ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Программа курса,
контрольные задания
и методические указания

Санкт-Петербург
2009

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1 – 10. Решить систему уравнений тремя способами: по формулам Крамера, методом Гаусса-Жордана, средствами матричного исчисления. Сделать проверку правильности вычисления обратной матрицы.

1. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=5, \\ -x_1-2x_2+x_3=-3, \\ 4x_1-x_2-x_3=6. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3, \\ -2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1-x_2-x_3=-5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=4, \\ -5x_1-4x_2+x_3=-11, \\ 2x_1-x_2-3x_3=7. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=5, \\ -2x_1-5x_2+x_3=-7, \\ 2x_1-x_2-2x_3=3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=7, \\ -3x_1-5x_2+x_3=-11, \\ 2x_1-x_2-2x_3=0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+3x_3=4, \\ -2x_1+3x_2-x_3=-8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-3, \\ 3x_1-x_2+2x_3=-4, \\ -x_1+4x_2-x_3=1. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+x_2-4x_3=-1, \\ 4x_1-x_2+3x_3=-9, \\ -2x_1-x_2+x_3=3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1, \\ 5x_1+3x_2+x_3=1, \\ -x_1-2x_2+x_3=-3. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3=7, \\ -x_1+5x_2-x_3=-7. \end{cases}$

11 – 20. Даны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$. Показать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

11. $\bar{a}\,(1,-1,4)$, $\bar{b}\,(3,-2,-1)$, $\bar{c}\,(-2,1,-1)$, $\bar{d}\,(5,-3,6)$.
12. $\bar{a}\,(1,-2,3)$, $\bar{b}\,(2,-1,-1)$, $\bar{c}\,(-1,3,-1)$, $\bar{d}\,(3,0,-5)$.
13. $\bar{a}\,(1,-5,2)$, $\bar{b}\,(1,-4,-1)$, $\bar{c}\,(-2,1,-3)$, $\bar{d}\,(4,-11,7)$.
14. $\bar{a}\,(1,-2,$ [illegible] $)$, $\bar{b}\,(3,-5,-1)$, $\bar{c}\,(-1,1,-2)$, $\bar{d}\,(5,-7,3)$.
15. $\bar{a}\,(1,-3,2)$, $\bar{b}\,(2,-5,-1)$, $\bar{c}\,(-3,1,-2)$, $\bar{d}\,(7,-11,0)$.
16. $\bar{a}\,(1,2,-2)$, $\bar{b}\,(1,-1,3)$, $\bar{c}\,(-2,3,-1)$, $\bar{d}\,(-1,4,-8)$.
17. $\bar{a}\,(1,3,-1)$, $\bar{b}\,(2,-1,4)$, $\bar{c}\,(-1,2,-1)$, $\bar{d}\,(-3,-4,1)$.
18. $\bar{a}\,(1,4,-2)$, $\bar{b}\,(1,-1,-1)$, $\bar{c}\,(-4,3,1)$, $\bar{d}\,(-1,-9,3)$.
19. $\bar{a}\,(1,5,-1)$, $\bar{b}\,(1,3,-2)$, $\bar{c}\,(-2,1,1)$, $\bar{d}\,(1,1,-3)$.
20. $\bar{a}\,(1,3,-1)$, $\bar{b}\,(2,-1,5)$, $\bar{c}\,(-1,2,-1)$, $\bar{d}\,(0,7,-7)$.

21 – 30. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: а) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_3; б) площадь грани $A_1A_2A_3$; в) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; г) уравнение высоты, проходящей через A_4; д) объём пирамиды.

21. $A_1(1,-1,0)$, $A_2(2,-2,4)$, $A_3(4,-3,-1)$, $A_4(-1,0,-1)$.
22. $A_1(0,1,-1)$, $A_2(1,-1,2)$, $A_3(2,0,-2)$, $A_4(-1,4,-2)$.
23. $A_1(0,-1,1)$, $A_2(1,-6,3)$, $A_3(1,-5,0)$, $A_4(-2,0,-2)$.
24. $A_1(-1,1,0)$, $A_2(0,-1,2)$, $A_3(2,-4,-1)$, $A_4(-2,2,-2)$.
25. $A_1(1,0,-1)$, $A_2(2,-3,1)$, $A_3(3,-5,-2)$, $A_4(-2,1,-3)$.
26. $A_1(-1,0,1)$, $A_2(0,2,-1)$, $A_3(0,-1,4)$, $A_4(-3,3,0)$.
27. $A_1(1,1,-1)$, $A_2(2,4,-2)$, $A_3(3,0,3)$, $A_4(0,3,-2)$.
28. $A_1(-1,1,1)$, $A_2(0,5,-1)$, $A_3(0,0,0)$, $A_4(-5,4,2)$.
29. $A_1(1,-1,1)$, $A_2(2,4,0)$, $A_3(2,2,-1)$, $A_4(-1,0,2)$.
30. $A_1(0,0,-2)$, $A_2(1,3,-3)$, $A_3(2,-1,3)$, $A_4(-1,2,-3)$.

31 – 40. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Для эллипса найти координаты вершин и фокусов, для гиперболы – координаты вершин, фокусов и уравнения асимптот, для параболы – координаты фокуса и уравнение директрисы, для окружности – координаты центра и радиус. Сделать чертеж.

31. $(y-x)(x+y)=-4$. 32. $9(x-4)(x+4)=16y^2$. 33. $x+1=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

34. $x^2=(4-y)(4+y)$. 35. $16x^2=25(4-y)(4+y)$. 36. $4y^2=(2-x)(2+x)$.

