усилия N_5 при верхнем ездовом поясе: $N_5 = 0$.

• Строим линию влияния N_5 при нижнем ездовом поясе:

1) Груз везде, кроме узла L : $\sum Y = 0; N_5 = 0$.

2) Груз в узле L : $\sum Y = 0; 1 + N_5 = 0; N_5 = -1$.

• Определяем значения реакций в опорах и усилия в заданных стерж-
 нях. Сравниваем результаты с результатами, полученными аналитиче-
 ским путём в задаче 2.1:

$$A = 80 \cdot 0,833 + 100 \cdot 0,333 + 50 \cdot 0,167 = 108,29 \text{ кН};$$

$$B = 80 \cdot 0,167 + 100 \cdot 0,667 + 50 \cdot 0,833 = 121,171 \text{ кН};$$

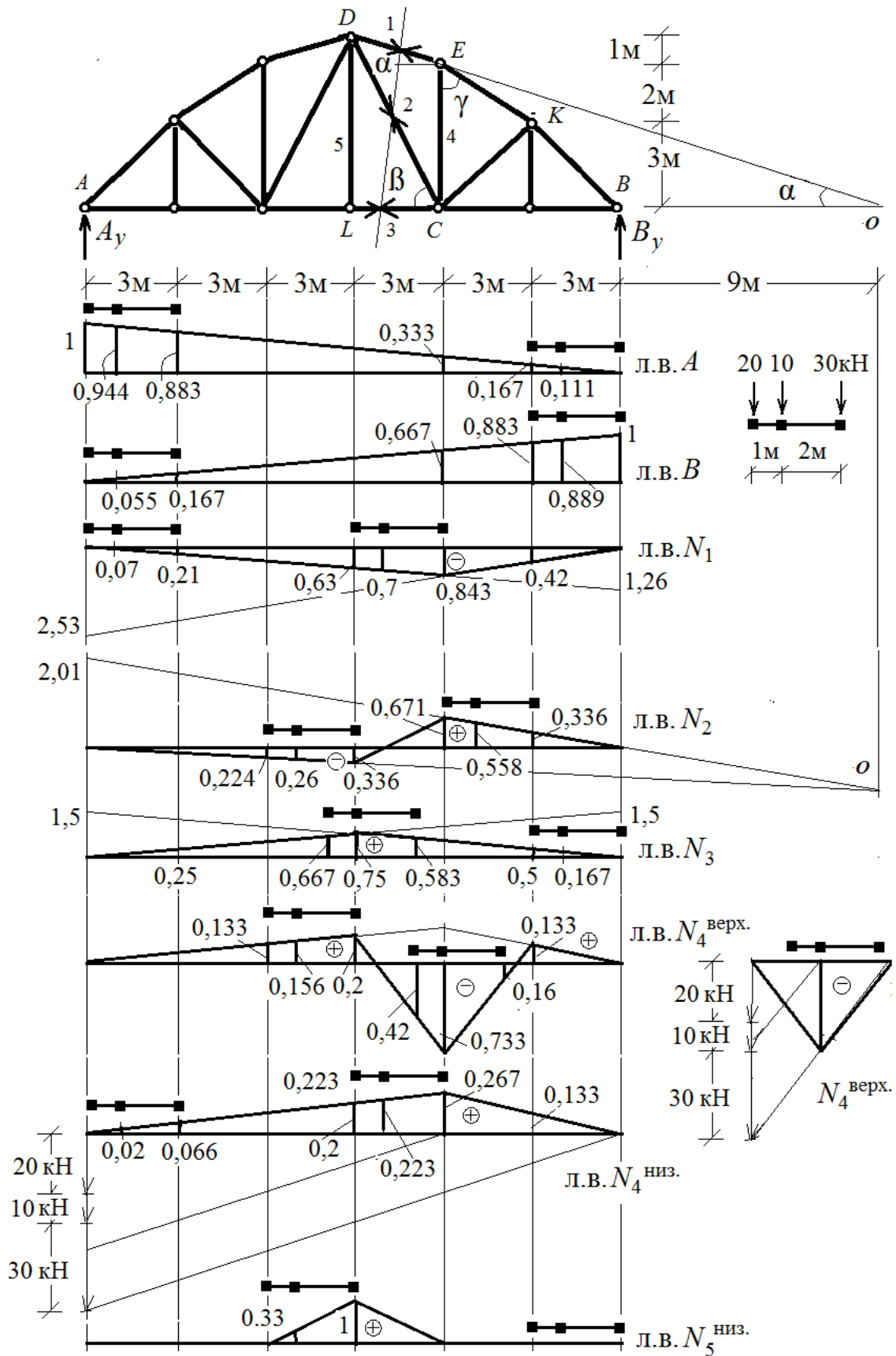
$$N_1 = -80 \cdot 0,21 - 100 \cdot 0,8428 - 50 \cdot 0,421 = -122,13 \text{ кН}.$$

