2 ПРИМЕРЫ

2.1. Однократные измерения

Пример 1. Миллиамперметр класса точности 2 имеет предел измерений 150 мА. Определить предельно допускаемую погрешность, расширенную и суммарную стандартную неопределенность единичного измерения.
Решение: Предельно допускаемая погрешность равна $\Delta x_{пр} = 150 \cdot 0{,}02 = 3$ мА. Оценка расширенной неопределенности имеет то же значение $U = 3$ мА. Оценка суммарной неопределенности, с учетом того, что предельная погрешность указана, скорее всего, для доверительной вероятности 0,997 («три сигмы»), равна $u_C = 3/3 = 1$ мА. Стандартные неопределенности по типу A и B оценить в данной ситуации невозможно.

Пример 2. Падение напряжения на сопротивлении $R = 100$ Ом измерено вольтметром с внутренним сопротивлением $R_{вн} = 1000$ Ом. Оцените относительную методическую погрешность измерения падения напряжения на сопротивлении. Какую неопределенность можно оценить по этим данным?
Решение: Измеряемое вольтметром напряжение определяется по формуле:
$U_{изм} = U_R R_{вн}/(R + R_{вн})$.
Относительная методическая погрешность измерения U_R равна:
$\delta_{UR} = (U_{изм} - U_R)/U_R = -R/(R + R_{вн}) = -100/(100 + 1000) \approx -0{,}09$.
По приведенным сведениям можно оценить относительную стандартную неопределенность по типу B: $u_B = 0{,}09$.

Пример 3. Необходимо измерить массу $m = 400$ мг. Имеются электронные весы: класса точности 0,1 с верхним пределом измерения 10 кг и класса точности 0,5 с верхним пределом измерения 2 кг. Обоснуйте выбор прибора, дающего более точный результат.
Решение: Пределы допускаемых основных погрешностей весов равны:
$\Delta m_1 = \gamma m_н = \pm (0{,}1 \cdot 10/100) = \pm 0{,}01$ кг;
$\Delta m_2 = \gamma m_н = \pm (0{,}5 \cdot 2/100) = \pm 0{,}01$ кг.
При измерении на весах класса точности 0,1 относительная погрешность измерения массы 400 мг составит $\pm (10/400) = \pm 0{,}025$, и на весах класса точности 0,5 $\pm (10/400) = \pm 0{,}025$. Таким образом, в данном случае, нельзя отдать предпочтение тем или иным весам.

Пример 4. Погрешность образцового прибора должна быть меньше нормируемой погрешности поверяемого прибора по меньшей мере в 3 раза. Каким должен быть класс точности образцового прибора, если его верхний предел измерения превышает верхний предел измерения поверяемого прибора класса 2,5 в 2 раза?
Решение: Класс точности образцового прибора $\gamma_{обр}$ определим из соотношения:
$\gamma_{обр} \leq m \cdot t \cdot \gamma_{пр}$,
где m – коэффициент отношения предельных погрешностей образцового и поверяемого приборов;
t – коэффициент отношения пределов измерения поверяемого и образцового приборов.
В нашем случае $\gamma_{обр} \leq (1/3)(1/2)2{,}5 = 0{,}4$

Пример 5. При проверке пригодности вольтметра класса точности 2,0 с пределом измерения 100 В методом сличения применен поверенный вольтметр класса точности 1,0 с таким же пределом измерений. Как можно повысить достоверность проверки?
Решение: Нормированная погрешность проверяемого прибора определяется по классу точности:
$\Delta V_н = 2{,}0 \cdot 100/100 = 2{,}0$ В.
В то же время допускаемая погрешность примененного для проверки прибора равна:
$\Delta V_н = 1{,}0 \cdot 100/100 = 1{,}0$ В.
Всего лишь в два раза меньше. Поэтому результаты проверки будут не очень надежными. Повысить их достоверность, с точки зрения правильности выводов об исправности или неисправности

вольтметра, можно уменьшив нормируемый при проверке диапазон предельной погрешности. Сделать это можно вычитая из результата измерения погрешность «образцового» вольтметра. В нашем случае при одинаковых пределах измерений новый «суженный» диапазон погрешности определяется разницей классов двух вольтметров: 2,0 – 1,0 = 1,0. Следовательно, новый диапазон допускаемых отклонений показаний проверяемого вольтметра будет равен: 1,0·100/100 = 1,0 В вместо 2 В.

Пример 6. Двумя пружинными манометрами на 600 кПа измерено давление воздуха в герметичной камере. Класс точности первого манометра 0,5, второго 4. Первый показал 600 кПа, второй 590 кПа. Можно ли по этим результатам оценить действительное значение давления воздуха, в каком диапазоне значений оно может находиться с доверительной вероятностью 0,999? Какова погрешность второго манометра и соответствует ли она классу точности?
Решение: Действительное значение можно оценить по результату, полученному более точным манометром: 600 кПа. Поскольку предельно допускаемая погрешность этого манометра равна δ_{1H} = 0,5·600/100 = 3,0 кПа, то с большой вероятностью значение давления воздуха $P_{д}$ находится в пределах 597 кПа $\leq P_{д} \leq$ 603 кПа.
Действительная погрешность измерения давления менее точным манометром равна $\delta_{2Д}$ = 590 кПа – 600 кПа = - 10 кПа или -1,7%, а нормированная погрешность полученного в измерении результата для этого манометра равна δ_{2H} = 4·600/590 ≈ 4%.

Пример 7. К зажимам источника ЭДС E = 10 В с внутренним сопротивлением R_{BH} = 1 Ом подключен вольтметр с входным сопротивлением R_{BX} = 100 Ом. Определите показания вольтметра и вычислите погрешность, определяемую величиной его входного сопротивления; классифицируйте погрешность источнику возникновения и характеру проявления. Какой вид неопределенности можно оценить по этим данным?
Решение: Напряжение, измеряемое вольтметром, определяется по формуле:
$U_{ИЗМ} = ER_{BX}/(R_{BX} + R_{BH})$ = 10·100/(100 + 1) = 9,9 В.
Абсолютная погрешность измерения Δ = 9,9 В – 10 В = - 0,1 В.
По источнику происхождения погрешность является методической, а по характеру проявления – систематической.
По приведенным данным можно оценить стандартную неопределенность по типу B: u_B = 0,1 В. При определенных допущениях можно оценить и расширенную неопределенность, например, для равномерного закона распределения и P = 0,99 расширенная неопределенность будет равна U = 1,71·0,1 = 0,17 ≈ 0,2 В.

Пример 8. В цепь с резистором R_H = 49 Ом и источником напряжения E = 10 В с R_{BH} = 1 Ом подключен амперметр с пределом измерений $I_{ПР}$ = 500 мА и входным сопротивлением R_A = 1 Ом. Определите показания амперметра $I_А$, относительную погрешность δ его показания и оцените класс точности.
Решение: Ток, протекающий через нагрузочное сопротивление равен: $I_H = E/(R_{BH} + R_H)$ = 0,2 А.
При подключении амперметра в цепь нагрузки происходит ее шунтирование и измеряемый амперметром ток равен: $I_A = I_H R_H/(R_A + R_H)$ = 0,2(49/50) = 0,196 А. Если бы входное сопротивление амперметра было бесконечным, I_A = 0,2 А. Следовательно, δ = (0,196 – 0,200) / 0,2 = - 0,02 (2%).
Класс точности амперметра γ оценим из неравенства: γ·0,5/100 = γ·0,005 ≤ |0,196 – 0,200| = 0,004. Тогда $\gamma \geq$ 0,005/0,004 = 1,25. Ближайшее значение из стандартного ряда γ = 1,5.

Пример 9. Определите относительную погрешность измерения на 30 делениях шкалы для прибора класса 0,5, имеющего шкалу 100 делений. Насколько эта погрешность больше погрешности на последнем – сотом делении шкалы прибора? Можно ли считать измерения на разных участках шкалы этого прибора равноточными?
Решение: Для прибора класса 0,5 относительная приведенная погрешность (на 100 делениях шкалы) $\delta_{пр}$ = 0,5·100/100 = 0,5%.
Относительная погрешность измерения на 30 делений шкалы $\delta_{зо}$ = (0,5·100)/30 = 1,7%.

Равноточными называются измерения с одинаковой абсолютной погрешностью. На 100 делениях шкалы она равна 0,5 делений, и на 30 делениях она также равна 0,5 деления. В этом приборе основная погрешность аддитивная, т.е. не зависит от показания прибора, поэтому ее относительная величина уменьшается с увеличением показаний: $\delta_{зо} > \delta_{пр}$ более чем в 3 раза.

Пример 10. Известен класс прибора γ и верхнее значение диапазона измерений A_H. Измерено конкретное значение величины $A_{изм}$ с относительной погрешностью δ. Можно ли по этим данным восстановить измеренное значение величины? Какие составляющие неопределенности единичного измерения можно оценить по этим сведениям о приборе?

Решение: Абсолютная погрешность прибора $\Delta = \gamma A_H/100$, а относительная погрешность измерения конкретного значения величины $\delta = \gamma A_H/100A_{изм}$.

Откуда: $100\Delta = \gamma A_H = 100\delta A_{изм}$ и $A_{изм} = \Delta/\delta$.

В нашем случае можно оценить расширенную неопределенность и, при задании доверительной вероятности, суммарную стандартную неопределенность: $U = \Delta = \gamma A_H/100$ и $u_C = U_P/к$, где $к$ равно 2 при $P = 0,95$ и 3 при $P = 0,99$ при нормальном законе распределения и 1,65 и 1,71 соответственно при равномерном.

Пример 11. Прибором первого класса точности ($\gamma = 1$) с верхним пределом диапазона измерений $U_H = 100$ В измерено конкретное значение величины $U_{изм}$ с относительной погрешностью $\delta = 0,02$. Можно ли по этим данным восстановить измеренное значение величины $U_{изм}$? Какие составляющие неопределенности единичного измерения можно оценить по этим сведениям о приборе?

Решение: Абсолютная погрешность прибора $\Delta = \gamma U_H/100$, а относительная погрешность измерения конкретного значения величины $\delta = \gamma U_H/100U_{изм}$.

Откуда: $100\Delta = \gamma U_H = 100\delta U_{изм}$ и $U_{изм} = \Delta/\delta = 50$ В.

Расширенная неопределенность $U = \Delta = \gamma A_H/100 = 1$ В и, при задании доверительной вероятности, суммарная стандартная неопределенность $u_C = U_P/к$, где $к$ равно 2 при $P = 0,95$ и 3 при $P = 0,99$ при нормальном законе распределения и 1,65 и 1,71 соответственно при равномерном.

Пример 12. Измерение падения напряжения на участке электрической цепи сопротивлением $R = 4$ Ом осуществляется вольтметром класса точности 0,5 с верхним пределом измерений 1,5 В. Измеренное значение равно 0,95 В. Измерение выполнено при температуре до 30°С ($\delta_{допT} = \pm 0,3\%$) при наличии магнитного поля напряженностью 400 А/м ($\delta_{допH} = \pm 0,75\%$). Сопротивление вольтметра R_v=1000 Ом. Определить исправленный результат измерений и погрешности.

Решение: Основная предельная относительная погрешность этого конкретного измерения

$\delta = 0,5\cdot 1,5/100\cdot 0,95 = 0,007894 \approx 0,79\%$.

Суммарная инструментальная погрешность определяется по формуле:

$\delta_\Sigma = \sqrt{\sum_i \delta_i^2} = (0,79^2 + 0,75^2 + 0,3^2)^{1/2} = 1,13\% \approx 1,1\%$; абсолютная погрешность $\Delta = \pm 0,010$ В.

Методическая погрешность измерения падения напряжения на сопротивлении R определяется соотношением между сопротивлением участком цепи и входным сопротивлением вольтметра R_v.

$\Delta_{мет} = - U_R R/(R + R_V) = - 0,95\cdot 4/(4+1000) = 0,0038 \approx 0,004$ В.

Оцененная методическая погрешность является систематической со знаком «+» и должна быть учтена в результате измерения в виде поправки. Исправленный результат измерения с учетом поправки $U_{Rиспр} = 0,954$ В.

Окончательный результат измерения записываем в виде: $U_R = 0,954 \pm 0,010$ В, $P = 0,95$.

Пример 13. Выполнено однократное измерение падения напряжения на участке электрической цепи сопротивлением $R = 10$ Ом с помощью вольтметра класса 0,5 с верхним пределом диапазона измерений 1,5 В и входным сопротивлением $R_V = 900$ Ом. Показания вольтметра $U_V = 0,975$ В. Измерение выполнено при температуре 25°С ($\delta_T = 0,5\%$) и возможном магнитном поле, имеющем напряженность до 300 А/м ($\delta_H = 0,5\%$). Вычислить инструментальную и суммарную погрешности результата измерения, а также оценить расширенную и суммарную неопределенности измерений.

Решение: Показание вольтметра связано с падением напряжения на сопротивлении соотношением: $U_V = U_R R_V/(R + R_V)$.

Методическая погрешность $\Delta_м = U_V - U_R = -U_R R/(R + R_V) \approx -0{,}011$ В.

Следовательно, в результат измерения необходимо ввести поправку и получить исправленный результат измерения:

$U_R = U_V + 0{,}011 = 0{,}975 + 0{,}011 = 0{,}986$ В

Инструментальная составляющая погрешности определяется основной и дополнительной погрешностями.

Основная погрешность оценивается по приведенной погрешности и результату измерения:

$\delta_0 = 0{,}5 \cdot 1{,}5/0{,}986 = 0{,}76\%$.

С учетом дополнительных погрешностей доверительные границы инструментальной погрешности при P=0,95 и ее равномерном распределении находят по формуле:

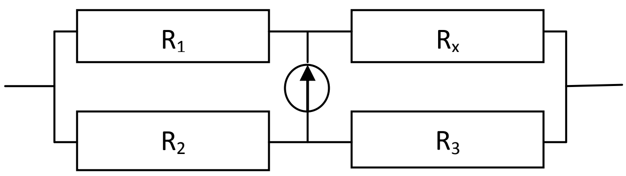
$\delta_И = (0{,}76^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2)^{1/2} = 1{,}04\% \approx 1{,}0\%$.

Окончательный результат можно записать следующим образом:

$U_R = (0{,}986 \pm 0{,}010)$ В; P=0,95.

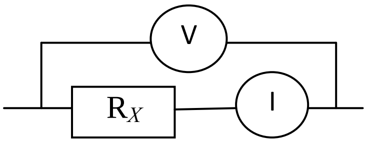
Расширенная неопределенность при P=0,95 равна $U_R = \Delta_И = 10$ мВ. Суммарная $u_C = U_{0,95}/1{,}65 \approx 6$ мВ.

Пример 14. Сопротивление Rx измерено по мостовой схеме, показанной на рисунке. Для исключения систематической погрешности, обусловленной возможным неравенством сопротивлений R_2 и R_3 плеч моста, применен способ противопоставления, заключающийся в том, что балансировка моста проведена дважды: при указанном на рисунке расположении сопротивлений R_X и R_1 и после перемены их местами. В первом случае мост уравновешен при R_1 = 100,04 Ом, а во втором - при R_1 = 100,02 Ом. Номинальные значения сопротивлений плеч 2 и 3 одинаковы: $R_2 = R_3$ = 100 Ом. Найти действительное отношение сопротивлений плеч 2 и 3 и систематическую погрешность при измерении R_X на позиции, показанной на рисунке.



Решение: Значение сопротивления с компенсированной систематической погрешностью из-за неравенства сопротивлений плеч, равно: $R_X = (R_{X1} + R_{X2})/2 = 100{,}03$ Ом. Систематическая погрешность равна $R_{X1} - R_X = +0{,}01$ Ом. Отношение сопротивлений плеч $R_2/R_3 = \sqrt{R_{X1}/R_{X2}} = 1{,}0001$.

Пример 15. Сопротивление резистора R_X измерено по схеме, показанной на рисунке. Применены: вольтметр класса точности 0,5 с верхним значением диапазона измерений 100 В и амперметр класса точности 0,1 с верхним значением диапазона измерений 10 А. Получены показания приборов: U_V = 75,0 В, I = 3,00 А. Входное сопротивление амперметра R_A = 0,2 Ом и вольтметра R_V = 1000 Ом. Найти методические погрешности и записать результат измерений. Оценить неопределенности измерений.



Решение: Сопротивление участка цепи, на котором измерено падение напряжения, равно: $R_\sum = R_X + R_A$. Показание вольтметра U_V связано с падением напряжения на сопротивлении $U_{R\sum}$ соотношением: $U_V = U_{R\sum} R_V/(R + R_V)$.

Методическая погрешность измерения падения напряжения на сопротивлении $R_\sum$ равна $\Delta_м = U_V - U_{R\sum} = -U_{R\sum} R_\sum/(R_\sum + R_V) \approx (R_\sum << R_V) \approx -U_{R\sum} R_\sum/R_V$. В относительных единицах $\delta_м = -R_\sum/R_V$.

$R_\sum = U_V/I = 75/3 = 25$ Ом. Тогда $\delta_м = 25/1000 = -0{,}025$.

Следовательно, абсолютная методическая погрешность измерения равна -25·0,025 = -0,625 Ом. Эта составляющая погрешности проявляет себя как систематическая и поэтому должна быть учтена путем внесения поправки в результат измерения: $R_{\sum испр}$ = 25 + 0,63 = 25,63 Ом. Откуда R_X = 25,63 – 0,2 = 25,43 Ом.

Значения предельно допускаемых относительных погрешностей результатов прямых измерений U и I:

$\delta_{U,\text{пр}}$ = ± 0,5/75 = ± 0,0067 или ± 0,67%;

$\delta_{I,\text{пр}}$ = ± 0,01/3 = ± 0,003 или ± 0,3%.

Предельная суммарная относительная погрешность измерения сопротивления R_X $\delta_{R,\text{пр}} = (0{,}0067^2 + 0{,}003^2)^{1/2}$ = 0,00734. Абсолютное значение предельной погрешности $\Delta_{Rпр}$ = 25,43·0,00734 = ± 0,19 Ом.

Таким образом, после округления результат косвенного измерения R_X запишем в виде:

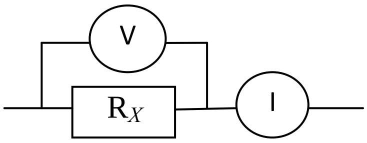
R_X = (25,4 ± 0,2) Ом, $P \approx 1$.

Расширенная неопределенность измерений $U = \Delta_{Rпр} \approx$ 0,2 Ом; Суммарная стандартная неопределенность при нормальном законе распределения: $u_C = U/k$ = 0,2/3 ≈ 0,07 Ом.

Пример 16. Сопротивление резистора R_X измерено с помощью миллиамперметра и вольтметра по схеме, показанной на рисунке. Результаты прямых измерений напряжения U_V и тока I:

(1,030±0,050) В, $P \approx 1$; (10,35±0,25) мА, $P \approx 1$.

Входное сопротивление вольтметра R_V = 10,0 кОм. Найти результат косвенного измерения R_X, погрешности и оценить расширенную и суммарную стандартную неопределенности измерений.



Решение: Показание вольтметра U_V связано с падением напряжения на сопротивлении U_R соотношением: $U_V = U_R R_V/(R_X + R_V)$.

Методическая погрешность измерения падения напряжения на сопротивлении R_X равна $\Delta_м = U_V - U_R = -U_R R_X/(R_X + R_V) \approx (R_X << R_V) \approx -U_R R_X/R_V$. В относительных единицах $\delta_м = -R_X/R_V$.