37. $(3x-4y)(3x+4y)=144$. 38. $(x+1)^2=(x-y-1)(x+y-1)$.

39. $(4x+5y)^2=40(10+xy)$. 40. $(x-2)^2=(x-y+2)(x+y+2)$.

41 – 50. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

41. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+4}\right)^{-2x+1}$.

42. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-7}{2x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+4}\right)^{x+1}$.

43. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+4}{x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\,tg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{2x}$.

44. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x+1}{x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{x^2\,tg4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{-2x}$.

45. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{5x^3-x^2+4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x+2}\right)^{x}$.

46. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x}{2x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{x^2\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x+2}\right)^{\frac{8x+1}{2}}$.

47. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{3x^2+2x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{8+x}-\sqrt{10-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 ctgx}{tg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x+3}$.

48. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^2-5x+2}{5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{tg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{x+2}$.

49. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+x}{x^3+2x^2-x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+5}\right)^{\frac{x-5}{4}}$.

50. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)^{-x}$.

51 – 60. Найти точку разрыва заданной функции. Сделать чертёж.

51. $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{если}\ x<0; \\ x-1, & \text{если}\ 0\le x\le 3; \\ 5-x, & \text{если}\ x>3. \end{cases}$ 52. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если}\ x\le 0; \\ x^3, & \text{если}\ 0<x\le 1; \\ 3-x, & \text{если}\ x>1. \end{cases}$

53. $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{если}\ x\le -1; \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{если}\ -1<x\le 0; \\ 1-x, & \text{если}\ x>0. \end{cases}$ 54. $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{если}\ x\le -1; \\ x+2, & \text{если}\ -1<x\le 1; \\ 4, & \text{если}\ x>1. \end{cases}$

55. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если}\ x\le 0; \\ 3^x, & \text{если}\ 0<x\le 1; \\ x+3, & \text{если}\ x>1. \end{cases}$ 56. $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{если}\ x\le -1; \\ x^3, & \text{если}\ -1<x\le 1; \\ 2-x, & \text{если}\ x>1. \end{cases}$

57. $f(x)=\begin{cases} 2-x, & \text{если}\ x\le 0; \\ \sqrt{x}, & \text{если}\ 0<x\le 4; \\ 6-x, & \text{если}\ x>4. \end{cases}$ 58. $f(x)=\begin{cases} -x-1, & \text{если}\ x\le 0; \\ x^2-1, & \text{если}\ 0<x\le 2; \\ 3-x, & \text{если}\ x>2. \end{cases}$

59. $f(x)=\begin{cases} -x-1, & \text{если}\ x\le -1; \\ (x+1)^2, & \text{если}\ -1<x\le 0; \\ x, & \text{если}\ x>0. \end{cases}$ 60. $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если}\ x\le -2; \\ \sqrt{4-x^2}, & \text{если}\ -2<x\le 2; \\ x, & \text{если}\ x>2. \end{cases}$

61 – 70. Найти производные заданных функций.

61. а) $\frac{1}{1-2x}$; б) $e^{arcctg^3\sqrt{x}}$; в) $3x\sin\frac{x}{3}$; г) $\frac{x}{x^3+1}$; д) $\ln\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

62. а) $\sqrt[3]{3x+2}$; б) $5x\,ctg\frac{x}{5}$; в) $\left(2^{\frac{1}{arctgx}}+x\right)^3$; г) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; д) $\ln\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$.

63. а) $\frac{1}{(x-5)^3}$; б) $2x\,tg\frac{x}{2}$; в) $\left(\arccos\sqrt{x}+e^{\frac{1}{x}}\right)^2$; г) $\frac{\sin 2x}{1+\cos x}$; д) $\ln\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

64. а) $\sqrt{2x-3}$; б) $3x\,ctg\frac{1}{x}$; в) $\left(\arccos 2x+3^{\frac{x}{2}}\right)^2$; г) $\frac{1-x^3}{1+x^3}$; д) $\ln\sqrt[3]{\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}}$.

65. а) $\frac{1}{3x-2}$; б) $4x\,ctg\frac{x}{4}$; в) $\left(arctg\sqrt{x}+e^{-x}\right)^2$; г) $\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$; д) $\ln\sqrt[3]{\frac{1+\cos 3x}{1-\cos 3x}}$.

66. а) $\sqrt{(4x+1)^3}$; б) $2xe^{-\frac{x^2}{2}}$; в) $\sqrt{x+ctg\frac{1}{x}}$; г) $\frac{arctgx}{arcctgx}$; д) $\ln\sqrt[5]{\frac{1+\cos 5x}{1-\cos 5x}}$.

67. а) $\frac{1}{2x+3}$; б) $5x\cos\frac{x}{5}$; в) $\left(\arcsin\sqrt{x}+ctgx\right)^3$; г) $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$; д) $\ln\sqrt[4]{\frac{1+x^4}{1-x^4}}$.

68. а) $\sqrt[4]{1-2x}$; б) $2x\,arctg\frac{x}{2}$; в) $e^{tg^2\frac{1}{x}}$; г) $\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}$; д) $\ln\sqrt[4]{\frac{1+\sin 4x}{1-\sin 4x}}$.

69. а) $\frac{1}{(x+2)^4}$; б) $2\,arctg^3 e^x$; в) $x\sqrt{tg\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)}$; г) $\frac{2^{3x}}{2^{3x}-1}$; д) $\ln\sqrt[4]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}}$.

