МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»

МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

Программа, методические указания,
задание к контрольной работе

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Определение, описание и классификация случайных процессов как моделей сигналов, измерительных систем и процессов технического обслуживания летательных аппаратов (ЛА).

Тема 1.1. Общие определения и описание случайных процессов.

Задачи, содержание дисциплины и общие определения. Описание случайных процессов в виде функций распределения, плотностей вероятности, характеристических функций, моментных и корреляционных функций. Свойства различных видов описания случайных процессов.

Тема 1.2. Классификация случайных процессов.

Нестационарные и стационарные случайные процессы в широком и узком смыслах, эргодический случайный процесс как модели сигналов измерительных систем, навигационных систем и процессов технического обслуживания.

Тема 1.3. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных процессов.

Определения рассматриваемых понятий, условия выполнения непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости случайных процессов.

Тема 1.4. Корреляционное и спектральное описание случайных процессов.

Определение и свойства корреляционных функций случайных процессов. Свойства корреляционных функций стационарных случайных. Спектральный анализ стационарных случайных процессов, спектральная плотность. Эффективная полоса спектра, узкополосные и широкополосные сигналы.

Раздел 2. Гауссовские случайные процессы как модели сигналов и измерительных систем.

Тема 2.1. Определение и свойства гауссовских случайных процессов.

Гауссовский случайный процесс как наиболее практичная модель сигналов и измерительных систем. Свойства гауссовских случайных процессов.

Тема 2.2. Белый гауссовский шум.

Определение и свойства белого гауссовского случайного процесса. Дискретный белый гауссовский шум, формирование белого дискретного шума из непрерывного гауссовского случайного процесса.

Раздел 3. Определение, описание и свойства марковских моделей сигналов, измерительных систем и процессов технического обслуживания ЛА.

Тема 3.1. Определение и свойства марковских моделей сигналов и систем.

Описание и свойства цепей Маркова, дискретных марковских процессов, непрерывных марковских процессов и последовательностей. Уравнения Колмогорова для диффузионных марковских процессов и их использование для решения навигационных задач.

Тема 3.2. Гауссовско-марковские модели сигналов и измерительных систем

Процесс Винера и его свойства. Гауссовский экспоненциально-коррелированный случайный процесс и его свойства.

Раздел 4. Стохастические дифференциальные уравнения в качестве моделей сигналов, измерительных систем и процессов технического обслуживания ЛА.

Тема 4.1. Определение стохастического дифференциального уравнения и его решения.

Определение стохастических дифференциального уравнения и интеграла. Условия существования стохастических интегралов. Стохастический интеграл Ито и Стратоновича и их свойства.

Тема 4.2. Использование стохастических дифференциальных моделей сигналов в задачах анализа и синтеза измерительных систем.

Использование аппарата стохастических дифференциальных уравнений в задачах фильтрации сигналов в навигационных системах.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Перед изучением разделов программы необходимо повторить основные понятия теории вероятностей: вероятность случайного события, функция распределения и плотность вероятности случайных величин, числовые характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, ковариационный момент), формулы Байеса, вероятностные характеристики случайных процессов по учебному пособию [5] либо любому другому для вузов. Рекомендуется осваивать разделы программы в той последовательности, которая предусмотрена программой.

Материал модуля 1 изложен в пособиях [3,4,5]; модуля 2 – в [1,4,5]; модуля 3 – в [3,4,6]; модуля 4 – в [3,4,6].

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Задание к контрольной работе

Параметр состояния $x(t)$ динамического объекта является марковским случайным процессом, описываемым стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = z_1(x) + z_2(x) + z_1(x) z_2(x) n(t), \qquad (1)$$

где $z_1(x)$, $z_2(x)$ – заданные непрерывные всюду дифференцируемые функции аргумента x; $n(t)$ – стационарный центрированный белый гауссовский шум (БГШ) с интенсивностью N. Требуется:

1) определить коэффициенты сноса и диффузии процесса $x(t)$ при условии, что уравнение (1) задаётся в симметризованной форме;

2) составить уравнения для математического ожидания и дисперсии процесса $x(t)$ в гауссовском приближении.

Функция $z_1(x)$ выбирается из табл. 1 по первой букве фамилии студента, а функция $z_2(x)$ – по второй букве фамилии.

