Министерство образования и науки Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»

Кафедра математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов заочного отделения, обучающихся по направлениям подготовки:
38.03.01 – Экономика
38.03.02 – Менеджмент
09.03.03 – Прикладная информатика
27.03.01 – Стандартизация и сертификация

Составители:
А. Л. Сазонов
В. В. Потихонова

Санкт-Петербург
2018

Утверждено
на заседании кафедры
31.01.2018 г., протокол № 5

Рецензент
О. Б. Тёрушкина

Контрольные задания по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» включают задачи по основным разделам курса перечисленным ниже.

Контрольные задания содержат подробные решения типовых задач по всем изучаемым темам, приведен необходимый для выполнения заданий список литературы. Составленные задания полностью соответствуют рабочей программе «Теория вероятностей и математическая статистика».

Контрольные задания разработаны для студентов-заочников, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 – Экономика; 38.03.02 – Менеджмент; 09.03.03 – Прикладная информатика и 27.03.01 – Стандартизация и сертификация.

Учебное электронное издание сетевого распространения
Издано в авторской редакции

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=2018298, по паролю.
– Загл. с экрана.
Дата подписания к использованию 11.12.2018 г. Рег. № 298/18

ФГБОУВО «СПбГУПТД»
Юридический и почтовый адрес: 191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18.
http://sutd.ru

Основные темы

Номер спец.	Тема
01	Комбинаторика. Понятие соединения. Сочетания, размещения, перестановки. Событие и вероятность (классическое определение). Достоверные, невозможные и случайные события. Полная группа событий. Несовместные и равновозможные события. Элементарные исходы. Классическое определение вероятностей. Свойства вероятности. Относительная частота
02	Алгебра событий. Теоремы сложения вероятностей для совместных и несовместных событий. Теоремы умножения вероятностей для зависимых и независимых событий. Вероятность хотя бы одного события. Формула полной вероятности и формула Байеса. Испытания Бернулли.
03	Случайные величины. Дискретные случайные величины. Закон распределения. Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, их свойства. Биномиальное распределение, простейший поток событий, закон Пуассона
04	Непрерывные случайные величины. Определение непрерывной случайной величины. Функция распределения. Плотность вероятности. Графики функций распределения. Вероятность попадания в интервал. Математическое ожидание и дисперсия. Равномерное распределение. Нормальное распределение
05	Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева. Сущность теоремы Чебышева и ее значение для практики. Теорема Бернулли
06	Основы выборочного метода. Методы отбора. Понятие репрезентативности выборки. Генеральное и выборочное среднее, генеральная и выборочная дисперсия. Оценка параметров генеральной совокупности по данным выборки. Исправленная дисперсия. Обработка большой и малой выборок. Полигон и гистограмма. Метод группировки данных

Контрольная работа должны быть выполнена в отдельной тетради с соблюдением правил, обязательных для выполнения всех работ по математике и представлена на проверку не позднее срока, указанного на информационном сайте для студентов безотрывных формам обучения.

Если работа присылается *on line*, то она должна быть **отсканирована** с **рукописного варианта** с сохранением нумерации страниц. **Не допускается выполнение работы в текстовых и формульных редакторах. Такие работы автоматически не будут проверяться.**

Если все задания выполнены без ошибок, то студент допускается к защите контрольной работы, которая происходит во время экзаменационной сессии перед экзаменом.

Если в работе есть ошибки, то их нужно исправить в **этой же тетради в конце** и прислать на повторную проверку. На сессию необходимо привезти рукописный вариант, в котором сделаны исправления.

Прежде чем приступать к выполнению контрольных работ, студенту необходимо изучить соответствующий теоретический материал, который имеется на сайте или использовать учебники, список которых приведен в конце методички.

Если в процессе изучения теорем или при решении задач возникают вопросы, то можно обратиться к преподавателям кафедры математики для получения консультации.

Во время экзаменационной сессии для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия, которые носят обзорный характер.

При выполнении контрольной работы обратите внимание на оформление.

НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ ДОЛЖНЫ БЫТЬ УКАЗАНЫ:

Фамилия, имя, отчество.

Номер студенческого билета (или зачетной книжки).

Название дисциплины и номер контрольной работы.

Номер варианта.

Номер варианта, который должен выполнять студент, соответствует последней цифре номера студенческого билета (или зачетной книжки).

В каждом задании 20 вариантов примеров. Если год Вашего поступления в Университет – чётный, то Вы выбираете пример из первых десяти вариантов, а если – нечётный, то выбираете свой вариант из номеров с одиннадцатого по двадцатый.

Например, год поступления 2017, вариант 5, следовательно, должны быть выбраны примеры 1.15, 2.15 и т. д.

Например, год поступления 2016, вариант 5, следовательно, должны быть выбраны примеры 1.05, 2.05 и т. д.

Вопросы для самопроверки

1. Какие соединения называются наборами, размещениями, сочетаниями и перестановками?
2. Какие события называются невозможными, достоверными, случайными?
3. Дайте классическое определение вероятности.
4. Какие события называются независимыми?
5. Что называется суммой событий, произведением событий? Какое событие называется противоположным?
6. Сформулируйте теоремы о вероятности произведения событий и вероятности суммы событий. Что такое условная вероятность?
7. Что такое случайная величина? Какая случайная величина называется дискретной?
8. Что такое математическое ожидание?
9. Что такое дисперсия? Что она характеризует? Что такое среднее квадратичное отклонение и коэффициент вариации?
10. Какие случайные величины называются непрерывными?
11. Что называется функцией распределения (интегральной функцией распределения)?
12. Что такое плотность вероятности (дифференциальная функции распределения)?
13. По каким формулам находятся математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины? Непрерывной случайной величины?
14. Неравенство Чебышева. Правило «трёх сигм» для произвольного распределения.
15. В чем суть закона больших чисел.
16. Генеральная совокупность и выборка. Свойства и способ её получения. Выборка как последовательность случайных величин.
17. Двумерные случайные величины. Что характеризует коэффициент корреляции?
18. Оценки параметров. Оценки математического ожидания и дисперсии.

Методические указания

1. Теория соединений

Комбинаторика или теория соединений изучает множества произвольной природы. Соединение – это множество или подмножество, составленное по определённым правилам.

Наборы. Имеется *k* множеств, содержащих соответственно $n_1, n_2, \dots, n_k$ элементов. ***Наборами называются соединения, содержащие по одному элементу из каждого множества***. Например, имеются три множества. Первое содержит $n_1 = 3$ элементам: *A, B, C*, второе $n_2 = 2$ элементам: *q, w*, третье $n_3 = 4$ элементам: *α, β, γ, δ*. Примерами наборов будут: *Aqβ,* или *Bqδ*, или *Cwβ* и т. д. Обозначим число всех возможных различных наборов N_k («эн из ка»). Очевидно $N_1 = n_1$. Действительно, из одного множества вынуть один элемент можно числом способов равным числу элементов в этом множестве. Если мы рассмотрим два множества, то, взяв из первого множества один элемент, мы можем с ним получить n_2 пар. То же самое произойдёт со вторым элементом первого множества и т. д. Поэтому число наборов из двух элементов $N_2 = N_1 n_2 = n_1 n_2$. Если мы добавим третье множество, то каждая пара из N_2 определит n_3 наборов, содержащих три элемента, т. е. $N_3 = N_2 n_3 = n_1 n_2 n_3$. Продолжая эти рассуждения, мы придём к окончательной формуле числа наборов

$$N_k = n_1 n_2 \dots n_k.$$

В приведённом выше примере $N_3 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ набора.

