ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
(практика)

Практическое

занятие проводит

к.т.н., доцент Голод

Олег Саулович

Обработка результатов эксперимента

Результат эксперимента - это набор чисел, как их обработать, чтобы сделать обоснованные выводы? Простейший вариант- определение выборочных оценок математического ожидания и дисперсии.

Выборочная оценка параметра, представляющая собой число,называется точечной (выборочной) оценкой.

Выборочная оценка математического ожидания

Ориентировочная оценка результатов эксперимента часто может быть описана точечными (выборочными) оценками.

Пусть выборка объема *n* представлена в виде ряда. Запишем выборочную среднюю величину

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n} \quad (1)$$

Величина $\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$ называется относительной частотой значения признака x_i.

m_i - количество повторений величины x_i в данной выборке,

n - объем выборки

Для вычисления выборочной средней можно пользоваться и формулой

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (2)$$

где x_i - результат экспериментальных измерений

Принято считать величину $\bar{x}$ выборочной оценкой математического ожидания исследуемого параметра.

Выборочная оценка дисперсии

Выборочную дисперсию $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \omega_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

можно считать точечной оценкой дисперсии исследуемого параметра.

Пример вычисления точечной оценки математического ожидания диаметра заготовок.

Пусть произведено семь измерений диаметра x заготовок:

x = 3,13мм; x = 3,12мм; x = 3,14мм; x = 3,13мм;

x = 3,11мм; x = 3,12мм; x = 3,13мм.

Для вычисления точечной оценки математического ожидания воспользуемся формулой (1). При этом n = 7,

$$x_1 = 3{,}13мм; m_1 = 3; \qquad x_2 = 3{,}11мм; m_2 = 1;$$

$$x_3 = 3{,}14мм; m_3 = 1; \qquad x_4 = 3{,}12мм; m_4 = 2;$$

Определим $\overline{x}$ по формуле (1):

$$\overline{x} = 3{,}13 * \frac{3}{7} + 3{,}11 * \frac{1}{7} + 3{,}14 * \frac{1}{7} + 3{,}12 * \frac{2}{7} \approx 3{,}13(мм)$$

Определим ту же величину по формуле (2):

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(3{,}13 + 3{,}13 + 3{,}13 + 3{,}11 + 3{,}14 + 3{,}12 + 3{,}12) \approx 3{,}13(\textit{мм})$$

Задание для самостоятельной работы

Выполнить вычисление точечной оценки математического ожидания следующих величин: 5, 6, 4, 3, 7, 5, 4, 6, 5. двумя способами.

Выполнить вычисление точечной оценки дисперсии тех же самых величин.

Закон изменения исследуемой величины можно определить по функции, аппроксимирующей экспериментальные данные.

Качество аппроксимации оценивается двумя показателями: точностью аппроксимации и простотой аппроксимирующей функции.

Процедура аппроксимации включает два этапа:
- выбор типа аппроксимирующей функции;
- выбор параметров аппроксимирующей функции.

На практике часто используются два критерия:
- критерий равномерного приближения,
- критерий наименьших квадратов.

Критерий наименьших квадратов означает минимизацию суммы V квадратов отклонений значений аппроксимирующей функции $f(x)$ в точках x_i от экспериментальных значений y_i, то есть

$$V = \sum_{i=1}^{k} (y_i - f(x_i))^2 \to \min.$$

где k- количество обрабатываемых измерений

Для аппроксимирующей функции в виде степенного многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

где n - степень многочлена.

При этом критерий V примет вид:

$$V = \sum_{i=1}^{k} (y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j)^2 \to \min; \; \text{при} \; n < k,$$

Величины коэффициентов многочлена a_j .являются неизвестными, которые нам надо определить.

