ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени С.М. Кирова»

Начертательная геометрия

Начертательная геометрия

Учебное пособие для студентов д/о и з/о специальностей 250700, 250100, 250400, 241000, 221700, 230400, 190600, 190700, 150100

Санкт-Петербург 2012 г.

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры Начертательной геометрии и графики: протокол №2 от 23октября 2012г.

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании ученого совета факультета ландшафтной архитектуры, протокол №3 от 13ноября 2012г.
Рассмотрено и рекомендовано к изданию методической комиссией факультета ландшафтной архитектуры Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета, протокол №1 от 2012г.

Ответственный редактор: к.т.н. доц. Белоногова Н.А.
Составители: ст. преп. Швец Е.И.,
ст. преп. Вернер Н.Н., ст. преп. Ефимова Е.В., к.т.н., доц. Леонова О.Н.

Принятые обозначения и сокращения

№	Наименование	обозначение
1	Плоскости проекций: горизонтальная, фронтальная, профильная	π1 π2 π3
2	Оси проекций	x, y, z
3	Начало координат	O
4	Точка в пространстве	A; B; C; 1; 2; 3
5	Проекции точек на эпюре: Горизонтальная Фронтальная Профильная	 A'; B';1';2' A"; B"; 1"; 2" A'"; B'"; 1'"; 2'"
6	Координаты точек: Абсцисса Ордината Аппликата	 X Y Z
7	Отрезок прямой	AB, CD
8	Проекции отрезка прямой	A'B', A" B", A'" B'"
9	Следы прямой и их проекции: Горизонтальный Фронтальный	 M (M' M" M'") N (N' ,N" ,N'")
10	Плоскости	α , β ,γ
11	Следы плоскости: Горизонтальный Фронтальный Профильный	 h0α f0α p0α
12	Точка схода следов	Xα, Yα, Zα
13	Углы наклона прямой или плоскости к плоскостям проекций: Горизонтальной π1 Фронтальной π2	 α β
14	Перпендикулярность Параллельность Скрещивание Пересечение Совпадение Знак угла Знак истинной величины Точка	⊥ ǁ ·ǀ ∩ ≡ ∠ ~ (•)

Предисловие

Начертательная геометрия является одной из учебных дисциплин, составляющих основу инженерного образования наряду с математикой, химией, физикой. Начертательная геометрия – наука об изображении пространственных предметов на плоскости. Она занимается:

а) разработкой теории и практических приемов построения изображений предметов на плоскости;

б) изучением способов решения геометрических задач по заданным изображениям.

Как наука начертательная геометрия существует с конца 18 века. Ее оформлению мы обязаны французскому ученому Гаспару Монжу (1746-1818). Он свел в стройную систему многообразной материал, который существовал до него, и тем самым положил начало развитию этой науки.

В настоящее время нелегко указать ту или иную область деятельности, где бы не применялась начертательная геометрия. Она является основой черчения, используется в машиностроении, приборостроении, строительстве и т. п.

Чертеж является языком техники, а начертательная геометрия служит грамматикой этого языка, т.к. она учит нас читать чужие мысли и излагать наши собственные одними только линиями и точками.

Настоящий конспект лекций позволит обучающимся не вести подробные записи во время занятий, т. к. в нем изложены основные положения читаемого курса. Студентам остается внимательно следить за изложением материала и понять сущность теоретических положений. Студентам заочного обучения этот конспект поможет самостоятельно изучить курс начертательной геометрии.

Этот конспект не заменит учебника. Он является вспомогательным материалом для выполнения домашних заданий, эпюров, подготовки к экзамену.

Изображение точки

Методы проецирования

Изображение предмета, находящегося в пространстве, построенное на плоскости по определенным законам, называется проекцией его на эту плоскость.

Центральное проецирование

Проекцией точки A называют (·) A' пересечения проецирующей прямой с плоскостью α (рис. 1).

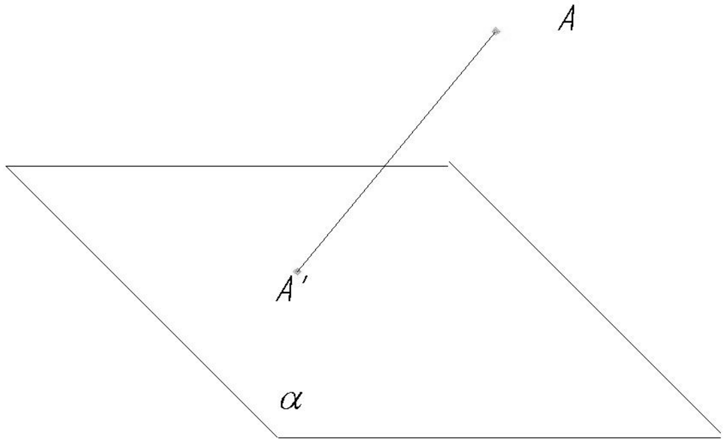


Рис.1

Проецированием называют процесс построения изображений с помощью проецирующих прямых

$A'=AA'\cap\alpha$, где AA' - проецирующий луч

Проекцией точки на плоскость называют точку пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.

Центральное проецирование

Возьмем в пространстве какой-нибудь предмет (в нашем примере отрезок AB) и спроецируем его из (•)S на плоскость α (рис.2).

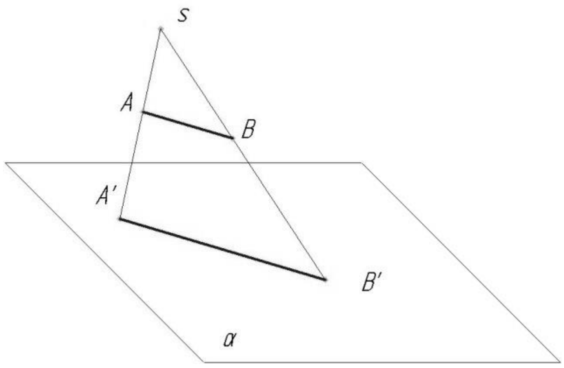


рис.2

Получим проекцию отрезка AB на плоскость α $(A'B')$. Если проецирующие лучи проходят через одну точку S, то такое проецирование называют центральным, S – центр проецирования. Такое проецирование применяется в живописи, архитектуре, фотографии.

Параллельное проецирование

Перенесем центр проецирования точку S в бесконечность, проецирующие лучи будут параллельны между собой (рис.3).

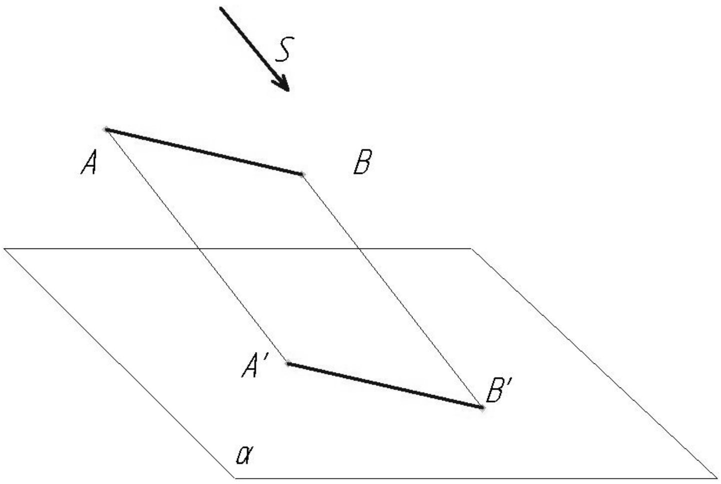


Рис.3

S - направление проецирования. Такое проецирование будет называться параллельным. Проецирующие лучи параллельны.

AA'‖ *BB'*

В инженерной практике применяется в основном параллельное проецирование

В зависимости от направления проецирующих лучей по отношению к плоскости проекций параллельные проекции могут быть *прямоугольные* (рис.4);

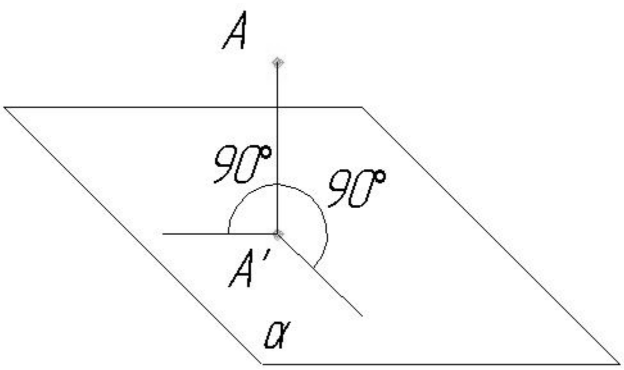


Рис.4

и *косоугольные* (рис.5).

В дальнейшем курсе мы будем изучать только прямоугольное (ортогональное) проецирование.

Основные свойства параллельного проецирования

При параллельном проецировании нарушаются метрические характеристики геометрических фигур (происходит искажение).

Отметим основные свойства параллельного проецирования:

1. Проекция точки есть точка.

2. Проекция прямой на плоскость есть прямая.

3. Если в пространстве точка принадлежит линии, то проекция этой точки принадлежит проекции линии.

4. Проекции взаимно параллельных прямых взаимно параллельны, а отношение отрезков таких прямых равно отношению их параллельных проекций.

5. Точка пересечения проекций пересекающихся прямых является проекцией точки пересечения этих прямых в пространстве.

6. Прямая, плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в истинную величину.

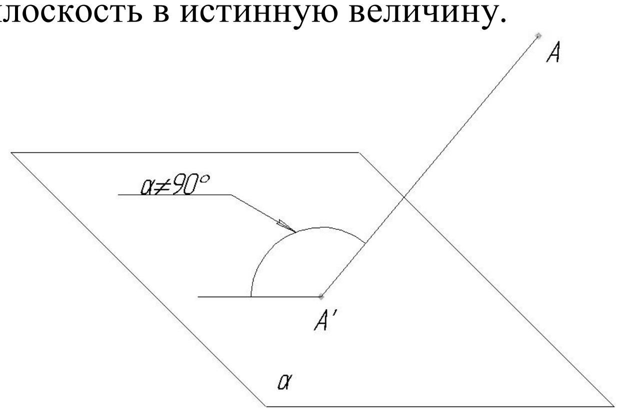


Рис.5

Метод ортогональных проекций (метод Монжа).

Если предмет пространства спроецировать на 2 или 3 взаимно перпендикулярные плоскости, то такой метод проецирования называется методом Монжа (по имени его автора - французского ученого Гаспара Монжа).

π_1 – горизонтальная плоскость проекций

π_2 – фронтальная плоскость проекций

π_3 – профильная плоскость проекций

В пересечении плоскостей получаем оси координат *x, y, z.* Точку пересечения координат называют началом координат *O* или центром проекций.

Из (•) *A* опускаем ⊥ на 3 плоскости и получаем проекции точки на этих плоскостях:

A' - горизонтальная проекция (•) *A*

A'' - фронтальная проекция (•) *A*

A''' - профильная проекция (•) *A*

Расстояния от (•) *A* до плоскостей проекций называют координатами точки. Масштаб по осям *Ox* и *Oz* - 1:1, по оси Оy – 1:2. Для определения положения точки в пространстве необходимы ее три прямоугольные координаты или две ее ортогональные проекции (рис. 6).

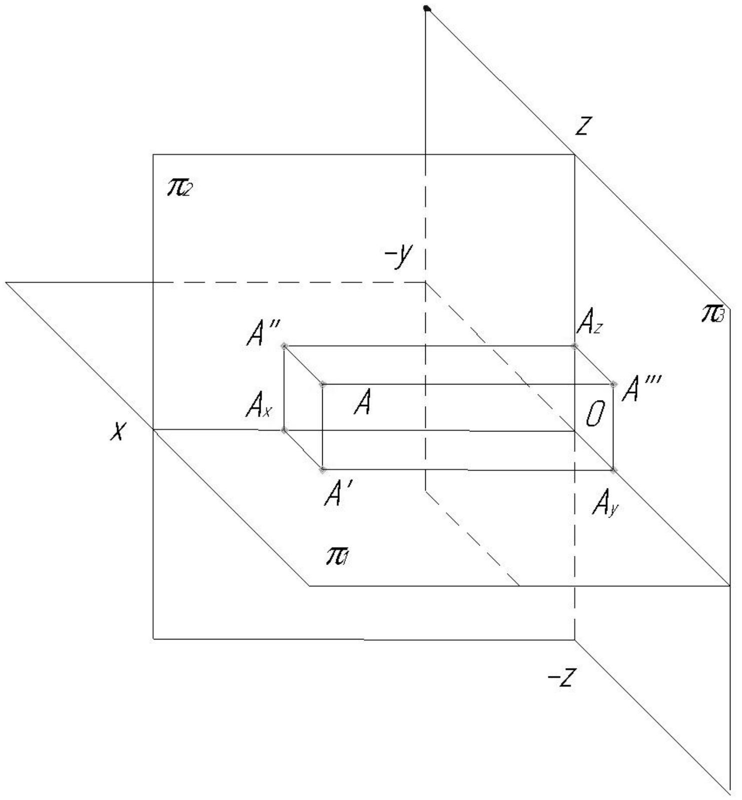


Рис. 6

Совместим плоскость π_1 с π_2 и π_3 сπ_2 путем вращения вокруг осей Ох и Oz, получим плоское изображение точки - эпюр. Такое плоское изображение точки показано на рис.7.

При построении (•) на эпюре горизонтальная проекция A' характеризуется координатами *x, y;*

фронтальная A'' – *x, z;*

профильная A''' - *y, z.*

На эпюре горизонтальная и фронтальная проекция (•) находятся на одном ⊥ к оси *Ox* ($A'A'' \perp Ox$), фронтальная и профильная проекции точки находятся на одном ⊥ к оси *Oz* ($A''A''' \perp Oz$), т.к. это плоский чертеж, искажения по осям *Ox, Oy, Oz* нет. Геометрическая связь между тремя проекциями точки позволяет находить третью проекцию по двум заданным графически - при помощи линий проекционной связи, а также путем измерения координат.

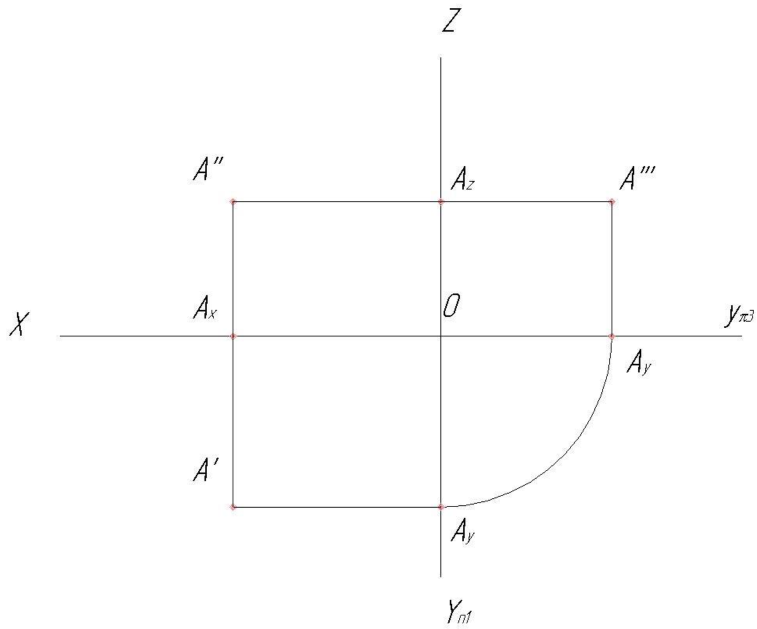


Рис.7

Пример 1. По двум заданным проекциям точек *A, B, C* построить третью. Построить наглядные изображения точек (рис.8).