70. а) $\sqrt{1-x^2}$; б) $\arcsin^2 x+\arcsin x^2$; в) $5^{\frac{1}{x}}x^5$; г) $\frac{1+x^4}{1-x^4}$; д) $\ln\sqrt[5]{\frac{1+\sin 5x}{1-\sin 5x}}$.

71 – 80. Вычислить производные: а) степенно-показательной функции, б) неявно заданной функции, в) параметрически заданной функции.

71. а) $y=(3x+2)^{\arcsin x}$; б) $y^{12}+x^{12}-12xy=0$; в) $x=t^3+3t,\ \ y=3arctgt$.
72. а) $y=(2x+1)^{\sin x}$; б) $y^{11}+x^{11}-11xy=0$; в) $x=t^4+4t,\ \ y=4\arccos t$.
73. а) $y=(\arcsin x)^{\cos x}$; б) $y^{10}+x^{10}-10xy=0$; в) $x=t^5+5t,\ \ y=5\ln t$.
74. а) $y=(x^2+2)^{\frac{1}{x+1}}$; б) $y^9+x^9-9xy=0$; в) $x=t^6+6t,\ \ y=6\sin t$.
75. а) $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; б) $y^8+x^8-8xy=0$; в) $x=t^7+7t,\ \ y=7\cos t$.
76. а) $y=(x^2+1)^{arctgx}$; б) $y^7+x^7-7xy=0$; в) $x=t^8+8t,\ \ y=8ctgt$.

77. а) $y=(arctgx)^{\sqrt{x}}$; б) $y^6+x^6-6xy=0$; в) $x=t^9+9t,\quad y=e^{9t}$.

78. а) $y=(\sin x)^{x^3}$; б) $y^5+x^5-5xy=0$; в) $x=t-arctg\,t,\quad y=\ln(1+t^2)$.

79. а) $y=(\sqrt{x}+1)^{x^2}$; б) $y^4+x^4-4xy=0$; в) $x=t+\ln t,\quad y=2\sqrt{t}$.

80. а) $y=(\ln x)^{\sqrt{x}}$; б) $y^3+x^3-3xy=0$; в) $x=t^2+2t,\quad y=2\arcsin t$.

81 – 90. Написать уравнение касательной, проведённой к графику данной функции параллельно данной прямой. Если таких касательных две, привести уравнение только одной из них.

81. $y=\sqrt{x}$; $x-4y=4$. 82. $y=\ln x$; $x-y=1$. 83. $y=arctg\,x$; $x-2y=1$.

84. $y=x^3$; $6x-8y=1$. 85. $y=\sqrt[3]{x^2}$; $2x-3y=1$. 86. $y=\sqrt{2x-1}$; $x-3y=5$.

87. $y=x^3+3x^2+3x$; $y=1$. 88. $y=\sqrt{25-x^2}$; $3x+4y=3$.

89. $y=x^3-2x$; $2x+y=3$. 90. $y=\sqrt{1-x}$; $x+4y+3=0$.

91 – 100. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке.

91. $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+5$; $[-3,\ 3]$. 92. $y=x^4-8x^2+12$; $[-2,\ 3]$.

93. $y=3x-\sqrt{x}$; $[0,\ 1]$. 94. $y=2\sqrt{x}-3x$; $[0,\ 4]$.

95. $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x+7$; $[2,\ 4]$. 96. $y=\sqrt{x^2-16}$; $[5,\ 7]$.

97. $y=\frac{3x+1}{x+2}$; $[0,\ 2]$. 98. $y=2x+\sin x$; $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

99. $y=x\ln x+1$; $[1,\ e]$. 100. $y=\frac{e^x}{3}+1$; $[-2,\ 2]$.

101 – 110. Исследовать заданные функции и построить их графики.

101. а) $y=x(x-3)^2$; б) $y=e^{\frac{1}{x+2}}$. 102. а) $y=x(x+3)^2$; б) $y=e^{\frac{1}{x-2}}$.

103. а) $y=(x-1)(x-4)^2$; б) $y=e^{\frac{1}{x+3}}$. 104. а) $y=(x+1)(x+4)^2$; б) $y=e^{\frac{1}{x-3}}$.

105. а) $y=(x-4)(x-1)^2$; б) $y=\frac{1}{e^x-1}$. 106. а) $y=(x+4)(x+1)^2$; б) $y=\frac{x^2+2}{x}$.

107. а) $y=(x-2)(x-5)^2$; б) $y=\frac{x^2+3}{x}$. 108. а) $y=(x-5)(x-2)^2$; б) $y=\frac{x^2-1}{x}$.

109. а) $y=(x+5)(x+2)^2$; б) $y=\frac{x^2-3}{x}$. 110. а) $y=(x+2)(x+5)^2$; б) $y=\frac{x^2-2}{x}$.

111 – 120. Вычислить вторые частные производные заданной функции двух переменных. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

111. $z=e^{\frac{x}{y}}$; 112. $z=\frac{\sqrt{x}}{y}$; 113. $z=arctg\frac{y}{x}$; 114. $z=\sqrt{xy}$;

115. $z=\cos(x^2y)$; 116. $z=arctg(xy)$; 117. $z=\sin(x^3y^2)$;

118. $z=\sqrt{x^2+y^2}$; 119. $z=e^{x^2y}$; 120. $z=\ln(x^2+y^2)$.