$$N_2 = -80 \cdot 0,112 + 100 \cdot 0,671 + 50 \cdot 0,3355 = 74,915 \text{ кН}.$$

$$N_3 = 80 \cdot 0,25 + 100 \cdot 0,5 + 50 \cdot 0,25 = 82,5 \text{ кН}.$$

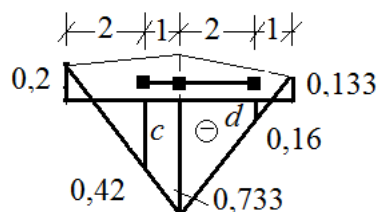
$$N_4 = 80 \cdot 0,066 - 100 \cdot 0,733 + 50 \cdot 0,133 = -61,37 \text{ кН}. \quad N_5 = 0.$$

• Определяем по линиям влияния максимальные и минимальные зна-
 чения опорных реакции и усилий в заданных стержнях от системы
 связанных подвижных грузов. Для этого в необходимых случаях опре-
 деляем графически положение критической силы.



$$\begin{aligned}
A^{\max} &= 20 \cdot 1 + 10 \cdot 0,889 + 30 \cdot 0,833 = 53,88 \text{ кН}; \\
A^{\min} &= 20 \cdot 0,167 + 10 \cdot 0,111 = 4,45 \text{ кН}; \\
B^{\max} &= 20 \cdot 0,833 + 10 \cdot 0,889 + 30 \cdot 1 = 55,55 \text{ кН}; \\
B^{\min} &= 10 \cdot 0,055 + 30 \cdot 0,167 = 5,56 \text{ кН}; \\
N_1^{\max} &= -20 \cdot 0,421 - 10 \cdot 0,28 = -8,43 \text{ кН}; \\
N_1^{\min} &= -20 \cdot 0,63 - 10 \cdot 0,7 - 30 \cdot 0,8428 = 44,88 \text{ кН}; \\
N_2^{\max} &= 20 - 0,671 + 10 \cdot 0,558 + 30 \cdot 0,3355 = 29,06 \text{ кН}; \\
N_2^{\min} &= -20 \cdot 0,224 - 10 \cdot 0,261 - 30 \cdot 0,3355 = 17,15 \text{ кН}; \\
N_3^{\max} &= 20 \cdot 0,667 + 10 \cdot 0,75 + 30 \cdot 0,583 = 38,33 \text{ кН}; \\
N_3^{\min} &= 20 \cdot 0,25 + 10 \cdot 0,167 = 6,67 \text{ кН};
\end{aligned}$$

при верхнем ездовом поясе:



из подобия треугольников:

$$\begin{aligned}
(0,733 + 0,2)/3 &= (c + 0,2)/2, \quad c = 0,42\text{м}; \\
(0,733 + 0,133)/3 &= (d + 0,133)/1, \quad d = 0,16\text{м};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_4^{\max} &= 20 \cdot 0,133 + 10 \cdot 0,156 + 30 \cdot 0,2 = 10,22 \text{ кН}; \\
N_4^{\min} &= -20 \cdot 0,42 - 10 \cdot 0,733 - 30 \cdot 0,16 = 20,53 \text{ кН}; \quad N_5 = 0;
\end{aligned}$$

при нижнем ездовом поясе:

$$\begin{aligned}
N_4^{\max} &= 20 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,223 + 30 \cdot 0,267 = 14,24 \text{ кН}; \\
N_4^{\min} &= 20 \cdot 0 + 10 \cdot 0,022 + 30 \cdot 0,066 = 2,2 \text{ кН}; \\
N_5^{\max} &= 0; \quad N_5^{\min} = -10 \cdot 0,33 - 30 \cdot 1 = -33,3 \text{ кН};
\end{aligned}$$

Определяемая величина	Значение определяемой величины при аналитическом расчёте, кН	Значение определяемой величины по линии влияния, кН	Погрешность к аналитическому расчёту (%)
A	108,33	108,29	0,03
B	121,667	121,171	0,4
N_1	-122,234	-122,13	0,08
N_2	74,944	74,915	0,04
N_3	82,5	82,5	0
N_4	-61,246	-61,37	0,2
N_5	0	0	0

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Задание: Рассчитать статически неопределимую раму методом сил. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Определить опорные реакции. Исходные данные к задаче определить по таблице № 3.2. и схемам, представленным на рис. 3.2.