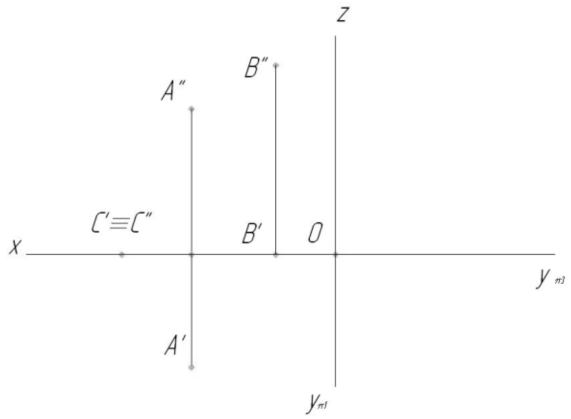


Рис.8

1. На пересечении линии связи $A'A''$ с осью x отметим вспомогательную точку A_x (рис. 9).

2. Проведем линию связи из горизонтальной проекции точки $A'\perp y_{\pi 1}$, отметим вспомогательную точку A_y.

3. Перенесем вспомогательную точку A_y на ось $y_{\pi 3}$. Для этого поставим циркуль в начало координат (точка O) радиусом OAy и проведем дугу до оси $y_{\pi 3}$.

4. Из фронтальной проекции точки A'' проведем линию связи $\perp z$ и на оси z отметим вспомогательную точку A_z.

5. На пересечении линий связи, проведенных из точки A_y и A_z перпендикулярно осям y и z, определим профильную проекцию точки A'''.

6. Для нахождения профильной проекции B''' проведем линии связи $\perp x$ и $\perp z$, отметим на оси x вспомогательную точку B_x, на оси z- точку B_z. B_y находится в начале координат, т.к. координата y для точки B равна 0. Помня о том, что $B''B'''\perp z$, отметим на оси z B''', совпадающую с B_z.

7. Для построения недостающей проекции C''' рассуждаем следующим образом: $C'(10, 0)$; $C''(10, 0)$, где z=0 и y=0, следовательно, $C'''(y, z)$ =>$C'''(0, 0)$ находится в начале координат, в точке O.

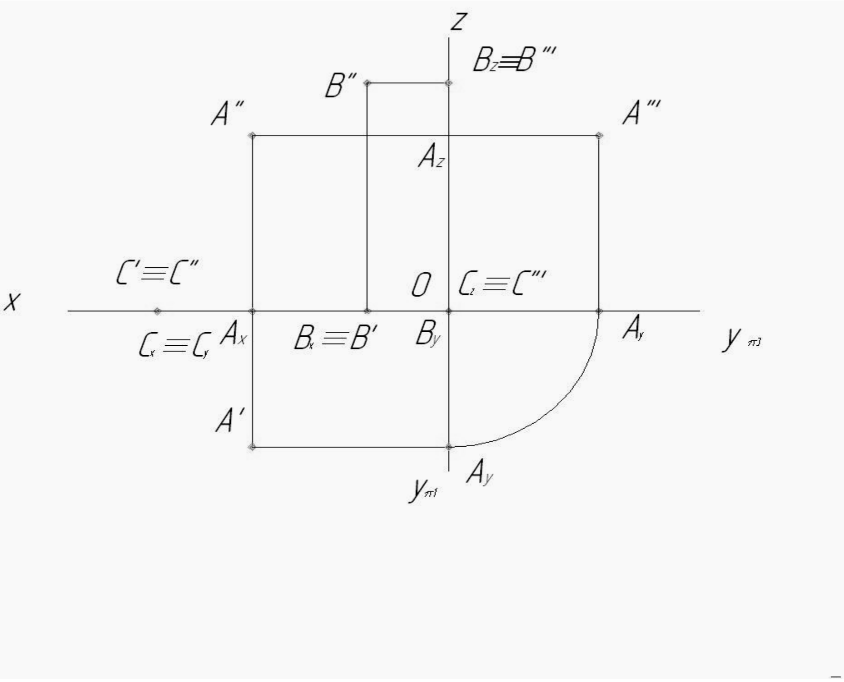


Рис.9

Построим наглядные изображения точек A, B, C (рис.10).

Изображаем три взаимно перпендикулярные плоскости π_1, π_2, π_3.

$\pi 2 \cap \pi 1 = x$

$\pi 2 \cap \pi 3 = z$

$\pi 1 \cap \pi 3 = y$

Ось y направляем под углом 45° к оси x. При построении наглядного изображения принимаем коэффициент искажения по осям $\kappa_x=\kappa_z=1$, $\kappa_y=0{,}5$.

1. Отметим вспомогательные точки A_x, A_y, A_z, измеряя расстояния на эпюре Монжа.

2. Строим проекции A', A'', A'''.

$A'=(Ax\, A' || y) \cap (Ay\, A' || x)$

$A''=(Ax\, A'' || z) \cap (A'''\, Az || x)$

$A'''=(Ay\, A''' || z) \cap (Az\, A''' || y)$

3. Строим наглядное изображение точки А.

Проведем $(A'\, A) || z$

$(A''\, A) || y$ $(A'''\, A) || x$, на пересечении этих линий получим точку A.

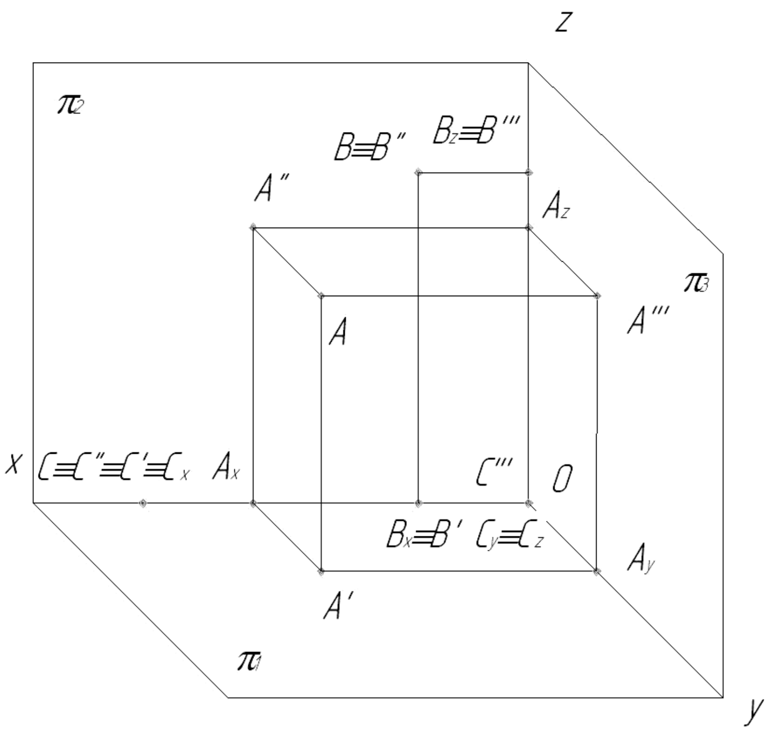


Рис. 10

Если точка лежит в пространстве, то на эпюре ни одна из ее проекций с самой точкой не совпадает. Если одна из координат равна нулю - точка лежит на плоскости и совпадает со своей проекцией на этой плоскости, при равенстве нулю двух координат - точка лежит на оси. При равенстве всех трех координат *0* – точка лежит в начале координат.

Точка в четвертях пространства

Положение точки в пространстве определяется двумя ее проекциями, обычно горизонтальной и фронтальной. Для решения задач во многих случаях достаточно рассматривать проекции только на плоскости π_1 и π_2. Взаимно-перпендикулярные плоскости π_1 и π_2 делят пространство на четыре двухгранных угла, называемых четвертями.

На рис.11 показан порядок отсчета четвертей. Т.к. пространство разделено на четыре четверти, необходимо ввести понятие отрицательных координат. Условимся считать, что координата x положительна. Координата у перед плоскостью π_2 положительна на наглядном изображении и вниз от оси Ox на эпюре. Координата z положительна вверх над плоскостью π_1, на наглядном чертеже и на эпюре.

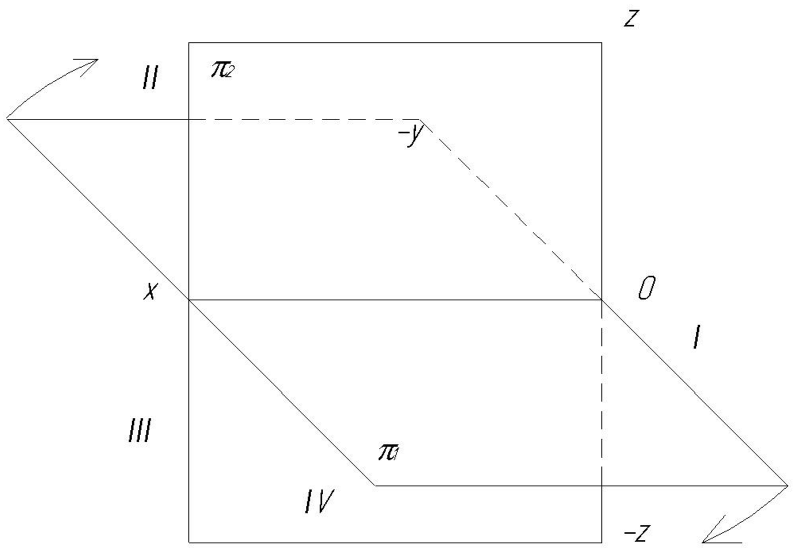


Рис.11

В задании координат точки знак «+» не ставится. Знаки координат в четвертях пространства представлены в следующей таблице:

четверти	Координаты		
	X	*Y*	*Z*
1	+	+	+
2	+	-	+
3	+	-	-
4	+	+	-

Для построения эпюра плоскость π_1 поворачивается вокруг оси *OX* до ее совмещения с плоскостью π_2 (переднюю полуплоскость π_1 опускают вниз).

На рис. 12 приведен пример точек в четвертях пространства.

Точки могут лежать как в любой четверти, так и на плоскостях проекций или оси *OX*.

Точки, противолежащие друг другу на равном расстоянии от плоскости проекций или оси *Ox*, называются точками симметричными. Координаты симметричных точек имеют равные числовые значения, но разные знаки одной или двух координат.

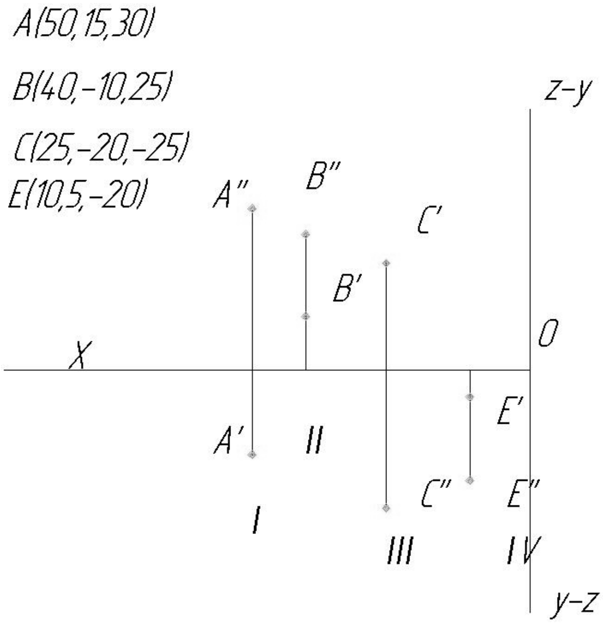


Рис.12

В предыдущем изложении мы имели дело с эпюрами, на которых были оси координат, но в практике можно встретить чертежи без указания осей проекций.

На рис.13 в случае (а) положение плоскостей π_1 и π_2 зафиксировано, в случае (б) - не зафиксировано. Такой чертеж называют безосным.

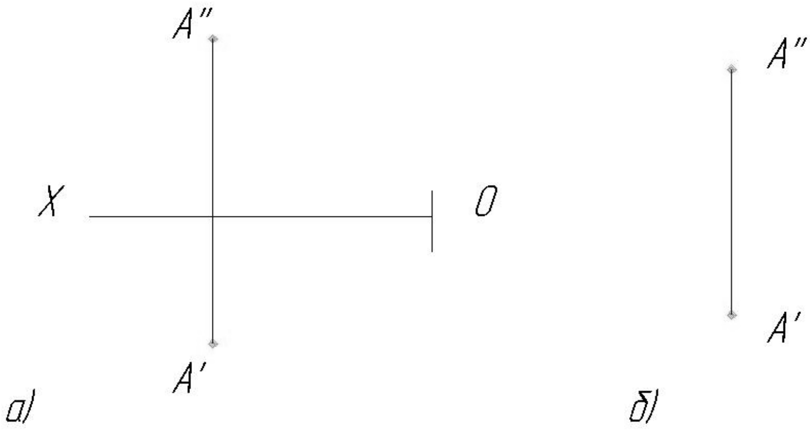


Рис.13

Прямая линия

Проекцией отрезка прямой на плоскости является прямая. Чтобы построить проекции прямой на эпюре, достаточно спроецировать две ее точки и соединить одноименные проекции.

Отрезок прямой в пространстве может быть наклонен ко всем плоскостям проекций. В этом случае он называется отрезком прямой общего положения (рис.14).

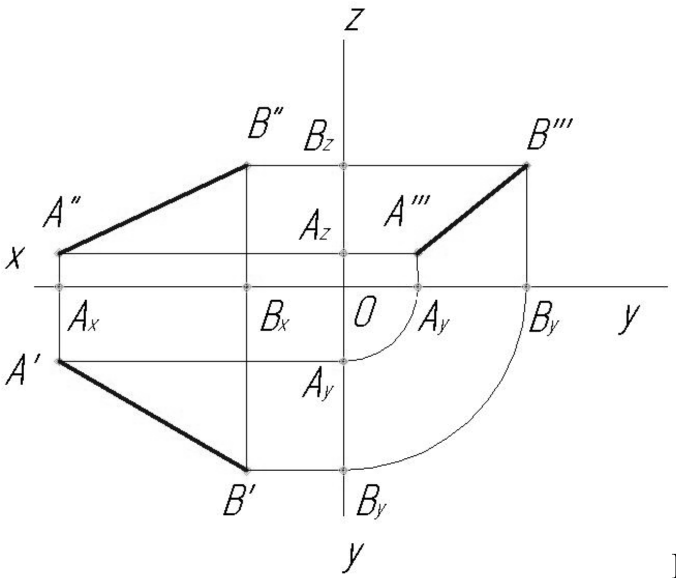


Рис.14

Прямые могут быть параллельны одной плоскости проекций (прямые уровня).

1. Прямая, параллельная π_1, называется горизонтальной прямой. На рис. 15 показано наглядное ее изображение и эпюр. Она наклонена к плоскости π_2, образуя с ней угол β, и проецируется на π_1 в истинную величину. Все точки такой прямой имеют одинаковую координату z.

2. Прямая, параллельная π_2, называется фронтальной прямой. Она образует с плоскостью π_1 угол α. Проецируется на π_2 в истинную величину. Все точки прямой имеют одинаковую координату y (рис.16).

3. Прямая, параллельная π_3, называется профильной. $A'''B'''$- истинная величина отрезка. У такой прямой все точки имеют одинаковую координату *x* (рис.17).

Если прямая параллельна двум плоскостям проекций, то она называется проецирующей. Одной из трех проекций такой прямой будет точка, а две другие проекции проецируются в истинную величину.

1.Горизонтально-проецирующая прямая *AB* перпендикулярна π_1. На рис.18 показано ее наглядное изображение и эпюр.

2.Фронтально-проецирующая прямая - перпендикулярная π_2 (рис.19).

3.Профильно-проецирующая прямая - пепендикулярная π_3 (рис.20).