121 – 130. Вычислить производную степенно-показательной функции $y=[u(x)]^{v(x)}$ из пункта а) задач **71 – 80**, рассматривая эту функцию, как суперпозицию функции двух переменных $y=u^v$ и функций одной переменной $u=u(x)$ и $v=v(x)$. Вычислить производную функции $y=y(x)$, неявно заданной уравнением $f(x,y)=0$ в пункте б) задач **71 – 80**, используя формулу $y'=-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}$.

131 – 140. Исследовать функцию $z=f(x,y)$ на экстремум и вычислить производную этой функции в точке M по направлению вектора $\bar{l}$.

131. $z=\frac{x^3}{2}+xy+\frac{y^2}{3}$; $M(0,3)$; $\bar{l}(3,4)$.

132. $z=\frac{x^3}{3}+xy+\frac{y^2}{2}$; $M(-1,0)$; $\bar{l}(4,3)$.

133. $z=-\frac{x^3}{2}+xy-\frac{y^2}{3}$; $M(2,3)$; $\bar{l}(-3,-4)$.

134. $z=-\frac{x^3}{3}+xy-\frac{y^2}{2}$; $M(2,0)$; $\bar{l}(-4,-3)$.

135. $z=\frac{x^3}{6}+xy+y^2$; $M(-2,1)$; $\bar{l}(5,12)$.

136. $z=-\frac{x^3}{6}+xy-y^2$; $M(2,1)$; $\bar{l}(12,5)$.

137. $z=\frac{x^3}{2}+xy-\frac{y^2}{3}$; $M(0,-3)$; $\bar{l}(3,-4)$.

138. $z=\frac{x^3}{3}+xy-\frac{y^2}{2}$; $M(0,2)$; $\bar{l}(-3,4)$.

139. $z=x^3+xy+\frac{y^2}{6}$; $M(1,0)$; $\bar{l}(4,-3)$.

140. $z=-x^3+xy-\frac{y^2}{6}$; $M(0,-6)$; $\bar{l}(-4,3)$.

141 – 150. Вычислить неопределённые и определённые интегралы. В пунктах а) и б) сделать проверку.

141. а) $\int\frac{1}{2x+3}dx$; б) $\int\frac{e^x}{\sin^2 e^x}dx$; в) $\int\frac{4x^2-3x+12}{x^2(x^2+3)}dx$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-3}$; д) $\int_e^{e^4}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$; е) $\int_0^{\pi}x\sin\frac{x}{2}dx$.

142. а) $\int\frac{1}{\sqrt{3-2x}}dx$; б) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$; в) $\int\frac{13}{(x^2+4)(x+3)}dx$;

г) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{3x+1}}$; д) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; е) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos 2x dx$.

143. а) $\int\frac{1}{(2x+1)^2}dx$; б) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int\frac{3x^2-5x+15}{x^2(x^2+5)}dx$;

г) $\int\frac{dx}{2-\sqrt{x+1}}$; д) $\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$; е) $\int_0^{\pi}x\cos\frac{x}{2}dx$.

144. а) $\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$; б) $\int\frac{arctg\,x}{1+x^2}dx$; в) $\int\frac{29}{(x^2+4)(x-5)}dx$;

г) $\int\frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}dx$; д) $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$; е) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}}x\sin\frac{x}{3}dx$.

145. а) $\int e^{5x}dx$; б) $\int\frac{1}{x\ln^2 x}dx$; в) $\int\frac{2x^2-7x+14}{x^2(x^2+7)}dx$;

г) $\int\frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$; д) $\int_0^2\frac{x^2}{x^3+1}dx$; е) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}}x\cos\frac{x}{3}dx$.

146. а) $\int\frac{1}{\sin^2 3x}dx$; б) $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\frac{13}{(x^2+9)(x-2)}dx$;

г) $\int\frac{\sqrt{x+2}}{x+1}dx$; д) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin x\,dx$; е) $\int_0^1 xe^{\frac{x}{5}}dx$.

147. а) $\int\sqrt[3]{1-3x}\,dx$; б) $\int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$; в) $\int\frac{5x^2-2x+10}{x^2(x^2+2)}dx$;

г) $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$; д) $\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$; е) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin 2xdx$.

148. а) $\int\cos\frac{x}{4}dx$; б) $\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$; в) $\int\frac{10}{(x^2+9)(x+1)}dx$;

г) $\int\frac{dx}{9-\sqrt[3]{x^2}}$; д) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; е) $\int_0^1 x^2e^{2x}dx$.

149. а) $\int\sin 3x\,dx$; б) $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; в) $\int\frac{6x-x^2-6}{x^2(x^2+6)}dx$;

г) $\int\frac{dx}{4+\sqrt[3]{x^2}}$; д) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos x\,dx$; е) $\int_1^e x^2\ln xdx$.

150. а) $\int\frac{1}{(2x+1)^3}dx$; б) $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$; в) $\int\frac{x^2-8x+8}{x^2(x^2+8)}dx$;

г) $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{3+\sqrt[3]{x^2}}$; д) $\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; е) $\int_1^e x^3\ln xdx$.

151 – 160. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

151. а) $\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$; б) $\int_{-1}^2\frac{1}{x^3}dx$. 152. а) $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^6}dx$; б) $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos^2 x}dx$.

153. а) $\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$. 154. а) $\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2}dx$; б) $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2 x}dx$.