Таблица 3.2.

Первая цифра шифра	F_1 кН	F_2 кН	ℓ м	Вторая цифра шифра	q_1 кН/м	q_2 кН/м	Третья цифра шифра № схемы	$I_2:I_1$	h_1 м	h_2 м
0	2	0	5	0	4	0	0	2	3	2
1	0	2	3	1	0	2	1	3	2	4
2	3	0	4	2	3	0	2	4	4	2
3	0	3	6	3	0	5	3	3	3	3
4	4	0	5	4	5	0	4	2	5	2
5	0	4	3	5	0	2	5	4	4	1
6	5	0	4	6	6	0	6	2	3	2
7	0	5	6	7	0	3	7	3	2	4
8	2	0	3	8	2	0	8	4	4	2
9	0	2	4	9	0	3	9	2	5	2

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе длин заданную расчётную схему рамы с указанием размеров и нагрузок.
2. Определить степень статической неопределимости рамы по формуле: $n_{ст.} = 3K - Ш$, где K – количество замкнутых контуров, $Ш$ – количество простых шарниров, включая опорные.
3. Выбрать две статически определимые и геометрически неизменяемые системы. По направлению удалённых «лишних» связей приложить неизвестные реакции: X_1, X_2, \dots, X_n . Одну основную систему использовать для расчёта, другую – для деформационной проверки.
4. Записать в общем виде систему канонических уравнений метода сил для данной расчётной схемы.
5. Расчётную схему выбранной основной системы последовательно загрузить единичными безразмерными силами, приложив их по предполагаемому направлению удалённых связей, а также заданной.