$R_X = U_V/I$ = 1,03/0,01035 = 99,52 Ом. Тогда $\delta_м$ = -99,52/10000 = -0,00995.

Следовательно, абсолютная методическая погрешность измерения равна -99,52·0,00995 = -0,99 Ом. Эта составляющая погрешности проявляет себя как систематическая и поэтому должна быть учтена путем внесения поправки в результат измерения: $R_{Xиспр}$ = 99,52 + 0,99 = 100,51 Ом. Значения предельно допускаемых относительных погрешностей результатов прямых измерений U и I:

$\delta_{U,пр}$ = ± 0,05/1,035 = ± 0,048 или ± 4,8%;

$\delta_{I,\text{пр}}$ = ± 0,25/10,35 = ± 0,024 или ± 2,4%.

Предельная суммарная относительная погрешность измерения сопротивления R_X $\delta_{R,\text{пр}} = (0{,}048^2 + 0{,}024^2)^{1/2}$ = 0,0537. Абсолютное значение предельной погрешности $\Delta_{Rпр}$ = 100,51·0,0537 = ± 5,4 Ом.

Таким образом, после округления результат косвенного измерения R_X запишем в виде:

R_X = (100,5 ± 5,4) Ом, $P \approx 1$.

Расширенная неопределенность измерений $U = \Delta_{Rпр} \approx$ 5,4 Ом; Суммарная стандартная неопределенность при нормальном законе распределения: $u_C = U/k$ = 5,4/3 ≈ 1,8 Ом.

Пример 17. Известно, что метод, применяемый для измерения физической величины, позволяет получать результат единичного измерения с σ = 0,01. Требуется оценить диапазон погрешности, который не будет превышен в 99 измерениях из 100. Описать измерения в терминах концепции неопределенности.

Решение: Предельная погрешность при уровне значимости 0,01 определяется по соотношению: $\varepsilon = t\sigma$. Коэффициент t для значения функции Лапласа $\Phi(t)$ = 0,99 равен t = 2,6. Тогда ε = 2,6·0,01 = 0,026 ≈ 0,03.

Стандартная неопределенность по типу *A* $u_A = \sigma = 0{,}01$. Если суммарная стандартная неопределенность $u_C \approx u_A = 0{,}01$, расширенная неопределенность при доверительной вероятности 0,99 будет равна $U = 3\cdot0{,}01 = 0{,}03$.

Пример 18. Известно, что метод, применяемый для измерения физической величины, позволяет получать результат единичного измерения с $\sigma = 0{,}05$. Требуется оценить диапазон погрешности, который не будет превышен в 95 измерениях из 100. Описать измерения в терминах концепции неопределенности.
Решение: Предельная погрешность при уровне значимости 0,05 определяется по соотношению: $\Delta = t\sigma$. Коэффициент t для значения функции Лапласа $\Phi(t) = 0{,}95$ равен $t = 1{,}96$. Тогда $\Delta = 1{,}96\cdot0{,}05 = 0{,}098 \approx 0{,}1$.
Стандартная неопределенность по типу *A* $u_A = \sigma = 0{,}05$. Если суммарная стандартная неопределенность $u_C \approx u_A = 0{,}05$, то расширенная неопределенность при доверительной вероятности 0,95 будет равна $U = 2\cdot0{,}05 = 0{,}1$ в единицах величины.

Пример 19. В свидетельстве о калибровке указано, что масса m_s эталона из нержавеющей стали с номинальным значением 1 килограмм составляет 1000,000325 г и что предельно допускаемая погрешность при доверительной вероятности 0,997 равна 240 мкг. Найти расширенную, суммарную и стандартную неопределенность по типу *A*.
Решение: Расширенная неопределенность эталона массы U = 240 мкг, суммарная $u_C(m_S)$ = (240 мкг)/3 = 80 мкг. Стандартная неопределенность по типу *A* или по типу *B* в данной ситуации не определяется.

Пример 20. В свидетельстве о калибровке указано, что сопротивление эталонного резистора R_s с номинальным значением 10 Ом есть 10,000742 Ом ± 129 мкОм при 23 ^{0}С и что упомянутая неопределенность 129 мкОм охватывает интервал с доверительной вероятностью 0,997. Определить: стандартную неопределенность, ее относительное значение и дисперсию.
Решение: Стандартную неопределенность можно принять как $u(R_s)$= (129 мкОм)/3 = 43 мкОм, что соответствует относительной стандартной неопределенности $u(R_s)/R_s = 4{,}3\ 10^{-6}$. Оцененная дисперсия $u^2(R_s)$= (43 мкОм)^2 = 1850 мкОм^2.

Пример 21. Результат измерений длины стержня записан в таком виде: $L(0{,}95) = (10{,}11\pm0{,}04)$ мм. Оценить неопределенности единичного измерения по этим данным.
Решение: В предположении о нормальном законе распределения для возможных значений L, расширенная неопределенность может быть оценена как $U = 0{,}04$. Суммарная стандартная неопределенность u_c = 0,04/2 мм = 0,02 мм.

Пример 22. В справочнике приведено значение температурного коэффициента линейного расширения (ТКЛР) чистотой меди при 20^{0}С $\alpha_{20}(Cu) = 16{,}52\ 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$ и утверждает, что «погрешность этого значения не должна превышать $0{,}40\ 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$». Основываясь на предположении о равномерном распределении, оценить стандартную неопределенность измерения ТКЛР.
Решение: Предположение о равномерном законе распределении погрешности означает, что в измерениях преобладала систематическая погрешность (неисключенная составляющая систематической погрешности). Следовательно, расширенная неопределенность равна $U = 0{,}40\ 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$, а стандартная неопределенность при $P = 0{,}95$ равна $u_B = U/1{,}65 = 0{,}24\ 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$ и при $P = 0{,}99$ $u_B = U/1{,}71 = 0{,}23\ 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$.

Пример 23. В справочнике приводится значение ТКЛР чистой меди $\alpha_{20}(Cu) = 16{,}52\ 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$ и утверждается, что наименьшее возможное значение $\alpha_{20}(Cu) = 16{,}40\ 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$, а наибольшее - $16{,}92\ 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$. Оценить неопределенность измерения α_{20} исходя из предположения о равномерном распределении.
Решение: Границы интервала ассиметричны: $b_- = 0{,}12\ 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$, $b_+ = 0{,}40\ 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$. Тогда стандартная неопределенность по типу *B* будет равна $u_B = (b_+ + b_-)/2\sqrt{3} = 0{,}15\ 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$.

Пример 24. В паспорте цифрового вольтметра указывается, что погрешность в диапазоне измерений 1 В равна показанию, умноженному на 14 10^{-6} плюс диапазон, умноженный на 2 10^{-6}. В проведенных измерениях установлено, что среднее арифметическое ряда независимых повторных наблюдений V равно V_{cp} = 0,928571 В при стандартной неопределенности по типу A $u(V_{cp})$ = 12мкВ. Оценить стандартную неопределенность единичного измерения по типу B, используя паспортные данные вольтметра, и суммарную стандартную неопределенность V_{cp}.

Решение: Исходя из предположения о симметричности и равномерности распределения ΔV_{cp} получим, что полуширина a симметричного прямоугольного распределения равна a = (14 10^{-6}) (0,928571 В) + (2 10^{-6}) (1 В) = 15 мкВ. Дисперсия при этом равна $u^2(\Delta V_{CP}) = a^2/3$ = 75мкВ^2, а стандартная неопределенность по типу B $u(\Delta V_{CP})$ = 8,7мкВ. Суммарная стандартная неопределенность получается суммированием стандартной неопределенности, равной 12 мкВ, вычисленной по типу A, со стандартной неопределенностью, равной 8,7 мкВ, вычисленной по типу B: u_c = 15 мкВ.

Пример 25. Результат определение pH молока по ГОСТ 26781 записан в следующем виде: $pH(0,95)$ = 6,94 ± 0,04. Требуется оценить неопределенности измерения pH.

Решение: Расширенная неопределенность U = 0,04, суммарная стандартная неопределенность может быть примерно оценена как $u_C \approx 0,04/2 = 0,02$. Примерно потому, что коэффициент охвата 2 соответствует доверительной вероятности 0,954.

2.2. Многократные равноточные независимые измерения

Пример 26. В отчете сообщается, что воспроизводимость кинематической вязкости мазута по ГОСТ 33-2000, определенная по результатам межлабораторных сличений с участием 10-и лабораторий, составляет 7,4% при доверительной вероятности 0,95. Требуется оценить стандартную неопределенность и расширенную неопределенность измерения кинематической вязкости при том же уровне доверия.

Решение: Так как воспроизводимость указана в терминах погрешности, то для определения СКО воспользуемся распределением Стьюдента: при P = 0,95 и числе степеней свободы $k=n$-1=10-1=9 коэффициент Стьюдента равен t = 2,26. Тогда СКО σ = 7,4%/2,26 = 3,27 ≈ 3,3%. Это же и есть относительная стандартная неопределенность. Расширенная неопределенность при коэффициенте охвата, равном 2, U ≈ 2 (3,3%) = 6,6%.

Пример 27. Результат 30-и измерений значения постоянного тока миллиамперметром записан в виде: I = (25±3) мА, P = 0,95. Найти оценку СКО результата, а также оценить расширенную и суммарную стандартную неопределенности измерений.

Решение: По таблице коэффициентов Стьюдента при числе степеней свободы $k = n$-1 = 30-1 = 29 и доверительной вероятности P = 0,95 находим t = 2,042. Оценка СКО равна S ≈ 3/2,04 ≈ 1,5. Расширенная неопределенность равна доверительной погрешности: U = 3 мА, а суммарная при коэффициенте охвата 2 (для P = 0,95) равна u_C = 3/2 = 1,5 мА.

Пример 28: Результат 25-и измерений значения постоянного тока миллиамперметром записан в виде: I = (150±3) мА, P = 0,99. Найти оценку СКО результата, а также оценить расширенную и суммарную стандартную неопределенности измерений.

Решение: По таблице коэффициентов Стьюдента при числе степеней свободы $k = n$-1 = 25-1 = 24 и доверительной вероятности P = 0,99 находим t = 2,7. Оценка СКО равна S ≈ 3/2,7 ≈ 1,1. Расширенная неопределенность равна доверительной погрешности: U = 3 мА, а суммарная при коэффициенте охвата 3 (для P = 0,99) равна u_C = 3/3 = 1 мА для нормального закона распределения.

Пример 29. В 10-и измерениях периода колебаний математического маятника получено значение СКО случайной составляющей погрешности единичного измерения S_i = 0,018 с. Неисключенная систематическая погрешность результата определяется предельной погрешностью секундомера θ = 0,01 с (P = 0,99). Оценить стандартные неопределенности по типу A, B, суммарную стандартную и расширенную неопределенности измерений.

Решение: СКО среднего значения периода колебаний $S_{ср} = 0{,}018/n^{1/2} \approx 0{,}006$ с. Стандартная неопределенность по типу A $u_A = 0{,}006$ с. Стандартную неопределенность по типу B определим из характеристики секундомера: $u_B = \theta/k\sqrt{3}$ = (m < 4 k = 1) = 0,01/1,732 ≈ 0,006 с. Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (0{,}006^2 + 0{,}006^2)^{1/2} = 0{,}0085 \approx 8$ мс. Расширенная неопределенность U = 3·0,008 ≈ 0,024 с = 24 мс.

Пример 30. В 5-и измерениях длины математического маятника получено значение СКО случайной составляющей погрешности единичного измерения $S_i = 0{,}15$ см. Неисключенная систематическая погрешность результата определяется предельной погрешностью линейки $\theta = 0{,}05$ см (P = 0,99). Оценить стандартные неопределенности по типу A, B, суммарную стандартную и расширенную неопределенности измерений.
Решение: СКО среднего значения длины маятника $S_{ср} = 0{,}15/n^{1/2} = 0{,}067 \approx 0{,}07$ см. Стандартная неопределенность по типу A $u_A = 0{,}07$ см. Стандартную неопределенность по типу B определим из характеристики линейки: $u_B = \theta/k\sqrt{3}$ = (при m < 4 k = 1) = 0,05/1,732 ≈ 0,03 см. Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (0{,}07^2 + 0{,}03^2)^{1/2} = 0{,}076$ см ≈ 0,8 мм. Расширенная неопределенность U = 3·0,076 = 0,228 см ≈ 2 мм.

Пример 31. В таблице приведены результаты двадцати наблюдений сопротивления Ri резистора, проведенных в нормальных условиях. При нормальном законе распределения случайных погрешностей найти доверительные границы случайной составляющей погрешности результата измерения при доверительной вероятности P = 0,95. Оценить качество измерений в терминах неопределенности, полагая, что неисключенная составляющая систематической погрешности пренебрежимо мала по сравнению со случайной погрешностью измерений.

i	*Rᵢ*, Ом	*i*	*Rᵢ*, Ом	*i*	*Rᵢ*, Ом	*i*	*Rᵢ*, Ом
1	8997	6	8993	11	8992	16	8993
2	8994	7	8994	12	8997	17	8991
3	8991	8	8995	13	8993	18	8994
4	8993	9	8995	14	8996	19	8996
5	8994	10	8993	15	8995	20	8994

Решение: Вычисляем ΣR_i = 179880 и среднее значение R = 179880/20 =8994 Ом. Вычисляем оценку СКО результата наблюдения используя результаты вычислений $\Sigma(R_i - R)^2$ Ом² = 56 Ом² $S = \sqrt{56/19} \approx 1{,}72$ Ом. СКО результата измерения (среднего значения $R_{ср}$) $S_{ср} = 1{,}72/\sqrt{20} = 0{,}38$ Ом. По таблице коэффициентов Стьюдента находим значение t для доверительной вероятности P=0.95 и числа наблюдений n=20: t = 2,09. Находим границы доверительного интервала случайной составляющей погрешности измерения: Δ = 2,09·0,38 ≈ 0,8 Ом. Результат измерения сопротивления: R = 8994 Ом; Δ = ± 0,8 Ом; P=0,95.
Оценка стандартной неопределенности по типу A равна оценке СКО случайной погрешности среднего значения $R_{ср}$: $u_A = S = 0{,}38$ Ом. В пренебрежимой малости систематической составляющей погрешности оценка расширенной неопределенности равна U = 0,8 Ом, а оценка суммарной стандартной неопределенности при коэффициенте охвата 2 равна u_C = 0,8/2 = 0,4 Ом, т.е. практически равна u_A.

Пример 32. Измерена емкость шести конденсаторов. Получены следующие результаты (в пФ): 4,45; 4,40; 4,42; 4,45; 4,38; 4,42. Предполагая, что результаты измерений имеют нормальное распределение, требуется найти доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание емкости конденсаторов с заданной доверительной вероятностью P = 0,95, считая σ неизвестной.
Решение: Определим среднее значение емкости и оценку СКО распределения:

$$\hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 4{,}42 \text{ пФ}.$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2}{6-1}} = 0{,}028 \text{ пФ}.$$

Для нахождения доверительного интервала, накрывающего математическое ожидание, найдем по таблице квантилей распределение Стьюдента по заданной доверительной вероятности P = 0,95 и числу степеней свободы $\nu = n$-1 = 6-1 = 5 коэффициент t = 2,571.

Вычислим предельную погрешность интервального оценивания математического ожидания

$$\varepsilon = t\frac{S}{\sqrt{n}} = 2{,}571\frac{0{,}028}{\sqrt{6}} = 0{,}029 \text{ пФ}.$$

Искомый доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание емкости конденсаторов с заданной доверительной вероятностью P = 0,95, равен:

$\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon$;

4,42 – 0,029 < a < 4,42 + 0,029;

4,391 < a < 4,449.

Пример 33. Измерена емкость шести конденсаторов. Получены следующие результаты (в пФ): 4,45; 4,40; 4,42; 4,45; 4,38; 4,42. Предполагая, что результаты измерений имеют нормальное распределение, требуется найти предельную погрешность, с которой среднее арифметическое значение оценивает математическое ожидание распределения a с доверительной вероятностью P = 0,99.

Решение: Определим среднее значение емкости и оценку СКО распределения:

$$\hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 4{,}42 \text{ пФ}.$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2}{6-1}} = 0{,}028 \text{ пФ}.$$

При доверительной вероятности P = 0,99, предельная погрешность, с которой среднее арифметическое емкости конденсаторов $\bar{x}$ оценивает неизвестное математическое ожидание, равна:

$$\varepsilon = t\frac{S}{\sqrt{n}} = 4{,}032\,\frac{0{,}028}{\sqrt{6}} = 0{,}046\, n\Phi.$$

Пример 34. Измерена емкость шести конденсаторов. Получены следующие результаты (в пФ): 4,45; 4,40; 4,42; 4,45; 4,38; 4,42. Предполагая, что результаты измерений имеют нормальное распределение, требуется найти минимальное число конденсаторов, емкость которых надо измерить, чтобы с доверительной вероятностью P = 0,95 можно было бы утверждать, что среднее арифметическое правомерно принимать за математическое ожидание распределения с погрешностью, не превышающей $\varepsilon = 0{,}5\sigma$, принимая $\sigma = S$.

Решение: Определим среднее значение емкости и оценку СКО распределения:

$$\hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 4{,}42 \text{ пФ}.$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2}{6-1}} = 0{,}028 \text{ пФ}.$$

Минимальное число конденсаторов, найдем из соотношения:

$$n = \frac{S^2 t^2}{\varepsilon^2} = \frac{0{,}028^2(1{,}96)^2}{(0{,}014)^2} \ge 16 \text{ конденсаторов}.$$

Пример 35. Измерено сопротивление 15–и резисторов. Результаты приведены в таблице. Найти доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание распределения значений сопротивления с заданной доверительной вероятностью P = 0,95, считая σ неизвестным.

i – номер резистора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i – сопротивление резистора, кОм	5,8	6,2	6,0	5,9	6,1	5,7	6,0	6,5	5,6	5,8	5,5	6,2	6,3	6,4	6,0

Решение: Определим среднее значение емкости и оценку СКО распределения:

$$\hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i = 6{,}0 \text{ кОм.}$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2}{15-1}} = 0{,}28 \text{ кОм.}$$

Для нахождения доверительного интервала, накрывающего математическое ожидание, найдем по таблице квантилей распределение Стьюдента по заданной доверительной вероятности P = 0,95 и числу степеней свободы $\nu = n$-1 = 15-1 = 14 коэффициент t = 2,145.

Вычислим предельную погрешность интервального оценивания математического ожидания

$$\varepsilon = t\frac{S}{\sqrt{n}} = 2{,}145\,\frac{0{,}28}{\sqrt{15}} = 0{,}16 \text{ кОм.}$$

Искомый доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание емкости конденсаторов с заданной доверительной вероятностью P = 0,95, равен:

$\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon$; 6,0 – 0,16 < a < 6,0 + 0,16; 5,84 < a < 6,16.