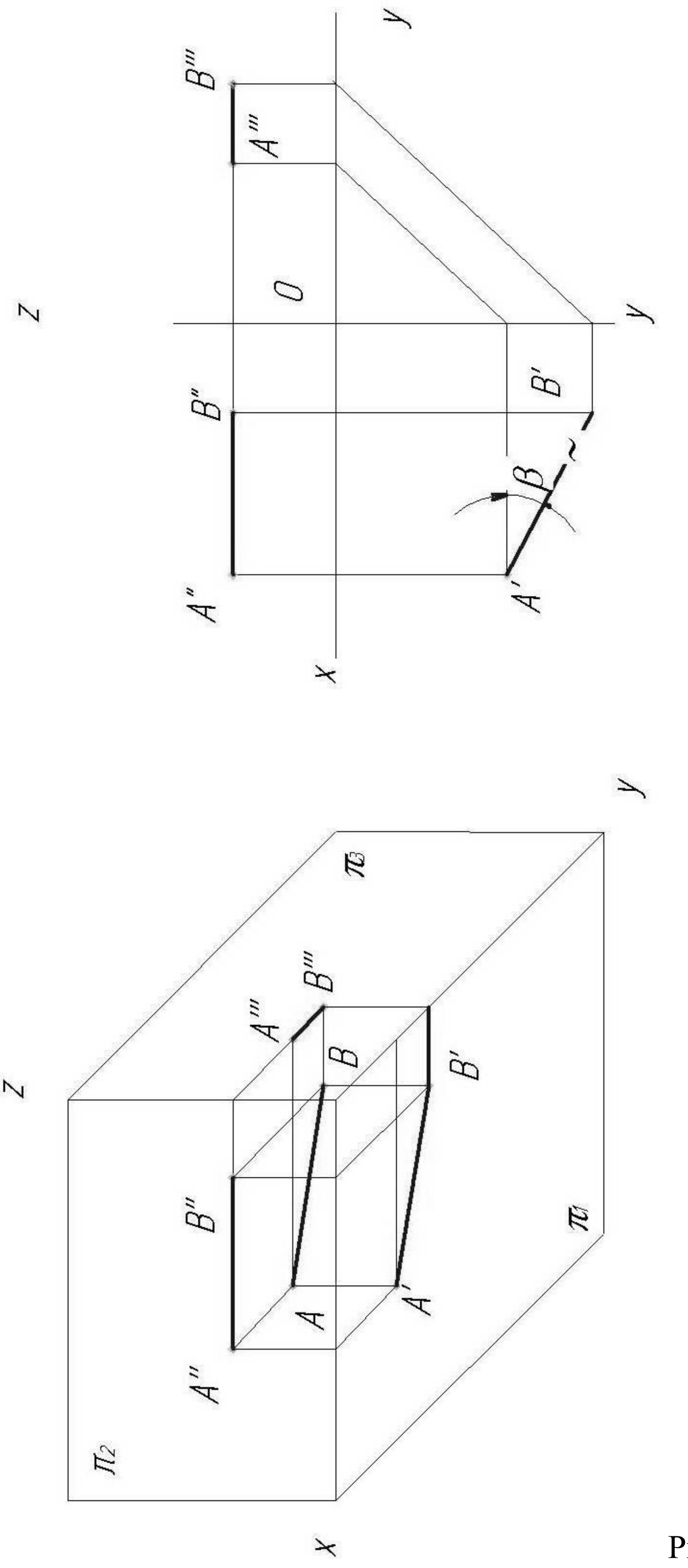


Рис.15

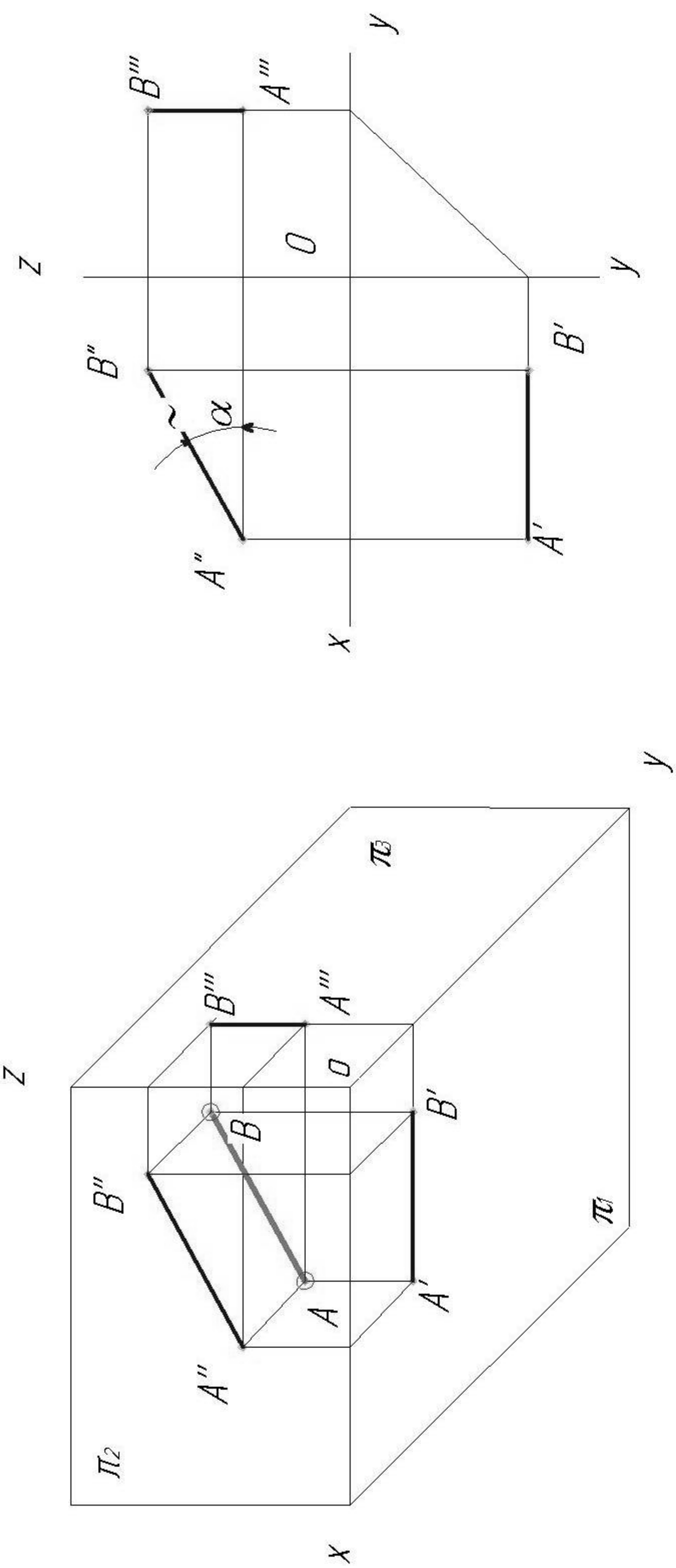


рис.16

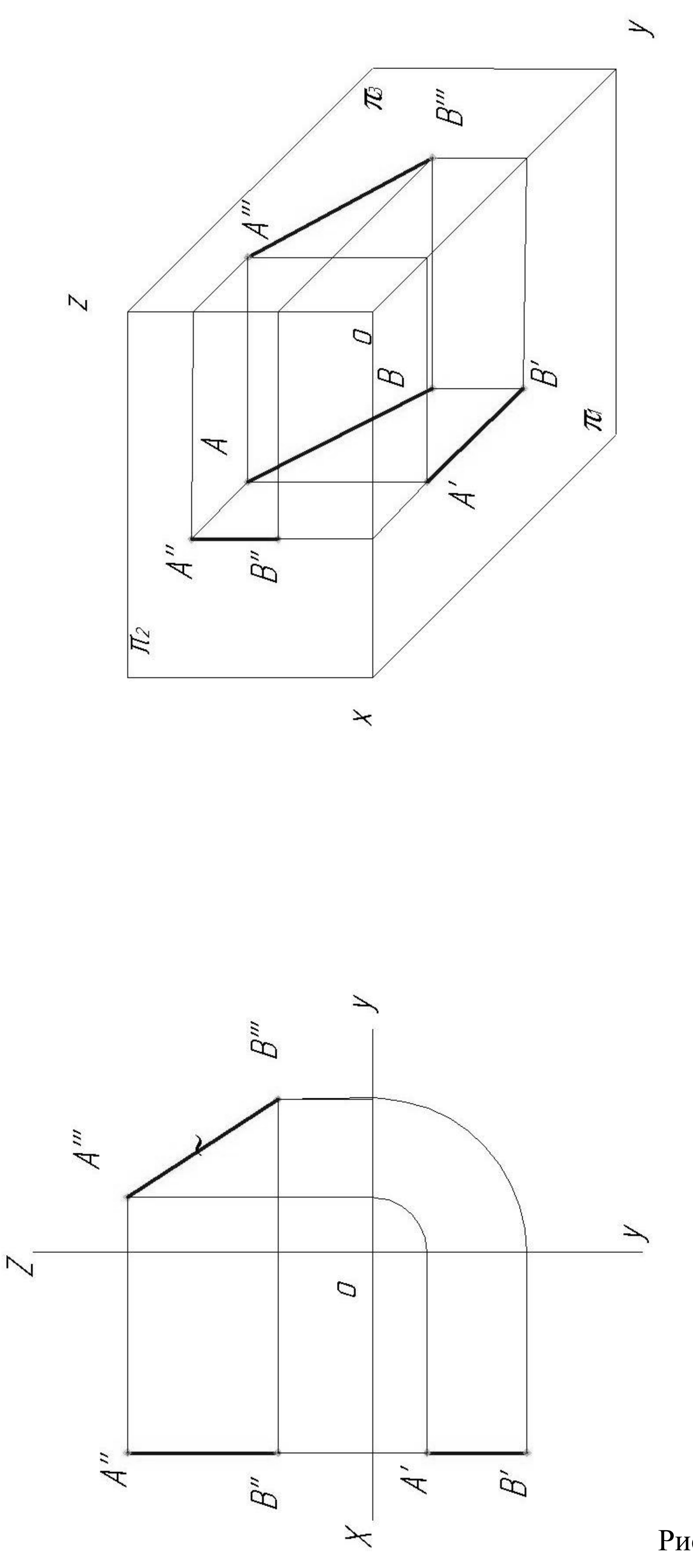


Рис.17

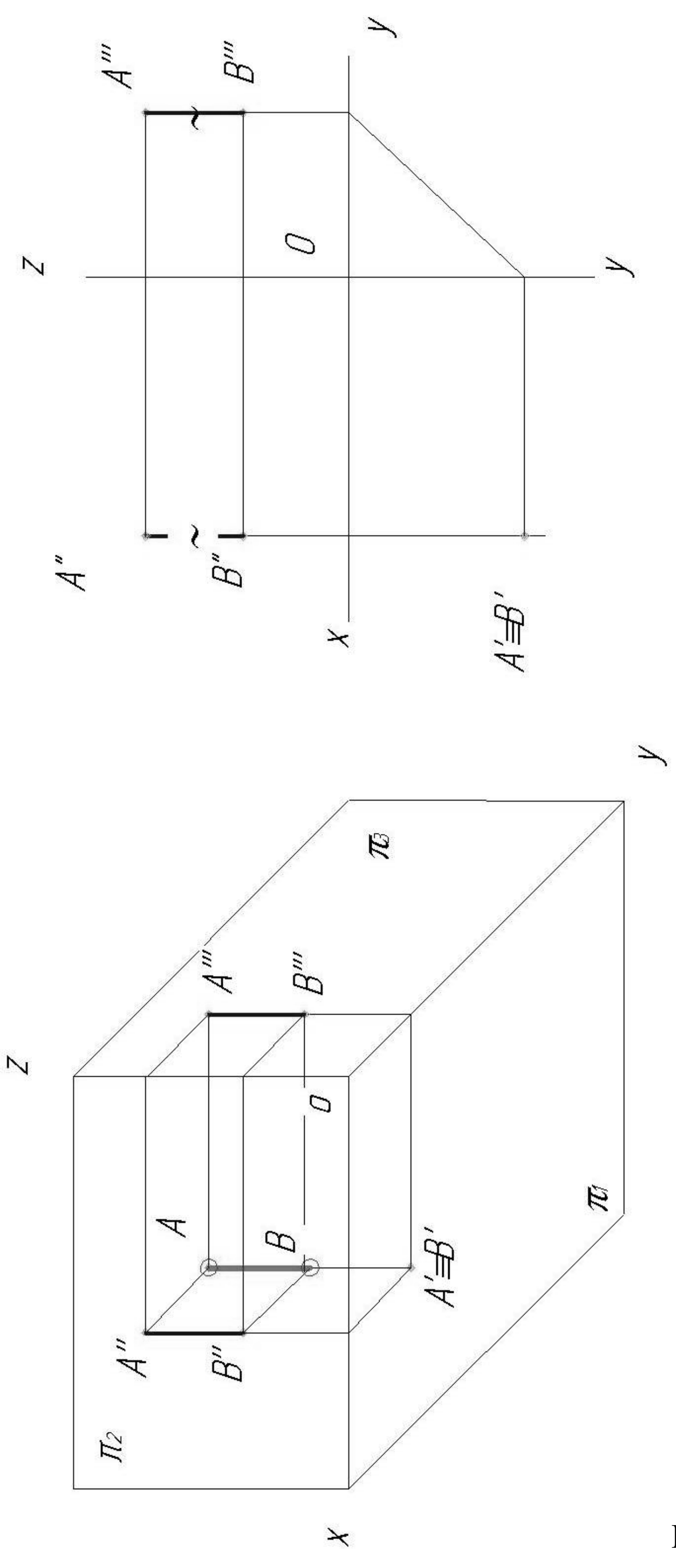


Рис.18

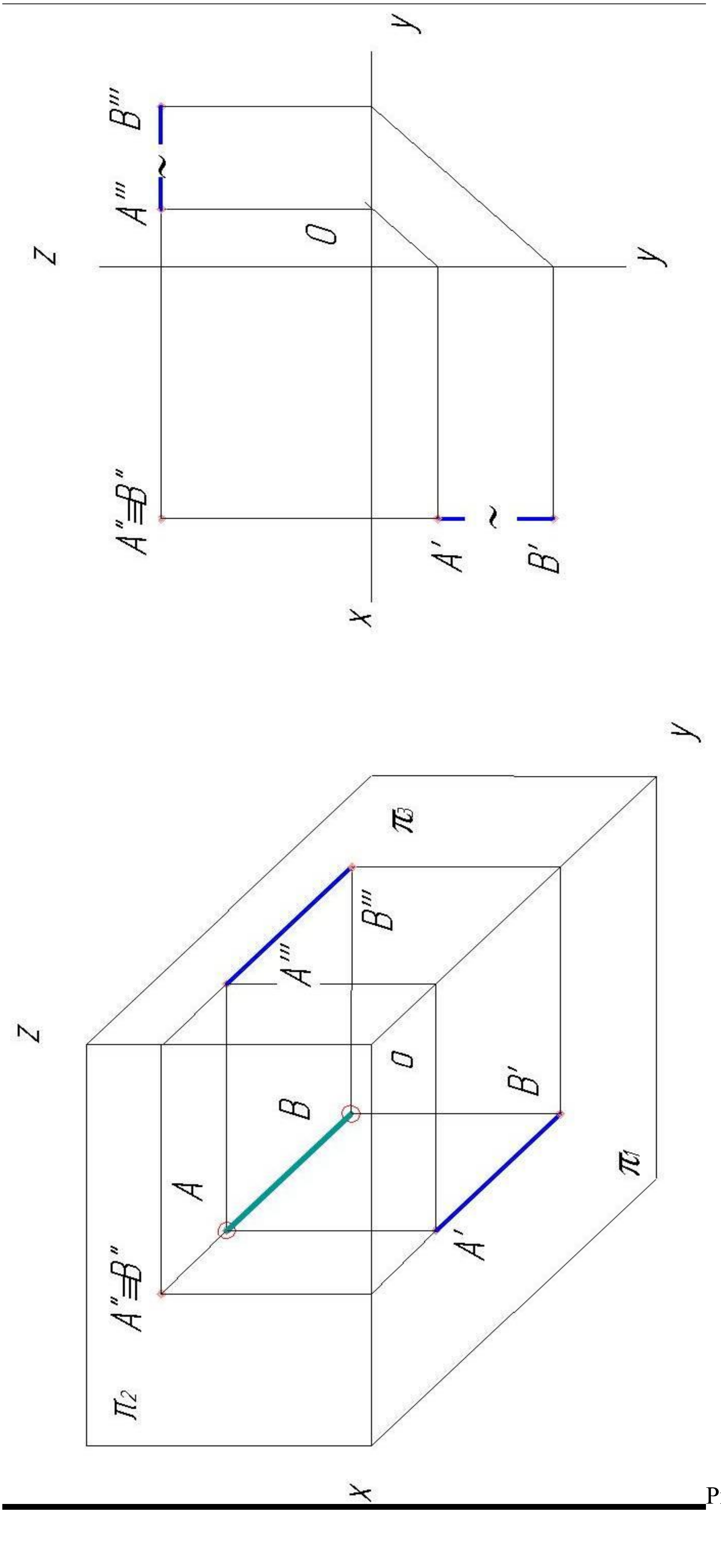


Рис.19

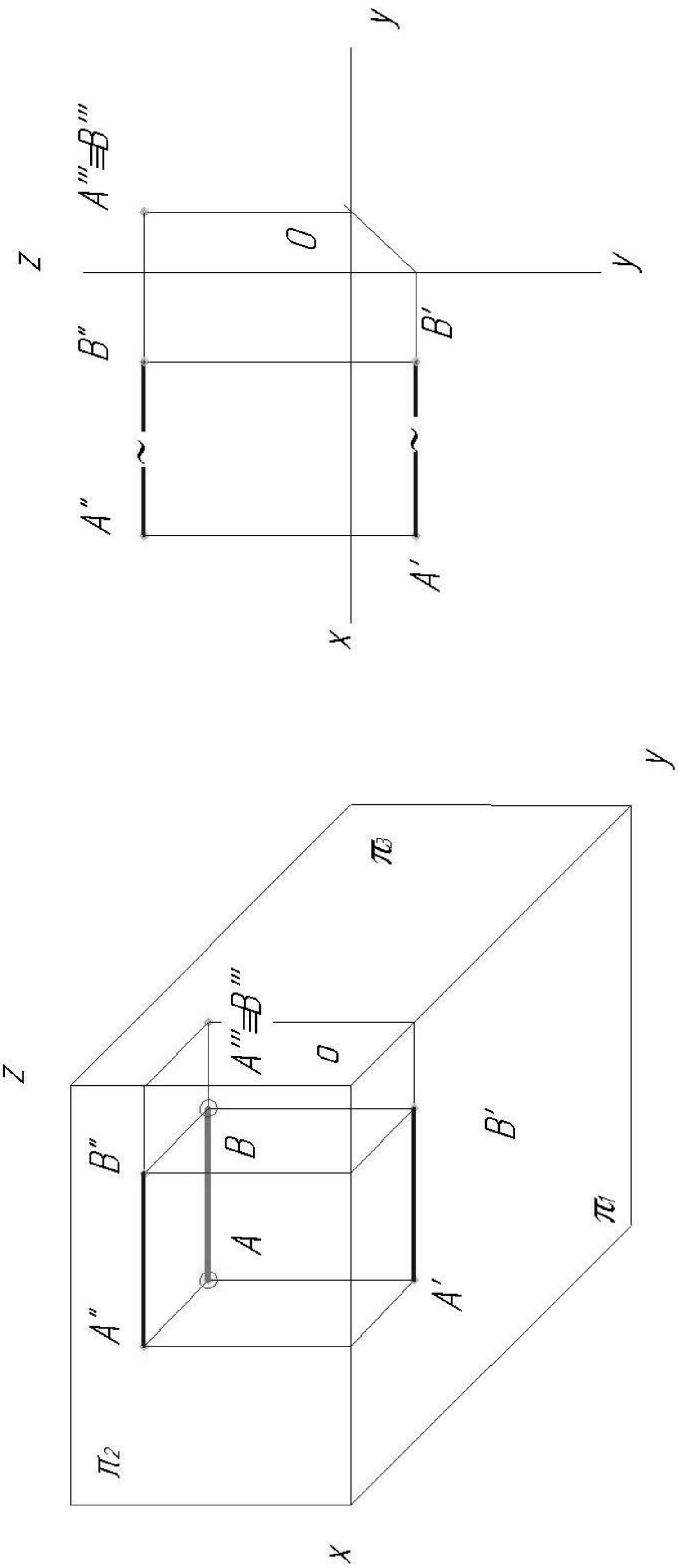


Рис.20

Точка на прямой

Если точка лежит на прямой, то проекции этой точки лежат на одноименных проекциях прямой. Точка *C* лежит на прямой *AB*, а точка *D* – не лежит на этой прямой (рис.21).

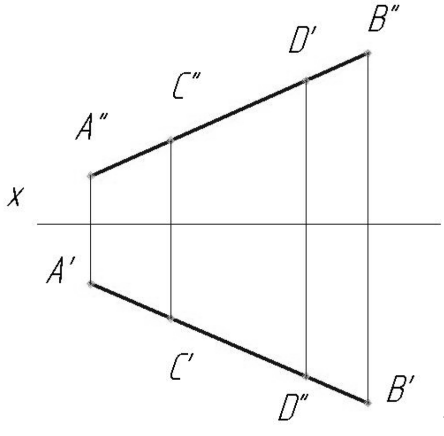


рис.21

Деление отрезка в заданном отношении

Деление отрезка на равные или пропорциональные части выполняют по теореме Фалеса: Если на одной прямой отложить равные или пропорциональные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то эти прямые отсекут на другой прямой равные или пропорциональные отрезки. Разделим отрезок *AB* в соотношении 3:1 (рис.22).

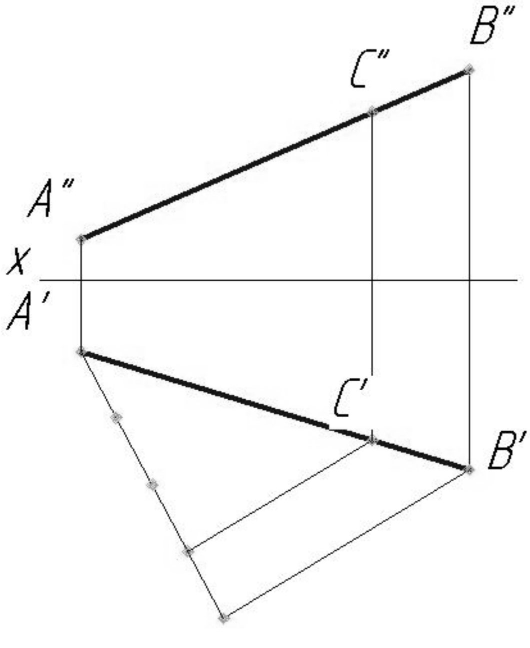


рис.22

Определение истинной величины отрезка прямой методом прямоугольного треугольника

В пространстве отрезок *AB* прямой общего положения спроецирован на две плоскости π_1 и π_2 и представляет собой гипотенузу двух прямоугольных Δ *ABC* и *ABD* (рис.23). В Δ *ABC* катет *AC* параллелен и равен *A'B'*, катет *CB* составляет разность координат *z* точек *A* и *B*. Катетами второго – отрезок *BD=A''B''* и разность координат у точек *A* и *B*. На эпюре легко построить такие треугольники.

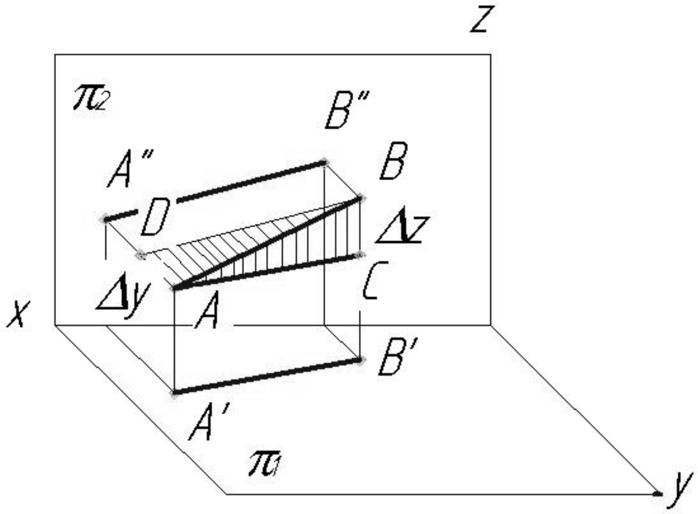


рис.23

Длина отрезка *AB* определяется гипотенузой прямоугольного треугольника, одним из катетов которого является одна из проекций отрезка *AB*, а вторым - разность координат концов отрезка. Угол между гипотенузой и горизонтальной проекцией является углом наклона отрезка *AB* к плоскости π_1 - α. β - угол наклона отрезка *AB* к плоскости π_2 является углом между гипотенузой и фронтальной проекцией отрезка *AB*.