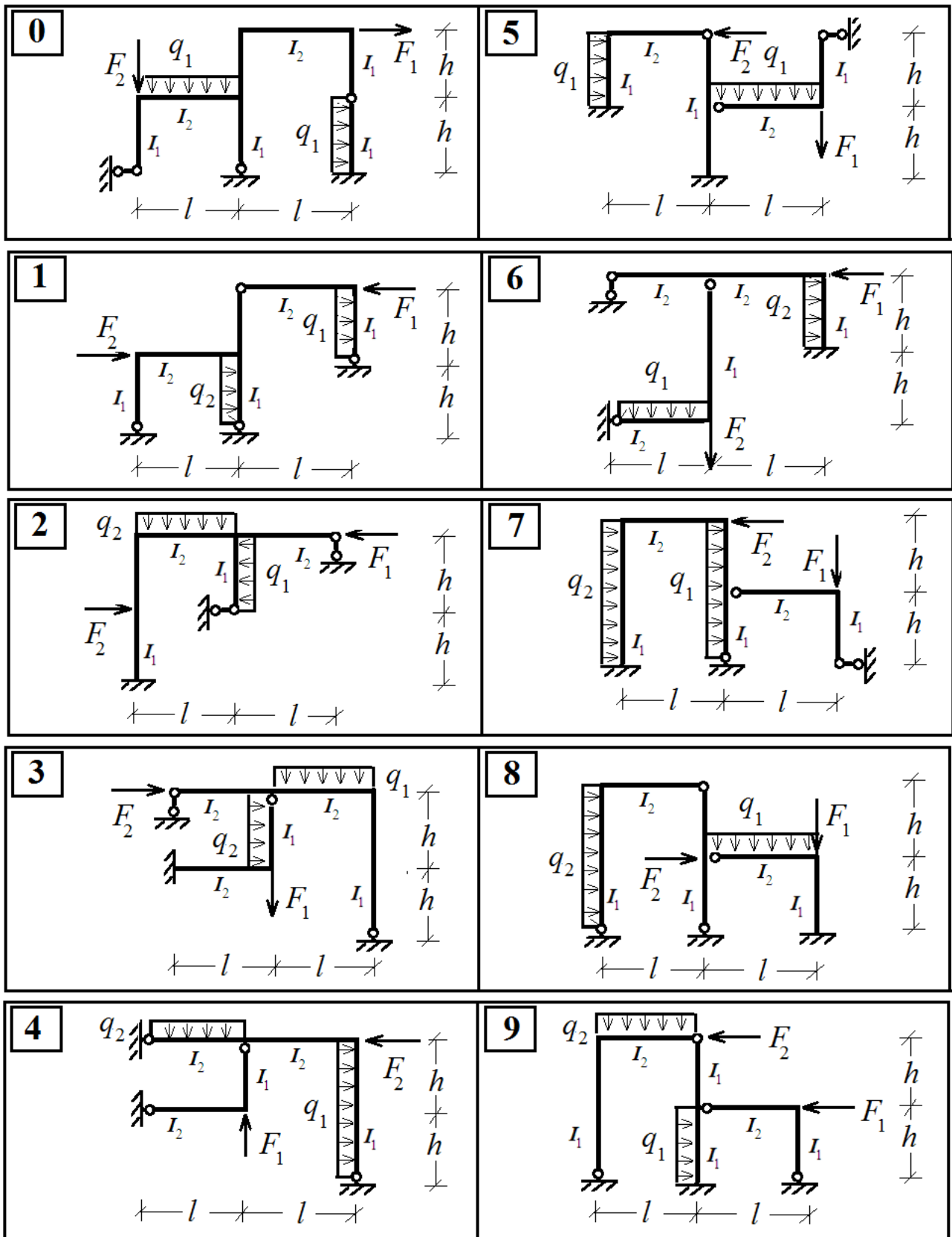


Рис.3.2. Схемы заданий к задаче: № 3.2. РГР № 3

нагрузкой. Построить эпюры моментов $M_1^0, M_2^0, \dots, M_n^0$ и M_F^0 , предварительно определив для каждой схемы опорные реакции.

6. Определить коэффициенты при неизвестных системы канонических уравнений (m – число участков интегрирования).

$$\delta_{ik} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_i^0 M_k^0}{EI} dx,$$

7. Определить свободные члены системы канонических уравнений.

$$\Delta_i^F = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_i^0 M_F^0}{EI} dx.$$

8. Найденные значения δ_{ik} и Δ_i^F подставить в канонические уравнения и решить их, определив значения X_i .

9. Построить эпюры изгибающих моментов от найденных значений реакций X_i . Для этого надо все ординаты эпюр M_i^0 умножить на соответствующую величину ($M_1^0 \cdot X_1, M_2^0 \cdot X_2, \dots$).

10. Построить эпюру изгибающих моментов для заданной расчётной схемы, воспользовавшись принципом независимости действия сил:

$$M = M_1^0 \cdot X_1 + M_2^0 \cdot X_2 + \dots + M_n^0 \cdot X_n + M_F^0.$$

11. Проверить равновесие узлов.

12. Выполнить деформационную проверку расчёта. Для этого использовать вторую, выбранную ранее основную систему. Построить эпюры изгибающих моментов \overline{M}_i^0 (любую единичную эпюру изгибающих моментов, не подобную $M_1^0, M_2^0, \dots, M_n^0$) или эпюру

$$\overline{M}_s^0 = \sum_1^m \overline{M}_i^0 \text{ от одновременного действия всех единичных сил, приложенных по направлению удалённых связей.}$$

При правильно выполненном расчёте должно быть выполнены условия, смысл которых заключается в том, что перемещения по направлению удалённых связей

должны быть равны нулю: $\sum_1^m \int_0^l \frac{\overline{M}_s^0 M_F^0}{EI} dx = 0$ или $\sum_1^m \int_0^l \frac{\overline{M}_1^0 M_F^0}{EI} dx = 0$.

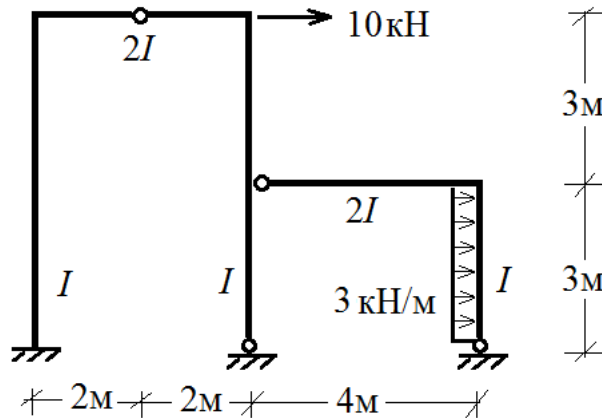
13. Построить эпюру поперечных сил Q в заданной расчётной схеме, используя дифференциальную зависимость $Q = dM/dx$.

14. Построить эпюру продольных сил. Значения продольных сил определить, рассматривая условия равновесия узлов рамы. К вырезанным узлам приложить известные поперечные силы, продольные силы и нагрузки и определить неизвестные продольные силы.