Пример 36. Еженедельные затраты времени на посещение библиотеки, определенные путем анкетирования, приведены в таблице. Принимая P = 0,99, найти предельную погрешность, с которой среднее арифметическое оценивает неизвестное математическое ожидание распределения значений x.

i – номер анкеты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i – затраты времени (ч)	2,0	4,0	4,0	5,0	3,0	7,0	10,0	8,0	14,0	12,0	2,0	1,0

Решение: Определим среднее значение емкости и оценку СКО распределения:

$$\hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 6{,}0 \text{ ч.}$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2}{12-1}} = 4{,}2 \text{ ч.}$$

При доверительной вероятности P = 0,99, предельная погрешность, с которой среднее арифметическое затрат времени $\bar{x}$ оценивает неизвестное математическое ожидание, равна:

$$\varepsilon = t\frac{S}{\sqrt{n}} = 3{,}106\,\frac{4{,}2}{\sqrt{12}} = 3{,}8\,\text{часа.}$$

Пример 37. Результаты 10-и измерений индуктивности катушки приведены в таблице. Найти минимальное число измерений, которое нужно произвести, чтобы с доверительной вероятностью P = 0,99 и погрешностью, не превышающей ε = 0,2S, можно было принять среднее значение в качестве мат. ожидания для нормального распределения x.

i – номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i – индуктивность, мГн	8,345	8,346	8,348	8,342	8,343	8,345	8,343	8,347	8,344	8,347

Решение: Определим среднее значение индуктивности и оценку СКО распределения:

$$\hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 8{,}345 \text{ мГн.}$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}{10-1}} = 0{,}0007 \text{ мГн.}$$

Минимальное число измерений, найдем из соотношения:

$$n = \frac{S^2 t^2}{\varepsilon^2} = \frac{0{,}0007^2(2{,}5758)^2}{(0{,}00035)^2} \geq 34 \text{ измерений.}$$

Пример 38. В результате двух параллельных определений были получены значения процентного содержания хрома в эталоне: 4,50% и 4,70%. Требуется оценить процентное содержание хрома в эталоне (α) с надежностью 95%. Каковы расширенная и суммарная стандартная неопределенности измерений при нормальном и равномерном законах распределения отклонений?

Решение: Среднее по двум определениям содержание хрома в эталоне равно: $x_{ср}$ = 4,60%.

Оценка СКО: $S = [2\cdot 0{,}1^2/(2\text{-}1)]^{1/2}$ = 0,14%.

Найдем доверительный интервал для α:

При P=0,95 и степени свободы κ = 2-1 = 1 по таблице распределения Стьюдента находим t = 12,71.

Доверительное значение погрешности $\Delta_\alpha = 12{,}71\cdot 0{,}14 = 1{,}78 \approx 1{,}8\%$

Следовательно, с доверительной вероятностью 95% процентное содержание хрома в эталоне заключено в интервале:

$(4{,}60 - 1{,}8)\% \leq \alpha \leq (4{,}60 + 1{,}8)\%$.

Расширенная неопределенность равна: $U_\alpha = \Delta_\alpha$ = 1, 8%.

Суммарная стандартная неопределенность $u_C = U_\alpha/k$, (коэффициент охвата k при P = 0,95 равен 2 при нормальном законе распределения (u_C = 0, 9%) и 1,65 при – равномерном (u_C = 1,1%).

Пример 39. С помощью оптиметра выполнено 10 последовательных измерений плоскопараллельной концевой меры длины и получены значения, указанные в таблице. Предельно допускаемая погрешность оптиметра Δ_o = 0,1 мкм. Найти неопределенность измерений при доверительной вероятности 0,99 и предположении о равномерном законе распределения.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i, мкм	100,1	100,1	99,9	100,1	100,1	100,0	99,9	99,9	100,0	99,9

Решение: Среднее значение измерений $x_{ср}$ = 100,0 мкм. Стандартная неопределенность по типу А равна:

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - x_{cp})^2} = 0{,}9 \text{ мкм.}$$

Стандартную неопределенность по типу B можно оценить по погрешности оптиметра:

$u_B = \Delta_o/\sqrt{3} = 0{,}1/1{,}73 = 0{,}058$.

Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1|2}$ = 0,9 мкм. Расширенная неопределенность при доверительной вероятности 0,99 и равномерном законе распределения равна:

$U_\alpha = k\, u_C = 1{,}71\cdot 0{,}9 = 1{,}54 \approx 1{,}5$ мкм.

Пример 40. Обработка независимых многократных (n = 20) и равноточных наблюдений при калибровке образцовой меры длины дала такие результаты: $x_{ср}$ = 2,000 мм; θ = 0,005 мм и S_{xcp} = 0,001 мм. Найти доверительные границы погрешности при P = 0,99. Оценить неопределенности измерений. Сравнить с погрешностями.

Решение: Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\ S_{xср}$, где коэффициент Стьдента при $P = 0{,}99$ и $к = n - 1 = 19$ равен 2,861; $\Delta_{сл} = 0{,}00286$ мм.
Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей будет равна: $\Delta_{0,99} = t_{сумм}\ S_{сумм}$, где:

$$S_{сумм} = \sqrt{S_{xср}^2 + \sum \theta_i^2 / 3},$$

$$t_{сумм} = [tS_{xср} + \sum \theta_i]/[S_{xср} + \sqrt{\sum \theta_i^2 / 3}].$$

$S_{сумм} = 0{,}0031$; $t_{сумм} = 2{,}02$; $\Delta_{0,99} = 0{,}0062 \approx 0{,}006$ мм.
Результат измерения длины образцовой меры запишем в виде: $L_{обр} = (2{,}000 \pm 0{,}006)$ мм при $P = 0{,}99$.
Стандартная неопределенность по типу A равна $u_A = S_{xср} = 0{,}001$ мм.
Стандартная неопределенность по типу B равна $u_B = \theta/\sqrt{3} = 0{,}0017$ мм.
Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2} \approx 0{,}002$ мм.
Расширенная неопределенность $U = 3 \cdot 0{,}002 = 0{,}006$ мм практически не отличается от вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,99}$ не смотря на то, что в нашем случае систематическая погрешность превышает случайную.

Пример 41. В многократных ($n = 10$), равноточных и независимых наблюдениях при калибровке секундомера получены такие результаты: $x_{ср} = 10{,}000$ с; $\theta = 10$ мс и $S_{xср} = 1$ мс. Найти доверительные границы погрешности при $P = 0{,}99$. Оценить неопределенности измерений. Сопоставить их с погрешностями.
Решение: Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\ S_{xср}$, где коэффициент Стьдента при $P = 0{,}99$ и $к = n - 1 = 9$ равен 3,25; $\Delta_{сл} = 3{,}25$ мс.
Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей будет равна: $\Delta_{0,99} = t_{сумм}\ S_{сумм}$, где:

$$S_{сумм} = \sqrt{S_{xср}^2 + \sum \theta_i^2 / 3},$$

$$t_{сумм} = [tS_{xср} + \sum \theta_i]/[S_{xср} + \sqrt{\sum \theta_i^2 / 3}].$$

$S_{сумм} = 5{,}9$ мс; $t_{сумм} = 1{,}96$; $\Delta_{0,99} = 11{,}6$ мс.
Стандартная неопределенность по типу A равна $u_A = S_{xср} = 1$ мс.
Стандартная неопределенность по типу B равна $u_B = \theta/\sqrt{3} = 5{,}8$ мс.
Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2} = 5{,}9$ мс – совпадает с суммарной погрешностью.
Расширенная неопределенность $U = 3 \cdot 5{,}9 = 17{,}7 \approx 18$ мс больше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,99}$ примерно в полтора раза.В нашем случае систематическая погрешность значительно превышает случайную (10/3,25 = 3,1)!

Пример 42. В многократных ($n = 10$), равноточных и независимых измерениях падения напряжения на прецизионном сопротивлении получены такие результаты: $x_{ср} = 10{,}000$ Ом; $\theta = 1$ мОм и $S_{xср} = 10$ мОм. Найти доверительные границы погрешности при $P = 0{,}99$. Оценить неопределенности измерений. Сопоставить их с погрешностями.
Решение: Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\ S_{xср}$, где коэффициент Стьдента при $P = 0{,}99$ и $к = n - 1 = 9$ равен 3,25; $\Delta_{сл} = 32{,}5$ мОм.
Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей будет равна: $\Delta_{0,99} = t_{сумм}\ S_{сумм}$, где:

$$S_{сумм} = \sqrt{S_{xср}^2 + \sum \theta_i^2 / 3},$$

$$t_{сумм} = [tS_{xср} + \sum \theta_i]/[S_{xср} + \sqrt{\sum \theta_i^2 / 3}].$$

$S_{сумм} \approx 10$ мОм; $t_{сумм} = 3{,}17$; $\Delta_{0,99} \approx 31{,}7$ мОм.
Если мы пренебрежем систематической составляющей погрешности (так как отношение $\theta/\Delta_{сл} < 0{,}8$), тогда $\Delta_{0,99} = \Delta_{сл} = 32{,}5$ мОм. При округлениях до двух значащих цифр она равна значению, полученному выше.

Стандартная неопределенность по типу *A* равна $u_A = S_{xcp} = 10$ мОм.
Стандартная неопределенность по типу *B* равна $u_B = \theta/\sqrt{3} \approx 0{,}6$ мОм.
Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2} \approx 10$ мОм.
Расширенная неопределенность $U = 3\cdot 10 = 30$ мОм меньше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,99}$ примерно на 6% (31,7/30 = 1,06). В нашем случае случайная погрешность значительно превышает систематическую (32,5/1 = 32,5)!

Пример 43. В многократных (n = 10), равноточных и независимых измерениях падения напряжения на прецизионном сопротивлении получены такие результаты: x_{cp} = 10,000 Ом; θ = 1 мОм и S_{xcp} = 10 мОм. Найти доверительные границы погрешности при P = 0,95. Оценить неопределенности измерений. Сопоставить их с погрешностями.
Решение: Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\, S_{xcp}$, где коэффициент Стьдента при P = 0,95 и $\kappa = n - 1 = 9$ равен 2,262; $\Delta_{сл} = 22{,}6 \approx 23$ мОм.
Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей будет равна: $\Delta_{0,95} = t_{сумм}\, S_{сумм}$, где:

$$S_{сумм} = \sqrt{S_{xcp}^2 + \sum \theta_i^2 / 3},$$

$$t_{сумм} = [tS_{xcp} + \sum \theta_i]/[S_{xcp} + \sqrt{\sum \theta_i^2 / 3}].$$

$S_{сумм} \approx 10$ мОм; $t_{сумм} = 2{,}27$; $\Delta_{0,95} \approx 23$ мОм.
Если мы пренебрежем систематической составляющей погрешности (так как отношение $\theta/\Delta_{сл} <$ 0,8), тогда $\Delta_{0,95} = \Delta_{сл} = 23$ мОм, что совпадает со значением, приведенным выше.
Стандартная неопределенность по типу *A* равна $u_A = S_{xcp} = 10$ мОм.
Стандартная неопределенность по типу *B* равна $u_B = \theta/\sqrt{3} \approx 0{,}6$ мОм.
Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2} \approx 10$ мОм.
Расширенная неопределенность $U = 2\cdot 10 = 20$ мОм оказалась меньше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,95}$ примерно на 15%. В нашем случае случайная погрешность значительно превышает систематическую (23/1 = 23)!

Пример 44. В многократных (n = 10), равноточных и независимых наблюдениях при калибровке секундомера получены такие результаты: x_{cp} = 10,000 с; θ = 10 мс и S_{xcp} = 1 мс. Найти доверительные границы погрешности при P = 0,95. Оценить неопределенности измерений. Сопоставить их с погрешностями.
Решение: Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\, S_{xcp}$, где коэффициент Стьдента при P = 0,95 и $\kappa = n - 1 = 9$ равен 2,262; $\Delta_{сл} = 2{,}26 \approx 2{,}3$ мс.
Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей будет равна: $\Delta_{0,95} = t_{сумм}\, S_{сумм}$, где:

$$S_{сумм} = \sqrt{S_{xcp}^2 + \sum \theta_i^2 / 3},$$

$$t_{сумм} = [tS_{xcp} + \sum \theta_i]/[S_{xcp} + \sqrt{\sum \theta_i^2 / 3}].$$

$S_{сумм} \approx 5{,}9$ мс; $t_{сумм} = 1{,}81$; $\Delta_{0,95} = 10{,}7 \approx 11$ мс.
Стандартная неопределенность по типу *A* равна $u_A = S_{xcp} = 1$ мс.
Стандартная неопределенность по типу *B* равна $u_B = \theta/\sqrt{3} \approx 5{,}8$ мс.
Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2} = 5{,}9$ мс.
Расширенная неопределенность $U = 2\cdot 5{,}9 = 11{,}8 \approx 12$ мс больше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,95}$ примерно на 5%. В нашем случае систематическая погрешность существенно превышает случайную (10/2,3 = 4,35).

Пример 45. Обработка независимых многократных (n = 20) и равноточных наблюдений при калибровке образцовой меры длины дала такие результаты: x_{cp} = 2,000 мм; θ = 0,005 мм и S_{xcp} = 0,001 мм. Найти доверительные границы погрешности при P = 0,95. Оценить неопределенности измерений. Сравнить с погрешностями.
Решение: Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\, S_{xcp}$, где коэффициент Стьдента при P = 0,95 и $\kappa = n - 1 = 19$ равен 2,093; $\Delta_{сл}$ = 0,0021 мм.

Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей будет равна: $\varDelta_{0,95}= t_{сумм}\, S_{сумм}$, где:

$$S_{сумм} = \sqrt{S_{xcp}^2 + \sum \theta_i^2 / 3},$$

$$t_{сумм} = [tS_{xcp} + \sum \theta_i]/[S_{xcp} + \sqrt{\sum \theta_i^2 / 3}].$$

$S_{сумм} \approx 0{,}003$ мм; $t_{сумм} = 1{,}82$; $\varDelta_{0,95} \approx 0{,}005$ мм.

Результат измерения длины образцовой меры запишем в виде: $L_{обр}$ = (2,000 ± 0,005) мм при P = 0,95.

Стандартная неопределенность по типу A равна $u_A = S_{xcp} = 0{,}001$ мм.

Стандартная неопределенность по типу B равна $u_B = \theta/\sqrt{3} \approx 0{,}0017$ мм.

Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2} \approx 0{,}002$ мм.

Расширенная неопределенность $U = 2\cdot 0{,}002 = 0{,}004$ мм меньше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\varDelta_{0,95}$ примерно в 1,25 раза. Напомним, что в нашем случае систематическая погрешность превышает случайную.

Пример 46. Обработка независимых многократных (n = 15) и равноточных наблюдений при измерении диаметра вала дала такие результаты: x_{cp} = 10,000 мм; θ = 0,005 мм и S_{xcp} = 0,015 мм. Найти доверительные границы погрешности при P = 0,95. Описать результат в концепции неопределенности измерений. Сравнить с погрешностями.

Решение: Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\varDelta_{сл} = t\, S_{xcp}$, где коэффициент Стьдента при P = 0,95 и $к = n – 1$ = 14 равен 2,145; $\varDelta_{сл} \approx 32$ мкм.

Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей будет равна: $\varDelta_{0,95}= t_{сумм}\, S_{сумм}$, где:

$$S_{сумм} = \sqrt{S_{xcp}^2 + \sum \theta_i^2 / 3},$$

$$t_{сумм} = [tS_{xcp} + \sum \theta_i]/[S_{xcp} + \sqrt{\sum \theta_i^2 / 3}].$$

$S_{сумм} = 15{,}3 \approx 15$ мкм; $t_{сумм} = 2{,}07$; $\varDelta_{0,95} \approx 32$ мкм.

Результат измерения диаметра вала запишем в виде: D = (10,000 ±0,032) мм при P = 0,95. Стандартная неопределенность по типу A равна $u_A = S_{xcp}$ = 15 мкм.

Стандартная неопределенность по типу B равна $u_B = \theta/\sqrt{3} \approx 3$ мкм.

Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2} = 15{,}3 \approx 15$ мкм.

Расширенная неопределенность $U \approx 2\cdot 15 = 30$ мкм меньше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\varDelta_{0,95}$ примерно на 7%. Напомним, что в нашем случае случайная погрешность превышает систематическую.

Пример 47. В результате 20-и равноточных и независимых измерений температуры в точке таяния льда получены значения среднего t_{cp} = 273, 155 K и оценки дисперсии распределения $S^2 = 25\ 10^{-6}\ K^2$. По этим данным необходимо определить СКО случайной погрешности единичного измерения и среднего, предел допускаемой погрешности при уровне значимости q = 0,05, а также оценить неопределенности измерений и сопоставить их с погрешностями.

Решение: Оценка СКО единичного измерения $S = \sqrt{25\ 10^{-6}} = 0{,}005\ K$. СКО среднего $S_{cp} = S/\sqrt{20} \approx 0{,}001\ K$. Предельно допускаемая погрешность при доверительной вероятности $P = 1 - q = 0{,}95$ равна $\Delta\ (P = 0{,}95) = tS$. Коэффициент Стьюдента для числа степеней свободы 20 – 1 = 19 и P = 0,95 равен 2,093. $\Delta = 2{,}1\cdot 0{,}001 = 0{,}002\ K$. Результат измерения температуры в точке таяния льда: (273,155 ± 0,002) K, P = 0,95.

Стандартная неопределенность по типу A $u_A = S_{cp} = 0{,}001\ K$. Расширенная неопределенность при пренебрежимо малой систематической составляющей $U = 2\cdot 0{,}001 = 0{,}002\ K$, т.е. равна Δ.

Пример 48. По 100 равноточным и независимым измерениям постоянной величины получено значение дисперсии распределения относительной случайной погрешности $\sigma^2 = 0{,}04$. Определить, при какой вероятности относительная случайная погрешность среднего не превысит значений $\delta_1 = 0{,}04$ и $\delta_2 = 0{,}06$. Оценить неопределенности измерений.

Решение: СКО распределения равно σ = 0,2, СКО среднего $\sigma_{ср}$ = 0,2/√100 = 0,02. Вероятность того, что отличие среднего значения $x_{ср}$, полученного в многократных измерениях, от действительного значения постоянной величины a не превысит δ, определяется по интегральной функции Лапласа $Ф(t)$: $P[|x_{ср} - a|<\delta] = Ф(t)$. Коэффициент t вычисляют по формуле: $t = \delta/\sigma_{ср}$. В нашем случае, для δ_1 = 0,04 t = 2 и P = 0,955; для δ_2 = 0,06 t = 3 и P = 0,997.

Стандартная неопределенность по типу A в относительных единицах равна $u_A = \sigma_{ср}$ = 0,02. Расширенная неопределенность при пренебрежимо малой систематической составляющей $U \approx 2 \cdot 0,02$ = 0,04 для случая с δ_1 = 0,04 и $U \approx 3 \cdot 0,02$ = 0,06 для случая с δ_2 = 0,06. Практически полностью совпадают со значениями допускаемых погрешностей.

Пример 49. При исследовании показателей точности метода измерений произведено 20 наблюдений постоянной величины. Результаты показаны в таблице. Требуется оценить пригодность метода для однократных измерений с предельно допускаемой относительной погрешностью ± 0,005 при доверительной вероятности P = 0,9973.

i	*x*	*i*	*x*	*i*	*x*	*i*	*x*
1	238,39	6	237,65	11	237,56	16	237,39
2	238,12	7	237,61	12	237,55	17	237,28
3	237,92	8	237,59	13	237,54	18	237,16
4	237,80	9	237,58	14	237,51	19	237,04
5	237,71	10	237,57	15	237,48	20	236,75

Решение: Найдем среднее по выборке $x_{ср}$ = 237,56 и оценку СКО распределения $S = [\sum(x_i - x_{ср})^2/(n - 1)]^{1/2}$ = √2,43/19 ≈ 0,36. По таблице функции Лапласа $Ф(t)$ = 0,9973 находим t = 3. Доверительный интервал относительной погрешности равен δ = ± 3·0,36/237,56 = ± 0,00454, что меньше заданного значения ± 0,005. Следовательно, метод пригоден для однократных измерений с заданной предельной погрешностью.