155. а) $\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$; б) $\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. 156. а) $\int_0^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$; б) $\int_{-1}^2\frac{1}{x^2}dx$.

157. а) $\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{2}}dx$; б) $\int_2^4\frac{1}{(x-3)^2}dx$. 158. а) $\int_0^{\infty}e^{-x}dx$; б) $\int_{-4}^1\frac{1}{(x+3)^2}dx$.

159. а) $\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{5}}dx$; б) $\int_1^2\frac{1}{x-2}dx$. 160. а) $\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{3}}dx$; б) $\int_{-2}^0\frac{1}{(x+1)^2}dx$.

161 – 170. В пункте а) вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками заданных функций; в пункте б) вычислить площадь S криволинейной трапеции, огранченной сверху графиком заданной на отрезке $[a,b]$ функции, длину L кривой, являющейся графиком этой функции, а также объём V тела, ограниченного плоскостью $x=b$ и поверхностью, образованной вращением вокруг оси OX графика заданной функции.

161. а) $y=4-\frac{2}{3}x^2,\quad y=\frac{x^2}{3}$; б) $y=\sqrt{2-x^2}$, $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

162. а) $y=1-x^2,\quad y=x^2-1$; б) $y=\sqrt{81-x^2}$, $\left[0,\frac{9}{2}\right]$.

163. а) $y=1-x^2$, $y+x+1=0$; б) $y=\sqrt{4-x^2}$, $[0,1]$.

164. а) $y=x^2+1$, $y=x+3$; б) $y=\sqrt{36-x^2}$, $[0,3]$.

165. а) $y=x^2-1$, $y=x+1$; б) $y=\sqrt{64-x^2}$, $[0,4]$.

166. а) $y=2x-x^2$, $y=-x$; б) $y=\sqrt{9-x^2}$, $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

167. а) $y=x^2$, $y=3-2x$; б) $y=\sqrt{100-x^2}$, $[0,5]$.

168. а) $y=\frac{x^2}{2}$, $y=x^2-1$; б) $y=\sqrt{49-x^2}$, $\left[0,\frac{7}{2}\right]$.

169. а) $y=x^2$, $y=2-x^2$; б) $y=\sqrt{16-x^2}$, $[0,2]$.

170. а) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt{25-x^2}$, $\left[0,\frac{5}{2}\right]$.

171 – 180. В пункте а) решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка, сделать проверку; в пункте б) найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

171. а) $y'-3y^2=0$; $y(0)=-\frac{1}{2}$; б) $y'-y\,tgx=\frac{1}{\cos x}$.

172. а) $y'-8\sqrt{yx^3}=0$; $y(0)=1$; б) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$.

173. а) $xyy'=1+x^2$; $y(1)=1$; б) $y'+\frac{y}{x}=\frac{e^x}{x}$.

174. а) $yy'-\frac{3}{2}x^2=0$; $y(0)=1$; б) $xy'-y=x^3$.

175. а) $y'+2xy^2=0$; $y(0)=\frac{1}{2}$; б) $y'-\frac{y}{x}=x$.

176. а) $x^2y'=2\sqrt{y}$; $y(-1)=1$; б) $xy'-y=x^4$.

177. а) $(1+x^2)y'=y$; $y(0)=1$; б) $xy'+y=\sin x$.

178. а) $x^2y'=y^2$; $y(1)=1$; б) $y'-y\,ctgx=\sin x$.

179. а) $x^2y'=y$; $y(-1)=e$; б) $xy'+y=x\sin x$.

180. а) $2\sqrt{x}y'=y$; $y(1)=1$; б) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

181 – 190. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

181. $y''+2y'+5y=5x^2+4x+2$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

182. $y''+2y'+y=x^2+3x$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

183. $y''+2y'+2y=x^2+4x+1$, $y(0)=-1$, $y'(0)=1$.

184. $y''-2y'+y=e^{2x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

185. $y''+4y=4x-8$, $y(0)=-2$, $y'(0)=1$.

186. $y''+4y'+4y=3\sin x+4\cos x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

187. $y''+4y'+5y=5x+4$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

188. $y''-4y'+4y=4\sin x+3\cos x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

189. $y''-4y'+5y=5x+1$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

190. $y''+9y=3x^3+2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

191 – 200. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа).

191. $y''-y'=e^{2x}\cos e^x$. 192. $y''+y=-ctg^2x$. 193. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2+1}$.

194. $y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}$. 195. $y''-y'=\frac{e^x}{e^x+1}$. 196. $y''-4y'+5y=\frac{e^{2x}}{\cos x}$.

197. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2}$. 198. $y''+4y=\frac{1}{\sin^2 2x}$. 199. $y''-y'=e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$.

200. $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{x}$.

201 – 210. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений при помощи характеристического уравнения.

201. $\begin{cases} x'=-3y, \\ y'=-x-2y. \end{cases}$ 202. $\begin{cases} x'=4y, \\ y'=2x+2y. \end{cases}$ 203. $\begin{cases} x'=-4y, \\ y'=-2x-2y. \end{cases}$

204. $\begin{cases} x'=5y, \\ y'=3x+2y. \end{cases}$ 205. $\begin{cases} x'=-2x+y, \\ y'=-3y. \end{cases}$ 206. $\begin{cases} x'=-y, \\ y'=2x-3y. \end{cases}$

207. $\begin{cases} x'=2x+y, \\ y'=-4y. \end{cases}$ 208. $\begin{cases} x'=2y, \\ y'=x+y. \end{cases}$ 209. $\begin{cases} x'=-2y, \\ y'=-x-y. \end{cases}$ 210. $\begin{cases} x'=3y, \\ y'=x+2y. \end{cases}$

211 – 220. В пункте а) вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной осями координат, заданной прямой и графиком заданной функции; в пункте б) вычислить при помощи двойного интеграла площадь фигуры, ограниченной графиками заданных функций.