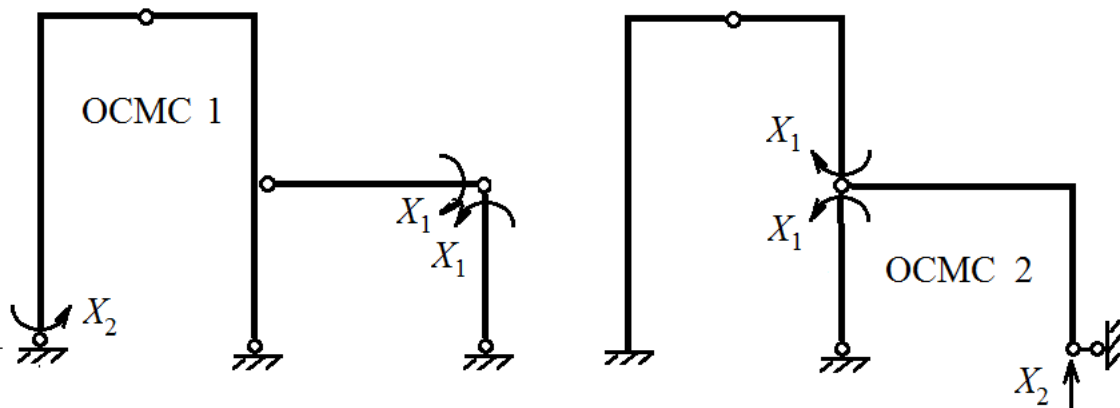
15. Определить опорные реакции, используя все эпюры.

16. Выполнить статическую проверку всей системы:
 $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$; $\Sigma M_c = 0$, где с – любая точка.

Пример расчёта: Рассчитать раму методом сил.



- Определяем степень статической неопределимости рамы по формуле: $n_{ст.} = 3K - \Pi = 3 \cdot 2 - 4 = 2$.
- Выбираем две статически определимые геометрически неизменяемые основные системы. Одну - для расчёта, другую - для проверки.

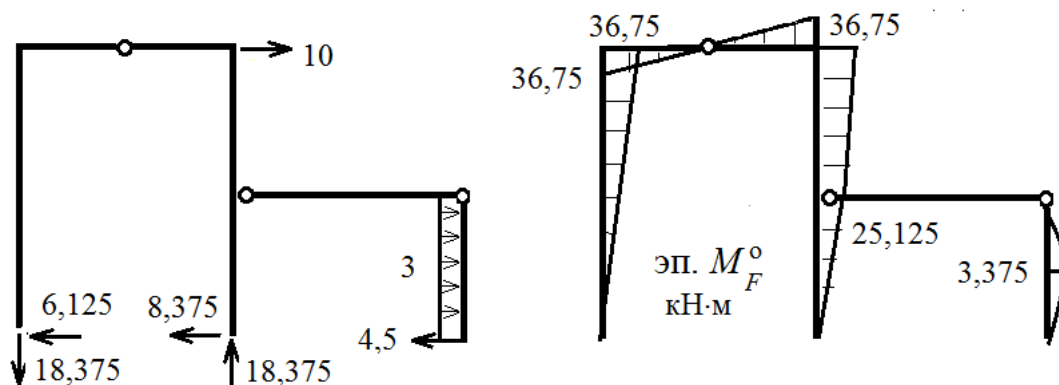
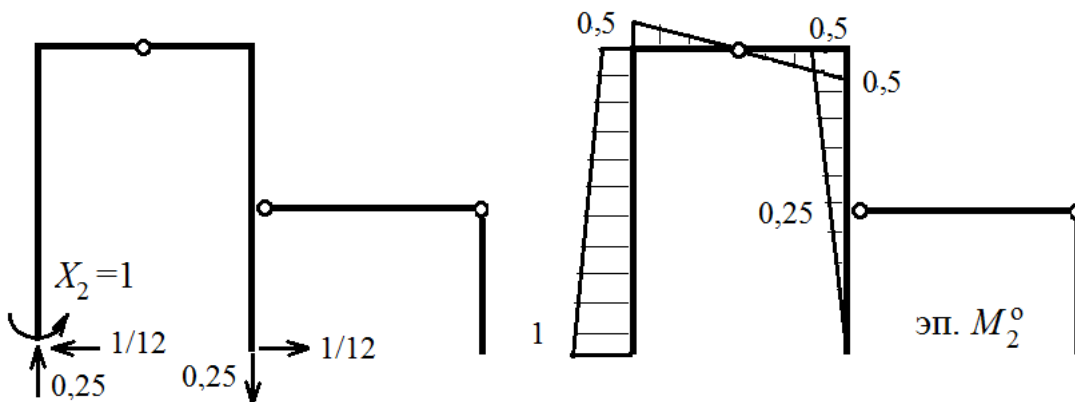
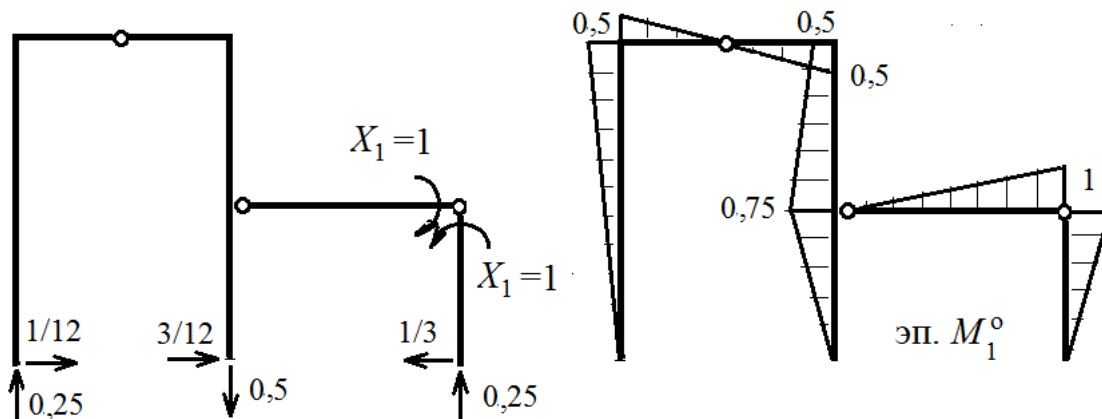