Отметим, что множество может быть одно, но из него *k* раз выбирается элемент. Например, сколько можно составить телефонных номеров, если номер содержит пять цифр. Всего цифр 10 из них, т. е. практически из одного множества мы выбираем первую, вторую и т. д. цифру номера. $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n$ =10, тогда $N_5 = n^5 = 100000$ номеров.

Размещения. Пусть имеется одно множество, содержащее *n* элементов. Из него выбираются *k* элементов. ***Размещениями из n элементов по k элементов называются такие соединения, содержащие k элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами, или их порядком***. Например *n* = 4: *α, β, γ, δ*. *k* = 3. Тогда размещениями будут следующие:

αβγ, αβδ, αγβ, αγδ, αδβ, αδγ,

βαγ, βαδ, βγα, βγδ, βδα, βδγ,

γαβ, γαδ, γβα, γβδ, γδα, γδβ,

δαβ, δαγ, δβα, δβγ, δγα, δγβ.

Число всех возможных размещений обозначается A_n^k («а из эн по ка»). Процесс составления размещения состоит в том, что первый элемент мы выбираем из всего множества, т. е. из $n_1 = n$ элементов, второй из оставшихся $n_2 = n - 1$ элементов, третий уже из $n_3 = n - 2$ элементов, и т. д. Наконец, последний k-й элемент из $n_k = n - (k - 1)$. Мы свели нахождение числа размещений к частному случаю составления наборов. Поэтому полное число различных размещений находится по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1)) = n(n-1)...(n-k+1).$$

Отметим, что в формуле числа размещений ровно k сомножителей. Для выше приведенного примера $\mathrm{A}_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ размещения. (Именно столько мы и написали выше).

Рассмотрим ещё один пример. Пусть группе из 10 человек поручено организовать торжественное собрание. Для этого нужно выбрать кого-то главным, а кого-то его помощником. Т. е. из десяти следует выбрать двоих и распределить среди них обязанности (порядок играет роль). Сколькими способами это можно сделать? Это размещения, поэтому $\mathrm{A}_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$, т. е. это можно сделать 90 способами.

Перестановки. Пусть имеется одно множество, содержащее *n* элементов. ***Перестановками из n элементов называются такие соединения, которые содержат все n элементов и отличаются друг от друга их порядком.*** Например, *n* = 3: A, B, C. Перестановки:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Число всех возможных перестановок из *n* элементов обозначается P_n («пэ из эн»). Очевидно, перестановки – это частный случай размещений из *n* элементов по *n*, т. е. $P_n = A_n^n = n(n-1)\dots(n-n+1)$. Число перестановок из *n* элементов равно произведению всех целых положительных чисел от *n* до 1 или от 1 до *n*. Такое произведение обозначается *n*! («эн факториал»). Таким образом, число перестановок

$$P_n = n!$$

В примере с тремя элементами число перестановок $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Отметим, что для удобства использования некоторых формул с факториалами принято по определению считать 0! = 1.

Пусть команда гимнастов состоит из 6 человек, и тренер должен определить, в каком порядке они должны выходить к снарядам. Сколькими способами это можно сделать. Очевидно, это перестановки из 6 элементов, т. е. $\mathrm{P}_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ способов (6!).

Сочетания. Пусть имеется множество, содержащее *n* элементов. ***Сочетаниями из n элементов по k элементов называются такие соединения, содержащие ровно k элементов, которые отличаются друг от друга только***

составом элементов. В отличие от размещений здесь порядок роли не играет. Например, $n = 4$: A, B, C, D, а $k = 3$. Тогда сочетаниями будут

ABC, ABD, ACD, BCD.

Число сочетаний обозначается C_n^k («цэ из эн по ка»). Очевидно, для того чтобы составить все размещения следует составить все сочетания из n по k, а потом в каждом сочетании сделать все перестановки, которых $k!$ Это увеличит число соединений в $k!$ раз, т. е. $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Отсюда получаем формулу числа сочетаний

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Сколькими способами группа из 10 человек может создать делегацию на конференцию из двух человек? Очевидно, здесь порядок роли не играет, поэтому это можно сделать $C_{10}^2 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45$ способами.

Формула числа сочетаний обладает удобным свойством

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Действительно, если мы выбрали двух делегатов, т. е. одно сочетание из 10 по 2, то у нас осталось 8 человек, т. е. сочетание из 10 по 8. Каждому сочетанию из 10 по 2 соответствует одно сочетание из 10 по 8, т. е. их одинаковое число. Этим свойством особенно удобно пользоваться, если $k > \frac{n}{2}$. Например,

$$C_{100}^{98} = C_{100}^2 = \frac{100\cdot 99}{1\cdot 2} = 4950.$$

Рассмотрим ещё один пример. В цеху работают 6 токарей и 4 слесаря. Для выполнения специального задания нужно создать группу из трёх токарей и двух слесарей. Сколькими способами это можно сделать? Трёх токарей можно выбрать C_6^3 способами, а двух слесарей C_4^2 способами. Таким образом, мы имеем два множества. Первое содержит $n_1 = C_6^3$ элемента. Каждый элемент – это тройка токарей. Второе множество содержит $n_2 = C_4^2$ элементов, каждый из которых – пара слесарей. Теперь нам осталось только составить набор. Число наборов

$$N_2 = n_1 n_2 = C_6^3 C_4^2 = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = 120\ .$$

В заключение приведём формулы выражения числа сочетаний и числа размещений через факториалы

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},\quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Однако при решении числовых задач этими формулами пользоваться неудобно.

2. Случайные события и случайные величины

Пример. В урне 6 белых и 5 черных шаров. Наудачу вынимают 4 шара. Какова вероятность, что среди них 2 белых и 2 чёрных?

Решение

Число всех возможных исходов выбрать 4 шара из 11 – это число сочетаний, поэтому

$$n = C_{11}^4.$$

Выбрать два белых можно $n_1 = C_6^2$ способами, а два чёрных $n_2 = C_5^2$ способами, поэтому число благоприятных исходов – это число наборов, т. е. $m = n_1 n_2$. Тогда вероятность (отношение благоприятных исходов к общему числу исходов) равна

$$p = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2 C_5^2}{C_{11}^4} = \frac{6\cdot 5\cdot 5\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8} = \frac{5}{11}.$$

Пример. На складе имеется 10 запасных деталей к прибору, из которых 4 изготовлены на заводе № 1. Наудачу взяли 2 детали. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа деталей, изготовленных на заводе № 1, среди двух наудачу выбранных.

Решение

Введём обозначения:

А – первая взятая деталь изготовлена на заводе № 1,

В – вторая взятая деталь изготовлена на заводе № 1,

Х – число деталей, изготовленных на заводе № 1 из двух выбранных.

Очевидно, событие Х = 0 состоит в том, что обе детали не изготовлены на заводе № 1, следовательно, $(X = 0) = \overline{A}\cdot\overline{B}$ и Р(Х = 0) = $P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A})$. Найдём условную вероятность $P(\overline{B}/\overline{A})$. Мы ищем вероятность того, что вторая деталь не изготовлена на заводе № 1 и при этом уже знаем, что одну такую деталь мы уже взяли. Таким образом, на складе остались только 9 деталей, т. е. число всех возможных исходов равно 9. Деталей же не изготовленных на заводе № 1 среди этих 9 осталось 5, т.е. благоприятных исходов 5. Следовательно, $P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{5}{9}$.