Чтобы на эпюре получить истинную величину отрезка *AB* и углы его наклона α и β к плоскостям π_1 и π_2, нужно построить два прямоугольных треугольника (рис.24). Катетами одного треугольника является горизонтальная проекция *A'B'* и разность Δ *z* точек *A* и *B*. Гипотенузы A_0B' и A_0B'' равны длине отрезка *AB*, а углы, заключенные между ними и проекциями *A'B'* и *A''B''*, равны искомым углам α и β.

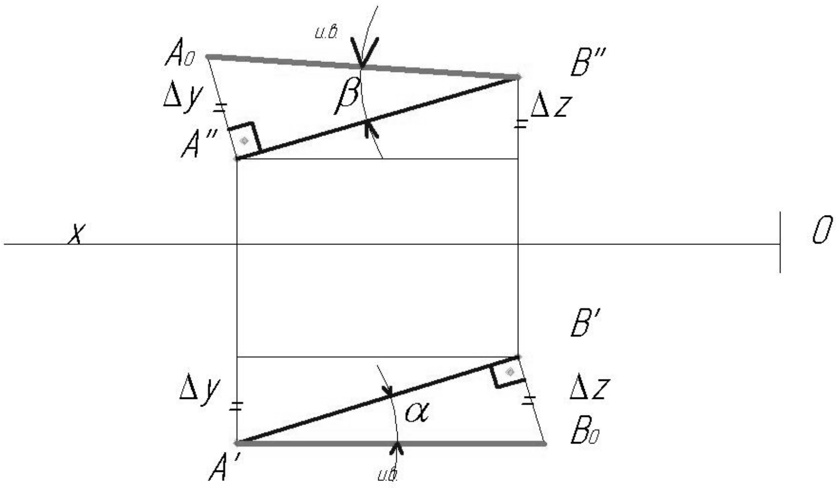


рис.24

Проекция прямого угла

Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения (рис.25).

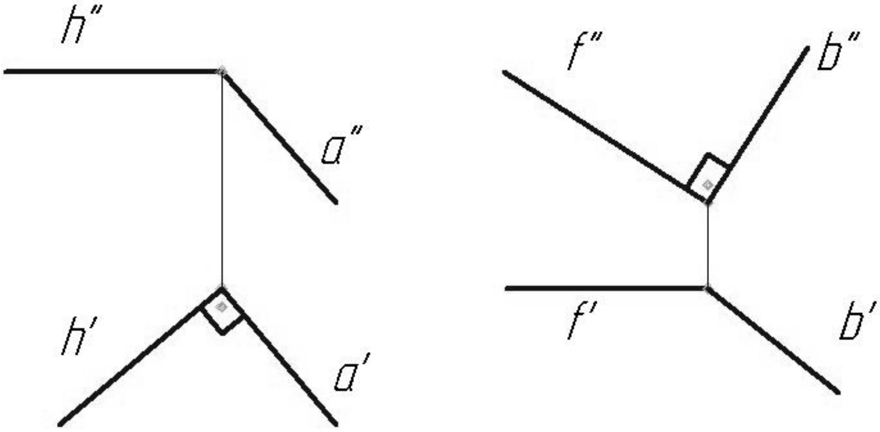


Рис.25

Задача 1. Определить расстояние от точки *A* до прямой *l* (рис.26).

Решение сводится к построению перпендикуляра *A'B'* на *l'* и определению его истинной величины методом прямоугольного треугольника.

Задача 2. Построить равнобедренный треугольник с вершиной в точке *A* и одним из катетов на прямой *l'* (рис.27).

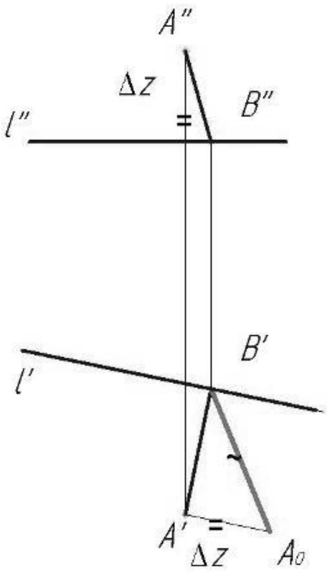


Рис. 26

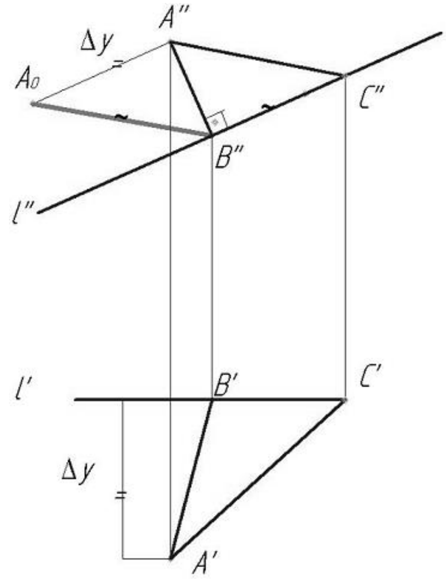


Рис.27

Прямая *l* является фронталью. Строим прямой угол. Из *A''* на *l''* опускаем ⊥ *AB*. Строим в проекционной связи горизонтальную проекцию отрезка *A'B'*.

Катет *AB (A'B', A''B'')* - отрезок общего положения. Истинную величину *AB* находим методом прямоугольного треугольника и откладываем ее на фронтальной проекции фронтальной прямой *l* для получения вершины *C*.

Задача 3. Построить ромб *ABCD* по заданным вершине *A* и направлению диагонали *BD* на *h* и отношению диагоналей *AC*:*BD*=1:1,5 (рис.28).

Решение задачи сводится к построению диагоналей *AC* и *BD*.

A' C' ⊥ *h'*

O - точка пересечения диагоналей.

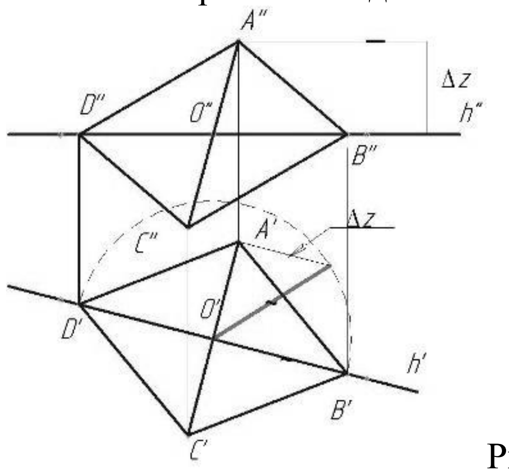


Рис.28

Находим истинную величину отрезка *OA* методом прямоугольного треугольника и, увеличив ее в 1,5 раза, откладываем на *h'* для получения проекций B' и *D'*. *B''* и *D''* находим на *h''*. Полученные проекции точек соединяем для получения проекций ромба.