- Записываем систему канонических уравнений метода сил:
 $\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} = 0$;
 $\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0$.
- Строим эпюры моментов M_1^0 от $X_1 = 1$, M_2^0 от $X_2 = 1$ и M_F^0 , предварительно определив для каждой схемы опорные реакции.
- Определяем коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений.

$$\delta_{11} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_1^0 M_1^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{3}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,75 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,75 \cdot 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 2 + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 4,083 \frac{1}{EI} \frac{\text{М}}{\text{кН}};$$



$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_1^0 M_2^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 1) + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25 +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 0,75 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,75 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 2 = 2,042 \frac{1}{EI} \frac{\text{М}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{22} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_2^0 M_2^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 1 \cdot 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 0,25 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 \cdot 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 2) = 4,167 \frac{\text{М}}{\text{кН}};$$

$$\Delta_{1F} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_1^0 M_F^0}{EI} dx = - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 36,75 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25,125 -$$

$$- \frac{1}{EI} \frac{3}{6} (2 \cdot 25,125 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 + 36,75 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot 25,125) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{3}{6} (4 \cdot 0,5 \cdot 3,375) - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 36,75 \cdot 2 = -121,75 \frac{1}{EI} \text{ м};$$

$$\Delta_{2F} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_2^0 M_F^0}{EI} dx = - \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 + 36,75 \cdot 1) - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 25,125 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot$$

$$0,25 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 + 2 \cdot 0,25 \cdot 25,125 + 25,125 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 36,75) -$$

$$- \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 36,75 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 2 = -127,56 \frac{1}{EI} \text{ м}.$$

• Решаем канонические уравнения метода сил:

$$\frac{4,083}{EI} X_1 + \frac{2,042}{EI} X_2 - \frac{121,75}{EI} = 0; X_1 = 19,218 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\frac{2,042}{EI} X_1 + \frac{4,167}{EI} X_2 - \frac{127,56}{EI} = 0; X_2 = 21,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Проверка: $2,042 \cdot 19,218 + 4,167 \cdot 21,2 - 127,56 = 0,01$.