211. а) $\iint\limits_D \frac{x+3y^2-10}{\sqrt{3x+10}}dxdy$; $x=2$; $y=\sqrt{3x+10}$; б) $y=4-\frac{2}{3}x^2$, $y=\frac{x^2}{3}$.

212. а) $\iint\limits_D \frac{2x+3y^2-9}{\sqrt{4x+9}}dxdy$; $x=1$; $y=\sqrt{4x+9}$; б) $y=1-x^2$, $y=x^2-1$.

213. а) $\iint\limits_D \frac{3x+3y^2-2}{\sqrt{5x+2}}dxdy$; $x=2$; $y=\sqrt{5x+2}$; б) $y=1-x^2$, $y+x+1=0$.

214. а) $\iint\limits_D \frac{4x+3y^2-5}{\sqrt{6x+5}}dxdy$; $x=2$; $y=\sqrt{6x+5}$; б) $y=x^2+1$, $y=x+3$.

215. а) $\iint\limits_D \frac{5x+3y^2-6}{\sqrt{7x+6}}dxdy$; $x=1$; $y=\sqrt{7x+6}$; б) $y=x^2-1$, $y=x+1$.

216. а) $\iint\limits_D \frac{6x+3y^2-1}{\sqrt{8x+1}}dxdy$; $x=1$; $y=\sqrt{8x+1}$; б) $y=2x-x^2$, $y=-x$.

217. а) $\iint\limits_D \frac{3x+3y^2-8}{\sqrt{5x+8}}dxdy$; $x=2$; $y=\sqrt{5x+8}$; б) $y=x^2$, $y=3-2x$.

218. а) $\iint\limits_D \frac{4x+3y^2-7}{\sqrt{6x+7}}dxdy$; $x=1$; $y=\sqrt{6x+7}$; б) $y=\frac{x^2}{2}$, $y=x^2-1$.

219. а) $\iint\limits_D \frac{5x+3y^2-4}{\sqrt{7x+4}}dxdy$; $x=2$; $y=\sqrt{7x+4}$; б) $y=x^2$, $y=2-x^2$.

220. а) $\iint\limits_D \frac{6x+3y^2-5}{\sqrt{8x+5}}dxdy$; $x=1$; $y=\sqrt{8x+5}$; б) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

221 – 230. Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл наиболее удобным способом: либо по отрезку прямой, соединяющему начальную и конечную точки пути интегрирования, либо по ломаной, состоящей из двух отрезков, параллельных координатным осям.

221. $\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx+ydy$. 222. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy+ydx$. 223. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdx+ydy$. 224. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy+ydx$.

225. $\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} xdy+ydx$. 226. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)^2(dx+dy)$. 227. $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx+(x-y)dy$.

228. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)^3(dx+dy)$. 229. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)(dx+dy)$. 230. $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$.

231 – 240. Найти область сходимости степенного ряда.

231. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$. 232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n^2}$. 233. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}2^n}$. 234. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}$. 235. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^2}$.

236. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}$. 237. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n6^n}$. 238. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n^2}$. 239. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n x^n}{\sqrt{n}}$. 240. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n5^n}$.

241 – 250. Вычислить приближённо определённый интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно.

241. $\int\limits_0^{0,4}\frac{\sin 2x}{x}dx$. 242. $\int\limits_0^{1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. 243. $\int\limits_0^{1}\sin x^2 dx$. 244. $\int\limits_0^{0,16}e^{-\sqrt{x}}dx$.

245. $\int\limits_0^{0,1}\frac{e^{3x}-1}{x}dx$. 246. $\int\limits_0^{0,5}\sqrt[4]{1-x^4}\,dx$. 247. $\int\limits_0^{1}\cos\sqrt{x}\,dx$.

248. $\int\limits_0^{0,2}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx$. 249. $\int\limits_0^{1/3}\frac{1-\cos 3x}{x^2}dx$. 250. $\int\limits_0^{0,5}\frac{1}{(1+x^4)^3}dx$.

251 – 260. Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения заданного дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию.

251. $y'=\frac{1}{3}y^3+\sin 3x$, $y(0)=1$. 252. $y'=2\cos 2x-xy^2$, $y(0)=0$.

253. $y'=3y^2+2x^3$, $y(0)=2$. 254. $y'=3y^3+\cos 3x$, $y(0)=1$.

255. $y'=4xy^3+e^{-x}$, $y(0)=1$. 256. $y'=e^{3x}-2xy^2$, $y(0)=3$.

257. $y'=y^2+e^{-2x}+\sin 2x$, $y(0)=1$. 258. $y'=2xy^2+4\sin 2x$, $y(0)=2$.

259. $y'=2xy^3+3\sin 4x$, $y(0)=1$. 260. $y'=xy^2+\cos 4x$, $y(0)=1$.

261 – 270. Разложить заданную функцию в ряд Фурье.