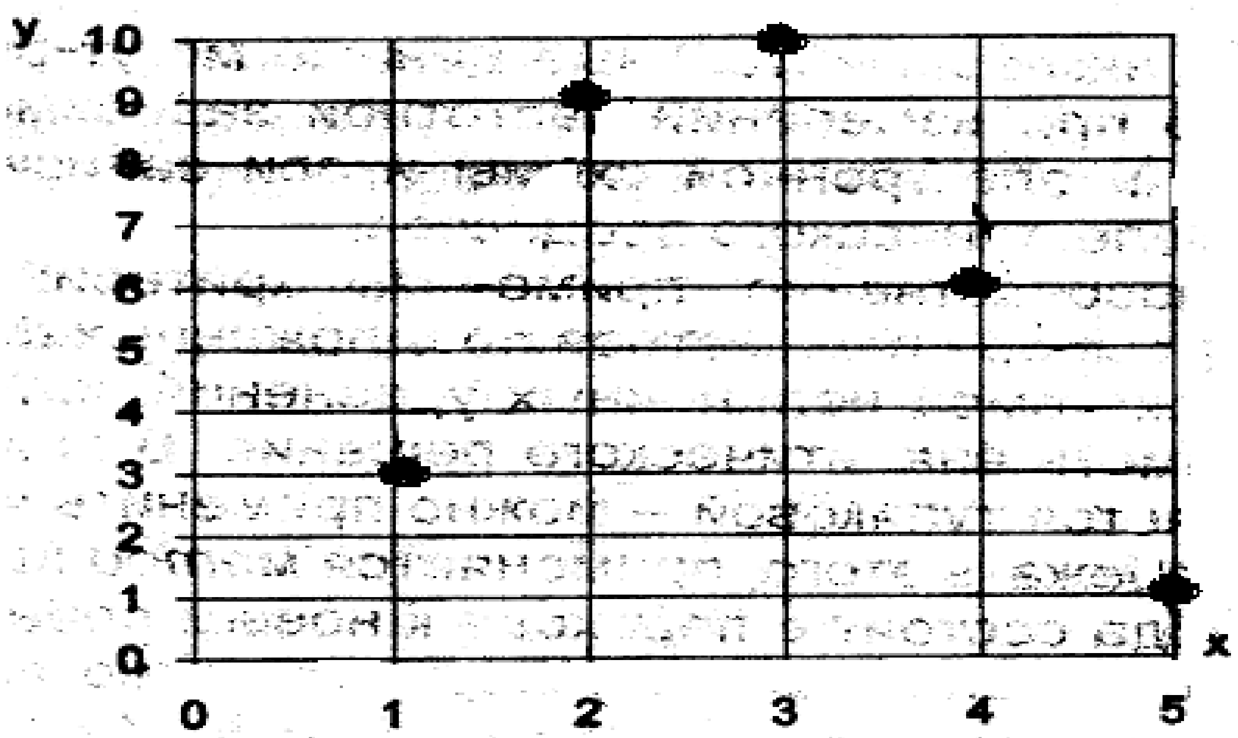
При изменении величин коэффициентов a_j будет изменяться величина критерия V .

Пусть получены экспериментальные данные, приведенные в таблице

i	1	2	3	4	5
x_i	1	2	3	4	5
y_i	3,0	9,0	10,0	6,0	1,0

где i – порядковый номер эксперимента.

Отметим эти точки в системе координат x, y.



Учитывая параболический характер зависимости y_i от x_i выберем для простоты минимальную степень аппроксимирующего полинома, то есть вторую степень.

При этом в формуле для критерия V параметр i изменяется от 1 до 5, а параметр j изменяется от 0 до 2, то есть k = 5, n = 2.

Аппроксимирующая функция в этом случае будет иметь вид

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

При этом форма кривой будет определяться величинами коэффициентов a_0, a_1 и a_2.