Ошибка: $0,01/127,56 \cdot 100\% = 0,008\%$

• Строим эпюры $M_1^0 \cdot X_1$ и $M_2^0 \cdot X_2$

• Строим эпюру изгибающих моментов в заданной системе

$$M = M_1^0 \cdot X_1 + M_2^0 \cdot X_2 + M_F^0$$

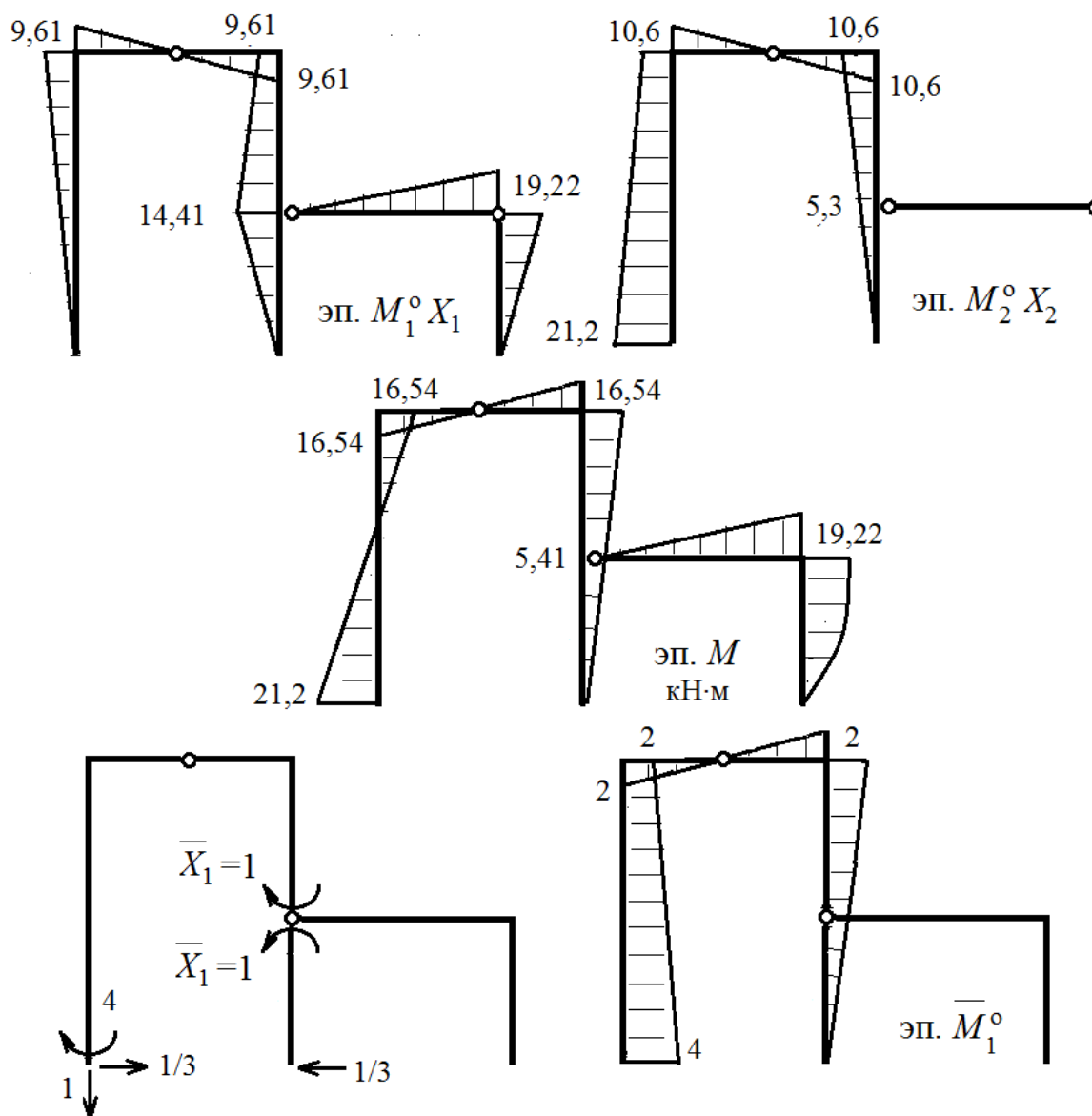
• Выполняем деформационную проверку, построив во второй основной системе единичную эпюру моментов.

$$\sum_1^m \int_0^l \frac{\overline{M}_1^0 M_F^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (2 \cdot 2 \cdot 16,54 - 2 \cdot 4 \cdot 21,199 + 4 \cdot 16,54 - 21,199 \cdot 2) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,412 + \frac{1}{EI} \frac{3}{6} (2 \cdot 2 \cdot 16,54 + 2 \cdot 1 \cdot 5,412 + 1 \cdot 16,54 + 2 \cdot 5,412) +$$