Пример 50. При исследовании показателей точности метода измерений произведено 20 наблюдений постоянной величины. Результаты показаны в таблице. Требуется оценить доверительный интервал погрешности среднего 10-и наблюдений, проводимых этим методом, при доверительной вероятности P = 0,999.

i	*x*	*i*	*x*	*i*	*x*	*i*	*x*
1	238,39	6	237,65	11	237,56	16	237,39
2	238,12	7	237,61	12	237,55	17	237,28
3	237,92	8	237,59	13	237,54	18	237,16
4	237,80	9	237,58	14	237,51	19	237,04
5	237,71	10	237,57	15	237,48	20	236,75

Решение: Найдем среднее по выборке $x_{ср}$ = 237,56 и оценку СКО распределения $S = [\sum(x_i - x_{ср})^2/(n - 1)]^{1/2}$ = √2,43/19 ≈ 0,36. Оценка СКО среднего 10-и измерений $S_{ср10} = S/\sqrt{10}$ = 0,36/√10 ≈ 0,114. Для значения $Ф(t)$ = 0,999 t ≈ 3,3. Следовательно, доверительный интервал погрешности среднего 10-и наблюдений, проводимых этим методом, равен ± (0,114·3,3) ≈ ± 0,38 в единицах физической величины.

Пример 51. При исследовании показателей точности метода измерений произведено 20 наблюдений постоянной величины. Результаты показаны в таблице. Требуется определить минимальное число наблюдений, проводимых этим методом, для получения допускаемой относительной погрешности среднего в диапазоне, не превышающем $\delta_{пр}$ ± 0,001 при доверительной вероятности P = 0,99 и ожидаемом значении среднего $x_{ср.ож}$ = 200 (известно из предварительных оценок).

i	x	i	x	i	x	i	x
1	238,39	6	237,65	11	237,56	16	237,39
2	238,12	7	237,61	12	237,55	17	237,28
3	237,92	8	237,59	13	237,54	18	237,16
4	237,80	9	237,58	14	237,51	19	237,04
5	237,71	10	237,57	15	237,48	20	236,75

Решение: Найдем среднее по выборке $x_{ср} = 237{,}56$ и оценку СКО распределения $S = [\sum(x_i - x_{ср})^2/(n - 1)]^{1/2} = \sqrt{2{,}43/19} \approx 0{,}36$. Требуемый диапазон предельно допускаемой погрешности равен $\pm 0{,}001\cdot 200 = \pm 0{,}2$. Для значения функции $\Phi(t) = 0{,}99$ находим по таблице коэффициент $t \approx 2{,}6$. Тогда $S_{ср} = \delta_{пр}/t = 0{,}2/2{,}6 = 0{,}077$. Поскольку $S_{ср} = S/\sqrt{n}$, то $n = (S/S_{ср})^2 \approx 22$ наблюдения.

Пример 52. Результаты 10-и измерений длины металлического стержня приведены в таблице. Определить вероятность того, что погрешность среднего значения не выйдет за пределы $\delta_{пр} \pm 0{,}05$ мм. Оценить неопределенности измерений.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L, мм	358,59	358,55	358,53	358,52	358,51	358,49	358,48	358,46	358,45	358,42

Решение: Найдем среднее значение длины $L_{ср} = 358{,}50$ мм и СКО среднего $S_{ср} = \sqrt{0{,}023/(10\cdot 9)} \approx 0{,}016$ мм. Коэффициент $t = \delta_{пр}/ S_{ср} = 0{,}05/0{,}016 = 3{,}125 \approx 3$. Ему соответствует вероятность в распределении Стьюдента $P = 0{,}985$.
Стандартная неопределенность среднего по типу A равна $u_A = S_{ср} = 0{,}016$, расширенная неопределенность для случая пренебрежимо малой систематической составляющей ($u_A >> u_B$) $U \approx 3\cdot 0{,}016 = 0{,}048 \approx 0{,}05$ мм.

Пример 53. В результате многократных прямых равноточных измерений физической величины X получены значения $X_{ср} = 1{,}01$ и дисперсия распределения случайной погрешности $\sigma^2 = 0{,}0004$. Определить, с какой доверительной вероятностью относительная случайная погрешность результата единичного измерения ε не превысит $\pm 0{,}06$. Оценить неопределенности единичного измерения.
Решение: Интервал погрешности $\varepsilon = \pm t\sigma$ Доверительную вероятность, с которой погрешность единичного измерения будет находиться в пределах этого интервала, находят по значению функции Лапласа $\Phi(t)$.
Найдем $t = \varepsilon/\sigma = 0{,}06/\sqrt{0{,}0004} = 3$. Для этого значения по таблице интегралов вероятностей находим $\Phi(3) = 0{,}9973$. Т.е., с вероятностью 0,9973 относительная погрешность единичного измерения не превысит $\pm 0{,}06$.
Стандартная неопределенность по типу A $u_A = 0{,}02\cdot 1{,}01 = 0{,}0202 \approx 0{,}02$ (в единицах измеряемой величины). Расширенная неопределенность в условиях пренебрежимой малости неопределенности по типу B, равна $U \approx 3\cdot 0{,}02 = 0{,}06$.

Пример 54. В результате 100 прямых равноточных измерений массы образцовой гири получена дисперсия распределения случайной погрешности $\sigma^2 = 0{,}000004$ кг^2. Определить, с какой доверительной вероятностью случайная погрешность результата среднего значения при многократных измерениях ε не превысит $\pm 0{,}5$ г. Оценить неопределенности единичного измерения.
Решение: Интервал погрешности $\varepsilon = \pm t\sigma$ Доверительную вероятность, с которой погрешность будет находиться в пределах этого интервала, находят по значению функции Лапласа $\Phi(t)$.
СКО среднего равно $\sigma_{ср} = \sqrt{\sigma^2/n} = 0{,}002/10 = 0{,}0002$ кг. Найдем $t = \varepsilon/\sigma_{ср} = 0{,}0005/0{,}0002 = 2{,}5$. Для этого значения по таблице интегралов вероятностей находим $\Phi(2{,}5) = 0{,}9876$. Т.е., с вероятностью 98,76% относительная погрешность измерения среднего значения массы этим методом при многократных измерениях не превысит $\pm 0{,}5$ г.
Стандартная неопределенность единичного измерения по типу A $u_A = \sigma = 0{,}002$ кг. Расширенная неопределенность в условиях пренебрежимой малости неопределенности по типу B, равна $U \approx 3\cdot 0{,}002 = 0{,}006$ кг.

Пример 55. По десяти наблюдениям было вычислено значение массы эталона килограмма, полученное методом сличения с прототипом. Результаты вычисления следующие: m_{cp} = 999,998721 г, оценка СКО единичного измерения $S = 17\cdot10^{-6}$ г. Найти границы значений измеренной массы, в пределах которых при уровне значимости 0,01 находится истинное значение массы эталона. Оцените неопределенности, в том числе для условий поверки рабочих СИ сличением с данным эталоном, которому приписывается номинальное значение массы 1,000000 кг.
Решение: Вычислим оценку СКО среднего: $S_{mcp} = S/\sqrt{10} \approx 5\cdot10^{-6}$ г. Погрешность измерения среднего $\varepsilon = tS_{mcp}$. При доверительной вероятности P = 0,99 и числе степеней свободы k = 10 – 1 = 9 коэффициент Стьюдента t = 3,25. Вычислим $\varepsilon = 3{,}25\cdot5\cdot10^{-6} = 16\cdot10^{-6}$ г.
Истинное значение измеряемой величины с доверительной вероятностью 0,99 лежит в интервале 999,998705 г < a < 999,998737 г.
Стандартная неопределенность по типу A $u_A = S_{mcp} \approx 5\cdot10^{-6}$ г. Поскольку полученное в результате отклонение от эталона равно - 0,001279 г, его можно принять за систематическое отклонение от прототипа, СКО которого равно 0,001279/√3 = - 0,00074 г.
Если эталонной массе приписывается номинальное значение 1,000000 кг, то тогда стандартная неопределенность поверки рабочего СИ (гиря) по типу B будет равна: u_B = 0,00074 г. Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2} \approx u_B$ = 0,00074 г. Расширенная неопределенность в предположении равномерного закона распределения и P = 0,99 равна U = 3·0,00074 = 0,00222 ≈ 0,002 г.

2.3. Объединение рядов наблюдений

Пример 56. Тремя группами исследователей с применением различных методов получены следующие значения ускорения свободного падения и СКО результата измерений: g_1 = 981,9190±0,0004; g_2 = 981,9215±0,0016; g_3 = 981,923±0,0020 (см с$^{-2}$). Найти средневзвешенное значение g и его СКО.
Решение: Средневзвешенное при неравноточных (неравнорассеянных) измерениях определяют по соотношению:
$\overline{X_0} = \sum_i \alpha_i \overline{X_i} / \sum_i \alpha_i$, где α_i – вес среднего i-той группы измерений $\overline{X_i}$ $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X_i}} = n_i/\sigma_i^2$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно:
$\overline{X_0} = \sum_i a_i \overline{X_i}$.
Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X_0}} = 1/\sum_i \alpha_i$.
Произведем вычисления весов: a_1 = 0,91; a_2 = 0,06; a_3 = 0,03.
Средневзвешенное значение ускорения свободного падения равно: 0,91·981,9190 + 0,06·981,9215 + ·0,03·981,923 = 981,9193 см с$^{-2}$.
Дисперсия $S^2 = 14{,}5\ 10^{-8}$см^{2}с$^{-4}$; оценка СКО $S = 4\ 10^{-4}$смс$^{-2}$.

Пример 57. Диаметр цилиндра измерен различным инструментом: штангенциркулем, микрометром, скобой - калибром и индикатором часового типа. Результаты измерений и характеристики точности приведены в таблице. Найти средневзвешенное значение диаметра цилиндра, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,01.

СИ	Штангенциркуль	Микрометр	Скоба-калибр	Индикатор часового типа
D, мм	9,95	10,015	10,00	10,01
Δ ± мкм	20	2	4	10
Число измерений	10	10	1	10

Решение: Средневзвешенное при неравноточных (неравнорассеянных) измерениях определяют по соотношению:
$\overline{X_0} = \sum_{\iota} \alpha_{\iota} \overline{X_{\iota}} / \sum_{\iota} \alpha_{\iota}$, где α_i – вес среднего i-той группы измерений $\overline{X_{\iota}}$ $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X_{\iota}}} = n_i / \sigma_i^2$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно:

$$\overline{X_0} = \sum_i a_i \overline{X_i}.$$

Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X_0}} = 1/\sum_i \alpha_i$.

Произведем вычисления весов: a_1 = 0,086; a_2 = 0,348; a_3 = 0,218, a_4 = 0,348.
Средневзвешенное значение диаметра вала D = 10,010 мм.
Дисперсия S^2 = 0,39 мкм^2; оценка СКО S = 0,6 мкм.
Абсолютную погрешность средневзвешенного найдем из соотношения: $\Delta_{cp} = tS$, где t - коэффициент распределения Стьюдента при числе степеней свободы k, определенной по формуле:

$$k = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{S^2_{\overline{X}_j}} \right)^2 / \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j + 1} \frac{1}{S^4_{\overline{X}_j}} - 2$$

Δ_{cp} = (k = 40) = 2,57·0,6 = 1,5 ≈ ± 2 мкм.

Пример 58. В двух группах наблюдений линейного размера получены следующие результаты:

№ группы	X_{cpi}, *мм*	S_{cpi}, *мм*	n_i
1	8,390	0,02	10
2	8,360	0,03	20

Найти средневзвешенное значение X_{cp}, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,01. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.
Решение: Средневзвешенное при неравнорассеянных измерениях определяют по соотношению:
$\overline{X_0} = \sum_{\iota} \alpha_{\iota} \overline{X_{\iota}} / \sum_{\iota} \alpha_{\iota}$, где α_i – вес среднего i-той группы измерений $\overline{X_{\iota}}$ $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X_{\iota}}} = n_i / \sigma_i^2$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно:

$$\overline{X_0} = \sum_i a_i \overline{X_i}.$$

Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X_0}} = 1/\sum_i \alpha_i$.

Произведем вычисления весов: α_1 = 2,510^4; α_2 = 2,210^4; a_1 = 0,53; a_2 = 0,47.
Средневзвешенное значение X = 8,38 мм.
Дисперсия S^2 = 0,2110^{-4} мм^2; оценка СКО S ≈ 0,005 мм.
Абсолютную погрешность средневзвешенного найдем из соотношения: $\Delta_{cp} = tS$, где t - коэффициент распределения Стьюдента при числе степеней свободы k, определенной по формуле: $k = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{S^2_{\overline{X}_j}} \right)^2 / \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j + 1} \frac{1}{S^4_{\overline{X}_j}} - 2$

k = 26; t = 2,78 при Р = 0,99; Δ_{cp} = 2,78·0,005 = 0,014 мм = 14 мкм.
Результат оценки средневзвешенного значения: X = (8,380 ± 0,014) мм, т.е. с доверительной вероятностью 0,99 значение средневзвешенного находится в пределах:8,366 мм ≤ X ≤ 8,394 мм.
Проверка однородности дисперсий: (0,03/0,02)^2 = 2,25. Критерий Фишера F(9;19; 0,01) = 4,84. Так как 2,25 < 4,84 – дисперсии однородны.

Проверка однородности средних: $t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}\sqrt{\dfrac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} < t_н\ (n_1 + n_2 - 2;\ P)$.

t = 3,1 > $t_н$ = 2,763 – средние неоднородны. По-видимому, в результате 8,360 мм содержится значимая составляющая систематической погрешности.

Пример 59. В трех группах наблюдений длины стержня получены следующие результаты:

№ группы	X_{cpi}, мм	S_{cpi}, *мм*	n_i
1	13,45	0,01	10
2	13,40	0,02	40
3	13,50	0,05	25

Найти средневзвешенное значение X_{cp}, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,05. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.

Решение: Средневзвешенное при неравноточных измерениях определяют по соотношению:
$\overline{X_0} = \sum_i \alpha_i \overline{X_i} / \sum_i \alpha_i$, где α_i – вес среднего i-той группы измерений $\overline{X_i}$ $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X_i}} = n_i / \sigma_i^2$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно: $\overline{X_0} = \sum_i a_i \overline{X_i}$.

Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X_0}} = 1/\sum_i \alpha_i$.

Произведем вычисления весов: $\alpha_1 = 10\cdot10^4$; $\alpha_2 = 10\cdot10^4$; $\alpha_3 = 10^4$; a_1 = 0,476; a_2 = 0,476; a_3 = 0,048.
Средневзвешенное значение X_0 = 13,43 мм.
Дисперсия $S^2 = 0{,}04810^{-4}$ мм^2; оценка СКО $S \approx 0{,}0022$ мм.
Абсолютную погрешность средневзвешенного найдем из соотношения: $\Delta_{cp} = tS$, где t - коэффициент распределения Стьюдента при числе степеней свободы k, определенной по формуле: $k = \left(\sum_{j=1}^{m} \dfrac{1}{S^2_{\overline{X}_j}}\right)^2 / \sum_{j=1}^{m} \dfrac{1}{n_j+1}\dfrac{1}{S^4_{\overline{X}_j}} - 2$

k = 33; t = 2,58 при Р = 0,99; $\Delta_{cp} = 1{,}96\cdot0{,}0022 = 0{,}0057$ мм ≈ 6 мкм.
Результат оценки средневзвешенного значения: X = (13,430 ± 0,006) мм, т.е. с доверительной вероятностью 0,95 значение средневзвешенного находится в пределах:13,422 ≤ X ≤ 13,436.
Проверка однородности дисперсий по группам:

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод
2-1	4	2,83	Неоднородны
3-2	6,25	1,80	Неоднородны
3-1	25	2,90	Неоднородны

Проверка однородности средних 1 и 2 групп:

$t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}\sqrt{\dfrac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} < t_н\ (n_1 + n_2 - 2;\ P)$.

t = 7,6 > $t_н$ = 1,96 – средние неоднородны.

Пример 60. В двух группах наблюдений температуры в термостате получены следующие результаты:

№ группы	t_{cpi}, ^{0}C	S_{cpi}	n_i
1	100,01	0,03	5
2	100,02	0,05	5

Найти средневзвешенное значение t_{cp}, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,01. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.

Решение: Средневзвешенное при неравноточных измерениях определяют по соотношению: $\overline{X_0} = \sum_i \alpha_i \overline{X_i} / \sum_i \alpha_i$, где α_i – вес среднего i-той группы измерений $\overline{X_i}$ $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X_i}} = n_i/\sigma_i^2$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно: $\overline{X_0} = \sum_i a_i \overline{X_i}$.

Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X_0}} = 1/\sum_i \alpha_i$.

Произведем вычисления весов: $\alpha_1 = 0,111\cdot10^4$; $\alpha_2 = 0,04\cdot10^4$; $a_1 = 0,735$; $a_2 = 0,265$.

Средневзвешенное значение $t_0 = 0,735\cdot100,01 + 0,265\cdot100,02 = 100,012$ ^{0}C.

Дисперсия $S^2 = 2,53\cdot10^{-4}$ $(^0\text{C})^2$; оценка СКО $S \approx 0,025$ ^{0}C.

Абсолютную погрешность средневзвешенного найдем из соотношения: $\Delta_{cp} = tS$, где t - коэффициент распределения Стьюдента при числе степеней свободы k, определенной по формуле: $k = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{S^2_{\overline{X}_j}} \right)^2 / \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j+1} \frac{1}{S^4_{\overline{X}_j}} - 2$

$k = 8$; $t = 3,355$ при $P = 0,99$; $\Delta_{cp} = 3,355\cdot0,025 = 0,0839 \approx 0,084$ ^{0}C.

Результат оценки средневзвешенного значения: $t = (100,012 \pm 0,084)$ ^{0}C, т.е. с доверительной вероятностью 0,99 значение средневзвешенного находится в пределах: $99,928 \le t \le 100,096$ ^{0}C.

Проверка однородности дисперсий по группам:

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод
2-1	2,8	16	Однородны

Проверка однородности средних:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} < t_н\,(n_1 + n_2 - 2;\, P).$$

$t = 2,43 < t_н = 3,355$– средние однородны.

Пример 61. В двух группах наблюдений температуры в точке плавления Ga получены следующие результаты:

№ группы	t_{cpi}, ^{0}C	S_{cpi}, ^{0}C	n_i
1	29,765	0,002	5
2	29,764	0,006	5

Найти средневзвешенное значение t_{cp}, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,05. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.

Решение: Средневзвешенное при неравноточных измерениях определяют по соотношению:

$\overline{X_0} = \sum_i \alpha_i \overline{X_i} / \sum_i \alpha_i$, где α_i – вес среднего i-той группы измерений $\overline{X_i}$ $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X_i}} = n_i/\sigma_i^2$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно: $\overline{X_0} = \sum_i a_i \overline{X_i}$.

Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X_0}} = 1/\sum_i \alpha_i$.