Тогда критерий V будет иметь вид

$$V = \sum_{i=1}^{5} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2$$

Запишем более подробно:

$$\begin{aligned} V = &(y_1 - a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_1^2)^2 + \\ &+ (y_2 - a_0 - a_1 x_2 - a_2 x_2^2)^2 + \\ &+ (y_3 - a_0 - a_1 x_3 - a_2 x_3^2)^2 + \\ &+ (y_4 - a_0 - a_1 x_4 - a_2 x_4^2)^2 + \\ &+ (y_5 - a_0 - a_1 x_5 - a_2 x_5^2)^2 \end{aligned}$$

Требуемый минимум имеет место при равенстве нулю всех (n+1) частных производных от функции V по переменной a_j, то есть при

$$\frac{\partial V}{\partial a_j} = 0.$$

В рассматриваемом случае частная производная от функции V по коэффициенту a_0 запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial a_0} &= 2(y_1 - a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_1^2)(-1) + \\ &+ 2(y_2 - a_0 - a_1 x_2 - a_2 x_2^2)(-1) + \\ &+ 2(y_3 - a_0 - a_1 x_3 - a_2 x_3^2)(-1) + \\ &+ 2(y_4 - a_0 - a_1 x_4 - a_2 x_4^2)(-1) + \\ &+ 2(y_5 - a_0 - a_1 x_5 - a_2 x_5^2)(-1)\end{aligned}$$

Частная производная от функции V по коэффициенту a_1 запишется

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 2(y_1 - a_0 - a_1x_1 - a_2x_1^2)(-x_1) +$$
$$+ 2(y_2 - a_0 - a_1x_2 - a_2x_2^2)(-x_2) +$$
$$+ 2(y_3 - a_0 - a_1x_3 - a_2x_3^2)(-x_3) +$$
$$+ 2(y_4 - a_0 - a_1x_4 - a_2x_4^2)(-x_4) +$$
$$+ 2(y_5 - a_0 - a_1x_5 - a_2x_5^2)(-x_5)$$

Частная производная от функции V по коэффициенту a_2 запишется

$$\frac{\partial V}{\partial a_2} = 2(y_1 - a_0 - a_1x_1 - a_2x_1^2)(-x_1^2) +$$
$$+ 2(y_2 - a_0 - a_1x_2 - a_2x_2^2)(-x_2^2) +$$
$$+ 2(y_3 - a_0 - a_1x_3 - a_2x_3^2)(-x_3^2) +$$
$$+ 2(y_4 - a_0 - a_1x_4 - a_2x_4^2)(-x_4^2) +$$
$$+ 2(y_5 - a_0 - a_1x_5 - a_2x_5^2)(-x_5^2)$$

Приравняв нулю каждую производную, получим систему уравнений для трех неизвестных a_0, a_1 и a_2.

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{5}(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) = 0 \\
\sum_{i=1}^{5}(y_i x_i - a_0 x_i - a_1 x_i^2 - a_2 x_i^3) = 0 \\
\sum_{i=1}^{5}(y_i x_i^2 - a_0 x_i^2 - a_1 x_i^3 - a_2 x_i^4) = 0
\end{cases}
$$

Вынесем члены, содержащие y, в правую часть уравнения

$$
\begin{cases}
5a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{5} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \sum_{i=1}^{5} y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{5} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{5} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{5} x_i^4 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i
\end{cases}
$$

Подставив значения x_i и y_i из таблицы, получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными a_0, a_1 и a_2

$$\begin{cases} 5a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 29 \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 80 \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 250 \end{cases}$$