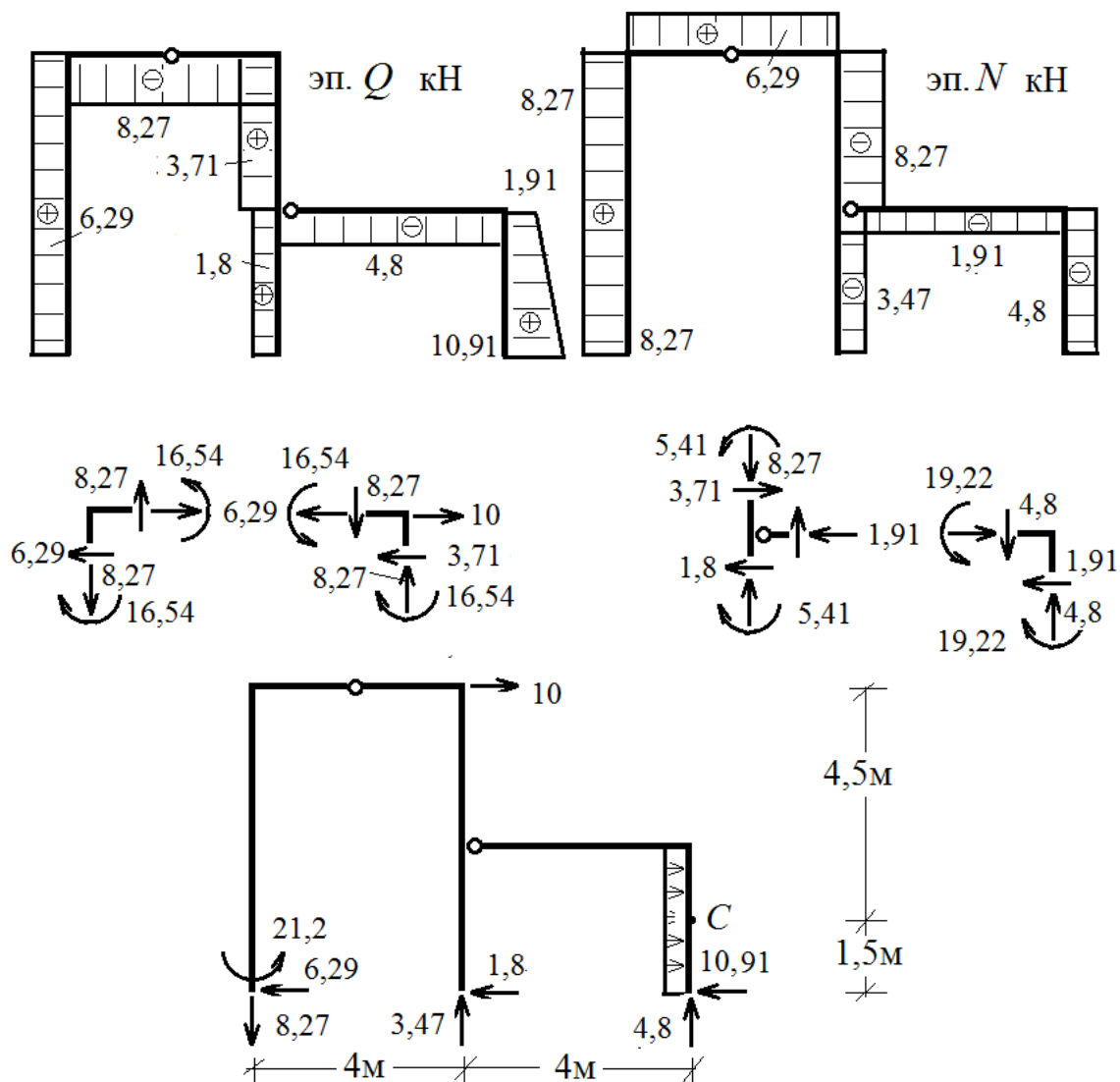
$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16,54 = \frac{1}{EI} (-79,67 + 79,64) = \frac{1}{EI} 0,03.$$

% ошибки: $\frac{0,03}{79,67} 100\% = 0,04\% < 1\%$.



- Строим эпюру Q в заданной расчётной схеме, используя дифференциальную зависимость $Q = dM/dx$.
- Строим эпюру продольных сил N . Значения продольных сил определяем, рассматривая условия равновесия узлов рамы.
- Проверяем равновесие узлов.

- Определяем опорные реакции, используя все эюры.
- Выполняем статическую проверку всей системы:



$$\Sigma X = 0; 10 - 6,29 - 1,8 - 10,91 + 3 \cdot 3 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; 4,8 + 3,47 - 8,27 = 0;$$

$$\Sigma M_c = 0; 10 \cdot 4,5 + (6,29 + 1,8 + 10,91) \cdot 1,5 + 3,47 \cdot 4 - 8,27 \cdot 8 - 21,2 = 0,02 \approx 0.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабанов В.В.* Строительная механика. В 2т. Учебник для студ. учреждений высшего проф. образования. М.: Издательский центр «Академия», 2011. 288с.
2. *Масленников А.М.* Начальный курс строительной механики стержневых систем. 2-е изд., доп. – СПб.: ООО «Перспектив науки», 2009. 240с.
3. *Масленников А.М., Воронина В.М.* Основы расчёта стержневых систем на устойчивость: учебное пособие / ЛИСИ. –Л. 1980. -66с.