Тогда $P(X = 0) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{3}$.

Аналогично, $P(X = 2) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{2}{15}$.

Событие Х = 1 равносильно событию $\overline{A}B + A\overline{B}$, но можно исходить и из свойства закона распределения, что сумма всех вероятностей равна 1. Поэтому $P(X = 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 2)) = 1 - (\frac{1}{3} + \frac{2}{15}) = \frac{8}{15}$.

Таким образом, мы получаем закон распределения деталей, изготовленных на заводе № 1.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

Отметим, что в данном примере вероятности можно находить и непосредственно по определению. Так как осуществляется выбор двух деталей из 10, то всего возможных исходов будет $n = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$. Число исходов, благоприятных событию X = 0 – $m_0 = C_6^2 = 15$, благоприятных X = 1 – это уже набор из двух множеств, т. е. $m_1 = 4 \cdot 6 = 24$ и, наконец, благоприятных событию X = 2 – $m_2 = C_4^2 = 6$.

Тогда $P(X=0) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$, $P(X=2) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

Теперь находим числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсию).

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{12}{15} = 0{,}8,$$

$$M(X^2) = \frac{8}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} = \frac{16}{15},$$

$$D(X) = \frac{16}{15} - 0{,}8^2 = \frac{32}{75}.$$

Пример. Прибор № 1 работает с вероятностью 0,8, а прибор № 2 – с вероятностью 0,7. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа работающих приборов.

Решение. Обозначим:

A – работает прибор № 1,

B – работает прибор № 2,

X – число работающих приборов.

$P(X=0) = P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$, так как события A и B независимы, а следовательно, независимы и противоположные им события.

$$P(X=0) = (1-0{,}8)(1-0{,}7) = 0{,}06;$$

$$P(X=2) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56;$$

$$P(X=1) = 1 - (0{,}06 + 0{,}56) = 0{,}38.$$

Отметим, что в этом примере непосредственный подсчёт вероятностей невозможен.

X	0	1	2
P	0,06	0,38	0,56

Тогда $M(X) = 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}56 = 1{,}5$, $D(X) = 0{,}38 + 4 \cdot 0{,}56 - 1{,}5^2 = 0{,}37$.

Пример. Непрерывная случайная величина имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ Mx^2 + Nx, & 1 \le x < 3. \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Найти M, N, плотность, математическое ожидание, дисперсию и $P(2 \le X < 5)$.

Решение. Так как по условию случайная величина непрерывна, то по определению её функция распределения непрерывна на всей числовой оси. Из условия следует, что функция распределения может иметь разрывы только в двух точках $x = 1$ и $x = 3$. Для непрерывности достаточно, чтобы предел слева равнялся пределу справа. Найдём эти пределы:

$$\lim_{x \to 1-0} F(x) = \lim_{x \to 1} 0 = 0,$$

$$\lim_{x \to 1+0} F(x) = \lim_{x \to 1} (Mx^2 + Nx) = M + N.$$

Мы получаем первое уравнение с неизвестными M и N: $M + N = 0$. Аналогично

$$\lim_{x \to 3-0} F(x) = \lim_{x \to 3} (Mx^2 + Nx) = 9M + 3N,$$

$$\lim_{x \to 3+0} F(x) = \lim_{x \to 3} 1 = 1.$$

Таким образом, мы получаем второе уравнение $9M + 3N = 1$, т. е. систему

$$\begin{cases} M + N = 0 \\ 9M + 3N = 1 \end{cases}.$$

Решая систему, получаем $M = \dfrac{1}{6}$, $N = -\dfrac{1}{6}$. Таким образом, функция распределения равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{6}x; & 1 \le x < 3; \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что на $[1;\ 3)$ $F(x)$ возрастает. Теперь найдём плотность

$$f(x)=\frac{dF}{dx}=\begin{cases},0 & x<1\\ \frac{1}{6}2x-\frac{1}{6}, & 1\le x<3\\ 0, & x\ge 3\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}, & x\in[1;3)\\ 0. & x\notin[1;3)\end{cases}.$$

Это можно записать и так $X\in[1;3),\quad f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}.$

Найдём математическое ожидание

$$M(X)=\int_1^3 x(\frac{1}{3}x-\tfrac{1}{6})dx=(\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}-\frac{1}{6}\frac{x^2}{2})\Big|_1^3=\frac{3^3}{9}-\frac{3^2}{12}-\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{20}{9}\cong 2{,}22.$$

Найдём дисперсию

$$M(X^2)=\int_1^3 x^2(\frac{1}{3}x-\frac{1}{6})dx=(\frac{1}{3}\frac{x^4}{4}-\frac{1}{6}\frac{x^3}{3})\Big|_1^3=\frac{47}{9},$$

$$D(X)=\frac{47}{9}-(\frac{20}{9})^2=\frac{28}{81}\cong 0{,}35.$$

Теперь найдём вероятность

$$P(2\le X<5)=F(5)-F(2)=1-(\frac{1}{6}\cdot 2^2-\frac{1}{6}\cdot 2)=\frac{2}{3}.$$

Пример. Случайная величина $X\in[0;2)$ и имеет плотность $f(x)=Mx^2$. Найти коэффициент M и функцию распределения.

Решение. Коэффициент M определяется из условия $\int_a^b f(x)dx=1$.

$$M\int_0^2 x^2dx=1 \quad\Rightarrow\quad M\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=1 \quad\Rightarrow\quad M\frac{8}{3}=1 \quad\Rightarrow\quad M=\frac{3}{8}.$$

Функция распределения выражается через плотность

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \int_a^x f(t)dt, & a\le x<b;\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$

Отсюда следует

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{3}{8}\int\limits_0^x t^2dt, & 0\le x<2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}\Rightarrow\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x^3}{8}, & 0\le x<2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

3. Генеральная совокупность и выборка

Рассмотрим примеры, которые помогут лучше понять, что такое генеральная совокупность и что такое выборка. Пусть исследуется партия из 10 000 деталей. Эти детали характеризуются некоторым числовым показателем, значение которого для каждой конкретной детали неизвестно, при этом могут быть детали с одинаковым значением этого показателя. Нас интересует распределение значений этого показателя. Казалось бы, мы имеем типичную задачу теории вероятностей: определить значение показателя для каждой детали и написать закон распределения, т. е. составить таблицу значений показателя и вероятностей и выбрать случайным образом деталь с этим значением. Таким образом, показатель для партии деталей – случайная величина X, которую нужно исследовать.

Теперь предположим, что X – это прочность детали на разрыв. Чтобы узнать значение показателя, деталь следует уничтожить. В этом случае сплошное исследование всей партии теряет смысл. Выводы приходится делать исходя из исследования случайно выбранной части деталей (скажем 100 штук). В этом случае вся исходная партия называется генеральной совокупностью объёма $\boldsymbol{N}$ = 10 000, а исследуемая часть – выборочной совокупностью или выборкой объёма n = 100. Метод исследования части генеральной совокупности называется *выборочным методом*. При этом каждая деталь исходной партии называется элементом генеральной совокупности, а исследованная – элементом выборки. Фактически же каждый элемент выборки – это число (значение величины X). Теперь представим себе, что X – это габаритный размер или масса детали, т. е. элемент при исследовании не разрушается. Однако и в этом случае может использоваться выборочный метод хотя бы потому, что сплошной контроль экономически нецелесообразен.