Таблица 1

	$z_1(x)$	$z_2(x)$
А, Б, В	x	$e^x \sin(x)$
Г, Д, Е	x^2	$e^x \cos(x)$
Ё, Ж, З, И	x^3	$x e^x$
Й, К, Л, М	x^4	$\cos(x) \sin(x)$
Н, О, П	$x \sin(x)$	x^4
Р, С, Т	$x \cos(x)$	x^3
У, Ф, Х	$x^2 \sin(x)$	x^2

Ц, Ч, Ш	$x^2\cos(x)$	$x e^x$
Щ, Ъ, Ы, Ь	$\sin^2(x)$	$x e^x$
Э, Ю, Я	x^3	$e^x\ \sin(x)$

Методические указания к выполнению контрольной работы

Сведения из теории марковских процессов, необходимые для выполнения контрольной работы изложены в [3,4]. Решение задачи следует начать с приведения уравнения (1) к стандартной форме

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x) + f(x)n(t), \qquad (2)$$

где функции $g(x)$ и $f(x)$ определяются из эквивалентности (1) и (2):

$$g(x) = z_1(x) + z_2(x),\ f(x) = z_1(x)z_2(x).$$

Коэффициент сноса диффузионного марковского процесса, описываемого уравнением (2) определяется по формуле

$$a(x) = g(x) + \theta N f(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \qquad (3)$$

где θ – параметр, зависящий от формы стохастического дифференциала в уравнении (2). Для симметризованной формы (формы Стратоновича) $\theta = 1/2$.

Коэффициент диффузии, зависящий от интенсивности БГШ N и функции $f(x)$, определяется выражением

$$b(x) = N f^2(x). \qquad (4)$$

Уравнения для математического ожидания $m(t)$ и дисперсии $D(t)$ скалярного диффузионного марковского процесса в гауссовском приближении имеют следующий вид:

$$\frac{dm(t)}{dt} = a(m), \qquad (5)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = b(m) + 2D\frac{\partial a(m)}{\partial m}, \qquad (6)$$

где

$$a(m) = a(x)\big|_{x=m},\ b(m) = b(x)\big|_{x=m},\ \frac{\partial a(m)}{\partial m} = \frac{\partial a(x)}{\partial x}\bigg|_{x=m}.$$

Рассмотрим пример задания. Пусть в уравнении (1) функции имеют следующий вид:

$$z_1(x) = x^2,\quad z_2(x) = x^3\sin(2x).$$

Запишем структурные функции уравнения (2)

$$g(x) = z_1(x) + z_2(x) = x^2 + x^3\sin(2x),$$

$$f(x) = z_1(x)z_2(x) = x^2x^3\sin(2x) = x^5\sin(2x).$$

Используя (3), найдём коэффициент сноса

$$a(x) = g(x) + \theta N f(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x} = x^2 + x^3\sin(2x) +$$

$$+\frac{1}{2}N x^5\sin(2x)\frac{\partial}{\partial x}\left[x^5\sin(2x)\right].$$

Производя дифференцирование

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^5\sin(2x)\right] = 5x^4\sin(2x) + 2x^5\cos(2x),$$

получим

$$a(x) = x^2 + x^3\sin(2x) + \frac{1}{2}N x^5\sin(2x)\left[5x^4\sin(2x) + 2x^5\cos(2x)\right].$$

Используя (4), найдём коэффициент диффузии

$$b(x) = N f^2(x) = N(x^5\sin(2x))^2 = N x^{10}\sin^2(2x).$$

Уравнение (5) для математического ожидания с учётом найденного коэффициента $a(x)$ принимает вид

$$\frac{dm(t)}{dt} = m^2 + m^3\sin(2m) + \frac{1}{2}N m^5\sin(2m)\left[5m^4\sin(2m) + 2m^5\cos(2m)\right].$$

Получив выражения для коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$, теперь можем записать уравнение (6) для дисперсии процесса:

$$\frac{dD(t)}{dt} = N m^{10}\sin^2(2m) +$$

$$2D\frac{\partial}{\partial m}\left[m^2 + m^3\sin(2m) + \frac{1}{2}N m^5\sin(2m)\left[5m^4\sin(2m) + 2m^5\cos(2m)\right]\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информационно-статистическая теория измерений. Модели сигналов и анализ точности систем. Учеб. пособие.
2. Информационно-статистическая теория измерений. Методы оптимального синтеза информационно-измерительных систем, критерии оптимизации и свойства оценок. Учеб. пособие.
3. Случайные процессы. Примеры и задачи. Т.1. Случайные величины и процессы. Учеб. пособие для вузов.
4. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. Учеб. пособие для вузов.
5. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для вузов.
6. Марковская теория оценивания случайных процессов.