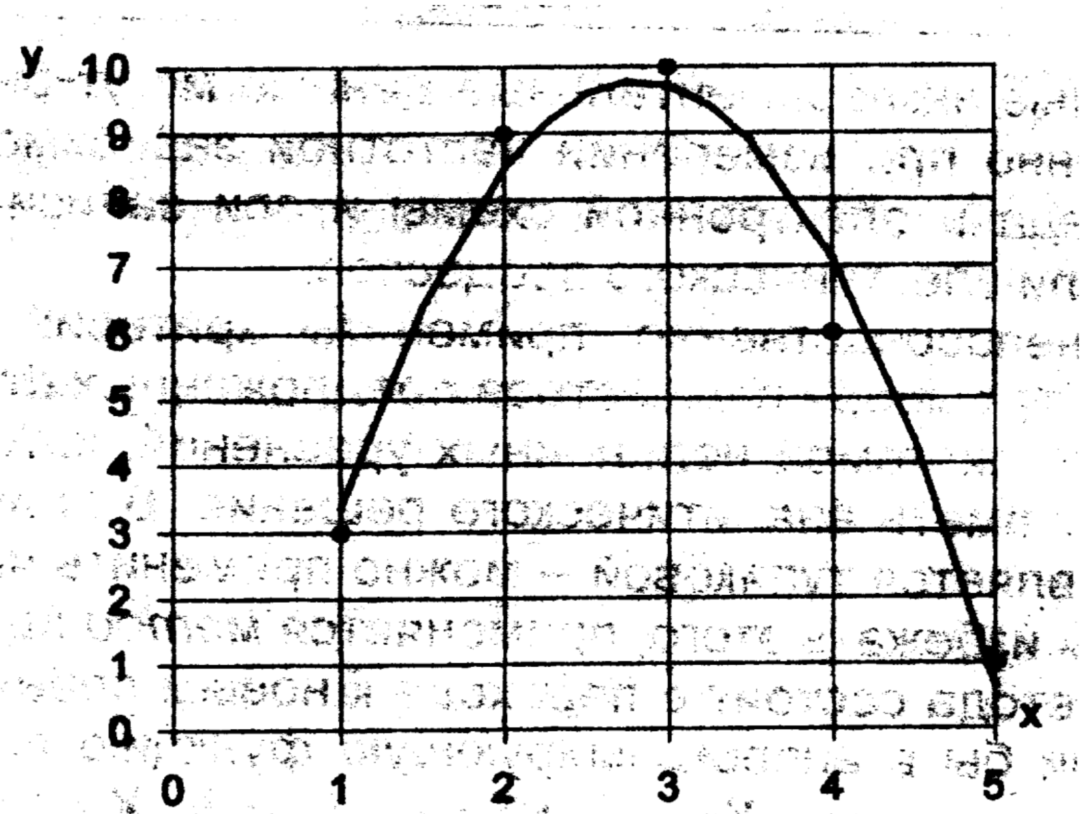
Решив эту систему, например, методом подстановки, определим искомые значения коэффициентов

$$a_0 \approx -5{,}6, \quad a_1 \approx 10{,}9, \quad a_2 \approx -1{,}93.$$

Подставив эти значения в $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

получим $f(x) = -5{,}6 + 10{,}9\,x - 1{,}93\,x^2.$

Построим график этой функции в координатах x, и $y = f(x)$ и укажем исходные точки.



Все понял? ***Спрашивай!***

Контрольная работа

i	1	2	3	4	5
Xi	0	1	2	3	4
Ai	1	3	4	2	0
Yi					
Yai					
Δ					

Где: i - порядковый номер эксперимента,

Yi - выходной, обрабатываемый результат эксперимента, рассчитываемый по следующей формуле:

Yi=(3Ai+0.Кпосл)/(1+0.2Кпрпосл),

где Кпосл – последняя цифра в шифре студента,

Кпрпосл - предпоследняя цифра. ,Yai - аппроксимирующие значения.

Промежуточная аттестация – ТЕСТЫ.

Деятельность, задачей которой является творческая систематизация объективных знаний о действительности - это...

А. практика.

Б. теория.

В. наука.

Г. производство.

Цель науки - это …

А. обнаружение объективных законов действительности.

Б. постановка эксперимента.

В. анализ экспериментальных данных

.Г. построение моделей.

Результат технического творчества -это…
А. изобретения, рационализаторские предложения и конструкторские разработки. Б. операции математических преобразований. В. научные открытия. Г. новые методики исследования.

Подтверждением новизны разработок является наличие в них…
А. описания методики эксперимента. Б. изобретений. В. математической модели. Г. брэндов.

Задача прикладных НИР – это...
А. расширение знаний об объекте исследования. Б. разработка новых методик проведения эксперимента. В. создание новых математических методов. Г. делать открытия.

Дисперсия данных характеризует их…
А. среднее значение. Б. разброс. В. новизну. Г. практическую значимость.

Линия, аппроксимирующая опытные данные, должна…
А. проходить через каждую точку данных. Б. иметь минимальное количество изгибов. В. удовлетворять принятому критерию оптимальности. Г. совпадать с направлением первой производной в точках данных.