Произведем вычисления весов: $\alpha_1 = 0{,}2510^6$; $\alpha_2 = 0{,}02810^6$; $a_1 = 0{,}9$; $a_2 = 0{,}1$.
Средневзвешенное значение $t_0 = 29{,}765$ ^{0}C.
Дисперсия $S^2 = 3{,}610^{-6}$ $(^0C)^2$; оценка СКО $S \approx 1{,}910^{-3}$ ^{0}C.
Абсолютную погрешность средневзвешенного найдем из соотношения: $\Delta_{cp} = tS$, где t - коэффициент распределения Стьюдента при числе степеней свободы k, определенной по формуле: $k = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{S^2_{\bar{X}_j}}\right)^2 / \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j+1}\frac{1}{S^4_{\bar{X}_j}} - 2$

$k = 5$; $t = 2{,}57$ при $P = 0{,}95$; $\Delta_{cp} = 2{,}57 \cdot 0{,}0019 = 0{,}00488 \approx 0{,}005$ ^{0}C.
Результат оценки средневзвешенного значения: $t = (29{,}765 \pm 0{,}005)$ ^{0}C, т.е. с доверительной вероятностью 0,95 значение средневзвешенного находится в пределах: $29{,}760 \le t \le 29{,}770$ ^{0}C.
Проверка однородности дисперсий по группам:

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод
2-1	9	6,39	Неоднородны

Проверка однородности средних:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} < t_н\,(n_1 + n_2 - 2;\ P).$$

$t < 1 < t_н = 2{,}306$– средние однородны.

Пример 62. В двух группах измерений размера плоско - параллельной концевой меры длины получены следующие результаты:

№ группы	X_{cpi}, мкм	S_{cpi}, *мкм*	n_i
1	100,1	0,1	5
2	99,9	0,5	10

Найти средневзвешенное значение X_{cp}, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,05. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений групп.

Решение: Средневзвешенное при неравноточных измерениях определяют по соотношению: $\overline{X_0} = \sum_i \alpha_i \overline{X_i} / \sum_i \alpha_i$, где α_i – вес среднего i-той группы измерений $\overline{X_i}$ $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X_i}} = n_i/\sigma_i^2$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно: $\overline{X_0} = \sum_i a_i \overline{X_i}$.

Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X_0}} = 1/\sum_i \alpha_i$.

Произведем вычисления весов: $\alpha_1 = 100$; $\alpha_2 = 25$; $a_1 = 0{,}8$; $a_2 = 0{,}2$.
Средневзвешенное значение $t_0 = 100{,}06$ мкм.
Дисперсия $S^2 = 0{,}008$ (мкм)^2; оценка СКО $S \approx 0{,}09$ мкм.

Абсолютную погрешность средневзвешенного найдем из соотношения: $\Delta_{cp} = tS$, где t - коэффициент распределения Стьюдента при числе степеней свободы k, определенной по формуле: $k = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{S_{\bar{X}_j}^2}\right)^2 / \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j + 1} \frac{1}{S_{\bar{X}_j}^4} - 2$

$k = 88$; $t = 1{,}96$ при $P = 0{,}95$; $\Delta_{cp} = 1{,}96 \cdot 0{,}09 = 0{,}176 \approx 0{,}2$ мкм.

Результат оценки средневзвешенного значения: $t = (100{,}06 \pm 0{,}2)$ мкм, т.е. с доверительной вероятностью 0,95 значение средневзвешенного находится в пределах: $99{,}86 \le t \le 100{,}26$ мкм.

Проверка однородности дисперсий по группам:

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод
2-1	25	8,79	Неоднородны

Проверка однородности средних:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} < t_н\,(n_1 + n_2 - 2;\, P).$$

$t = 0{,}7 < t_н = 2{,}3$ – средние однородны.

Пример 63. В двух группах измерений линейного размера детали получены следующие результаты:

№ группы	X_{cpi}, мм	n_i
1	$61{,}35 \pm 0{,}35$ $P = 0{,}95$	10
2	$61{,}65 \pm 0{,}15$ $P = 0{,}95$	10

Найти средневзвешенное значение X_{cp}, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,05. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений групп.

Решение: Средневзвешенное при неравноточных измерениях определяют по соотношению: $\overline{X}_0 = \sum_i \alpha_i \overline{X}_i / \sum_i \alpha_i$, где α_i – вес среднего i-той группы измерений $\overline{X}_i$ $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X}_i} = n_i/\sigma_i^2$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно: $\overline{X}_0 = \sum_i a_i \overline{X}_i$.

Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X}_0} = 1/\sum_i \alpha_i$.

Вычислим оценки СКО среднего: $S_{cpi} = \Delta_{cpi}/t$; $t = 2{,}26$; $S_{cp1} = 0{,}155$; $S_{cp2} = 0{,}066$.

Произведем вычисления весов: $\alpha_1 = 41{,}6$; $\alpha_2 = 229{,}6$; $a_1 = 0{,}153$; $a_2 = 0{,}847$.

Средневзвешенное значение $X_0 = 61{,}605$ мм.

Дисперсия $S^2 = 36{,}910^{-4}$ (мм)^2; оценка СКО $S = 0{,}060810 \approx 0{,}06$ мм.

Абсолютную погрешность средневзвешенного найдем из соотношения: $\Delta_{cp} = tS$, где t - коэффициент распределения Стьюдента при числе степеней свободы k, определенной по формуле: $k = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{S_{\bar{X}_j}^2}\right)^2 / \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j + 1} \frac{1}{S_{\bar{X}_j}^4} - 2$

$k = 13$; $t = 1{,}16$ при $P = 0{,}95$; $\Delta_{cp} = 2{,}16 \cdot 0{,}06 = 0{,}132$ мм.

Результат оценки средневзвешенного значения: $t = (61{,}605 \pm 0{,}132)$ мм, т.е. с доверительной вероятностью 0,95 значение средневзвешенного находится в пределах: $61{,}473 \le t \le 61{,}737$ мм.

Проверка однородности дисперсий средних по группам:

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод
1-2	5,52	2,98	Неоднородны

Проверка однородности средних:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} < t_н\,(n_1 + n_2 - 2;\, P).$$

$t = 17 > t_н = 2,1$ – средние неоднородны. В результате первой группы по-видимому содержится неисключенная систематическая погрешность.

Пример 64. В двух группах наблюдений температуры в точке затвердевания *In* получены следующие результаты:

№ группы	$t_{срi}$, ^{0}C	$S_{срi}$	n_i
1	156,599	0,001	10
2	156,598	0,003	20

Найти средневзвешенное значение $t_{ср}$, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,01. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.

Решение: Средневзвешенное при неравноточных измерениях определяют по соотношению: $\overline{X_0} = \sum_i \alpha_i \overline{X_i} / \sum_i \alpha_i$, где α_i – вес среднего i-той группы измерений $\overline{X_i}$ $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X_i}} = n_i/\sigma_i^2$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно: $\overline{X_0} = \sum_i a_i \overline{X_i}$.

Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X_0}} = 1/\sum_i \alpha_i$.

Произведем вычисления весов: $\alpha_1 = 10^6$; $\alpha_2 = 0{,}11 10^6$; $a_1 = 0{,}9$; $a_2 = 0{,}1$.
Средневзвешенное значение $t_0 = 156{,}599$ ^{0}C.
Дисперсия $S^2 = 0{,}9 10^{-6}$ $(^0\text{C})^2$; оценка СКО $S = 0{,}00095 \approx 0{,}001$ ^{0}C.
Абсолютную погрешность средневзвешенного найдем из соотношения: $\Delta_{ср} = tS$, где t - коэффициент распределения Стьюдента при числе степеней свободы k, определенной по формуле: $k = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{S^2_{\overline{X}_j}}\right)^2 / \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j+1}\frac{1}{S^4_{\overline{X}_j}} - 2$

$k = 11$; $t = 3{,}106$ при $P = 0{,}99$; $\Delta_{ср} = 3{,}106 \cdot 0{,}001 = 0{,}0031 \approx 0{,}003$ ^{0}C.
Результат оценки средневзвешенного значения: $t = (156{,}599 \pm 0{,}003)$ ^{0}C, т.е. с доверительной вероятностью 0,99 значение средневзвешенного находится в пределах: $156{,}596 \le t \le 1569{,}602$ ^{0}C.
Проверка однородности дисперсий по группам:

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод
2-1	9	4,405	Неоднородны

Проверка однородности средних:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} < t_н\,(n_1 + n_2 - 2;\, P).$$

t = 1,02 < $t_н$ = 2,763 – средние однородны.

Пример 65. Глубина глухого отверстия измерена индикаторным глубиномером (ИГ) и микрометрическим глубиномером (МГ). Результаты измерений приведены в таблице:

№ группы	X_{cpi}, мм	n_i
1 ИГ	20,00 ± 0,02 P = 0,95	5
2 МГ	19,98± 0,01 P = 0,95	7

Найти средневзвешенное значение X_0, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,05. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.

Решение: Средневзвешенное при неравноточных измерениях определяют по соотношению: $\overline{X_0} = \sum_i \alpha_i \overline{X_i} / \sum_i \alpha_i$, где α_i – вес среднего i-той группы измерений $\overline{X_i}$ $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X_i}} = n_i/\sigma_i^2$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно: $\overline{X_0} = \sum_i a_i \overline{X_i}$.

Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X_0}} = 1/\sum_i \alpha_i$.

Вычислим оценки СКО среднего: $S_{cpi} = \Delta_{cpi}/t$; S_{cp1} = 0,0072; S_{cp2} = 0,0041.

Произведем вычисления весов: $\alpha_1 = 0{,}019310^6$; $\alpha_2 = 0{,}059510^6$; a_1 = 0,245; a_2 = 0,755.

Средневзвешенное значение X_0 = 19,985 мм.

Дисперсия $S^2 = 12{,}6910^{-6}$ (мм)^2; оценка СКО S = 0,00356 ≈ 0,004 мм.

Абсолютную погрешность средневзвешенного найдем из соотношения: $\Delta_{cp} = tS$, где t - коэффициент распределения Стьюдента при числе степеней свободы k, определенной по формуле: $k = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{S^2_{\bar{X}_j}}\right)^2 / \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j+1} \frac{1}{S^4_{\bar{X}_j}} - 2$

k = 29; t = 2,045 при P =0,95; Δ_{cp} = 2,045·0,004 = 0,00818 ≈ 0,008 мм.

Результат оценки средневзвешенного значения: t = (19,985 ± 0,008) мм, т.е. с доверительной вероятностью 0,95 значение средневзвешенного находится в пределах: 19,977 ≤ t ≤ 19,993 мм.

Проверка однородности дисперсий средних по группам:

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод
1-2	4,73	3,97	Неоднородны

Проверка однородности средних:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} < t_н\,(n_1 + n_2 - 2;\, P).$$

t = 6,15 > $t_н$ = 2,28 (P = 0,95) – средние неоднородны. По-видимому, в результате, полученном ИГ, содержится неисключенная систематическая погрешность.

2.4. Отбрасывание промахов

Пример 66. При измерении постоянной температуры получены результаты, приведенные в таблице. Требуется выявить и исключить грубый промах по критерию Романовского.

i	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15
t_i, ^{0}C	20,42	20,40	20,40	20,41	20,39	20,41	20,39	20,30	20,38	20,42	20,42	20,38	20,39	20,39	20,40

Решение: Найдем среднее значение температуры и СКО без сомнительного результата (20,30): $t_{ср}$ = 20,40 ^{0}C, S = 0,014 ^{0}C. Вычислим критерий отклонения сомнительного результата от среднего: $(t_{ср} - t_i)/ S$ = (20,40 – 20,30)/0,014 = 7,14. Критерий Романовского, основанный на распределении Стьюдента, (для n = 14 и P = 0,95) равен $t_н$ = 2,24. Вычисленный нами критерий 7,14 > 2,24, следовательно, сомнительный результат следует исключить из статистики как промах.

Пример 67. Результаты 16-и измерений напряжения приведены в таблице. Найти и исключить грубый промах, воспользовавшись критерием Романовского на уровне значимости 0,01.

i	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
U_i, В	772	789	791	792	794	795	796	797	798	800	801	803	804	806	807	809

Решение: Найдем среднее значение напряжения и СКО без сомнительного результата (772): $U_{ср}$ = 798,8 В, S = 6,13 В. Вычислим $t_нS$ = 3,08·6,13 = 18,88. Сравним с отклонением сомнительного результата от среднего значения: |772 - 798,8| = 26,8 > 18,88, следовательно, сомнительный результат следует исключить как промах.

Пример 68. Произведено 10 измерений силы тока, результаты которых приведены в таблице. Расположение значений тока по возрастанию позволило исследователю усомниться в правильности последнего результата. Требуется проверить принадлежность 10-го результата к однородной выборке, используя критерий Романовского при доверительной вероятности P = 0,99. Записать окончательный результат. Оценить неопределенности единичного измерения, проводимого данным методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
I, A	10,07	10,08	10,10	10,12	10,13	10,14	10,16	10,17	10,20	10,40

Решение: Найдем среднее значение силы тока по 9-и измерениям (без сомнительного) $I_{ср}$ = 10,13 A. Оценка СКО единичного измерения $S = [(I_i - I_{ср})/8]^{1/2}$ = 0,12 A. Для n = 9 и q = 1 – P = 0,01 критерий $t_н$ = 3,54. Тогда $|I_{сомн} - I_{ср}|/S$ = (10,40 – 10,13)/0,12 = 0,27/0,12 = 2,25 < 3,54. Сомнительный результат не может быть отброшен.

Окончательный результат вычислим с учетом 10-го измерения: $I_{ср}$ = 10,16 A, S_x = 0,09 А, $S_{xср}$ = 0,0285 A. Доверительная погрешность при P = 0,99 и числе степеней свободы 10 – 1 = 9 $\Delta_{xср} = t\ S_{xср}$ = 3,25·0,0285 ≈ 0,09 A. Запись окончательного результата: I = (10,16 ± 0,09) A, P = 0,99.

Стандартная неопределенность по типу A для единичного измерения $u_A = S_x$ = 0,09 А. Расширенная неопределенность при пренебрежимо малой систематической составляющей U = 3·0,09 = 0,027 А.

Пример 69. Результаты измерений глубины глухого отверстия приведены в таблице. Требуется проверить принадлежность результатов к однородной выборке по критерию Шарлье. Записать окончательный результат измерений.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h, мм	13,23	8,08	13,53	13,66	14,25	15,96	9,75	12,56	13,41	11,77

Решение: При выполнении неравенства: $\frac{|x_i - \bar{x}|}{\sigma} < K_Ш$ значение x_i не считают промахом. $K_Ш$ - критерий Шарлье. Проведем последовательные действия по исключению результатов по этому критерию:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-й шаг										
h, мм	13,23	**8,08**	13,53	13,66	14,25	15,96	9,75	12,56	13,41	11,77

$h_{ср}$ = 12,62; S_h = 2,27; $S_{hср}$ = 0,72										
$K_Ш$		**2>1,65**				1,47<1,65				
2-й шаг										
h, мм	13,23	**X**	13,53	13,66	14,25	**15,96**	**9,75**	12,56	13,41	11,77
$h_{ср}$ = 13,12; S_h = 1,7; $S_{hср}$ = 0,57										
$K_Ш$						**1,67>1,65**	**1,98>1,65**			
3-й шаг										
h, мм	13,23	**X**	13,53	13,66	14,25	**X**	**X**	12,56	13,41	**11,77**
$h_{ср}$ = 13.2; S_h = 0,81; $S_{hср}$ = 0,31										
$K_Ш$										**1,77>1,65**
4-й шаг										
h, мм	13,23	**X**	13,53	13,66	**14,25**	**X**	**X**	**12,56**	13,41	**X**
$h_{ср}$ = 13,44; S_h = 0,553; $S_{hср}$ = 0,226										
$K_Ш$					**1,46>1,3**			**1,6>1,3**		
5-й шаг										
h, мм	13,23	**X**	13,53	13,66	**X**	**X**	**X**	**X**	13,41	**X**
$h_{ср}$ = 13,46; S_h = 0,183; $S_{hср}$ = 0,0915										

Как следует из таблицы, критерий довольно жесткий – его применение привело к исключению 6-и результатов из 10.

Пример 70. Произведено 10 измерений температуры в точке таяния льда, результаты которых приведены в таблице. Расположение полученных значений в вариационный ряд позволило исследователю усомниться в правильности наибольшего результата. Требуется проверить принадлежность 10-го результата к однородной выборке на уровне значимости 0,05, используя вариационный критерий Диксона. Записать окончательный результат измерений. Оценить неопределенности единичного измерения, проводимого данным методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, К	271,25	272,53	272,95	273,28	273,37	273,49	273,52	273,60	274,36	276,50

Решение: Вариационный критерий Диксона $K_Д = (x_n\text{-}x_{n-1})/(x_n\text{-}x_1)$ равен: $K_Д$ = (276,50 – 274,36)/(276,50 – 271,25) = 2,14/4,25 = 0,504 > 0,41 (n = 10; P = 0,95). Результат может быть отброшен как промах.
Вычислим среднее значение без отброшенного результата:
$t_{ср}$ = 273,15 ^{0}C, S_t =0,867 , $S_{tср}$ =0,289. Доверительная погрешность при P = 0,95 и числе степеней свободы 9 – 1 = 8 $\Delta_{tср} = t\,S_{tср}$ = 2,306·0,289 ≈ 0,67 ^{0}C.
Запись окончательного результата: $t_{ср}$ = (273,15 ± 0,67) ^{0}C, P = 0,95.
Стандартная неопределенность по типу A для единичного измерения $u_A = S_t$ = 0,87 ^{0}C. Расширенная неопределенность при пренебрежимо малой систематической составляющей U = 2·0,87 = 1,74 ^{0}C.

Пример 71. Результаты измерений концевой меры длины приведены в таблице. Требуется проверить принадлежность 10-го результата к однородной выборке на уровне значимости 0,1, используя вариационный критерий Диксона. Записать окончательный результат измерений. Оценить неопределенности единичного измерения, проводимого данным методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l, мкм	97,00	98,65	99,74	99,80	99,98	99,99	100,07	100,23	100,26	101,28

Решение: Вариационный критерий Диксона $K_Д = (x_n\text{-}x_{n-1})/(x_n\text{-}x_1)$ равен: $K_Д$ = (98,65 – 97,0)/(101,28 – 97,00) = 1,65/4,28 = 0,386 > 0,35 (n = 10; P = 0,90). Результат может быть отброшен как промах.
Вычислим среднее значение без отброшенного результата:

$l_{ср}$ = 100 мкм, S_l =0,68 , $S_{lср}$ =0,227. Доверительная погрешность при P = 0,90 и числе степеней свободы 9 – 1 = 8 $\Delta_{lср} = t\,S_{lср}$ = 1,86·0,227 ≈ 0,42.
Запись окончательного результата: $l_{ср}$ = (100,00 ± 0,42) мкм, P = 0,90.
Стандартная неопределенность по типу A для единичного измерения $u_A = S_l$ = 0,68 мкм.

Пример 72. Результаты измерений диаметра круглого отверстия приведены в таблице. Требуется проверить принадлежность 1-го результата к однородной выборке на уровне значимости 0,05, используя вариационный критерий Диксона. Записать окончательный результат измерений. Оценить неопределенности единичного измерения, проводимого данным методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D, мм	12,000	13,846	14,175	14,225	14,226	14,966	15,455	15,506	16,255	16,346

Решение: Вариационный критерий Диксона $K_Д = (x_n\text{-}x_{n\text{-}1})/(x_n\text{-}x_1)$ равен: $K_Д$ = (13,846 – 12,000)/(16,346 – 127,000) = 1,846/4,346 = 0,425 > 0,41 (n = 10; P = 0,95). Результат может быть отброшен как промах.
Вычислим среднее значение без отброшенного результата:
$D_{ср}$ = 15,000 мм, S_D =0,94, $S_{Dср}$ =0,313. Доверительная погрешность при P = 0,95 и числе степеней свободы 9 – 1 = 8 $\Delta_{Dср} = t\,S_{Dср}$ = 2,306·0,313 = 0,722.
Запись окончательного результата: $D_{ср}$ = (15,000 ± 0,722) мм, P = 0,95.
Стандартная неопределенность по типу A для единичного измерения $u_A = S_D$ = 0,94 мм. Расширенная неопределенность при P = 0,95 U = 2·0,94 = 1,88 мм.