Рассмотрим другой **пример**. Пусть производится исследование прочности партии пряжи. Каждый элемент генеральной совокупности – это отрезок пряжи, длина которого равна расстоянию между зажимами динамометра. Очевидно, что даже на одной паковке можно отметить бесчисленное множество пересекающихся отрезков одинаковой длины, т. е. объём генеральной совокупности бесконечен. Другое дело, если какой-то отрезок попал в выборку, то другие, которые с ним пересекаются, уже не могут в неё попасть. В этом примере понятие «элемент совокупности» чисто условен.

Важно понимать, что **выборка** – это последовательность чисел, среди которых могут быть и равные.

Пример. Дана выборка, представленная в виде таблицы.

Значение X	1	2	3	4	5
Частота	5	24	41	19	11

Объём выборки $n = 5 + 24 + 41 + 19 + 11 = 100$. Графический анализ можно проводить, построив полигон частот (*рис. 1*) или гистограмму (*рис. 2*).

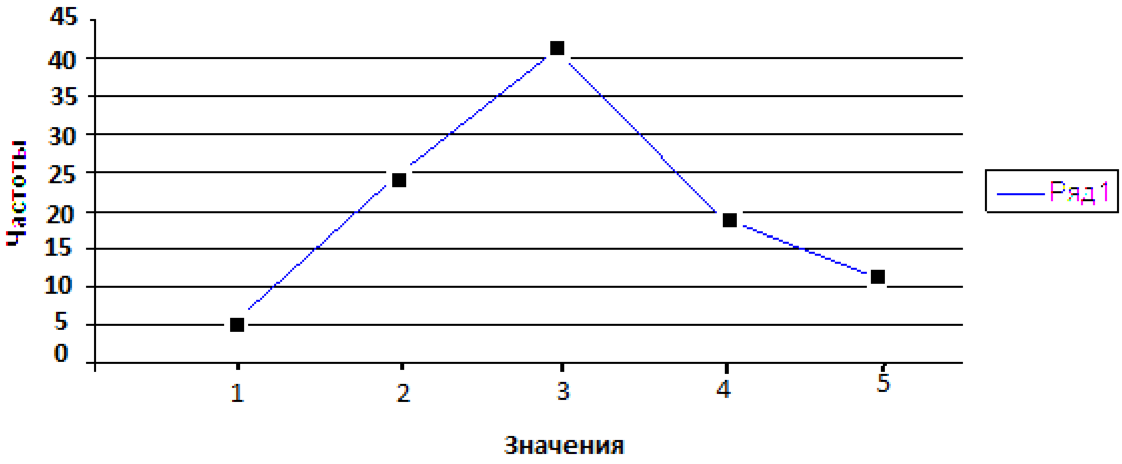

Рис. 1. Полигон частот

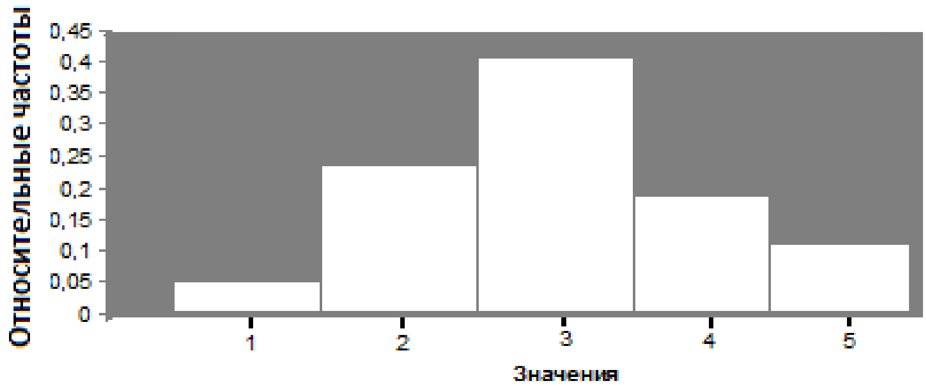

Рис. 2. Гистограмма

Подробнее о построении полигона или гистограммы смотрите в [1], [2].

В заключение поясним, почему теоретически выборку можно рассматривать как последовательность случайных величин. Пусть выборка повторная. Мы берем первую деталь (первый элемент) генеральной совокупности. До того как измерение проведено, это может быть любое допустимое значение, причём с вероятностью, которая этому значению соответствует, т. е. первый элемент выборки представляет всю генеральную совокупность и является случайной величиной $X_1 = X$. После проведения измерения эта величина получает конкретное значение $X_1 = x_1$. Так как выборка повторная, то и про второй элемент выборки можно сказать то же самое, т. е. $X_2 = X$. Таким образом, теоретически выборка – это последовательность независимых и одинаковых случайных величин, совпадающих со случайной величиной, которую представляет собой генеральная совокупность. Если же выборка бесповторная, то уже второй элемент её зависит от того, какое значение принял первый (в партии уменьшилось количество деталей, т. е. число всех исходов и уменьшилось число исходов, благоприятных одному из значений). Но если генеральная совокупность практически бесконечна, т. е. возможно получать выборку любого объёма, а теоретически рассматривать случай $n \to \infty$, грань между повторной и бесповторной выборками стираются. Практически, если можно считать, что $\frac{N-n}{N} \cong 1$, то выборку можно рассматривать как последовательностью независимых случайных величин.

4. Оценки параметров, их надёжность и точность

Одной из задач математической статистики является оценка неизвестных числовых характеристик случайной величины (генеральной совокупности). Например, оценкой математического ожидания является среднее выборочное значение

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}, \tag{4. 1}$$

где k – число различных значений в выборке, n_i – частота значения x_i, n – объём выборки.

Оценкой дисперсии является исправленная выборочная дисперсия. Напомним, что при больших выборках (объемом больше 30) разница между исправленной и простой выборочной дисперсиями считается несущественной.

$$s_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}. \tag{4.2}$$

Пример. Найдём оценки математического ожидания и дисперсии для значения параметра по выборке, приведённой выше.

$$S_B^2 = \frac{5(1-3{,}07)^2 + 24(2-3{,}07)^2 + 41(3-3{,}07)^2 + 19(4-3{,}07)^2 + 11(5-3{,}07)^2}{99} = 1{,}076.$$

Так как выборку можно рассматривать как последовательность случайных величин, то и оценка, как функция выборки, тоже является случайной величиной. *Надёжностью оценки* называется вероятность того, что оценка отличается от истинного (хотя и неизвестного) значения оцениваемого параметра меньше, чем на некоторую величину, называемую *точностью оценки* или *га-*

рантийной ошибкой. Так, например, для оценки математического ожидания надёжность определяется формулой

$$\gamma = P\left(\left|\overline{X} - m\right| < \Delta\right), \tag{4.3}$$

где $\overline{X}$ – среднее выборочное, как случайная величина, m – неизвестное математическое ожидание, γ – надёжность оценки, Δ – точность оценки.

Для больших выборок, практически объёма более 30, можно считать, что оценка математического ожидания подчиняется нормальному закону распределения, поэтому

$$\gamma = 2\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}\right), \tag{4.4}$$

где $\Phi(t)$ – функция Лапласа [1], [2] (*приложение А*).

Так как значение σ неизвестно, то используют её приближённое значение $\sqrt{s_B^2}$.

Продолжим пример. Найти точность оценки математического ожидания с надежностью γ = 0,95.