261. $f(x)=\begin{cases}-1, & если\ -2<x<0; \\ 2, & если\ \ 0\le x<2.\end{cases}$ 262. $f(x)=\begin{cases}1, & если\ -2<x<0; \\ 3, & если\ \ 0\le x<2.\end{cases}$

263. $f(x)=\begin{cases}1, & если\ -3<x<0; \\ 3, & если\ \ 0\le x<3.\end{cases}$ 264. $f(x)=\begin{cases}3, & если\ -3<x<0; \\ -1, & если\ \ 0\le x<3.\end{cases}$

265. $f(x)=\begin{cases}-5, & если\ -4<x<0; \\ 3, & если\ \ 0\le x<4.\end{cases}$ 266. $f(x)=\begin{cases}-1, & если\ -4<x<0; \\ 5, & если\ \ 0\le x<4.\end{cases}$

267. $f(x)=\begin{cases}-6, & если\ -5<x<0;\\ 4, & если\ \ 0\le x<5.\end{cases}$ 268. $f(x)=\begin{cases}5, & если\ -5<x<0;\\ -3, & если\ \ 0\le x\le 5.\end{cases}$

269. $f(x)=\begin{cases}4, & если\ -6<x<0;\\ -2, & если\ \ 0\le x<6.\end{cases}$ 270. $f(x)=\begin{cases}-2, & если\ -6<x<0;\\ 10, & если\ \ 0\le x<6.\end{cases}$

271 – 280. Средствами операционного исчисления найти частное решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

271. $x''+2x'+5x=5t^2+4t+2$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

272. $x''+2x'+x=t^2+3t$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$.

273. $x''+2x'+2x=t^2+4t+1$, $x(0)=-1$, $x'(0)=1$.

274. $x''-2x'+x=e^{2t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=2$.

275. $x''+4x=4t-8$, $x(0)=-2$, $x'(0)=1$.

276. $x''+4x'+4x=3\sin t+4\cos t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

277. $x''+4x'+5x=5t+4$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

278. $x''-4x'+4x=4\sin t+3\cos t$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

279. $x''-4x'+5x=5t+1$, $x(0)=1$, $x'(0)=1$.

280. $x''+9x=3t^3+2t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

281 – 290. Средствами операционного исчисления найти частное решение для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

281. $\begin{cases}x'=2x+y+e^t, & x(0)=0,\\ y'=-2x+2t; & y(0)=-3.\end{cases}$ 282. $\begin{cases}x'=3x+2y+4e^{5t}, & x(0)=0,\\ y'=x+2y; & y(0)=1.\end{cases}$

283. $\begin{cases}x'=5x-3y+2e^{3t}, & x(0)=1,\\ y'=x+y+5e^{-t}; & y(0)=0.\end{cases}$ 284. $\begin{cases}x'=y-5\cos t, & x(0)=1,\\ y'=2x+y; & y(0)=1.\end{cases}$

285. $\begin{cases}x'=2x-4y+4e^{-2t}, & x(0)=0,\\ y'=2x-2y; & y(0)=0.\end{cases}$ 286. $\begin{cases}x'=y+2e^t, & x(0)=0,\\ y'=x+t^2; & y(0)=1.\end{cases}$

287. $\begin{cases}x'=4x-3y+\sin t, & x(0)=0,\\ y'=2x-y-2\cos t; & y(0)=2.\end{cases}$ 288. $\begin{cases}x'=x+2y, & x(0)=2,\\ y'=x-5\sin t; & y(0)=2.\end{cases}$

289. $\begin{cases}x'=-x+2y+1, & x(0)=0,\\ y'=-2x+3y; & y(0)=0.\end{cases}$ 290. $\begin{cases}x'=4x+y-e^{2t}, & x(0)=0,\\ y'=-2x+y; & y(0)=0.\end{cases}$

291 – 300. Задачи на классическое определение вероятности и теоремы сложения, умножения.

291. В одной из коробок 4 белых и 8 чёрных шариков, в другой – 3 белых и 12 чёрных. Из каждой коробки наугад извлекается шарик. Какова вероятность того, что они разноцветные ?

292. Студент выучил 8 из 10 вопросов по первому разделу курса и 9 из 12 – по второму. В билете содержится по одному вопросу из каждого раздела. Какова вероятность получения зачёта для этого студента, если зачёт ставится при условии, что хотя бы на один из вопросов дан правильный ответ ?

293. Проводятся две лотереи. В одной из 100 билетов 20 выигрышных, в другой 120 билетов, среди которых 30 выигрышных. Какова вероятность того, что, имея по одному билету каждой из лотерей, получишь хотя бы один выигрыш ?

294. В одной из коробок 6 белых и 4 чёрных шарика, в другой – 8 белых и два чёрных. Из каждой коробки наугад извлекается шарик. Какова вероятность того, что они оба чёрные ?

295. Студент выучил 5 из 10 вопросов по первому разделу курса и 8 из 12 вопросов – по второму. В билете содержится по одному вопросу из каждого раздела. Какова вероятность получения зачёта для этого студента, если зачёт ставится при условии, что на оба вопроса дан правильный ответ ?

296. Проводятся две лотереи. В одной из 40 билетов 10 выигрышных, в другой 30 билетов, среди которых 15 выигрышных. Какова вероятность того, что, имея по одному билету каждой из лотерей, выиграешь дважды ?

297. В одном из ящиков лежат 6 исправных и 2 неисправные детали, в другом соответственно 8 и 4. Из каждого ящика наугад берут одну деталь. Какова вероятность того, что только одна из них окажется исправной ?