Следы прямой

Следом прямой называют точку пересечения прямой с плоскостью проекций. Прямая общего положения пересекается со всеми тремя плоскостями проекций и имеет три следа. Прямая, параллельная одной плоскости проекций, имеет два следа. Прямая, параллельная двум плоскостям проекций (проецирующая), имеет один след. M - горизонтальный след, N – фронтальный след. Там, где отрезок AB пересекается с горизонтальной плоскостью проекций, получаем горизонтальный след M. Фронтальный след N получаем при пересечении отрезка AB с фронтальной плоскостью проекции. Профильный след рассматривать в задачах не будем (рис. 29).

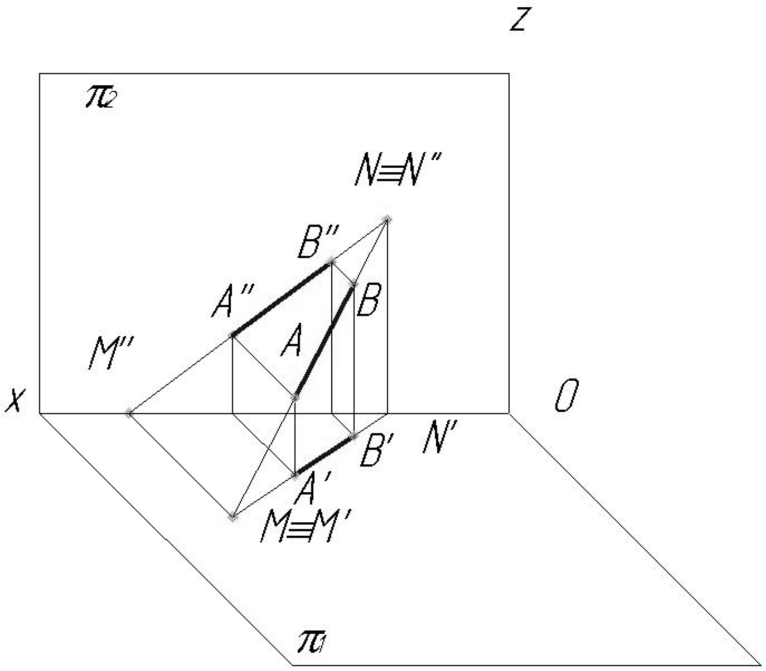


Рис.29

След прямой - это точка, лежащая на плоскости проекций и самой прямой одновременно. Если точка лежит на плоскости, то одна ее проекция совпадает с самой точкой, а вторая обязательно лежит на оси x.

Для построения следов прямой AB на эпюре поступают следующим образом: продолжают $A''B''$ до пересечения с осью x и отмечают фронтальную проекцию M'', из M'' восстанавливают перпендикуляр до пересечения с $A'B'$ или ее продолжением. Получаем горизонтальный след M' и сам след M.

При продолжении $A'B'$ до пересечения с осью x получаем горизонтальную проекцию N' фронтального следа. Из N' восстанавливаем $\perp$ до пересечения с $A''B''$ или ее продолжением для получения фронтального следа N''. N'' совпадает с фронтальным следом N (рис.30). В наших примерах мы рассматриваем только горизонтальные и фронтальные следы прямых.

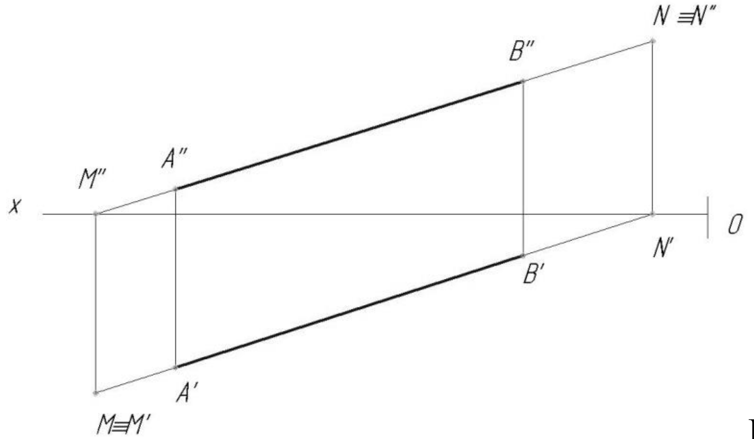


Рис.30

Два следа прямой вполне определяют положение прямой в пространстве. По следам прямой можно определить через какие четверти пространства она проходит, если отрезок прямой продолжить в обе стороны. До следа *N* прямая проходит через I четверть, между следами *M* и *N* - II четверть, за следом *M* - III четверть. Можно записать: прямая, заданная отрезком *AB*, проходит через I-II-III четверти (рис.31)

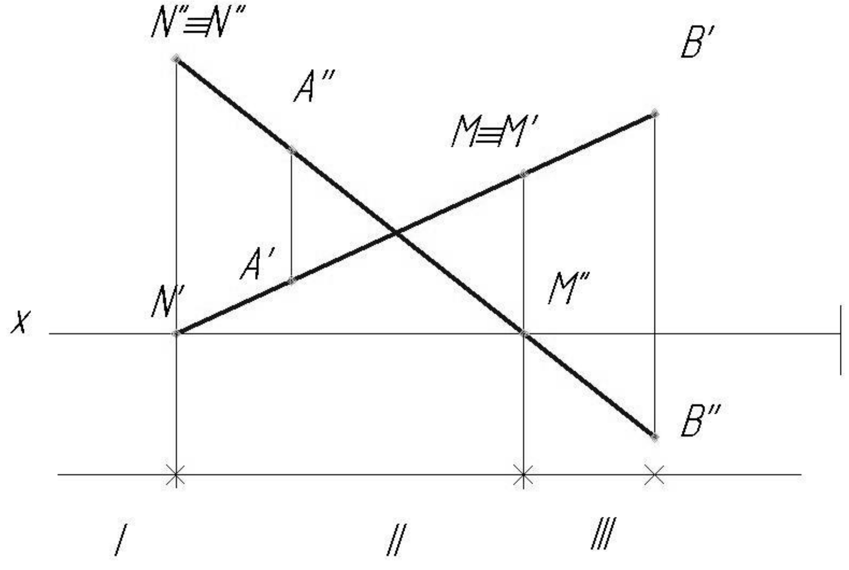


Рис.31

Взаимное положение прямых

Две прямые могут быть: пересекающимися, параллельными, скрещивающимися.

Две пересекающиеся прямые имеют общую точку. На эпюре, при пересечении одноименных проекций, есть общая точка (рис.32).

У *параллельных прямых а* и *b* одноименные проекции параллельны между собой (рис.33).

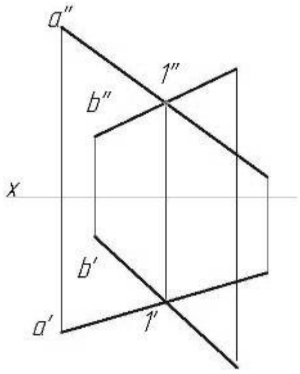


Рис.32

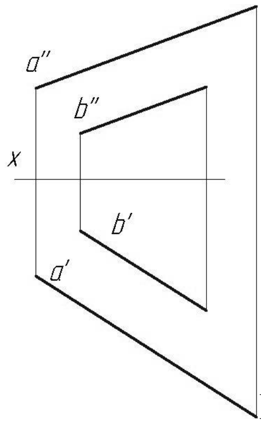


Рис.33

Скрещивающиеся прямые не имеют общей точки. На эпюре точки пересечения их одноименных проекций не лежат на одной линии проекционной связи (рис.34).

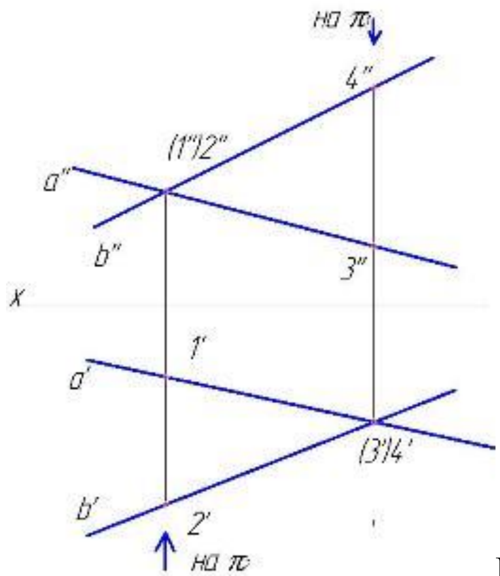


Рис.34

Две точки скрещивающихся прямых, лежащие на одном перпендикуляре к плоскостям проекций, называются конкурирующими. Конкурирующими точками в нашем примере являются 1, 2, 3, 4. Точки 1 и 3 принадлежат прямой *a*, а 2, 4 - прямой *b*. Точка 2 находится дальше от плоскости π_2. На фронтальной проекции 1" не увидим - она закрыта проекцией 2". На горизонтальной проекции не будет видна проекция 3', она ближе к плоскости π_1 и закрывается проекцией 4". Определение взаимного положения конкурирующих точек необходимо для установления видимости элементов изображаемого объекта.

Плоскость

Способы задания плоскости

Плоскость на эпюре можно задавать:

1. тремя точками, не лежащими на одной прямой;
2. прямой и точкой, не лежащей не прямой;
3. плоской фигурой;
4. двумя параллельными прямыми;
5. двумя пересекающимися прямыми;
6. следами (рис. 35).

Следы плоскости

Плоскость общего положения

На рис.36 плоскость α задается линиями ее пересечения с плоскостями проекций. Прямые, по которым плоскость α пересекается с плоскостями проекций, называют следами этой плоскости. Плоскость α имеет три следа: $h_{o\alpha}$ - горизонтальный след, $f_{o\alpha}$ - фронтальный след, $p_{o\alpha}$ - профильный след. Каждая пара следов пересекается на соответствующей оси проекций. Эти точки называются точками схода следов и обозначаются x_{α}, y_{α}, z_{α} . Отрезки Ox_{α}, Oy_{α} Oz_{α}, отсекаемые на осях проекций, называются параметрами плоскости. Эти параметры используются для перехода от наглядного изображения к эпюру.

На рис. 36 изображена плоскость общего положения, она не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций.

Плоскости частного положения

1.Плоскость, перпендикулярная к одной из плоскостей проекций:

Горизонтально-проецирующая плоскость $\alpha \perp \pi 1$.

На рис. 37 показано наглядное изображение и эпюр горизонтально-проецирующей плоскости, заданной следами. Горизонтальный след обладает собирающим свойством. Это значит, что горизонтальные проекции всех точек, принадлежащих этой плоскости, находятся на горизонтальном следе. Горизонтально-проецирующая плоскость, заданная треугольником, показана на рис.38.

На рис. 39 изображена *фронтально-проецирующая плоскость* $\alpha \perp \pi_2$.

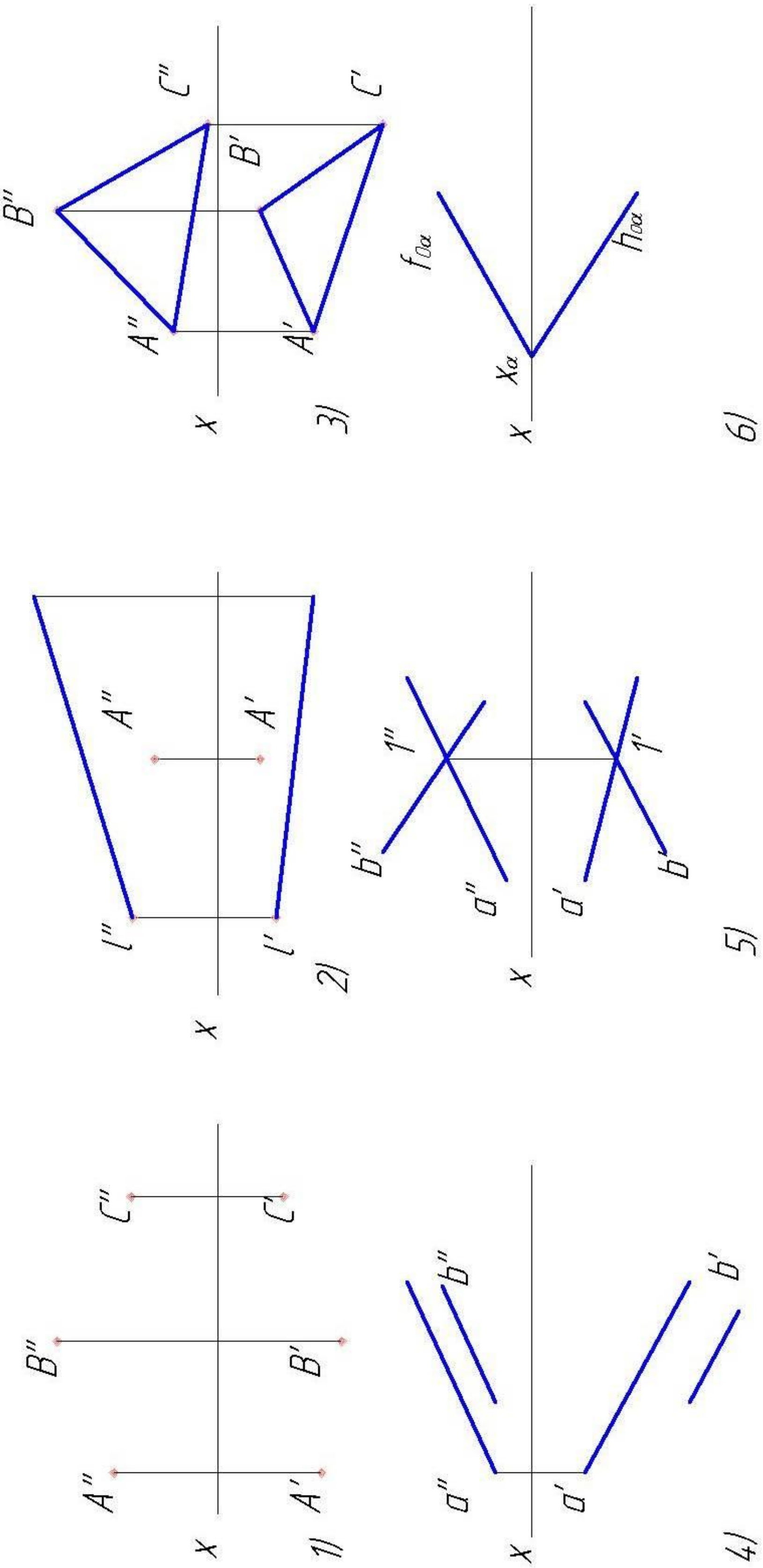

1)
x
A''
A'
B''
B'
C''
C'
2)
x
l''
l'
A''
A'
3)
x
A''
A'
B''
B'
C''
C'
4)
x
a''
a'
b''
b'
5)
x
b''
a''
a'
b'
1''
1'
6)
x
x_α
$f_{0\alpha}$
$h_{0\alpha}$