Из равенства 0,95 = 2Φ(t) по таблицам функции Лапласа находим t = 1,96. Из равенства $t = \dfrac{\Delta\sqrt{\mathrm{n}}}{\mathrm{s_B}}$ находим Δ.

$$\Delta = \frac{t\cdot\sqrt{s_B^2}}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96\cdot\sqrt{1{,}076}}{\sqrt{100}} = 0{,}203.$$

Ответ следует записать так: «*m = 3,07 ± 0,203* с надежностью 0,95» или так: «*m = 3,07 ± 0,203* с вероятностью 0,95» Запись без указания надёжности («*m = 3,07 ± 0,203*») недопустима.

Интервал (3,07 - 0,203; 3,07 + 0.203), т. е. (2,867; 3.273) называется ***доверительным интервалом***.

Пример. Найти выборочное уравнение прямой регрессии *Y* на *X*

$$\mathrm{Y} - \overline{\mathrm{y}} = \mathrm{r}\frac{\sigma_\mathrm{y}}{\sigma_\mathrm{x}}(\mathrm{X} - \overline{\mathrm{x}}) \tag{4.5}$$

по данной корреляционной таблице.

X / Y	0	10	20	30	40	50	n_y
20	2	2	-	-	-	-	4
30	2	5	3	-	-	-	10
40	-	-	5	40	5	-	50
50	-	-	2	8	7	3	20
60	-	-	-	2	8	6	16
n_x	4	7	10	50	20	9	n =100

Решение. Объем выборки n = 100. Это большая выборка. Для того чтобы написать уравнение прямой регрессии нам надо найти средние выборочные для X и Y, дисперсии и коэффициент корреляции r.

Сначала найдем безусловные распределения величин X и Y. Для этого составим отдельные таблицы для каждой случайной величины:

X	0	10	20	30	40	50
n_x	4	7	10	50	20	9

Находим среднее выборочное по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = M(X). \tag{4.6}$$

В нашем случае $\bar{x} = \dfrac{0 \cdot 4 + 10 \cdot 7 + 20 \cdot 10 + 30 \cdot 50 + 40 \cdot 20 + 50 \cdot 9}{100} = 30.2.$

Находим дисперсию по формуле

$$D = M(X^2) - M^2(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} \right)^2. \tag{4.7}$$

В нашем случае

$$M(X^2) = \frac{0^2 \cdot 4 + 10^2 \cdot 7 + 20^2 \cdot 10 + 30^2 \cdot 50 + 40^2 \cdot 20 + 50^2 \cdot 9}{100} =$$

$$= \frac{700 + 4000 + 45000 + 32000 + 22500}{100} = 1042$$

$$D(X) = 1042 - (30.2)^2 = 1042 - 912.04 = 129.96.$$

Следовательно, $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{129.96} = 11.4.$

Аналогично, для случайной величины *Y*

Y	20	30	40	50	60
n_y	4	10	50	20	16

Находим среднее выборочное по формуле $\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot n_j}{\sum_{j=1}^{m} nj} = M(Y).$

В нашем случае $\bar{y} = \frac{20 \cdot 4 + 30 \cdot 10 + 40 \cdot 50 + 50 \cdot 20 + 60 \cdot 16}{100} = 43.4.$

Находим дисперсию по формуле

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j^2 \cdot n_j}{\sum_{j=1}^{m} n_j} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} y_j \cdot n_j}{\sum_{j=1}^{m} n_j} \right)^2.$$

В нашем случае

$$M(Y^2) = \frac{20^2 \cdot 4 + 30^2 \cdot 10 + 40^2 \cdot 50 + 50^2 \cdot 20 + 60^2 \cdot 16}{100} =$$

$$= \frac{1600 + 9000 + 80000 + 50000 + 57600}{100} = 1982$$

$$D(Y) = 1982 - (43.4)^2 = 1982 - 1883.56 = 98.44.$$

Следовательно, $\sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{98.44} = 9.92$.

Коэффициент корреляции находим по формуле

$$r = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \tag{4.8}$$

где $M(XY) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j n_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} n_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j n_{ij}}{n},$ n_{ij} – частоты.

Найдем M(X Y):

$$M(XY)=\frac{0\cdot20\cdot2+0\cdot10\cdot2+0\cdot30\cdot2+30\cdot10\cdot5+30\cdot20\cdot3+40\cdot20\cdot5+40\cdot30\cdot40+}{100}$$
$$\frac{+40\cdot40\cdot5+50\cdot20\cdot2+50\cdot8\cdot30+50\cdot40\cdot7+50\cdot50\cdot3+60\cdot30\cdot2+60\cdot50\cdot6}{}=1400.$$

$$r=\frac{1400-30,2\cdot43,4}{11,4\cdot9,92}=\frac{89,32}{113,09}=0,79.$$

Так как коэффициент корреляции больше нуля, то между величинами X и Y существует прямая корреляционная зависимость (обратная, если коэффициент меньше нуля). Подставим найденные значения в уравнение регрессии (4.5):

$$\mathrm{Y}-43.4=0.79\frac{9.92}{11.4}(\mathrm{X}-30.2).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, окончательно получаем, что выборочное уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид

$$\mathrm{Y}=0.69\mathrm{X}+22.64.$$

5. Статистическая проверка статистических гипотез

При изучении этой темы обратите внимание на то, что проверке подлежит так называемая нулевая гипотеза (гипотеза об отсутствии различия, т. е. о нулевом отличии). Так как конкурирующая (или альтернативная) гипотеза, как правило, неизвестна, то мы можем, или отвергнуть только нулевую гипотезу, или принять решение, что *нет оснований ее отвергнуть.*

Пример. Найти по заданному вариационному ряду выборки выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию σ^2, исправленную выборочную дисперсию S^2 и, при уровне значимости 0,05, проверить нулевую гипотезу H_0: математическое ожидание $a=a_0$.

X	5	10	15	20	25
n_i	1	5	20	14	10

Решение. Найдем объем выборки

$$\mathrm{n}=\sum \mathrm{n_i}=1+5+20+14+10=50.$$

Определим выборочную среднюю

$$\bar{x}_b=\frac{\sum n_i x_i}{n}$$

В нашем случае

$$\bar{x}_b=\frac{5\cdot1+5\cdot10+20\cdot15+14\cdot20+10\cdot25}{50}=\frac{885}{50}=17,7.$$

Аналогично

$$\sigma^2 = \frac{\sum n_i \left(x_i - \overline{x}_b\right)^2}{n},$$

$$\sigma^2 = \frac{1\cdot(5-17{,}7)^2 + 5(10-17{,}7)^2 + 20(15-17{,}7)^2}{50} +$$

$$+ \frac{14(20-17{,}7)^2 + 10(25-17{,}7)^2}{50} = \frac{1210{,}5}{50} = 24{,}21,$$

$$S^2 = \frac{\sum n_I \left(x_i - \overline{x}_b\right)^2}{n-1} = \frac{1210{,}5}{49} = 24{,}70.$$

Так как дисперсия генеральной совокупности неизвестна, то в качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину

$$T = \frac{\left(\overline{x} - a_0\right)\sqrt{n}}{S}.$$

Величина T имеет распределение Стьюдента с $\kappa = n - 1$ степенями свободы. Для того, чтобы при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 19$ о равенстве неизвестной генеральной средней нормальной совокупности с неизвестной дисперсией значению a_0, надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$T_{табл} = \frac{(17{,}7 - 19)\sqrt{50}}{\sqrt{24{,}70}} = -1{,}85.$$

Критическая область двусторонняя. По таблице приложения 2 (в учебнике Гмурмана [1] приложение 6) для критических точек распределения Стьюдента по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и по числу степеней свободы $\kappa = 49$ находим критическую точку $t_{двуст.кр}$ (0,05;49) = =2,01. Так как $\left|T_{набл}\right| < t_{двуст.кр}$, то нет основания отвергнуть нулевую гипотезу, т. е. выборочная средняя незначительно отличается от гипотетической генеральной средней $a_0 = 19$.