298. В одной из коробок 5 белых и 10 чёрных шариков, в другой – 3 белых и 9 чёрных. Из каждой коробки наугад извлекается шарик. Какова вероятность того, что хотя бы один из них белый ?

299. Студент выучил 6 из 18 вопросов по первому разделу курса и 4 из 16 – по второму. В билете содержится по одному вопросу из каждого раздела. Какова вероятность того, что студент не сдаст зачёт, если зачёт ставится при условии, что хотя бы на один из вопросов дан правильный ответ ?

300. Проводятся две лотереи. В одной из 20 билетов 5 выигрышных, в другой 25 билетов, среди которых 10 выигрышных. Какова вероятность того, что, имея по одному билету каждой из лотерей, ничего не выиграешь ?

301 – 310. Задачи на формулу Бернулли.

301. Игральную кость бросают 5 раз. Какова вероятность того, что тройка выпадет дважды ?

302. Монету бросают 9 раз. Какова вероятность того, что цифра появится в два раза чаще, чем герб ?

303. Какова вероятность того, что в семье, имеющей четверо детей, девочек и мальчиков поровну ?

304. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,8. Какова вероятность двух промахов при шести выстрелах ?

305. Монету бросают 8 раз. Какова вероятность того, что орёл и решка выпадут поровну ?

306. Игральную кость бросают 6 раз. Какова вероятность того, что чётное число очков выпадет трижды ?

307. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,7. Какова вероятность только одного попадания при трёх выстрелах ?

308. Игральную кость бросают 6 раз. Какова вероятность того, что дважды выпадет число очков, делящееся на три ?

309. Бросают 5 монет. Какова вероятность того, что только на одной из них выпадет герб ?

310. Игральную кость бросают 6 раз. Какова вероятность того, что нечётное число очков выпадет в два раза чаще, чем чётное ?

311 – 320. Дискретная случайная величина задана своим законом распределения. Заполнить пустую клетку таблицы и найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Построить график её функции распределения.

311.

X	–4	0	5
P	0,1	0,8	

312.

X	0	2	6
P	0,7		0,1

313.

X	–3	–1	0
P		0,2	0,6

314.

X	–1	0	5
P	0,4	0,5	

315.

X	0	3	4
P	0,8		0,1

316.

X	–4	–2	0
P		0,2	0,7

317.

X	–2	0	4
P	0,3	0,6	

318.

X	0	1	3
P	0,5		0,2

319.

X	–2	–1	0
P		0,3	0,4

320.

X	–2	0	1
P	0,2	0,3	

321 – 330. Непрерывная случайная величина задана своей функцией распределения *F(x)*. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины. Построить графики функции и плотности распределения.

321. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{4}{\pi}\,arctg\,x, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 322. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \ln x, & 1<x\le e;\\ 1, & x>e.\end{cases}$

323. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2x-x^2, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 324. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sqrt{x^3}, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

325. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{2}{\pi}\,arctg\,x+\frac{1}{2}, & -1<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 326. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{1}{8}(x+1)^3, & -1<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

327. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 2x^2-x^3, & 0<x\le 1; \\ 1, & x>1. \end{cases}$ 328. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \frac{1}{4}\left(2+3x-x^3\right), & -1<x\le 1; \\ 1, & x>1. \end{cases}$

329. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \frac{1}{4}(x+1)^2, & -1<x\le 1; \\ 1, & x>1. \end{cases}$ 330. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \sqrt{x}-1, & 1<x\le 4; \\ 1, & x>4. \end{cases}$

331 – 340. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Найти вероятность попадания этой случайной величины в интервал (α,β).

331. $a=42,\ \sigma=12,\ \alpha=36,\ \beta=54.$ 332. $a=12,\ \sigma=4,\ \alpha=6,\ \beta=16.$

333. $a=25,\ \sigma=5,\ \alpha=15,\ \beta=30.$ 334. $a=15,\ \sigma=6,\ \alpha=6,\ \beta=18.$

335. $a=40,\ \sigma=10,\ \alpha=35,\ \beta=55.$ 336. $a=7,\ \sigma=2,\ \alpha=2,\ \beta=10.$

337. $a=17,\ \sigma=3,\ \alpha=14,\ \beta=23.$ 338. $a=9,\ \sigma=2,\ \alpha=11,\ \beta=14.$

339. $a=10,\ \sigma=4,\ \alpha=8,\ \beta=18.$ 340. $a=37,\ \sigma=7,\ \alpha=30,\ \beta=44.$

КОММЕНТАРИИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

1 – 10. Пусть дана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

Вычислим Δ, определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, по формуле

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$ где $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, а M_{ij} – определитель, получающийся из исходного вычёркиванием i – й строки и j – го столбца.

(M_{ij} и A_{ij} называются соответственно минором и алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A, индексы i и j элемента a_{ij} имеют следующий смысл: i – номер строки, j – номер столбца.)

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

(Определитель II порядка вычисляется по формуле $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-cb$.)

Если главный определитель системы Δ отличен от нуля, решение можно найти по формулам Крамера $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$, где

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Прежде чем переходить к решению системы матричным методом, следует научиться перемножать матрицы. Если число столбцов одной матрицы совпадает с числом строк другой, то первую матрицу можно умножить на вторую. В результате получится матрица, содержащая столько же строк, сколько и первая, и столько же столбцов, сколько и вторая. Чтобы вычислить элемент этой матрицы, стоящий на пересечении i – й строки и j – го столбца, нужно элементы i – й строки первой матрицы умножить на соответствующие элементы j – го