Пример 73. Результаты измерения периода колебаний математического маятника приведены в таблице. Требуется проверить их на однородность выборки по критерию «трех сигм». Представить результат измерений периода для P = 0,99. Оценить неопределенности единичного измерения, производимого этим методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T, с	1,97	2,02	1,87	2,13	2,10	2,15	1,78	1,98	2,11	1,89

Решение: По этому критерию результат x_i считают промахом, если $\left|x_i - \bar{x}\right|$ > 3σ. Проверку проводят последовательно исключая из выборки промахи до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $\left|x_i - \bar{x}\right|$ < 3σ. Проверим на однородность минимальное и максимальное значения из приведенного ряда:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i, с	1,97	2,02	1,87	2,13	2,10	**2,15**	**1,78**	1,98	2,11	1,89
$T_{ср}$ = 2,00 с; S_T = 0,121 с; $S_{Tср}$ = 0,038 с										
«3σ» = 0,363										
T_i - $T_{ср}$	-0,03	0,02	-0,13	0,13	0,10	0,15	-0,22	-0,02	0,11	-0,11

Из таблицы видно, что ни одно отклонение от среднего не превышает критерия «трех сигм». Следовательно, выборка однородна. Доверительная погрешность результата: $\Delta_{Тср}$ = 3,25·0,038 = 0,124 ≈ 0,12 с. Результат измерений представим в виде: T = (2,00 ± 0,12) с, P = 0,99.
Стандартная неопределенность по типу А равна: $u_A = S_T$ = 0,12 с. Расширенная неопределенность при P = 0,99 U = 3·0,12 = 0,36 с.

Пример 74. Результаты измерений постоянного значения магнитной индукции приведены в таблице. Требуется проверить их на однородность выборки по критерию «трех сигм». Представить результат измерений для P = 0,95. Оценить неопределенности единичного измерения, производимого этим методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B, мТл	37,82	38,72	39,70	39,77	40,24	41,10	41,20	41,28	41,73	45,10?

Решение: Подозрение вызывает 10-й результат. Вычислим характеристики распределения без него (по результатам 1 – 9) $B_{ср}$ = 40,17 мТл; оценка СКО S = 1,3; критерий «3σ» = 3,9. Разница B_{10} – $B_{ср}$ = 45,10 – 40,17 = 4,93 > 3,9. Следовательно, 10-й результат не следует включать в выборку.
Оценка СКО среднего: $S_{ср}$ = 0,43 мТл. При доверительной вероятности 0,95 и числе степеней свободы 8 погрешность среднего равна: $\Delta_{ср}$ = 2,306·0,43 = 0,99 мТл. Окончательный результат запишем в виде: B = (40,17 ± 0,99) мТл.
Стандартная неопределенность по типу A равна: u_A = S = 1,3 мТл. Расширенная неопределенность при P = 0,95 U = 2·1,3 = 2,6 мТл.

Пример 75. Результаты измерения теплопроводности образца приведены в таблице. Требуется проверить их на однородность выборки по критерию «трех сигм». Представить результат измерений периода для P = 0,99. Оценить неопределенности единичного измерения, производимого этим методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	17,30	18,56	19,33	20,68	20,76	21,35	22,47	23,20	23,95	27,61?

Решение: Сомнительным кажется 10-й результат. Вычислим характеристики распределения без него (по результатам 1 – 9): $\lambda_{ср}$ = 20,84 Вт/м^{0}С; оценка СКО S = 2,2; критерий «3σ» = 6,6.
Разница $\lambda_{10} - \lambda_{ср}$ = 27,61 – 20,84 = 6,77 > 6,6. Следовательно, 10-й результат не следует включать в выборку.
Оценка СКО среднего: $\lambda_{ср}$ = 0,73 Вт/м^{0}С. При доверительной вероятности 0,99 и числе степеней свободы 8 погрешность среднего равна: $\Delta_{ср}$ = 3,555·0,73 = 2,6 Вт/м^{0}С. Окончательный результат запишем в виде: λ = (20,84 ± 2,6) Вт/м^{0}С.
Стандартная неопределенность по типу A равна: u_A = S = 2,2 Вт/м^{0}С. Расширенная неопределенность при P = 0,99 U = 3·1,3 = 6,6 Вт/м^{0}С.

Пример 76. По результатам измерений линейного размера построен вариационный ряд. Значения крайних членов вариационного ряда указывают на «засоренность» выборки. Необходимо оценить усеченное среднее по методу Пуанкаре, приняв степень засорение выборки ξ = 0,25. Сравнить устойчивость среднего и медианы к выбросам.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
L, мм	-0,17	3,95	5,44	5,50	7,82	8,72	8,91	9,70	9,77	10,24	11,10	11,20	11,28	11,73	13,32	14,51	16,18	17,19

Решение: Усеченное среднее в методе Пуанкаре определяется по формуле:

$$T(\alpha) = \frac{1}{n-2k}\sum_{i=k+1}^{n-k} x_i ,$$

где k - число отброшенных значений, $k \le \alpha n$ - целая часть от произведения αn;
n - объем выборки;
α - некоторая функция засорения выборки ξ.
При ξ = 0,25 α = 0,222 (табл. 1.5). Тогда k = 4. Усеченное среднее равно $T(\alpha)$ = 10,05 мм; med = 10,005; оценка СКО S = 1,29.
Для выборки без усечения среднее равно $L_{ср}$ = 9,80 мм; med = 10,005; оценка СКО S = 4,32.
Таким образом, медиана гораздо более устойчива к выбросам, чем среднее арифметическое.

Пример 77. Результаты измерений линейного размера, показанные в таблице, расположены по возрастанию. Крайний результат в ряду вызывает сомнение. Требуется проверить его однородность выборке по критерию Граббса, а также оценить устойчивость оценок среднего арифметического и медианы к выбросу.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
L, мм	7,19	7,42	8,12	9,17	9,19	9,60	11,03	11,20	12,26	12,32	15,90

Решение: Оценим параметры исходной выборки: среднее L_{cp} = 10,31 мм; *med* = 9,60; оценка СКО *S* = 2,55. Проверим по критерию Граббса 11-й член ряда:

$$T_н = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

15,90 – 10,31 = 5,59; 5,59/2,55 = 2,192. Критерий $T_н$ при уровне значимости 0,1равен 2,190 < 2,192. Следовательно, 11-й результат нужно отбросить.

Параметры выборки без отброшенного результата: среднее L_{cp} = 9,75 мм; *med* = 9,39; оценка СКО *S* = 1,88.

При отбрасывании 11-го результата среднее изменилось примерно на 6%, а медиана – на 2%. Таким образом, среднее арифметическое чувствительнее к выбросам, чем медиана.

Пример 78. В результате испытаний по биномиальному плану получен ряд значений наработки изделий до отказа. Данные приведены в таблице. По этим результатам требуется определить точечную и интервальную (при α = 0,1) оценки средней наработки до отказа непараметрическим методом. Найти и сравнить мат. ожидание отклонений от среднего и от медианы.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T, часы	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7

Решение: В качестве оценки центра распределения принимаем выборочную медиану, т.е. среднее значение ряда, и доверительный интервал, характеризующий точность этой оценки ($x_i; x_j$), где *i* – наибольшее целое число меньше $(n + 1 - z_p\sqrt{n})/2$, а *j* – наименьшее целое число больше $(n + 1 + z_p\sqrt{n})/2$; z_p – квантиль, распределения Гаусса.

Медиана распределения наработки до отказа $T_{мед}$ = 5,5 часа среднее арифметическое 5,2 часов. Квантиль нормального распределения $z_p(1 – α/2 = 0,95)$ = 1,645, откуда: *i* = 2; *j* = 9. Таким образом, значение средней наработки до отказа при доверительной вероятности 0,95 находится в интервале (3;7) часов.

Анализ отклонений от медианы показывает, что их мат. ожидание равно 0, т.е. они симметричны относительно медианы, чего нельзя сказать о среднем арифметическом значении отклонений – оно равно - 0,3 часа.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T – T_{мед}$, часы	- 3,5	- 2,5	- 1,5	- 0,5	- 0,5	0,5	0,5	1,5	1,5	1,5

Пример 79. В результате испытаний по биномиальному плану получен ряд значений наработки изделий до отказа. Данные приведены в таблице. По этим результатам требуется определить точечную и интервальную (при α = 0,05) оценки средней наработки до отказа непараметрическим методом. Найти и сравнить мат. ожидание отклонений от среднего и от медианы.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T, часы	5	6	7	8	9	9	9	10	10	10
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T, часы	10	10	11	11	11	11	12	12	12	15

Решение: Найдем выборочную медиану, т.е. среднее значение ряда, и доверительный интервал, характеризующий точность этой оценки (x_i; x_j), где i – наибольшее целое число меньше ($n + 1 - z_p\sqrt{n}$)/2, а j – наименьшее целое число больше ($n + 1 + z_p\sqrt{n}$)/2; z_p – квантиль, распределения Гаусса.

Медиана распределения наработки до отказа $T_{мед}$ = 10 часов среднее арифметическое 9,9 часа. Квантиль нормального распределения $z_p(1 – α/2 = 0,975) = 1,96$, откуда: $i = 6$; $j = 15$. Таким образом, значение средней наработки до отказа при доверительной вероятности 0,95 находится в интервале (9;11) часов.

Анализ отклонений от медианы показывает, что их мат. ожидание равно 0, т.е. они симметричны относительно медианы, чего нельзя сказать о среднем арифметическом значении отклонений – оно равно - 0,1 часа.

Пример 80. В результате многократных измерений постоянной температуры получен ряд ее значений, приведенных в таблице. По этим результатам требуется определить точечную и интервальную (при α = 0,05) оценки измеренной температуры непараметрическим методом. Найти и сравнить устойчивость к выбросам среднего и медианы.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T, ^{0}C	99	99	100	100	100	100	100	100	100	100
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T, ^{0}C	100	100	100	101	101	101	101	101	101	101

Решение: Найдем выборочную медиану, т.е. среднее значение ряда, и доверительный интервал, характеризующий точность этой оценки (x_i; x_j), где i – наибольшее целое число меньше ($n + 1 - z_p\sqrt{n}$)/2, а j – наименьшее целое число больше ($n + 1 + z_p\sqrt{n}$)/2; z_p – квантиль, распределения Гаусса.

Медиана распределения измеренной температуры $T_{мед}$ = 100 ^{0}C; среднее арифметическое 100,35^{0}C. Квантиль нормального распределения $z_p(1 – α/2 = 0,975) = 1,96$, откуда: $i = 3$; $j = 18$. Таким образом, значение средней температуры при доверительной вероятности 0,95 находится в интервале (100; 101) ^{0}C.

Из таблицы видно, что медиана нечувствительна к изменениям значений температуры по концам вариационного ряда. При наличии промахов более, чем в трех значениях по краям ряда, изменится лишь доверительный интервал значений температуры. Среднее значение, в отличие от медианы, очень чувствительно к этим выбросам.

2.5. Косвенные измерения

Пример 81. При определении ускорения свободного падения g с помощью математического маятника используется расчетная формула: $g= 4\pi^2 l/T^2$, где l – длина математического маятника, определяемая линейкой с ценой деления 1 мм, T - период колебаний маятника, определяемый секундомером с пределом допускаемой погрешности 0,05 с. Проведено 5 прямых измерений времени и длины. Результаты измерений приведены в таблице. Вычислить результат измерений и погрешность значения g и неопределенность измерений.

ί	1	2	3	4	5
l, см	99,8	100,1	100,2	99,9	100,0
T, с	2,00	1,90	2,20	1,80	2,10

Решение: Среднее значение длины маятника $l_{ср}$ = 100 см; СКО среднего $S_{lср}$ = 0,071 см; погрешность результата измерения длины маятника при P = 0,68 и числе степеней свободы 4 равна $\Delta_l = t{\cdot}S_{lср} = 1,2{\cdot}0,071 = 0,085$ см; предельная погрешность линейки равна 0,05 см. Тогда суммарная погрешность измерения длины равна $\Delta_{lсумм} = (0,085^2 + 0,05^2)^{1/2} = 0,099 \approx 0,1$ см.

Среднее значение периода колебаний $T_{ср}$ = 2,0 с; СКО среднего $S_{Tср}$ = 0,071 с; погрешность результата измерения периода при P = 0,68 и числе степеней свободы 4 равна $\Delta_T = t{\cdot}S_{Tср}$ = 1,2·0,071 = 0,085 с; предельная погрешность секундомера равна 0,05 с. Тогда суммарная погрешность измерения периода равна $\Delta_{Tсумм} = (0{,}085^2 + 0{,}05^2)^{1/2} \approx 0{,}1$ с.
Значение ускорения свободного падения по результатам измерений равно: g = $4\pi^2 l/T^2$ = 9,87 м/с^2.
Относительную погрешность измерения значения ускорения свободного падения можно определить как $\frac{\Delta g}{g} = 2\frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}$

Пренебрегая погрешностью значения π (3,141593) получим $\Delta g/g$ = 0,1/100 + 2·0,1/2 ≈ 0,1. Абсолютная погрешность Δg = 9,87·0,1 ≈ 1 м/с^2.
Запишем результат: g = (9,9 ± 1,0) м/с^2, P = 0,99. **Примечание:** в результате измерения периода колебаний маятника и вычисленном значении g преобладает систематическая погрешность с доверительной вероятностью более 0,99. Именно поэтому в окончательном результате указывают эту доверительную вероятность. Если бы преобладала случайная погрешность, тогда следовало бы указать P = 0,68.

Пример 82. При определении ускорения свободного падения g с помощью математического маятника используется расчетная формула: $g= 4\pi^2 n^2 l/t^2$,
где l – длина математического маятника, n - число колебаний маятника, t - время n = 10 колебаний маятника, определяемое секундомером с пределом допускаемой погрешности 5 мс. Проведено 10 прямых измерений времени и одно – длины. Результаты измерений времени приведены в таблице, а результат однократного измерения длины записан в виде: l= 54,2 см ±0,05 см = (54,2 ±0,05)·10^{-2} м, где 0,05 – половина цены деления миллиметровой линейки. Вычислить результат измерений и погрешности и неопределенности измерений g этим методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i, c	14,72	14,75	14,76	14,77	14,71	14,73	14,75	14,74	14,73	14,74

Решение: Среднее значение десяти колебаний маятника $t_{ср}$ = 14,74 с. Оценка дисперсии единичного измерения $S^2_i = \Sigma(t_i - t_{ср})^2/(n-1)$. Оценка СКО единичного измерения S_i = 0,018 с и СКО среднего $S_{ср} = 0{,}018/n^{1/2}$ = 0,006 с. Суммарная погрешность результата измерения, состоящая из случайной погрешности измерения и неисключенной систематической погрешности (θ) секундомера может быть определена следующим образом: Допускаемая случайная погрешность при доверительной вероятности 0,99 и числе степеней свободы $k = n$ - 1= 10 - 1 = 9 равна $\Delta_{сл} = tS_{ср}$, где коэффициент Стьюдента t = 3,25, $\Delta_{сл}$ = 3,25·0,006 = 0,02 с. Суммарную погрешность результата измерений времени 10-и колебаний маятника можно найти либо арифметическим либо геометрическим суммированием погрешностей. В первом случае получим $\Delta_{сумм}$ = 0,02 + 0,005 = 25 мс, во втором - $\Delta_{сумм} = (0{,}02^2 + 0{,}005^2)^{1/2}$ = 21 мс. В дальнейшем используем последнее значение погрешности. Можно вычислить погрешность несколько иначе: сначала определяют оценку стандартного отклонения суммарной погрешности $S_{сумм} = (S_{cp}{}^2 + \theta^2/3)^{1/2}$, а затем погрешность результата определяют как $\Delta_{сумм} = t\, S_{сумм}$ = 3,25·6,67 = 21,6 мс ≈ 22 мс.
Относительную погрешность измерения значения ускорения свободного падения можно определить как $\frac{\Delta g}{g} = 2\frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta t}{t}$

Пренебрегая погрешностью значения π (3,141593) получим $\Delta g/g$ = 0,05/52,4 + 2·0,021/14,74 = 3,8 10^{-3} ≈ 4 10^{-3}. Абсолютная погрешность Δg = 9,824·0,004 = ≈ 0,04 м/с^2.
Запишем результат: g = (9,824 ± 0,04) м/с^2, P = 0,99.
Расширенная неопределенность равна: U_g = 0,04 м/с^2. Стандартная суммарная неопределенность равна: u_C = 0,04/3 = 0,013 м/с^2.

Пример 83. Для измерения мощности, выделяемой в резисторе, измерили ток амперметром, класс точности (γ) которого обозначен 1,5. Амперметр показал ток 3,5 А на пределе измерения 5 А. Значение сопротивления резистора, равное 75 Ом, найдено с помощью моста, класс точности которого обозначен 1,0. Измерения сопротивления и тока однократные. Найти результат измерения мощности.

Решение: Так как мощность находим по функциональной зависимости: $P = I^2 \cdot r$, то измерения являются косвенными. Поскольку указаны классы точности приборов, то по ним и оценим погрешность прямых измерений. Границы неисключенных систематических погрешностей примем равными пределам допускаемых погрешностей приборов. Граница погрешности при измерении тока $\theta_I = 5(1{,}5/100) = 0{,}075$ А. Граница погрешности при измерении сопротивления $\theta_R = 75(1/100) = 0{,}75$ Ом.

Результат измерения : $P = I^2 \cdot R = 3{,}5^2 \cdot 75 = 918{,}75$ Вт. Округленно $P = 919$ Вт.

Относительная погрешность косвенного определения функции $y = f(z)$ определяется по формуле:

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial y}{\partial z_j}\cdot \Delta z_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

В нашем случае:

$\partial P/\partial I = 2rI;\ \partial P/\partial r = I^2;$

$(\partial P/\partial I)\theta_1 = 2RI\theta_1 = 2\cdot 75\cdot 3{,}5\cdot 0{,}075 = 39{,}375$ Вт

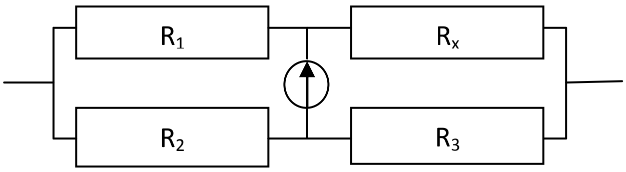
$(\partial P/\partial r)\theta_R = I^2\theta_R = 3.5^2\cdot 0{,}75 = 9{,}1875$ Вт

$\delta y = (918{,}75)^{-1} \sqrt{39{,}375^2 + 9{,}1875^2} \approx 40{,}43/918{,}75.$

Абсолютная погрешность $\theta_P \approx 40$ Вт.

Примечание: При арифметическом сложении составляющих: $\theta_P = 39{,}375 + 9{,}1875 = 48{,}56 \approx 49$Вт. Поскольку использованы предельные погрешности приборов, доверительная вероятность оценки погрешности Р $\geq 0{,}99$. Следовательно, расширенная неопределенность: $U_P = 40$ Вт, а стандартная суммарная неопределенность $u_C = 40/3 \approx 13$ Вт.

Пример 84. Сопротивление Rx измерено по мостовой схеме, показанной на рисунке. Относительные среднеквадратические значения случайной погрешности сопротивлений моста R_1, R_2, R_3 одинаковы и равны 0,01%. Найти относительное значение СКО случайной погрешности Rx.