Контрольная работа

1. Классическое определение вероятности

1.01. В урне 10 шаров, из которых 4 красных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых шаров *а*) ровно один красный, *в*) хотя бы один красный?

1.02. В урне 5 красных 2 синих и 3 белых шаров. Из урны последовательно вынимают три шара, не возвращая в урну. Какова вероятность того, что будут вынуты красный, синий и белый в указанном порядке? Какова будет эта вероятность, если шар вынимают, фиксируют его цвет и возвращают в урну, после чего берут следующий шар?

1.03. В урне 14 шаров, из которых 4 красных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых шаров *а*) ровно один красный, *в*) хотя бы один красный?

1.04. В урне 7 красных, 2 синих и 5 белых шаров. Из урны последовательно вынимают три шара, не возвращая в урну. Какова вероятность того, что будут вынуты красный, синий и белый в указанном порядке? Какова будет эта вероятность, если шар вынимают, фиксируют его цвет и возвращают в урну, после чего берут следующий шар?

1.05. В урне 10 шаров, из которых 6 красных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых шаров *а*) ровно один красный, *в*) хотя бы один красный?

1.06. В урне 5 красных, 3 синих и 2 белых шаров. Из урны последовательно вынимают три шара, не возвращая в урну. Какова вероятность того, что будут вынуты красный, синий и белый в указанном порядке? Какова будет эта вероятность, если шар вынимают, фиксируют его цвет и возвращают в урну, после чего берут следующий шар?

1.07. В урне 14 шаров, из которых 6 красных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых шаров *а*) ровно один красный, *в*) хотя бы один красный?

1.08. В урне 7 красных, 3 синих и 4 белых шаров. Из урны последовательно вынимают три шара, не возвращая в урну. Какова вероятность того, что будут вынуты красный, синий и белый в указанном порядке? Какова будет эта вероятность, если шар вынимают, фиксируют его цвет и возвращают в урну, после чего берут следующий шар?

1.09. В урне 16 шаров, из которых 6 красных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых шаров *а*) ровно один красный, *в*) хотя бы один красный?

1.10. В урне 8 красных, 3 синих и 5 белых шаров. Из урны последовательно вынимают три шара, не возвращая в урну. Какова вероятность того, что будут вынуты красный, синий и белый в указанном порядке? Какова будет эта вероятность, если шар вынимают, фиксируют его цвет и возвращают в урну, после чего берут следующий шар?

1.11. В урне 14 шаров, из которых 8 красных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых шаров *а*) ровно один красный, *в*) хотя бы один красный?

1.12. В урне 7 красных, 4 синих и 3 белых шаров. Из урны последовательно вынимают три шара, не возвращая в урну. Какова вероятность того, что будут вынуты красный, синий и белый в указанном порядке? Какова будет эта вероятность, если шар вынимают, фиксируют его цвет и возвращают в урну, после чего берут следующий шар?

1.13. В урне 18 шаров, из которых 8 красных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых шаров *а*) ровно один красный, *в*) хотя бы один красный?

1.14. В урне 9 красных, 4 синих и 5 белых шаров. Из урны последовательно вынимают три шара, не возвращая в урну. Какова вероятность того, что будут вынуты красный, синий и белый в указанном порядке? Какова будет эта вероятность, если шар вынимают, фиксируют его цвет и возвращают в урну, после чего берут следующий шар?

1.15. В урне 14 шаров, из которых 10 красных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых шаров *а*) ровно один красный, *в*) хотя бы один красный?

1.16. В урне 7 красных, 5 синих и 2 белых шаров. Из урны последовательно вынимают три шара, не возвращая в урну. Какова вероятность того, что будут вынуты красный, синий и белый в указанном порядке? Какова будет эта вероятность, если шар вынимают, фиксируют его цвет и возвращают в урну, после чего берут следующий шар?

1.17. В урне 16 шаров, из которых 10 красных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых шаров *а*) ровно один красный, *в*) хотя бы один красный?

1.18. В урне 8 красных, 5 синих и 3 белых шаров. Из урны последовательно вынимают три шара, не возвращая в урну. Какова вероятность того, что будут вынуты красный, синий и белый в указанном порядке? Какова будет эта вероятность, если шар вынимают, фиксируют его цвет и возвращают в урну, после чего берут следующий шар?

1.19. В урне 22 шара, из которых 10 красных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых шаров *а*) ровно один красный, *в*) хотя бы один красный?

1.20. В урне 11 красных, 5 синих и 6 белых шаров. Из урны последовательно вынимают три шара, не возвращая в урну. Какова вероятность того, что будут вынуты красный, синий и белый в указанном порядке? Какова будет эта вероятность, если шар вынимают, фиксируют его цвет и возвращают в урну, после чего берут следующий шар?

2. Дискретные случайные величины. Найти закон распределения, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$

2.01. Производятся 3 независимых опыта, причем вероятность успеха в каждом опыте равна р = 0,4. Случайная величина X – число успехов в трех опытах. Составьте закон распределения X. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины X.

2.02. Производится 4 независимых опыта, в каждом из которых успех появляется с вероятностью $p = 0,8$. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу неудач в четырех опытах. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

2.03. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна $\frac{1}{7}$. Случайная величина X – число выигрышных билетов среди четырех купленных. Составить закон распределения случайной величины X. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

2.04. На автобазе имеются три автомашины. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найдите закон распределения числа автомашин на линии. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

2.05. 4 станка работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,8. Случайная величина X – число станков вышедших из строя. Составить закон распределения X. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

2.06. В магазин зашли 5 покупателей. Вероятность того, что им потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа покупателей, которым понадобится обувь этого размера.

2.07. Прибор состоит из четырех элементов. Вероятность отказа каждого элемента 0,85. Случайная величина X – число отказавших элементов. Составьте закон распределения X. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины X.

2.08. По данным технического контроля 2 % изготовленных станков нуждаются в дополнительной регулировке. Случайная величина X – число станков, нуждающихся в дополнительной регулировке. Составьте закон распределения X. Найдите $M(X)$ и $D(X)$, если были изготовлены 4 станка.

2.09. Вероятность получения положительного результата в каждом из независимых опытов равна 0,9. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу положительных результатов в четырех опытах. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

2.10. Рабочий обслуживает 3 станка одного типа. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего, равна $\frac{1}{3}$. Составить закон распределения числа станков, потребующих внимания рабочего. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

2.11. Производятся 3 независимых опыта, причем вероятность успеха в каждом опыте равна $p = 0,6$. Случайная величина X – число успехов в трех опытах. Составьте закон распределения X. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины X.

2.12. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых успех появляется с вероятностью $p = 0,7$. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу неудач в четырех опытах. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

2.13. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0,1. Случайная величина X – число выигрышных билетов среди четырех купленных. Составить закон распределения случайной величины X. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

2.14. На автобазе имеются 3 автомашины. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,9. Найдите закон распределения числа автомашин на линии. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

2.15. 4 станка работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,7. Случайная величина X – число станков вышедших из строя. Составить закон распределения X. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

2.16. В магазин зашли четверо покупателей. Вероятность того, что им потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа покупателей, которым понадобится обувь этого размера.