Рис.35

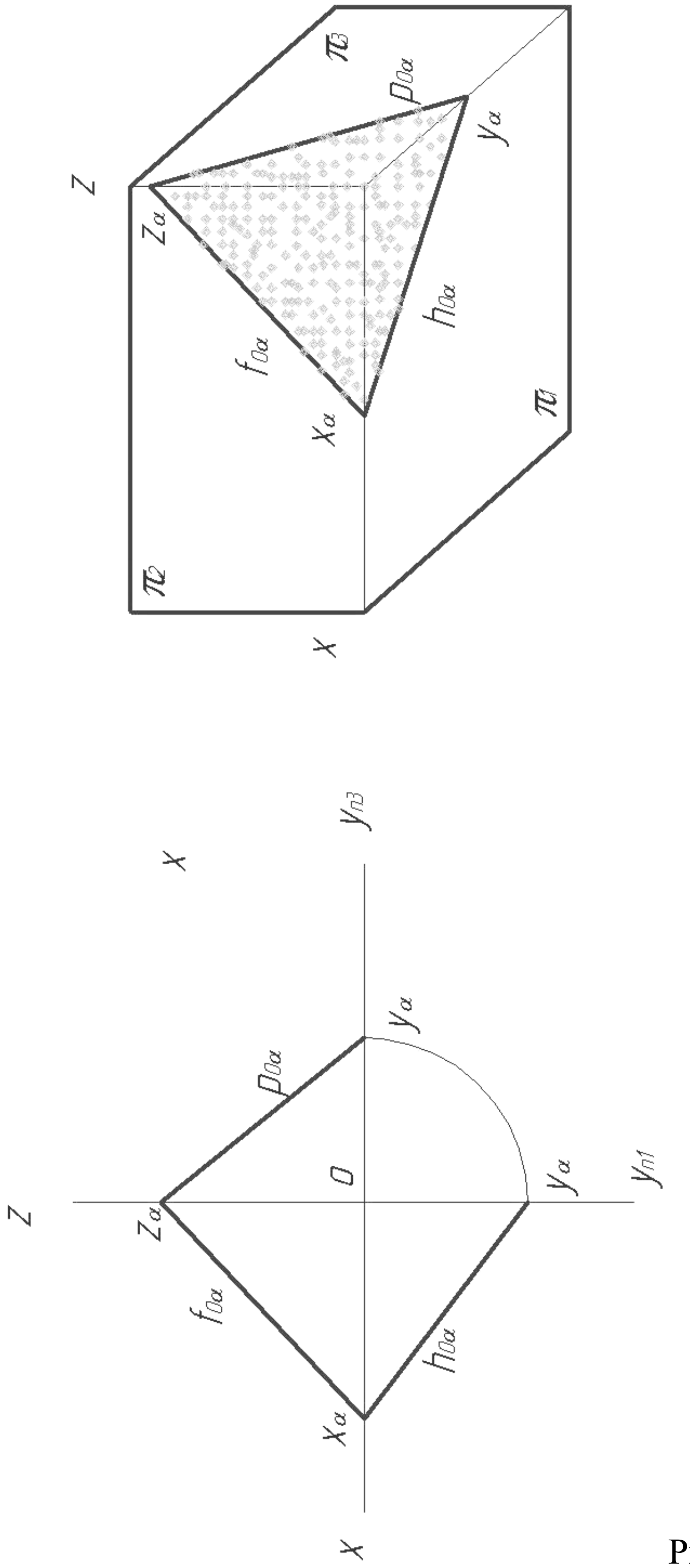

Z
π3
$p_{0\alpha}$
y_α
z_α
$h_{0\alpha}$
$f_{0\alpha}$
π1
x_α
π2
X
$y_{\pi 3}$
X
y_α
$p_{0\alpha}$
O
y_α
$y_{\pi 1}$
Z
z_α
$f_{0\alpha}$
$h_{0\alpha}$
x_α
X

Рис.36

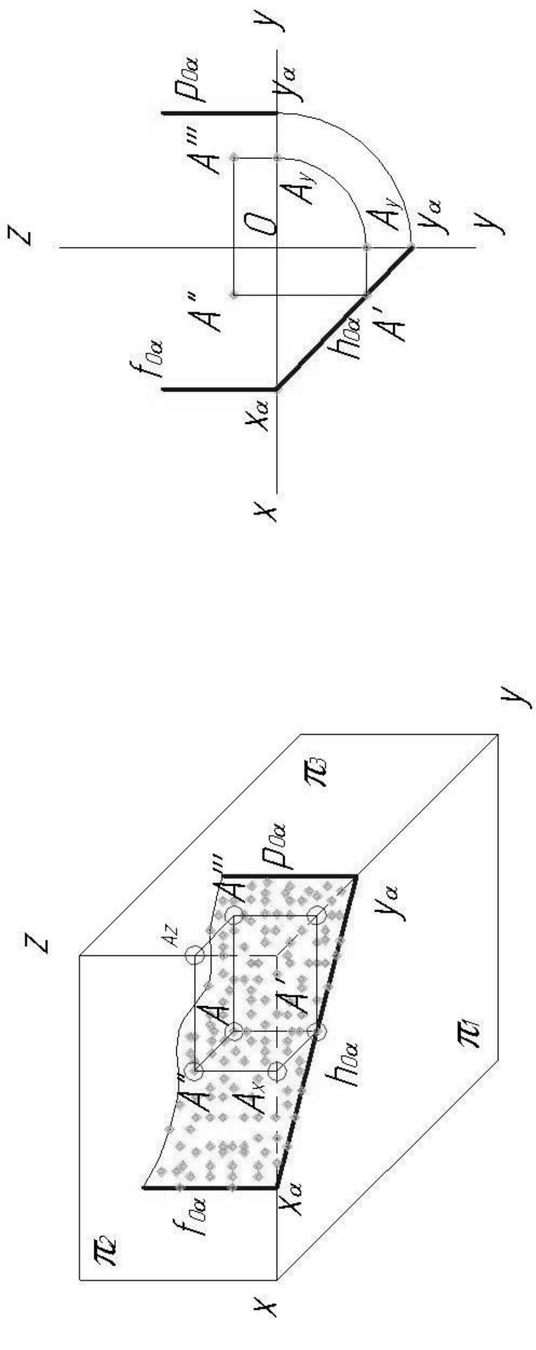


Рис.37

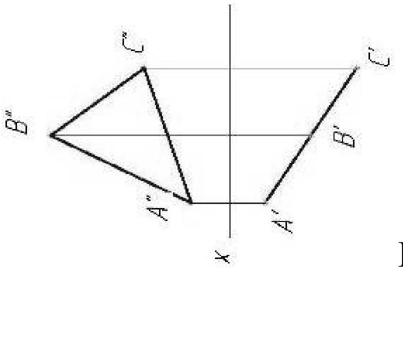


Рис.38

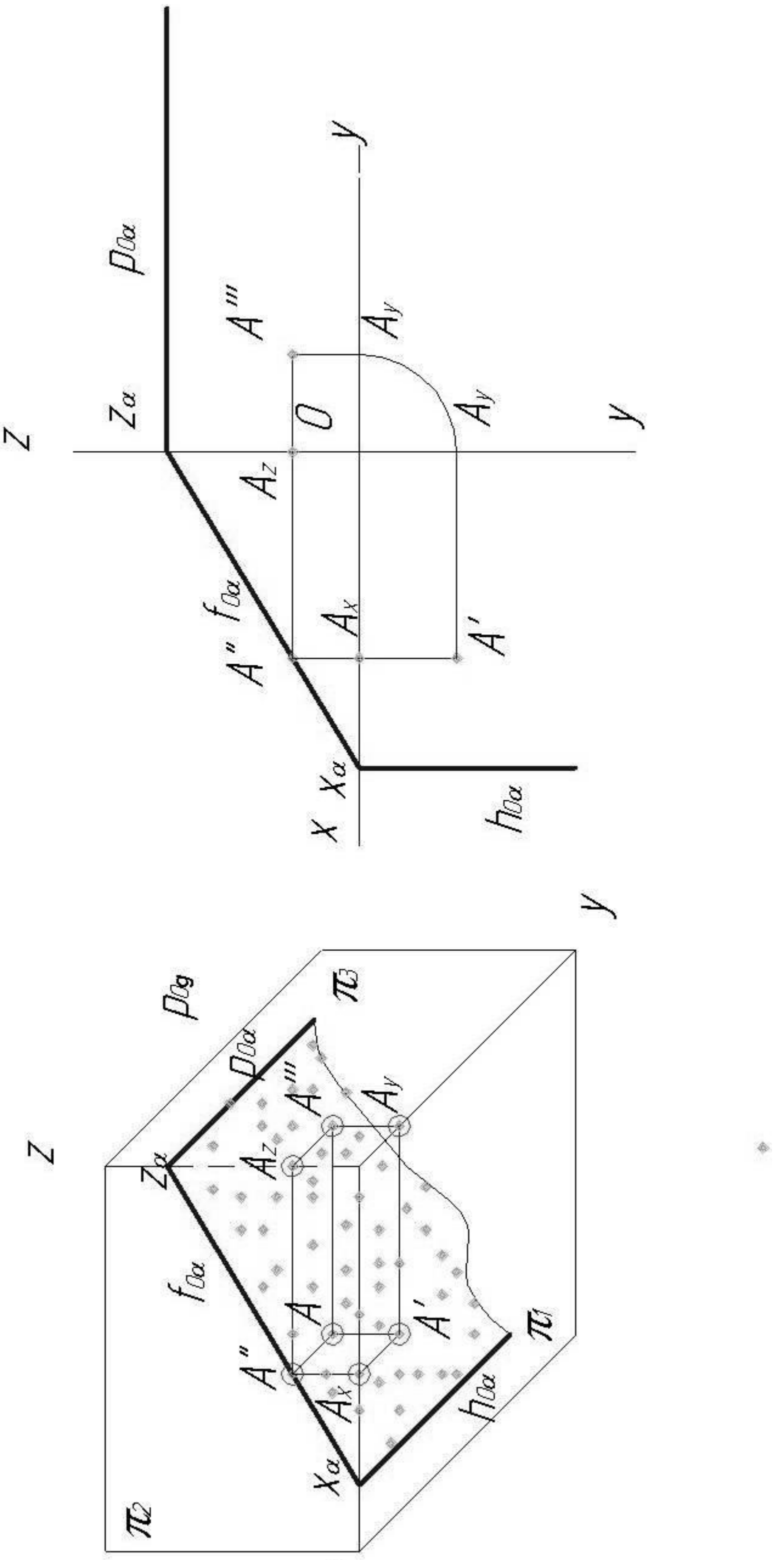


Рис.39

У *фронтально-проецирующей плоскости* собирающим является фронтальный след. Фронтально-проецирующая плоскость, заданная параллельными прямыми, показана на рис.40.

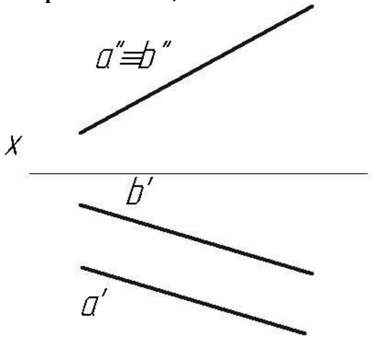


Рис.40

На рис 41 изображена *профильно-проецирующая плоскость*. Собирающим свойством обладает профильный след.

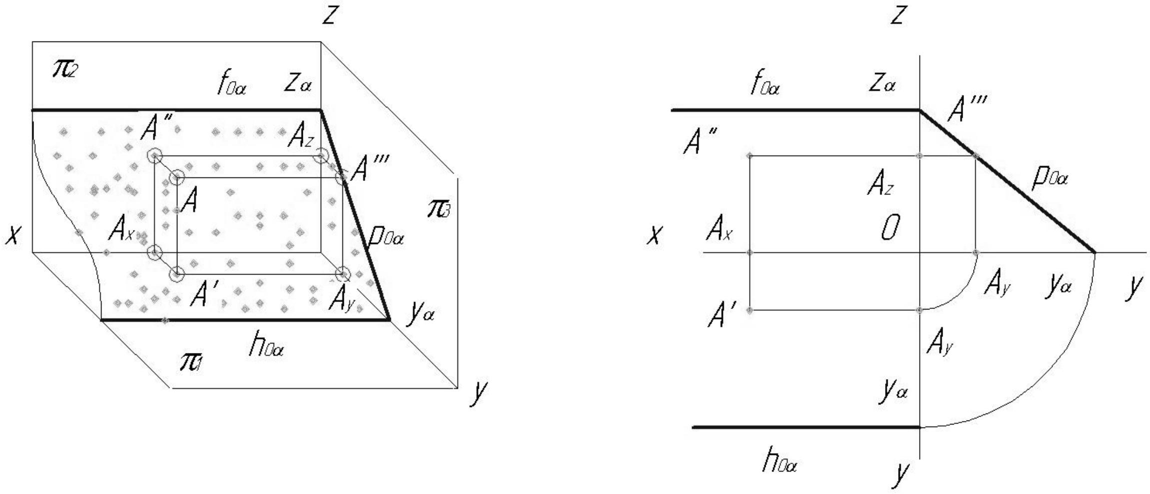


Рис.41

2. Плоскость параллельна одной из плоскостей проекций (плоскость уровня), а к двум другим плоскостям проекций перпендикулярна.

Горизонтальная плоскость (рис.42).

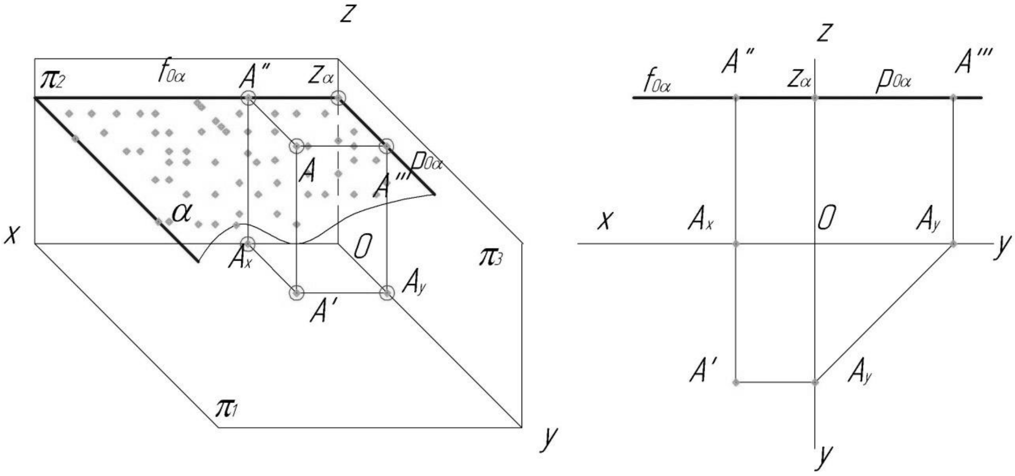


Рис.42

Фронтальная плоскость (рис.43)

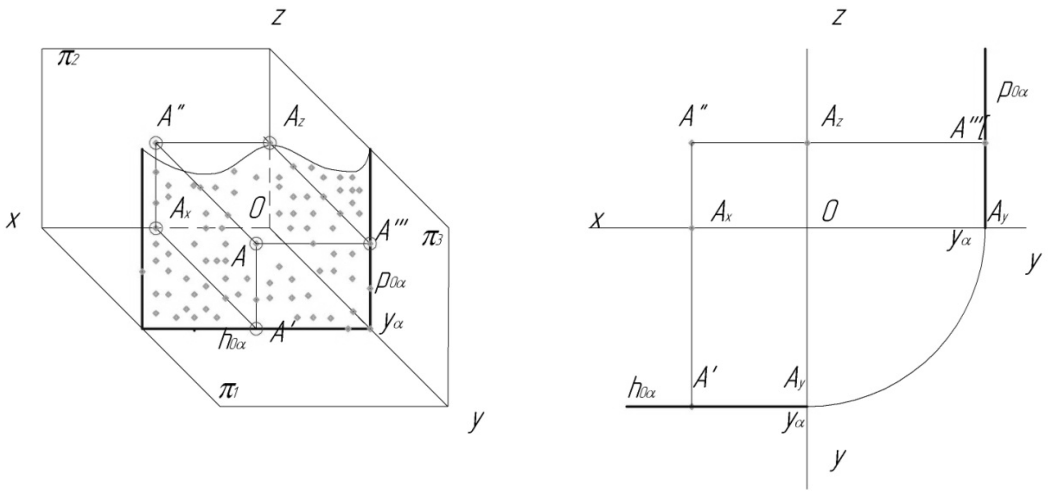


Рис.43

Профильная плоскость (рис.44)