Решение: Сопротивление Rx определяется формулой $Rx = R_1R_3/R_2$.

Среднеквадратическая случайная погрешность результата косвенного измерения определяется по формуле:

$$S_{Rx} = \sqrt{\sum (\partial Rx/\partial Ri)^2 S_{Ri}^2}$$

$$\partial Rx/\partial R_1 = R_3/R_2 = Rx/R_1;$$

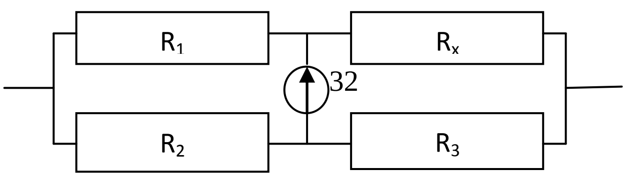
$$\partial Rx/\partial R_2 = -R_1R_3/R_2^2 = -Rx/R_2;$$

$$\partial Rx/\partial R_3 = Rx/R_3.$$

$$S_{Rx} = Rx\sqrt{S_{R1}^2/R_1^2 + S_{R2}^2/R_2^2 + S_{R3}^2/R_3^2}$$

Найдем значение $S_{Rx}/Rx = (0{,}01^2 + 0{,}01^2 + 0{,}01^2)^{1/2} \approx 0{,}02\%$.

Пример 85. Сопротивление Rx измерено однократно по мостовой схеме, показанной на рисунке. Относительные значения систематической составляющей погрешности сопротивлений моста R_1, R_2, R_3 равны +0,01%, -0,01% и +0,02% соответственно. Найти относительное значение неисключенной систематической погрешности Rx при доверительной вероятности 0,95.



Решение: Сопротивление Rx определяется формулой $Rx = R_1R_3/R_2$.

$$\theta_{Rx} = \sqrt{\sum(\partial Rx/\partial Ri)^2\theta_{Ri}^2};$$

$$\partial Rx/\partial R_1 = R_3/R_2 = Rx/R_1;$$

$$\partial Rx/\partial R_2 = -R_1R_3/R_2^2 = -Rx/R_2;$$

$$\partial Rx/\partial R_3 = Rx/R_3.$$

$$\theta_{Rx} = Rx\sqrt{\theta_{R1}^2/R_1^2 + \theta_{R2}^2/R_2^2 + \theta_{R3}^2/R_3^2}$$

Найдем значение $\theta_{Rx}/Rx = [(+0,01)^2 + (-0,01)^2 + (+0,02)^2]^{1/2} = 0,02\%$.

Пример 86. При поверке вольтметра на постоянном токе действительное значение электрического напряжения измеряют потенциометрическим методом. Задаваемое значение напряжения ($U_з$) определяется величиной рабочего тока потенциометра ($I_р$) и значением измерительного сопротивления ($R_и$), а рабочий ток потенциометра задается величиной ЭДС нормального элемента ($E_н$) и установочного сопротивления ($R_у$): $U_з = I_рR_и$, $I_р = E_н/R_у$.
Известно, что пределы относительных значений допускаемых погрешностей элементов, участвующих в измерениях при $P \approx 1$, следующие: $\delta R_у = 0,05\%$; $\delta E_н = 0,05\%$; $\delta R_и = 0,05\%$. Чему равна погрешность задаваемого напряжения? Какие типы неопределенностей можно оценить по этим данным, например, при задаваемом напряжении 10 В?
Решение: Погрешность задаваемого напряжения $U_з = E_нR_и/R_у$ определяется по формуле:
$\delta U_з = [(\delta E_н/E_н)^2 + (\delta R_и/R_и)^2 + (\delta R_{у/}R_у)^2]^{1/2} = (0,05^2 + 0,05^2 + 0,05^2) = 0,087 \approx 0,1\%$.
По имеющимся в нашем распоряжении данным можно оценить расширенную и суммарную стандартную неопределенности: $U = \Delta = 0,001\cdot 10 = 10$ мВ и $u_C = U_P/к = 10/3 = 3,3$ мВ ($к = 3$ при $P = 0,99$ при нормальном законе распределения) или $u_C = 10/1,71 = 5,8$ мВ при равномерном.

Пример 87. Для определения объема параллелепипеда произведено по 10 измерений его сторон. Получены следующие средние значения и оценки СКО погрешности:
$a_{ср} = 4,31$мм, $b = 8,07$мм, $c = 5,33$мм; $S_a = 0,11$, $S_b = 0,13$, $S_c = 0,09$.
Найти погрешность и неопределенности измерений объема параллелепипеда при доверительной вероятности 0,95.
Решение: Результат косвенного измерения объема $V = abc$.
Суммарная случайная погрешность результата равна:

$$S_V = V\sqrt{(S_a/a)^2 + (S_b/b)^2 + (S_c/c)^2} = 185\cdot 0,035 = 6,5 \text{ мм}^3.$$

Предел погрешности при доверительной вероятности 0,95 определяется по формуле: $\Delta_V = tS_V$.
По таблице при числе степеней свободы, равной 10 – 1 = 9 для доверительной вероятности 0,95 определяем коэффициент Стьюдента $t = 2,262$.
$\Delta_V (0,95) = 2,262\cdot 6,5 = 14,7 \approx 15$ мм^3.
Расширенная неопределенность $U_V = \Delta_V = 15$ мм^3. Суммарная стандартная неопределенность при нормальном законе распределения $u_C = U_V/2 = 7,5$ мм^3.

Пример 88. В адиабатическом калориметре измерено линейное повышение температуры с $t_1 = 25,105$ ^{0}С, $S_1 = 0,003$ ^{0}С до $t_2 = 27,105$ ^{0}С, $S_2 = 0,002$ ^{0}С за время $\tau = 10,000$ с, $S_\tau = 0,001$ с. Определить показатели точности измерения разницы температур и темпа нагрева.
Решение: Значение разницы температур $\Delta_t = 2,000$ ^{0}С. $S_{\Delta t} = (S_1^2 + S_2^2)^{1/2} = 0,0036 \approx 0,004$ ^{0}С. Запишем окончательный результат: $\Delta_t = (2,000 \pm 0,004)$ ^{0}С.
Темп нагрева $k = \Delta_t/\tau$. СКО косвенного измерения определяется по формуле:
$S_k^2 = (\partial k/\partial\Delta)^2S_\Delta^2 + (\partial k/\partial\tau)^2 S_\tau^2 = k^2(S_\Delta^2/\Delta^2 + S_\tau^2/\tau^2)$, $S_k = k(S_\Delta^2/\Delta^2 + S_\tau^2/\tau^2)^{1/2}$.
Вычислим $S_k = 0,4\ 10^{-3}$ ^{0}С/с.

Пример 89. Электрическая энергия, выделяемая на участке цепи с сопротивлением R = 11,68 ± 0,01 Ом за время τ = 405,2 ± 0,1 c измерена по показаниям миллиамперметра I = 10,230 ± 0,015 А. Указанные погрешности соответствуют классам точности примененных средств измерений. Определить энергию, рассеиваемую участком цепи, находящимся в тепловом равновесии с окружающей средой, погрешности и неопределенности измерений.

Решение: В состоянии теплового равновесия рассеиваемая энергия равна выделяемой: $E = I^2R\tau \approx$ 495,3 кДж. Суммарная погрешность косвенного измерения выделяемой энергии равна:

$$\Delta_\Sigma = E\sqrt{\left(2\frac{\Delta_i}{I}\right)^2+\left(\frac{\Delta_R}{R}\right)^2+\left(\frac{\Delta_\tau}{\tau}\right)^2} = [4(0,015/10,23)^2 + (0,01/11,68)^2 + (0,1/405,2)^2]^{1/2} \approx \pm\ 1,5 \text{ кДж.}$$

Окончательный результат записываем в виде: E = (495,3 ± 1,5) кДж.

Расширенная неопределенность $U = \Delta_E$ = 1,5 кДж. Суммарная неопределенность u_C = 1,5/3 = 0,5 кДж. В данном случае коэффициент охвата взят равным трем, так как в условиях указаны предельно допускаемые погрешности приборов, определяемые их классами точности, т.е. погрешности соответствуют доверительной вероятности не менее 0,99.

Пример 90. Эффективная плотность порошкового материала определялась по методу взвешивания мерной емкости с порошком и без него. Оба взвешивания производили на одних и тех же весах. Плотность определяли по формуле: $\rho = (m_{сум} - m_{емк})/V_{емк}$. Результаты измерений приведены в таблице:

	$V_{емк}$, см^3	$m_{сум}$, г	$m_{емк}$, г
Число измерений	измерено ранее	10	10
Значение величины	10,00	35,0	20,0
Доверит. погрешность при P = 0,99	$\Delta_{Vемк} = \pm$ 0,05	$\Delta_{m\ сум} = \pm$ 0,1	$\Delta_{m\ емк} = \pm$ 0,1

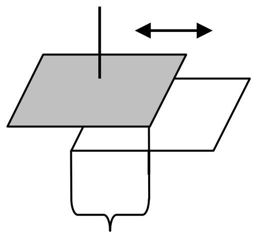
Определить результат измерений плотности и неопределенности измерения плотности этим методом.

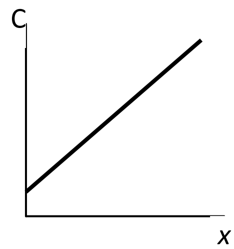
Решение: Поскольку массы $m_{емк}$ и $m_{сум}$ измерены на одних и тех же весах и имеют одинаковые характеристики рассеяния, целесообразно предположить, что эти погрешности коррелированны. Следовательно, вместо геометрического суммирования, применяется алгебраическое суммирование погрешностей: $\Delta_{\Delta m} = \Delta_{m\ емк} + \Delta_{m\ сумм} = \pm$ 0,2 г. При P = 0,99 и числе степеней свободы 10 – 1 = 9 t = 3,25. Тогда $S_{\Delta m} = \Delta_{\Delta m}/t$ = 0,06 г. $S_{Vемк} = \Delta_{Vемк}/t(P = 0{,}99;\ \nu = 99)$ = 0,05/2,58 = 0,019 см^3. Плотность порошка ρ = 15,0/10,00 = 1,50 г/см^3. $S_\rho = \rho(S^2_{\Delta m}/\Delta_m^{\ 2} + S^2_{Vемк}/V^2_{емк})^{1/2}$ = 1,50(0,004^2 + 0,0019^2)$^{1/2}$ = 0,00664 г/см^3. $\Delta_\rho(P = 0{,}99;\ \nu = 9)$ = 0,0216 ≈ 0,02 г/см^3. Результат измерении я плотности: ρ = (1,50 ±0,02) г/см^3 при P = 0,99.

Неопределенности по типу A: $u_{\Delta m}$ = 0,06 г; $u_{Vемк} \approx$ 0,02 см^3; суммарная стандартная неопределенность косвенного измерения плотности $u_C = S_\rho$ = 6,64 мг/см^3. Расширенная неопределенность U_ρ (P = 0,99) = 3·0,00664 ≈ 0,02 г/см^3.

2.6. Совместные измерения

Пример 91. В емкостном датчике линейных перемещений использована зависимость емкости C от площади обкладок S. Уравнение преобразования такого датчика основано на формуле: $C = \varepsilon_0\varepsilon_r S/\delta$, где C – емкость; ε_0 – диэлектрическая постоянная; ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость; S – площадь обкладки (пластины) конденсатора; δ – толщина диэлектрической прослойки между пластинами. Из уравнения следует, что для измерения линейного перемещения может быть использовано изменение площади пластин, пропорциональное перемещению x (см. рис). Определить вид эмпирической функции преобразования датчика и вычислить оценки ее параметров (коэффициентов), используя данные совместных измерений C и x, приведенные в таблице, а также учитывая, что в каждой точке x_i произведены многократные измерения C_i и определены средние значения $\overline{C_i}$ с относительной погрешностью среднего $S_{\overline{C_i}} = \pm 1\%$. Определить вид градуировочной характеристики датчика перемещений.





x_i, мм	1	2	3
$\overline{C_i}$, пФ	10	16	19

Решение: Поскольку отношение *C/S* – величина постоянная, то характеристика датчика, измеряющего линейное перемещение, линейна, если изменение площади *S* - линейная функция перемещения (пластины прямоугольной формы). В таком случае функцию преобразования перемещения в выходной сигнал (емкость) следует определить в виде: $C = a_0 - bx$, где b – коэффициент, зависящий от диэлектрических свойств зазора между пластинами и ширины пластин (размер, перпендикулярный направлению перемещения).
Вычислим МНК -оценки коэффициентов по соотношениям:

$$b_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i C_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} C_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i C_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

$a_0 = (14\cdot45 - 6\cdot99)/(42 - 36) = 6$ [пФ];
$b_0 = (3\cdot99 - 6\cdot45)/(42 - 36) = 4{,}5$ [пФ/мм];
Эмпирическую функцию преобразования запишем в виде: $C = (6 + 4{,}5x)$ пФ, где x - перемещение в мм.
Оценку СКО произведем по совокупности отклонений $\overline{C_i}$ от вычисленных по формуле оценок $\widehat{C}_i$:

$$S_C = \widehat{\sigma}_C = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(\overline{C}_i - \widehat{C}_i)^2}$$

$S_C = 1{,}22 \approx 1{,}2$ пФ.
Оценки СКО коэффициентов определим по формулам:

$$S_{ao} = S_C\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / \Delta};$$

$$S_{bo} = S_C\sqrt{n/\Delta};$$

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

$S_{ao} \approx 1{,}8$ пФ, $S_{bo} \approx 0{,}9$ пФ.
Окончательно эмпирическую функцию преобразования запишем в виде: $C = (6 + 4{,}5x)$ пФ, $S_C \pm 1{,}2$ пФ. Градуировочная характеристика датчика перемещений будет иметь вид: $x = (0{,}22C - 1{,}33)$ мм.

Пример 92. В манометрическом термометре температура определяется по давлению газа, занимающего постоянный объем. В предположении об идеальности газа уравнение преобразования термометра основано на уравнении идеального газа: $PV = RT$. Определить вид градуировочной характеристики термометра и вычислить оценки ее параметров (коэффициентов), используя данные совместных измерений T и P, приведенные в таблице.

P, мм рт. ст.	65	75	85	95	105
t, ^{0}C	-20	17	42	94	127

Решение: С учетом того, что измерялась не абсолютная температура, запишем градуировочную характеристику в виде: $t = a + bP$.

Определим МНК -оценки коэффициентов по соотношениям:

$$b_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} P_i t_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{i=1}^{n} t_i}{n\sum_{i=1}^{n} P_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)^2}; a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^2 \sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{i=1}^{n} P_i t_i}{n\sum_{i=1}^{n} P_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)^2}.$$

Вычислим необходимые суммы: $\sum P_i = 425$; $\sum P^2_i = 37125$; $(\sum P_i)^2 = 180625$; $\sum t_i = 260$; $\sum P_i t_i = 25810$.

a_0 = - 263,35 [^{0}C];

b_0 = 3,71 [^{0}C/мм рт. ст.];

Градуировочную характеристику запишем в виде: t = (- 263,35 + 3,71P) ^{0}C.

Оценку СКО произведем по совокупности отклонений t от вычисленных по формуле оценок $\widehat{t}_i$:

$$S_t = \widehat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \widehat{t}_i)^2}$$

S_t = 6,7 ^{0}C.

Оценки СКО коэффициентов определим по формулам:

$$S_{ao} = S_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n} P_i^2 / \Delta};$$

$$S_{bo} = S_t\sqrt{n/\Delta};$$

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} P_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)^2.$$

Δ = 5000; $S_{ao} \approx 18$ ^{0}C, $S_{bo} \approx 0$.

Окончательно эмпирическую функцию преобразования запишем в виде: t = (- 263,35 + 3,71P), S_t ± 6,7 ^{0}C. Коэффициент a = (-263 ± 18)^{0}C, т.е. с вероятностью 68% находится в пределах от – 245^{0}C до -281^{0}C, а точное значение этого коэффициента, дающего значение абсолютного нуля по шкале Цельсия, должно быть равно -273,15^{0}C ≡ 0K, что укладывается в полученный диапазон значений S_{bo}.

Пример 93. Зависимость термоэлектродвижущей силы (ТЭДС) E от разницы температур на концах термопары ($T_2 – T_1$), образованной цепью из проводников A и B, в рамках представлений теории электронной проводимости выражается уравнением вида:

$\mathrm{E} = \frac{\kappa}{e}\int_{T_1}^{T_2} \ln\frac{n_A}{n_B}dT$, где k – постоянная Больцмана; e – заряд электрона; n_A, n_B – концентрация свободных электронов в проводниках A и B.

Это выражение для многих практически важных случаев может быть упрощено до линейной зависимости. С целью построения функции преобразования термопары из сплавов «никель/хром» - «никель/алюминий» произведены совместные измерения температуры и ТЭДС. Холодный спай термопары помещен в сосуд с тающим льдом. Определить вид эмпирической функции преобразования термопары и вычислить оценки ее параметров (коэффициентов), используя данные совместных измерений t и E, приведенные в таблице. Определить вид градуировочной характеристики термопары.

t, ^{0}C	100	200	300	400	500
E, мВ	4,1	8,1	12,5	16,2	21,0

Решение: При незначительном изменении концентрации свободных электронов в проводниках *A* и *B* эмпирическая функция преобразования термопары может быть представлена в виде: $E = bt$. В данном случае значение t эквивалентно разнице температур спаев термопары, так как холодный спай находится при температуре 0^0С.

Тогда можно записать систему уравнений: $E_i = bt_i$. Откуда коэффициент b может быть определен по отношению: $b = \sum E_i/\sum t_i = 61{,}9/1500 = 0{,}0413$ мВ/^{0}С. Уравнение преобразования: $E = 0{,}0413t$ мВ. Оценку СКО S_E определим из соотношения: $S_E = \hat{\sigma}_E = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(E_i - \hat{E}_i)^2}$.

$S_E = 0{,}21$ мВ. При доверительной вероятности 0,68 $E = (0{,}0413\, t \pm 0{,}21)$ мВ.
Градуировочная характеристика – это функция, обратная функции преобразования. Следовательно, можно записать ее в виде: $t = 24{,}21E$ ^{0}С.

Пример 94. Принцип действия проводникового термометра сопротивления основан на зависимости сопротивления электрическому току от температуры: $R(t) = R_0(t_0)[1 + a(t - t_0)]$, где a - температурный коэффициент сопротивления. Для построения эмпирической зависимости $R(t)$ проведены совместные измерения R и t платинового термометра сопротивления 100 Ом (при 0^0С) в нескольких реперных точках МТШ-90. Определить ее вид и оценить параметры, используя экспериментальные данные, приведенные в таблице. Вычислить W_{100} и сделать заключение о пригодности термометра, учитывая, что допускаемый диапазон значений W_{100} находится в пределах от 1,385 до 1,392.

t, ^{0}С	0,01 (тройная точка воды)	29,7646 (точка плавления Ga)	156,5985 (точка затвердевания In)
R, Ом	100,00	111,6	161,07

Решение: Для упрощения вычислений запишем функцию преобразования в виде: $R = a + bt$.
Определим МНК -оценки коэффициентов по соотношениям:

$$b_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} t_i R_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} R_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}; a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \sum_{i=1}^{n} R_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} t_i R_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}.$$

Вычислим необходимые суммы: $\sum t_i = 186{,}4$; $\sum t^2_i = 34730$; $(\sum t_i)^2 = 25409$; $\sum R_i = 372{,}67$; $\sum R_i t_i = 28546$; $\Delta = 41497$.
$a_0 = 99{,}98$ [Ом];
$b_0 = 0{,}39$ [Ом/^{0}С].
Эмпирическую функцию преобразования запишем в виде: $R = 99{,}98 + 0{,}39t = 99{,}98(1 + 0{,}0039t)$.
Оценку СКО произведем по совокупности отклонений R_i от вычисленных по формуле оценок $\hat{R}_i$:

$$S_R = \hat{\sigma}_R = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \hat{R}_i)^2}$$

$S_R = 0{,}03$ Ом.
Оценки СКО коэффициентов определим по формулам:

$$S_{ao} = S_R\sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 / \Delta};$$

$$S_{bo} = S_R\sqrt{n/\Delta};$$

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2.$$

$S_{ao} \approx 0{,}03$ Ом, $S_{bo} \approx 0$.