2.17. Прибор состоит из трех элементов. Вероятность отказа каждого элемента 0,9. Случайная величина X – число отказавших элементов. Составьте закон распределения X. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины X.

2.18. По данным технического контроля 2 % изготовленных станков нуждаются в дополнительной регулировке. Случайная величина X – число станков, нуждающихся в дополнительной регулировке. Составьте закон распределения X. Найдите $M(X)$ и $D(X)$, если были изготовлены 5 станков.

2.19. Вероятность получения положительного результата в каждом из независимых опытов равна 0,7. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу положительных результатов в четырех опытах. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

2.20. Рабочий обслуживает 3 станка одного типа. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего, равна 0,3. Составить закон распределения числа станков, потребующих внимания рабочего. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

3. Найти выборочное уравнение прямой $Y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \bar{x})$ **регрессии *Y* на *X* по данной корреляционной таблице**

3.01.

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
35	4	2	-	-	-	-	6
45	-	5	3	-	-	-	8
55	-	-	5	45	5	-	55
65	-	-	2	8	7	-	17
75	-	-	-	4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	$n = 100$

3.02.

X / Y	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3	-	-	-	-	6
40	-	5	4	-	-	-	9
50	-	-	40	2	8	-	50
60	-	-	5	10	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	$n = 100$

3.03.

X / Y	12	17	22	27	32	37	n_y
25	2	4	-	-	-	-	6
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	45	4	-	55
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	$n = 100$

3.04.

X / Y	2	7	12	17	22	27	n_y
110	2	4	-	-	-	-	6
120	-	6	2	-	-	-	8
130	-	-	3	50	2	-	55
140	-	-	1	10	6	-	17
150	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n = 100$

3.05.

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
20	2	4	-	-	-	-	6
30	-	3	7	-	-	-	10
40	-	-	5	30	10	-	45
50	-	-	7	10	8	-	25
60	-	-	-	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	n = 100

3.06.

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
35	5	1	-	-	-	-	6
45	-	6	2	-	-	-	8
55	-	-	5	40	5	-	50
65	-	-	2	8	7	-	17
75	-	-	-	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	n =100

3.07.

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
30	1	5	-	-	-	-	6
40	-	5	3	-	-	-	8
50	-	-	9	40	2	-	51
60	-	-	4	11	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	1	10	16	55	15	3	n = 100

3.08.

X / Y	15	20	25	30	35	45	n_y
25	4	2	-	-	-	-	6
35	-	6	4	-	-	-	10
45	-	-	6	45	2	-	53
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	n = 100

3.09.

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
20	3	5	-	-	-	-	8
30	-	4	4	-	-	-	8
40	-	-	7	35	8	-	50
50	-	-	2	10	8	-	20
60	-	-	-	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	n = 100

3.10.

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	-	-	-	-	5
25	-	7	3	-	-	-	10
35	-	-	2	50	2	-	54
45	-	-	1	10	6	-	17
55	-	-	-	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n = 100

3.11.

X / Y	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3	-	-	-	-	6
40	-	5	4	-	-	-	9
50	-	-	40	2	8	-	50
60	-	-	5	10	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	n = 100

3.12.

X / Y	12	17	22	27	32	37	n_y
25	2	4	-	-	-	-	6
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	45	4	-	55
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	n = 100

3.13.

X / Y	2	7	12	17	22	27	n_y
110	2	4	-	-	-	-	6
120	-	6	2	-	-	-	8
130	-	-	3	50	2	-	55
140	-	-	1	10	6	-	17
150	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	n = 100

3.14.

.

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
35	4	2	-	-	-	-	6
45	-	5	3	-	-	-	8
55	-	-	5	45	5	-	55
65	-	-	2	8	7	-	17
75	-	-	-	4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	n = 100

3.15.

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
20	2	4	-	-	-	-	6
30	-	3	7	-	-	-	10
40	-	-	5	30	10	-	45
50	-	-	7	10	8	-	25
60	-	-	-	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	n = 100

3.16

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
35	5	1	-	-	-	-	6
45	-	6	2	-	-	-	8
55	-	-	5	40	5	-	50
65	-	-	2	8	7	-	17
75	-	-	-	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	n = 100

3.17.

X Y	5	10	15	20	25	30	n_y
30	1	5	-	-	-	-	6
40	-	5	3	-	-	-	8
50	-	-	9	40	2	-	51
60	-	-	4	11	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	1	10	16	55	15	3	n = 100

3.18.

X Y	15	20	25	30	35	45	n_y
25	4	2	-	-	-	-	6
35	-	6	4	-	-	-	10
45	-	-	6	45	2	-	53
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	n = 100

3.19.

X Y	5	10	15	20	25	30	n_y
20	3	5	-	-	-	-	8
30	-	4	4	-	-	-	8
40	-	-	7	35	8	-	50
50	-	-	2	10	8	-	20
60	-	-	-	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	n = 100

3.20.

X Y	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	-	-	-	-	5
25	-	7	3	-	-	-	10
35	-	-	2	50	2	-	54
45	-	-	1	10	6	-	17
55	-	-	-	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n = 100

4. **Даны выборка в виде таблицы и число *m***

Построить полигон частот. Найти оценку математического ожидания, несмещённую оценку дисперсии, точность оценки математического ожидания и доверительный интервал с надёжностью 0,95, проверить гипотезу H_0: M(X) = *m* при уровне значимости 0,05.

Вариант	Значение *m*	Выборка					
4. 01	*m* = 6	*X*	1	3	5	7	9
		частоты	3	11	41	33	12
4. 02.	*m* = 5	*X*	1	4	7	10	13
		частоты	4	11	38	34	13
4. 03.	*m* = 10	*X*	1	5	9	13	17
		частоты	5	11	35	35	14
4. 04.	*m* = 13	*X*	1	6	11	16	21
		частоты	6	11	32	36	15
4. 05.	*m* = 4,9	*X*	2	3	4	5	6
		частоты	3	12	41	33	11
4. 06.	*m* = 10	*X*	2	5	8	11	14
		частоты	5	12	35	35	13
4. 07.	*m* = 13	*X*	2	6	10	14	18
		частоты	6	12	32	36	14
4. 08.	*m* = 17	X	2	7	12	17	22
		частоты	7	12	29	37	15
4. 09.	*m* = 4,3	*X*	3	4	5	6	7
		частоты	4	13	38	34	11
4. 10.	*m* = 6,5	*X*	3	5	7	9	11
		частоты	5	13	35	35	12
4. 11.	*m* = 6	*X*	1	3	5	7	9
		частоты	3	11	41	33	12
4. 12.	*m* = 5	*X*	1	4	7	10	13
		частоты	4	11	38	34	13

Окончание таблицы

Вариант	Значение m	Выборка					
4. 13.	m = 10	X	1	5	9	13	17
		частоты	5	11	35	35	14
4. 14.	m = 13	X	1	6	11	16	21
		частоты	6	11	32	36	15
4. 15.	m = 4,9	X	2	3	4	5	6
		частоты	3	12	41	33	11
4. 16.	m = 10	X	2	5	8	11	14
		частоты	5	12	35	35	13
4. 17.	m = 13	X	2	6	10	14	18
		частоты	6	12	32	36	14
4. 18	m = 17	X	2	7	12	17	22
		частоты	7	12	29	37	15
4. 19.	m = 4,3	X	3	4	5	6	7
		частоты	4	13	38	34	11
4. 20.	m = 6,5	**X**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**
		частоты	5	13	35	35	12

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гмурман*, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., стер. – М.: Высшая школа , 2008.