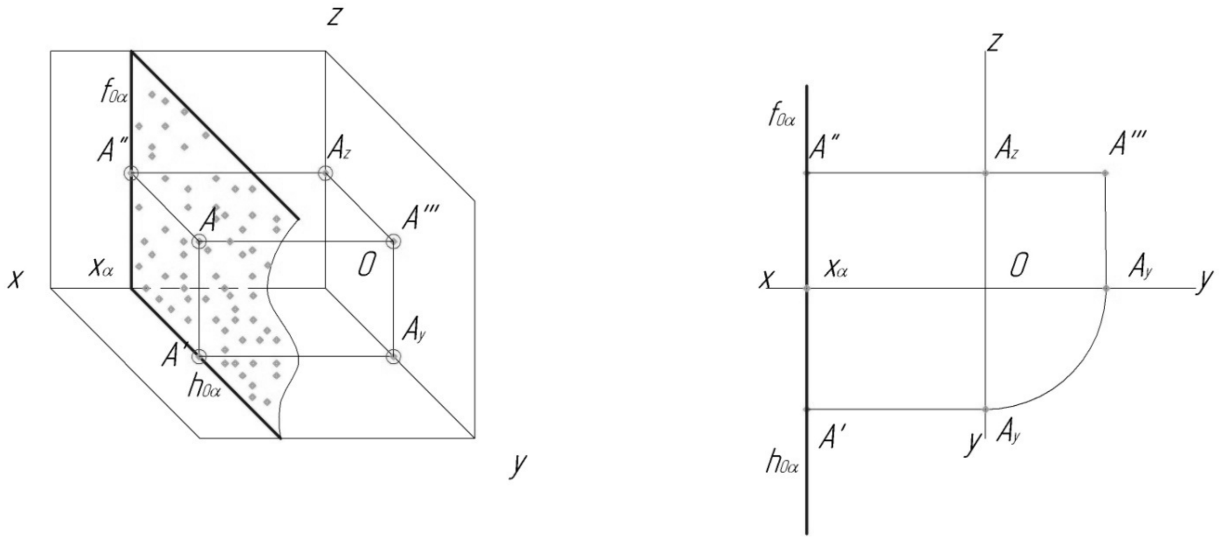


Рис.44

Прямая и точка в плоскости

1.Прямая принадлежит плоскости, если она имеет с ней две общие точки. Плоскость задана двумя пересекающимися прямыми. Прямая *m* принадлежит плоскости, т.к. имеет с ней две общие точки - *1* и *2* (рис.45).

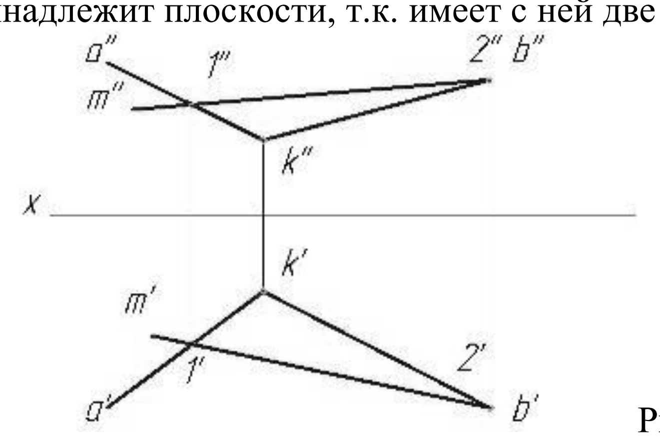


Рис.45

2.Если плоскость задана следами, то прямая, лежащая в этой плоскости, имеет следы на одноименных следах плоскости (рис.46). Прямая *a* лежит в этой плоскости.

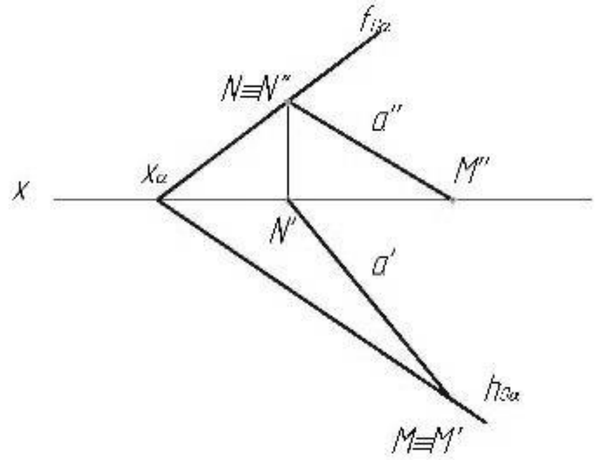


Рис.46

Точка принадлежит плоскости, если она расположена на прямой, лежащей в этой плоскости.

На рис.47 точка *A* лежит в плоскости α, т.к. она лежит на прямой этой плоскости (горизонтали).

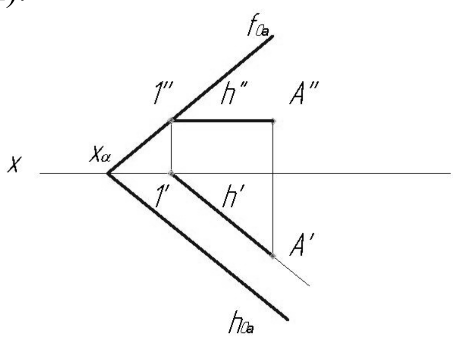


Рис.47

На рис.48 точка *C* лежит в плоскости, заданной двумя параллельными прямыми.

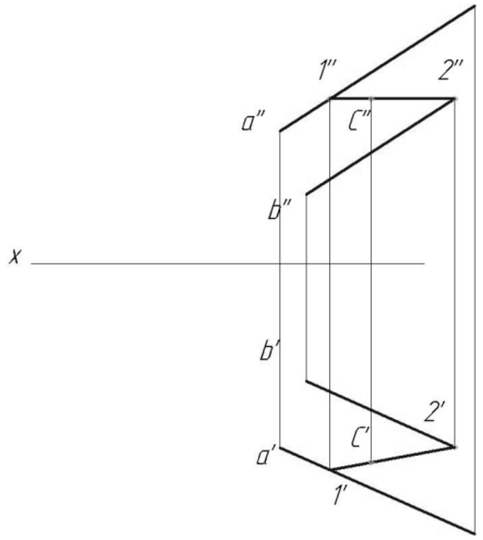


Рис.48

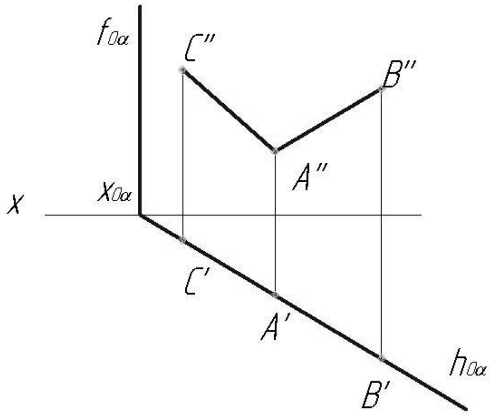


Рис.49.

У плоскостей проецирующих, один из следов обладает собирательным свойством. Для примера приводим плоскость горизонтально-проецирующую. Горизонтальный след обладает собирательным свойством (рис.49).

Особое положение прямых в плоскости

Особое положение в плоскости занимают линии:

а) горизонтали – линии, лежащие в плоскости и одновременно параллельные плоскости π1 (рис. 50,51,52).

б) фронтали - линии, лежащие в плоскости и параллельные π2 (рис 53, 54,55).

в) профильные прямые - прямые, лежащие в плоскости и параллельные π3.

г) линии наибольшего наклона к плоскостям π1, π2, π3.

Профильные прямые в плоскостях в нашем курсе не рассматриваются.

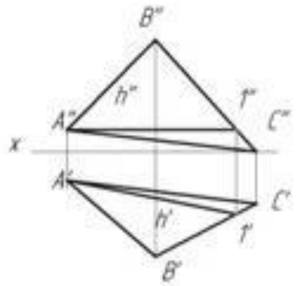


Рис. 50

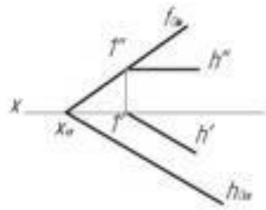


Рис.51

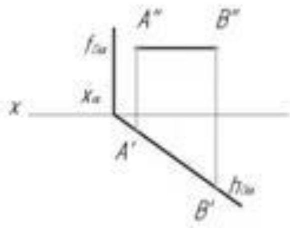


Рис.52

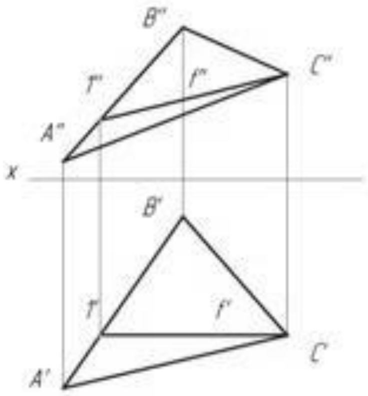


Рис.53

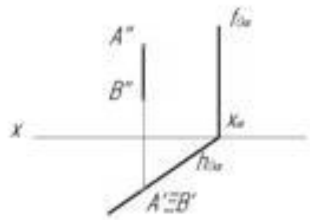


Рис.54

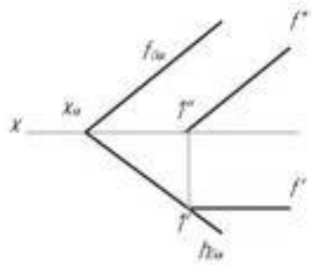


Рис.55

Пример 1. Построить фронтальную проекцию треугольника *ABC*, принадлежащего плоскости α (рис.56).

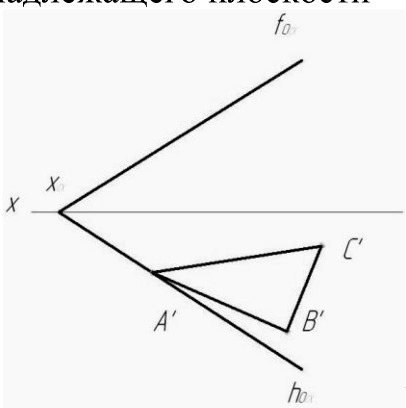


Рис.56

Ход решения:

1.Построим фронтальную проекцию точки *A''*. Если горизонтальная проекция точки *A'* принадлежит горизонтальному следу *ho*, то фронтальная проекция *A''* находится на оси *x*, т.к. фронтальная проекция горизонтального следа совпадает с осью *x* (рис. 57).

2. Построим фронтальную проекцию *C''*. Для этого через горизонтальную проекцию *C'* проведем горизонтальную проекцию фронтали *f'* параллельно оси *x,* построим ее фронтальную проекцию *f''* и отметим на ней фронтальную проекцию *C''*.

3. Аналогично строим фронтальную проекцию *B''*.

4. Соединим $A''B''C''$ и получим недостающую фронтальную проекцию треугольника ABC.

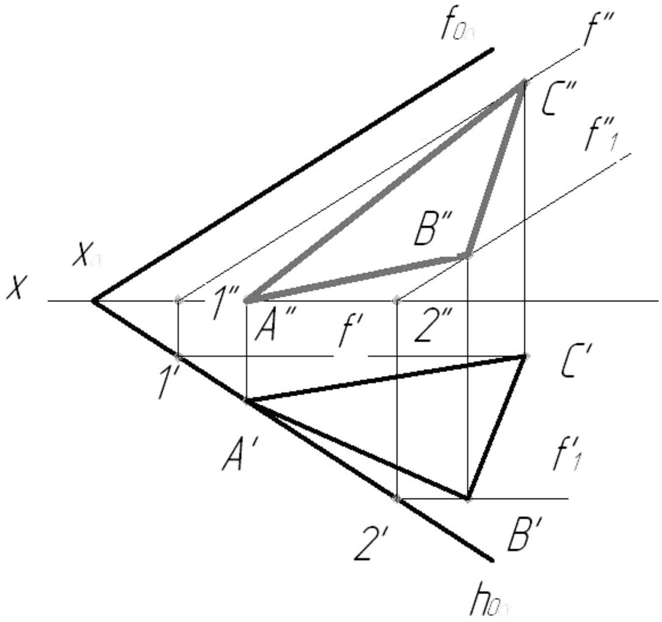


Рис.57

Линия наибольшего ската

Линией наибольшего ската называется прямая, перпендикулярная любой горизонтали плоскости. Л.Н.С. применяется для определения угла наклона плоскости к плоскости проекций π_1 - α (рис.58, 59). *AB*-линия наибольшего ската. $A'B' \perp h_{0\alpha}$ α- угол наклона AB к π_1, это угол между горизонтальной проекцией и натуральной величиной отрезка AB.

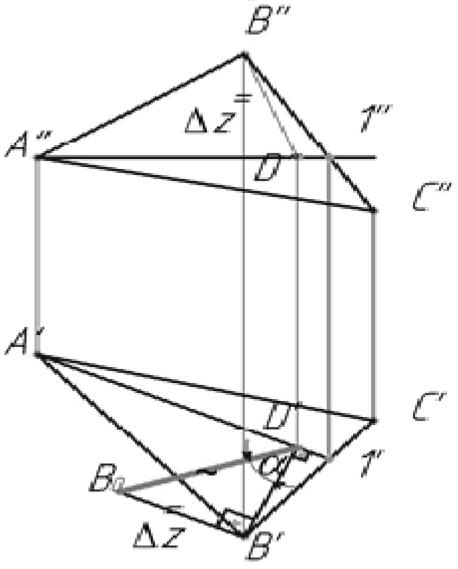


Рис.58

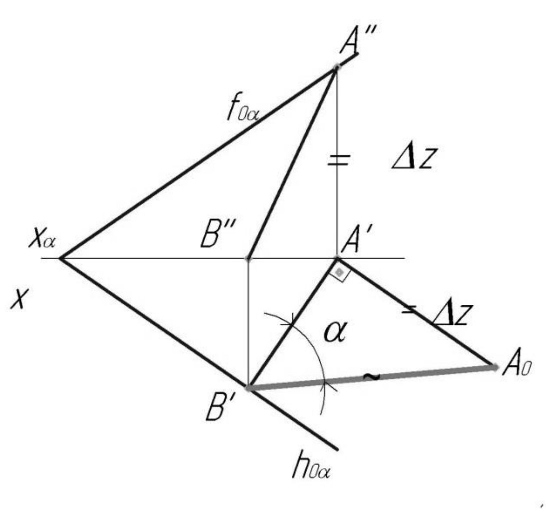


Рис.59

Определяем истинную величину отрезка *AB*. На горизонтальной проекции строим прямоугольный треугольник с катетами *A'B'* и Δz. Угол α между истинной величиной и горизонтальной проекцией отрезка *AB* есть угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций.

На рис.58 построена Л.Н.С. *BD*.

В Δ *ABC* провели горизонталь А1 и из любой точки плоскости (в примере (·)*B* провели Л.Н.С. *BD(B'D'* ⊥ *A'1')*. Угол α - это угол наклона треугольника *ABC* к горизонтальной плоскости проекций.

Построение линии пересечения двух плоскостей

Две плоскости всегда пересекаются по прямой. Для построения линии пересечения достаточно найти две точки этой линии или одну точку и направление этой прямой. Рассмотрим несколько случаев пересечения плоскостей.

Пример 1. Две плоскости α и γ пересекаются по прямой *MN* (рис.60) в пределах чертежа.