Окончательно эмпирическую функцию преобразования запишем в виде: R = (99,98 + 0,39t) Ом, S_R ± 0,03 Ом. Коэффициент a = (99,98 ± 0,03) Ом, т.е. с относительной погрешностью менее 0,03% соответствует номинальному сопротивлению термометра (100 Ом).
Вычислим $W_{100} = R_{100}/R_0$ = 138,98/99,98 = 1,39, что укладывается в заданный интервал.

Пример 95. В дилатометрическом датчике температуры используется эффект удлинения стержня при его нагревании: $l(t) = l_0[1 + a(t - t_0)]$, где а – температурный коэффициент линейного расширения. Для определения ТКЛР медно-никелевого сплава (константан) проведены совместные измерения длины тонкого стержня и его температуры в двух точках: при комнатной температуре и в точке затвердевания золота. Определить функцию преобразования температуры в удлинение по измеренному значению ТКЛР.

t_i, ^{0}C	20,5	1064,18
l_i, мм	100,10	101,95

Решение: Для определения ТКЛР удобно преобразовать выражение для $l(t)$: $(l(t) - l_0)/l_0 = a(t - t_0)$. Проведя замену переменных: ε = $(l(t) - l_0)/l_0$ и $\theta = (t - t_0)$ получаем простую функцию преобразования: ε = $a\theta$.

Тогда можно записать систему уравнений: $\varepsilon_i = a\theta_i$. Откуда коэффициент a может быть определен по отношению: $a = \sum\varepsilon_i/\sum\theta_i$ = 0,0195/1043,68 = 18,6810^{-6} ^{0}C^{-1}. Уравнение преобразования: ε = 18,6810$^{-6}\theta$. Возвращаясь к старым переменным, получаем: $l(t)$ = 100,10$[1$ + 18,68$(t - t_0)]$.
Отклонение измеренной длины от ее оценки по полученному значению ТКЛР равно Δl = 101,95 – 102,05 = - 0,10 мм, что на уровне измеренного удлинения составляет: 0,1/1,85 = 0,054 или 5,4%.

Пример 96. В расходомере с осевой турбинкой происходит преобразование объемного расхода Q в скорость вращения турбинки n, которая регистрируется счетчиком оборотов, в виде импульсов, частота которых пропорциональна скорости вращения турбинки: $n = Q/SH$, где S – площадь живого сечения потока в зоне лопастей турбинки; H – ход винтовой нарезки лопастей. В этом соотношении не учитываются: наличие момента инерции ротора, завихрения в потоке, неравномерное распределение скоростей по сечению потока, вязкость среды, сжимаемость, сила трения в опорах турбинки и т.п. Указанные явления влияют на метрологические характеристики расходомера и сужают линейный диапазон измерений. Поэтому получение эмпирической функции преобразования для таких устройств важно. Определить функцию преобразования расходомера по данным совместных измерений, приведенным в таблице.

Q, м^{3}ч$^{-1}$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
n, об/с	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ν, мин$^{-1}$	6	11,5	18,5	24,5	29,5	36,5	41,5	47,5	54,5

Решение: Функция преобразования расхода в частоту импульсов простая: $\nu = aQ$.

Тогда можно записать систему уравнений: $\nu_i = aQ_i$. Откуда коэффициент a может быть определен по отношению: $a = \sum\nu_i/\sum Q_i$ = 270/45 = 6. Уравнение преобразования: $\nu = 6Q$.

Градуировочная характеристика – это функция, обратная функции преобразования. Следовательно, можно записать ее в виде: Q = 0,167ν м^{3}ч$^{-1}$.

Оценку СКО определим из соотношения: $S_\nu = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\nu_i - \hat{\nu}_i)^2}$.

S_ν = 0,47. При доверительной вероятности 0,68 ν = (6Q ± 0,47) мин$^{-1}$.

Пример 97. В расходомере с сужающим устройством (диафрагма) расход жидкости преобразуется в перепад давления на диафрагме, которая представляет собой местное сопротивление потоку: $\Delta P^{1/2} = Q/K$, где K – коэффициент, зависящий от геометрии рабочего участка трубопровода, плотности и режима течения жидкости. Найти градуировочную характеристику расходомера по результатам проливки в образцовом стенде, приведенным в таблице. Оценить неопределенность измерений расхода этим расходомером при P = 0,99.

Q, м^3/ч	2	3	4	5
ΔP, кПа	10,0	22,0	40,5	62,0

Решение: Градуировочная характеристика расходомера – функция, обратная функции преобразования: $Q = K\,\Delta P^{1/2}$. Для линеаризации функции произведем замену переменной: $X_{\Delta P} = \Delta P^{1/2}$. Тогда $Q = KX_{\Delta P}$. Коэффициент K может быть определен по отношению: $K = \sum Q_i/\sum X_{\Delta P}$ = 14/22,08 = 0,634. Градуировочная характеристика: Q =0,634$\Delta P^{1/2}$.

Оценку СКО определим из соотношения: $S_Q = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Q_i - \widehat{Q}_i)^2}$.

S_Q = 0,026 м^3/ч. При доверительной вероятности 0,68 Q = (0,634$\Delta P^{1/2}$ ± 0,026) м^3/ч.
Стандартная неопределенность измерений по типу A равна: $u_A = S_Q$ = 0,026 м^3/ч. При P = 0,99 расширенная неопределенность равна: U_Q = 3·0,026 = 0,078 м^3/ч.

Пример 98. Статическая функция преобразования тензорезисторного датчика перемещений может быть представлена линейной функцией напряжения в диагонали моста из тензорезисторов U от перемещения конца упругой балки L. Определить вид функции преобразования датчика по результатам измерений задаваемого перемещения и выходного сигнала датчика, приведенным в таблице. Оценить погрешности и неопределенности измерений при P = 0,99.

L, мм	0	1	2	3	4
U, В	0,05	1,50	3,10	4,60	6,00

Решение: Запишем функцию преобразования в виде: $U = a + bL$.
Определим МНК -оценки коэффициентов по соотношениям:

$$b_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} L_i U_i - \sum_{i=1}^{n} L_i \sum_{i=1}^{n} U_i}{n\sum_{i=1}^{n} L_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)^2};\, a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i^2 \sum_{i=1}^{n} U_i - \sum_{i=1}^{n} L_i \sum_{i=1}^{n} L_i U_i}{n\sum_{i=1}^{n} L_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)^2}.$$

Вычислим необходимые суммы: $\sum L_i = 10$; $\sum L^2{}_i = 30$; $(\sum L_i)^2 = 100$; $\sum U_i = 15{,}25$; $\sum U_i L_i = 45{,}5$; $\Delta = 50$.
a_0 = 0,05 [В];
b_0 = 1,5 [В/мм].
Эмпирическую функцию преобразования запишем в виде: U = 0,05 + 1,5L = 0,05(1 + 0,075L) В.
Оценку СКО произведем по совокупности отклонений U_i от вычисленных по формуле оценок $\widehat{U}_i$:

$$S_U = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \widehat{U}_i)^2}$$

S_U = 0,065 В.
Оценки СКО коэффициентов определим по формулам:

$$S_{ao} = S_U\sqrt{\sum_{i=1}^{n} L_i^2/\Delta};$$

$$S_{bo} = S_U\sqrt{n/\Delta};$$

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} L_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)^2.$$

$S_{ao} \approx$ 0,05 В, $S_{bo} \approx 0$.
Окончательно эмпирическую функцию преобразования запишем в виде: U = (0,05 + 1,5L) В, S_U ± 0,05 В.

Стандартная неопределенность по типу А: $u_A = S_U = 0{,}065$ В. Расширенная неопределенность при $P = 0{,}99$: $U_U = 3 \cdot 0{,}065 \approx 0{,}2$ В.

Пример 99. Для измерения магнитной индукции применяется датчик Холла. Уравнение преобразования магнитной индукции B в выходное напряжение датчика U основано на пропорциональной зависимости сигнала датчика от интенсивности магнитного поля и силы тока питания. Датчик прокалибровали в магнитных полях известной интенсивности. Определить вид функции преобразования и характеристики погрешности и оценить неопределенности измерений этим датчиком при $P = 0{,}95$.

B, мТл	20	30	40	50
U, мВ	40,5	59,5	80,5	99,5

При постоянных параметрах питания датчика Холла $U = KB$.

Откуда коэффициент K может быть определен по отношению: $K = \sum U_i / \sum B_i = 280/140 = 2$. Уравнение преобразования: $U = 2B$ мВ.

Градуировочная характеристика – это функция, обратная функции преобразования. Следовательно, можно записать ее в виде: $B = 0{,}5U$ мТл.

Оценку СКО определим из соотношения: $S_U = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \hat{U}_i)^2}$.

$S_U \approx 0{,}6$ мВ. При доверительной вероятности 0,68 $U = (2{,}0B \pm 0{,}6)$ мВ.
Стандартная неопределенность измерений по типу A равна: $u_A = S_U = 0{,}6$ мВ. При $P = 0{,}95$ расширенная неопределенность равна: $U_U = 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$ мВ.

Пример 100. В дифференциальном трансформаторном преобразователе (ДТП) линейных перемещений с ферромагнитным сердечником осевое перемещение сердечника L преобразуется в изменение индуктивности вторичных обмоток и, в конечном счете, к изменению разницы падения напряжения U на них. При комнатной температуре функция преобразования ДТП обладает высокой линейностью. Определить вид функции преобразования и характеристики датчика, погрешности и оценить неопределенности измерений ($P = 0{,}95$) по данным, приведенным в таблице.

L, мм	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
U, В	1,05	1,95	3,05	4,00	4,95

Решение: Функция преобразования датчика имеет вид: $U = KL$.

Откуда коэффициент K может быть определен по отношению: $K = \sum U_i / \sum L_i = 15/15 = 1$. Уравнение преобразования: $U = 1L$ В.

Градуировочная характеристика – это функция, обратная функции преобразования. Следовательно, можно записать ее в виде: $L = K^{-1}\, U$ мм.

Оценку СКО определим из соотношения: $S_U = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \hat{U}_i)^2}$.

$S_U = 0{,}05$ В. При доверительной вероятности 0,68 $U = (1{,}00L \pm 0{,}05)$ В.
Стандартная неопределенность измерений по типу A равна: $u_A = S_U = 0{,}05$ В. При $P = 0{,}95$ расширенная неопределенность равна: $U_U = 2 \cdot 0{,}05 = 0{,}1$ В.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

2.1. Однократные измерения (решить примеры)

Пример 1

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Класс точности	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
Предел измерений, мА	100	150	2000	250	300	100	150	2000	250	300	100	150	2000	250	300

Пример 2

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
R, Ом	50	100	150	200	250	50	100	150	200	250	50	100	150	200	250
$R_{вн}$, *Ом*	1000	1000	1000	1000	1000	2000	2000	2000	2000	2000	3000	3000	3000	3000	3000

Пример 3

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
m, мг	200	300	400	500	600	200	300	400	500	600	200	300	400	500	600
Весы 1 Кл. точн. Пр. изм., кг	0,1 5	0,1 10	0,1 15	0,1 20	0,1 25	0,2 5	0,2 10	0,2 15	0,2 20	0,2 25	0,3 5	0,3 10	0,3 15	0,3 20	0,3 25
Весы 2 Кл. точн. Пр. изм., кг	0,5 0,5	0,5 1,0	0,5 1,5	0,5 2,0	0,5 2,5	1 1,0	1 2,0	1 3,0	1 4,0	1 5,0	1,5 1,5	1,5 2,0	1,5 2,5	1,5 3,0	1,5 3,5

Пример 4

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Отношение пределов измерений	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5
Кл. точно-	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0

сти пове-ряемого прибора															

Пример 7

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
E, B	5	5	5	8	8	8	11	11	11	12	12	12	15	15	15
R_{BH}, *Ом*	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
R_{BX}, *Ом*	150	200	250	300	350	150	200	250	300	350	150	200	250	300	350

Пример 8

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
R_H, *Ом*	50	50	50	55	55	55	40	40	40	45	45	45	60	60	60
E, B	5	5	5	8	8	8	11	11	11	12	12	12	15	15	15
R_{BH}, *Ом*	0,5	1,0	1,5	0,5	1,0	1,5	0,5	1,0	1,5	0,5	1,0	1,5	0,5	1,0	1,5
$I_{ПР}$, *A*	0,5	1,0	1,5	0,5	1,0	1,5	0,5	1,0	1,5	0,5	1,0	1,5	0,5	1,0	1,5
R_A, *Ом*	1,5	1,0	0,5	1,5	1,0	0,5	1,5	1,0	0,5	1,5	1,0	0,5	1,5	1,0	0,5

2.2. Многократные равноточные независимые измерения (решить примеры)

Пример 27

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
I, мА	15±2	20±2	25±2,5	30±3	35±5	40±2	45±5	25±1,5	30±1,5	35±2	40±5	45±2	25±5	30±4	35±1,5
P, %	95	95	95	99	99	95	99	95	95	95	99	95	99	99	95

Пример 29

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
S_i, *с*	0,020	0,030	0,040	0,045	0,0250	0,035	0,045	0,015	0,025	0,020	0,035	0,040	0,045	0,015	0,030
θ, *с*	0,020	0,015	0,030	0,025	0,010	0,020	0,030	0,010	0,015	0,015	0,015	0,010	0,015	0,010	0,020

Пример 30

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
S_i, *см*	0,20	0,30	0,15	0,35	0,25	0,15	0,35	0,30	0,25	0,20	0,35	0,40	0,45	0,25	0,30
θ, *см*	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,06	0,02	0,02	0,03	0,05	0,06	0,06	0,08	0,06	0,05

Пример 32

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
C_i, *пФ*	5,14	10,40	7,43	6,51	4,47	3,45	8,10	10,07	9,11	9,43	5,95	6,29	8,29	5,69	12,41
	5,11	10,36	7,42	6,49	4,54	3,48	7,97	9,98	8,95	9,59	5,89	6,27	8,18	5,56	12,47
	5,15	10,58	7,55	6,48	4,56	3,49	7,97	9,83	8,97	9,50	5,98	6,34	8,28	5,58	12,81
	5,19	10,49	7,56	6,48	4,48	3,51	8,00	9,96	9,08	9,55	6,09	6,40	8,31	5,65	12,70
	5,18	10,42	7,49	6,38	4,45	3,51	8,06	10,27	8,98	9,48	6,04	6,31	8,24	5,64	12,39
	5,20	10,41	7,56	6,52	4,53	3,57	8,10	10,02	9,08	9,65	5,99	6,29	8,24	5,59	12,57
P, %	95	99	95	99	95	99	95	99	95	99	95	99	95	99	95

Пример 38

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Сод. хрома 1	2,00	2,20	2,40	2,60	2,80	3,00	3,20	3,40	3,60	3,80	4,00	4,20	4,40	4,60	4,80
Сод. хрома 2	2,20	2,40	2,60	2,80	3,00	3,20	3,40	3,60	3,80	4,00	4,20	4,40	4,60	4,80	5,00
P, %	95	99	95	99	95	99	95	99	95	99	95	99	95	99	95

Пример 40

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
$x_{ср}$, *мм*	5,000	10,000	12,000	15,000	20,000	25,000	30,000	35,000	50,000	30,000	25,000	20,000	15,000	35,000	50,000
θ, *мм*	0,003	0,005	0,004	0,005	0,006	0,004	0,005	0,006	0,008	0,004	0,005	0,005	0,003	0,005	0,006
$S_{xср}$, *мм*	0,001	0,002	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,005	0,005	0,004	0,002	0,002	0,004	0,005

2.3. Объединение рядов наблюдений (решить примеры)

Пример 56

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
g_i, *см* $с^{-2}$	981,9191 ±0,0004	981,9192 ±0,0003	981,9193 ±0,0005	981,9194 ±0,0004	981,9195 ±0,0005	981,9191 ±0,0003	981,9192 ±0,0004	981,9193 ±0,0003	981,9194 ±0,0005	981,9195 ±0,0006	981,9196 ±0,0004	981,9197 ±0,0003	981,9198 ±0,0004	981,9191 ±0,0005	981,9192 ±0,0006
	981,9218 ±0,0014	981,9216 ±0,0015	981,9217 ±0,0013	981,9219 ±0,0016	981,9220 ±0,0017	981,9217 ±0,0012	981,9216 ±0,0015	981,9214 ±0,0018	981,9219 ±0,0014	981,9213 ±0,0011	981,9217 ±0,0016	981,9215 ±0,0014	981,9218 ±0,0012	981,9221 ±0,0015	981,9222 ±0,0018
	981,9228 ±0,0020	981,9231 ±0,0021	981,9232 ±0,0022	981,9232 ±0,0023	981,9229 ±0,0019	981,9234 ±0,0018	981,9235 ±0,0025	981,9227 ±0,0022	981,9226 ±0,0023	981,9231 ±0,0021	981,9232 ±0,0026	981,9234 ±0,0028	981,9229 ±0,0019	981,9228 ±0,0023	981,9230 ±0,0021

Пример 58

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
X_{cpi}, *мм*	8,380	8,490	8,580	8,600	8,790	9,280	9,590	9,810	10,270	10,350	10,590	10,780	10,990	11,020	11,350
	8,350	8,450	8,360	8,450	8,540	8,970	9,350	9,560	9,930	10,160	10,250	10,440	10,530	10,750	11,020
S_{cpi}, *мм*	0,01	0,02	0,03	0,02	0,03	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02	0,05	0,05	0,02	0,05	0,03
	0,03	0,04	0,03	0,04	0,05	0,05	0,02	0,04	0,02	0,03	0,02	0,05	0,05	0,02	0,02
n_i,	10	15	20	10	15	10	15	20	10	15	10	15	20	10	15
	20	15	10	15	10	20	15	10	15	10	20	15	10	15	10

Пример 62

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
X_{cpi}, *мкм*	100,1	100,2	100,3	100,3	100,1	100,1	100,2	100,3	100,3	100,1	100,1	100,2	100,3	100,3	100,1
	99,8	99,9	100,0	100,1	99,9	99,8	99,9	100,0	100,1	99,9	99,8	99,9	100,0	100,1	99,9
S_{cpi}, *мкм*	0,2	0,1	0,3	0,5	0,2	0,4	0,3	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,5	0,4	0,3
	0,4	0,3	0,1	0,2	0,5	0,2	0,1	0,3	0,5	0,4	0,5	0,5	0,1	0,2	0,1
n_i,	10	15	20	10	15	10	15	20	10	15	10	15	20	10	15
	20	15	10	15	10	20	15	10	15	10	20	15	10	15	10

2.4. Отбрасывание промахов (разобрать примеры)

69, 71

2.5. Косвенные измерения (разобрать примеры)

82, 83

2.6. Совместные измерения (разобрать примеры)

92, 94