2. *Гмурман*, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – 10-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2007.

3. *Кремер*, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н. Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.

4. *Сазонов*, А. Л. Статистический анализ / А. Л. Сазонов, В. К. Шифф. – СПб.: СПГУТД, 2007.

Приложение А

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,0000	**0,50**	0,1915	**1,00**	0,3413	**1,50**	0,4332	**2,00**	0,4772	**3,00**	0,49865
0,01	0,0040	**0,51**	0,1950	**1,01**	0,3438	**1,51**	0,4345	**2,02**	0,4783	**3,20**	0,49931
0,02	0,0080	**0,52**	0,1985	**1,02**	0,3461	**1,52**	0,4357	**2,04**	0,4793	**3,40**	0,49966
0,03	0,0120	**0,53**	0,2019	**1,03**	0,3485	**1,53**	0,4370	**2,06**	0,4803	**3,60**	0,499841
0,04	0,0160	**0,54**	0,2054	**1,04**	0,3508	**1,54**	0,4382	**2,08**	0,4812	**3,80**	0,499928
0,05	0,0199	**0,55**	0,2088	**1,05**	0,3531	**1,55**	0,4394	**2,10**	0,4821	**4,00**	0,499968
0,06	0,0239	**0,56**	0,2123	**1,06**	0,3554	**1,56**	0,4406	**2,12**	0,4830	**4,50**	0,499997
0,07	0,0279	**0,57**	0,2157	**1,07**	0,3577	**1,57**	0,4418	**2,14**	0,4838	**5,00**	0,499997
0,08	0,0319	**0,58**	0,2190	**1,08**	0,3599	**1,58**	0,4429	**2,16**	0,4846		
0,09	0,0359	**0,59**	0,2224	**1,09**	0,3621	**1,59**	0,4441	**2,18**	0,4854		
0,10	0,0398	**0,60**	0,2257	**1,10**	0,3643	**1,60**	0,4452	**2,20**	0,4861		
0,11	0,0438	**0,61**	0,2291	**1,11**	0,3665	**1,61**	0,4463	**2,22**	0,4868		
0,12	0,0478	**0,62**	0,2324	**1,12**	0,3686	**1,62**	0,4474	**2,24**	0,4875		
0,13	0,0517	**0,63**	0,2357	**1,13**	0,3708	**1,63**	0,4484	**2,26**	0,4881		
0,14	0,0557	**0,64**	0,2389	**1,14**	0,3729	**1,64**	0,4495	**2,28**	0,4887		
0,15	0,0596	**0,65**	0,2422	**1,15**	0,3749	**1,65**	0,4505	**2,30**	0,4893		
0,16	0,0636	**0,66**	0,2454	**1,16**	0,3770	**1,66**	0,4515	**2,32**	0,4898		
0,17	0,0675	**0,67**	0,2486	**1,17**	0,3790	**1,67**	0,4525	**2,34**	0,4904		
0,18	0,0714	**0,68**	0,2517	**1,18**	0,3810	**1,68**	0,4535	**2,36**	0,4909		
0,19	0,0753	**0,69**	0,2549	**1,19**	0,3830	**1,69**	0,4545	**2,38**	0,4913		
0,20	0,0793	**0,70**	0,2580	**1,20**	0,3849	**1,70**	0,4554	**2,40**	0,4918		
0,21	0,0832	**0,71**	0,2611	**1,21**	0,3869	**1,71**	0,4564	**2,42**	0,4922		
0,22	0,0871	**0,72**	0,2642	**1,22**	0,3883	**1,72**	0,4573	**2,44**	0,4927		
0,23	0,0910	**0,73**	0,2673	**1,23**	0,3907	**1,73**	0,4582	**2,46**	0,4931		
0,24	0,0948	**0,74**	0,2703	**1,24**	0,3925	**1,74**	0,4591	**2,48**	0,4934		
0,25	0,0987	**0,75**	0,2734	**1,25**	0,3944	**1,75**	0,4599	**2,50**	0,4938		
0,26	0,1026	**0,76**	0,2764	**1,26**	0,3962	**1,76**	0,4608	**2,52**	0,4941		
0,27	0,1064	**0,77**	0,2794	**1,27**	0,3980	**1,77**	0,4616	**2,54**	0,4945		
0,28	0,1103	**0,78**	0,2823	**1,28**	0,3997	**1,78**	0,4625	**2,56**	0,4948		
0,29	0,1141	**0,79**	0,2852	**1,29**	0,4015	**1,79**	0,4633	**2,58**	0,4951		
0,30	0,1179	**0,80**	0,2881	**1,30**	0,4032	**1,80**	0,4641	**2,60**	0,4953		
0,31	0,1217	**0,81**	0,2910	**1,31**	0,4049	**1,81**	0,4649	**2,62**	0,4956		
0,32	0,1255	**0,82**	0,2939	**1,32**	0,4066	**1,82**	0,4656	**2,64**	0,4959		
0,33	0,1293	**0,83**	0,2967	**1,33**	0,4082	**1,83**	0,4664	**2,66**	0,4961		
0,34	0,1331	**0,84**	0,2995	**1,34**	0,4099	**1,84**	0,4671	**2,68**	0,4963		
0,35	0,1368	**0,85**	0,3023	**1,35**	0,4115	**1,85**	0,4678	**2,70**	0,4965		
0,36	0,1406	**0,86**	0,3051	**1,36**	0,4131	**1,86**	0,4686	**2,72**	0,4967		
0,37	0,1443	**0,87**	0,3078	**1,37**	0,4147	**1,87**	0,4693	**2,74**	0,4969		

Окончание табл. А.1											
x	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**
0,38	0,1480	**0,88**	0,3106	**1,38**	0,4162	**1,88**	0,4699	**2,76**	0,4971		
0,39	0,1517	**0,89**	0,3133	**1,39**	0,4177	**1,89**	0,4706	**2,78**	0,4973		
0,40	0,1554	**0,90**	0,3159	**1,40**	0,4192	**1,90**	0,4713	**2,80**	0,4974		
0,41	0,1591	**0,91**	0,3186	**1,41**	0,4207	**1,91**	0,4719	**2,82**	0,4976		
0,42	0,1628	**0,92**	0,3212	**1,42**	0,4222	**1,92**	0,4726	**2,84**	0,4977		
0,43	0,1664	**0,93**	0,3238	**1,43**	0,4236	**1,93**	0,4732	**2,86**	0,4979		
0,44	0,1700	**0,94**	0,3264	**1,44**	0,4251	**1,94**	0,4738	**2,88**	0,4980		
0,45	0,1736	**0,95**	0,3289	**1,45**	0,4265	**1,95**	0,4744	**2,90**	0,4981		
0,46	0,1772	**0,96**	0,3315	**1,46**	0,4279	**1,96**	0,4750	**2,92**	0,4982		
0,47	0,1808	**0,97**	0,3340	**1,47**	0,4292	**1,97**	0,4756	**2,94**	0,4984		
0,48	0,1844	**0,98**	0,3365	**1,48**	0,4306	**1,98**	0,4761	**2,96**	0,4985		
0,49	0,1879	**0,99**	0,3389	**1,49**	0,4319	**1,99**	0,4767	**2,98**	0,4986		

Приложение Б

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы ν	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318 3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,98	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,64	5,84	10 22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
б	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4 30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4 59
11	1,80	2,20	2 72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
14	1,76	2 14	2,62	2,98	3,79	4,14
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,04
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3:40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					