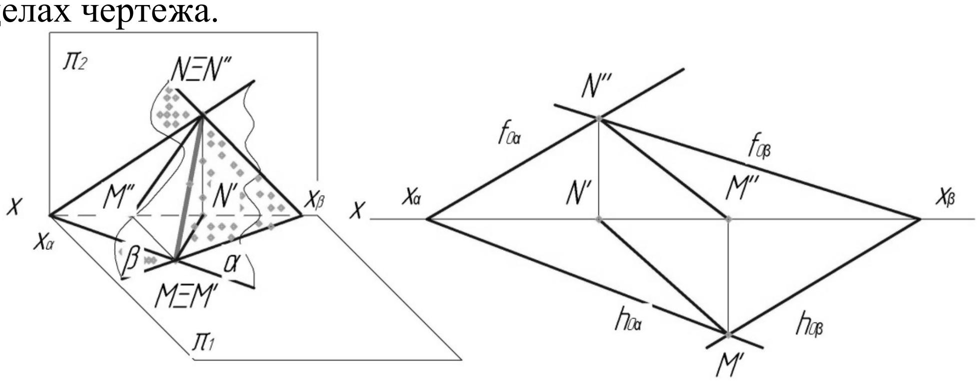
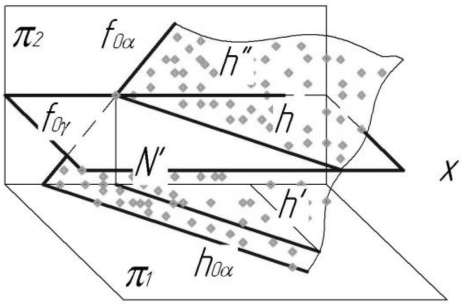


Рис.60

(•) M (M$_1$*, M'') и (•) N (N*$_1$*, N'')* есть точки пересечения одноименных следов (рис.60).

Пример 2. Пересечение двух плоскостей происходит по горизонтали (или фронтали).

На рис.61, 62 фронтальная проекция лини пересечения совпадает со следом $f_{0\gamma}$, а горизонтальная легко находится как горизонтальная проекция горизонтали в этой плоскости.



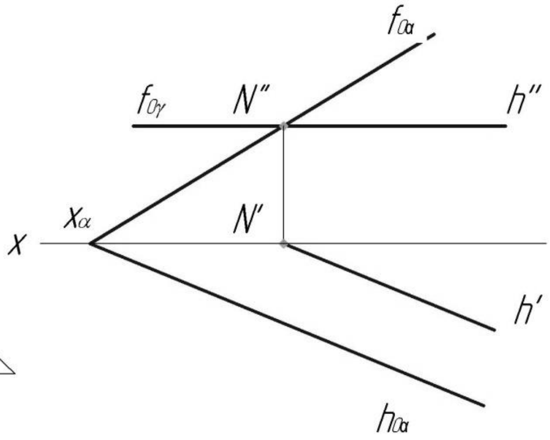


Рис.61 Рис.62

Пример 3. В пределах чертежа пересекаются только два горизонтальных следа заданных плоскостей α и β(рис63).

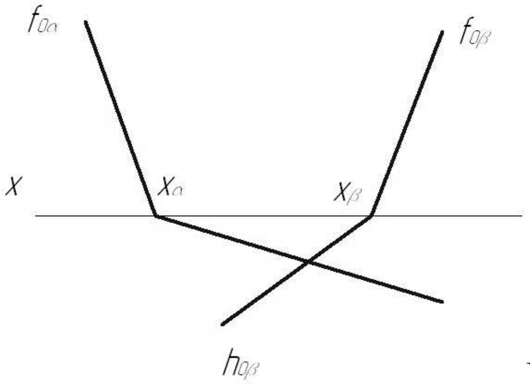


Рис.63

Точку *M* находим в пересечении горизонтальных следов. Для нахождения точки *N* возьмем дополнительную вспомогательную горизонтальную плоскость γ. Эта секущая плоскость будет пересекать плоскости α и β по горизонталям. Горизонтальные проекции этих горизонталей в пересечении дадут вторую точку линии пересечения плоскостей α и β - точку *N* (рис.64).

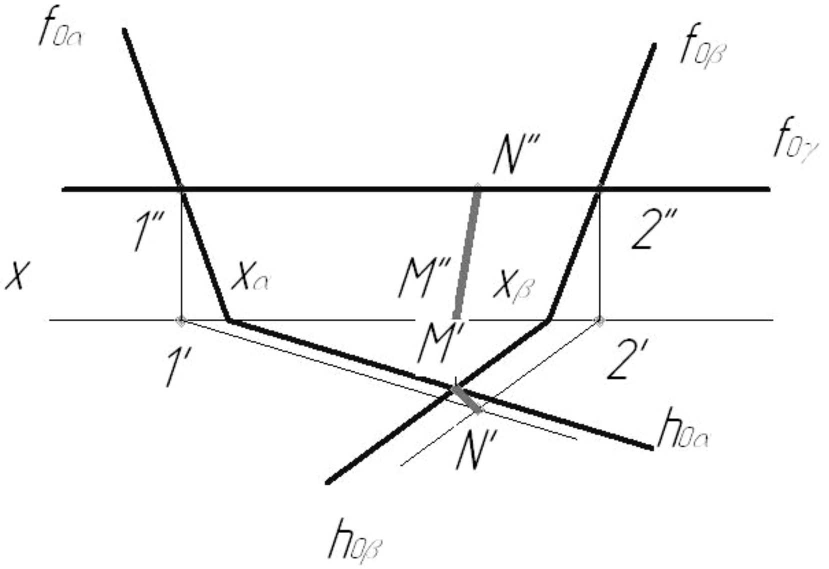


Рис.64

Пример 4. Одна плоскость задана следами общего положения, вторая плоскость задана двумя пересекающимися прямыми общего положения (рис.65).

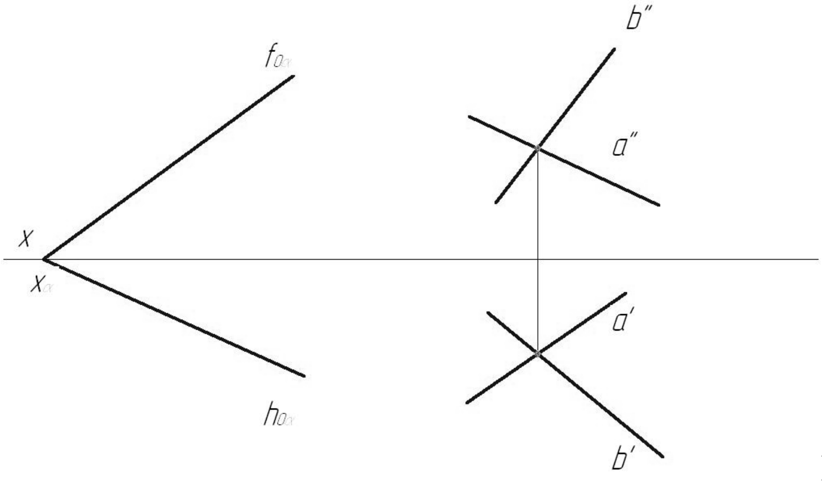


Рис.65

1. Проведем вспомогательную плоскость частного положения, например, плоскость горизонтального уровня $\beta \parallel \pi_1$ ($f_{o\beta} \parallel x$) (рис. 66).

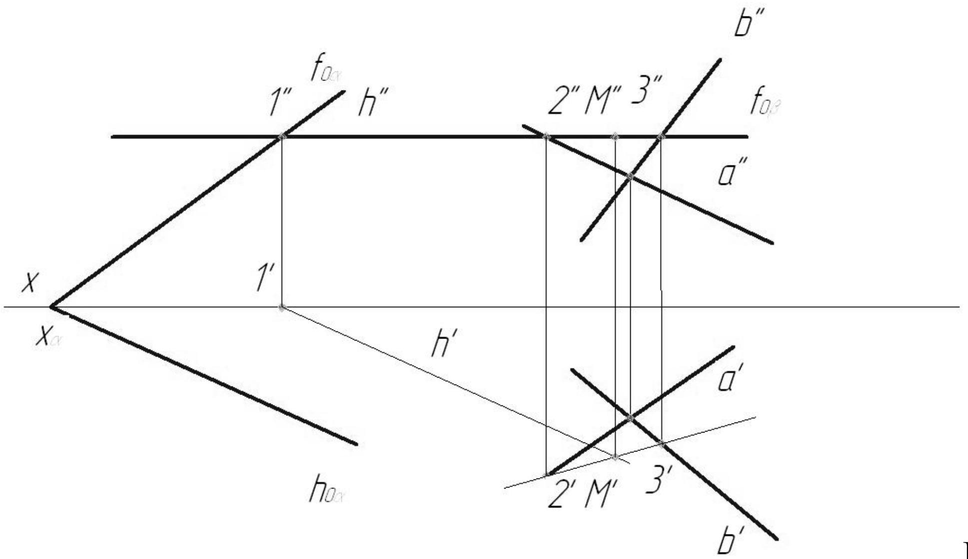


Рис.66

2. Плоскость β пересечет плоскость α по горизонтали *h*. $h''\in f_{o\beta}, h'\parallel h_{o\alpha}$..

3. Плоскость β пересечет плоскость ($a\cap b$) по прямой (2-3).

4. Прямые *h* и *2-3* пересекаются в точке *M (M' и M'')*, где $M'=h'\cap(2'\text{-}3')$, а $M''\in f_{o\beta}$.

5. Для построения второй общей точки проведем еще одну вспомогательную плоскость $\gamma \parallel \pi 1$ ($fo\gamma \parallel x$) (рис.67).

6. Плоскость γ пересечет плоскость α по горизонтали *h1*: $h1''\in f_{o\gamma}$, $h1'\parallel h_{o\alpha}$.

7. Плоскость γ пересечет плоскость ($a\cap b$) по прямой (*5-6*).

8. Прямые *h1 и 5-6* пересекутся в точке *M (M'' и M')*, где $M'=(5'\text{-}6')\cap h1'$, $M''\in f_{o\gamma}$.

9. Соединим одноименные проекции точек *M* и *N* и получим проекции линии пересечения *(M'N')* и *(M''N'')*.

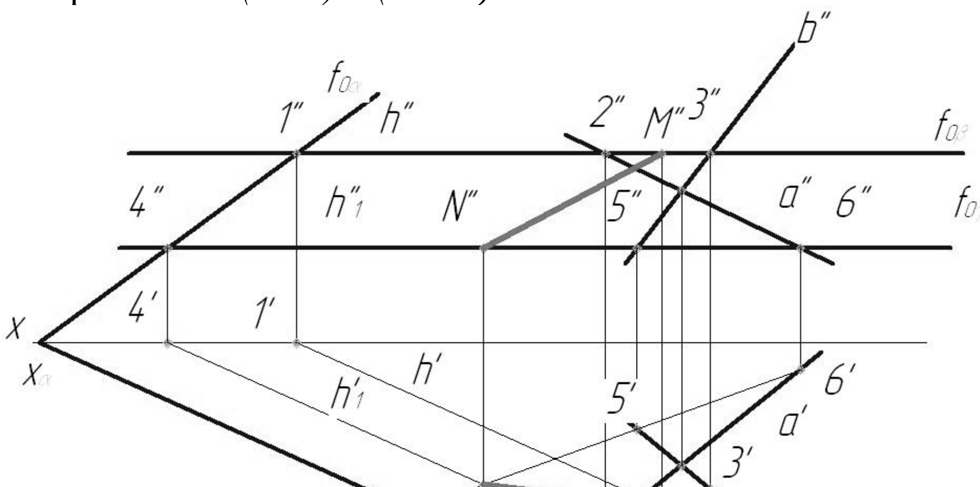


Рис.67

Пример 5. Плоскость ΔABC частного положения ($\Delta ABC \perp \pi_1$), плоскость ΔMNK – общего положения (рис.68).

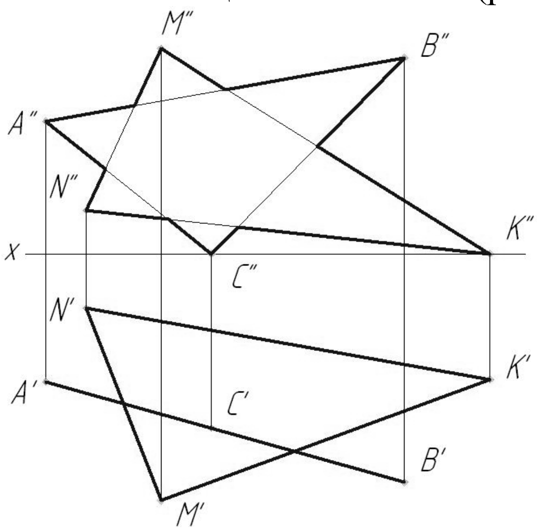


Рис.68

Поскольку $\Delta ABC \perp \pi_1$, горизонтальная проекция $\Delta A'B'C'$ обладает собирающими свойствами, т.е. горизонтальная проекция линии пересечения лежит на горизонтальной проекции $\Delta A'B'C'$.

1. Отметим общие горизонтальные проекции Q' и T' на пересечении горизонтальных проекций треугольников ABC и MNK (рис.69).

2. Фронтальные проекции Q'' и T'' ищем на линиях проекционной связи в $\Delta M''N''K''$.

3. Линия пересечения QT определена QT *($Q''T''$ и $Q'T'$)*.

4. Определим видимость плоских фигур, т.к. плоскости считаются непрозрачными. Видимость горизонтальной проекции фигур определять не надо, т.к. ΔABC проецируется в прямую линию, проекция $M'N'K'$ видима. Определим видимость плоских фигур относительно плоскости проекций π_2. Для этого рассмотрим конкурирующие точки *1* и *2*, лежащие на скрещивающихся прямых BC и MK. Фронтальные проекции *1''* и *2''* совпадают, а горизонтальная проекция *2'* находится перед горизонтальной проекцией *1'*. Точка *1''* невидима относительно плоскости проекций π_2. Далее рассуждаем так: точка *2* лежит на ΔABC, следовательно, фронтальная проекция ΔA"B"C" видима на π_2 с той стороны, где находятся точки *1''* и *2''*. После фронтальной проекции линии пересечения Q'' и T'' видимость $\Delta A''B''C''$ меняется на противоположную, т.е. он становится невидимым (рис.69).

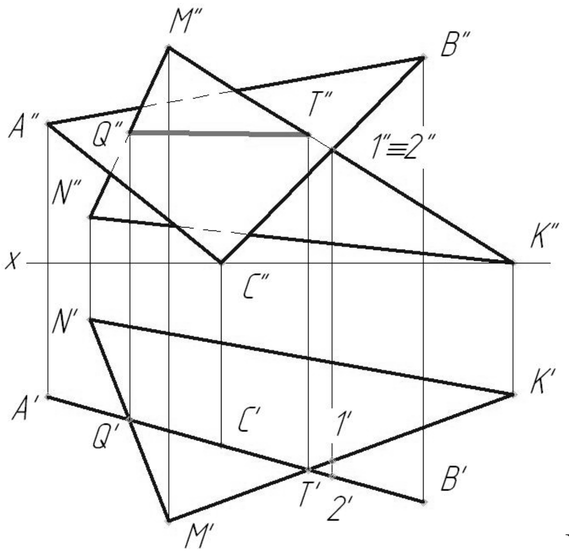


Рис.69

Определение точки пересечения прямой с плоскостью

Для определения точки пересечения прямой с плоскостью пользуемся следующим алгоритмом: прямую заключаем во вспомогательную плоскость, находим линию пересечения этих двух плоскостей (заданной и вспомогательной), и линия пересечения плоскостей в пересечении с заданной прямой даст искомую точку. Последним этапом в построении является определение видимости прямой при помощи конкурирующих точек.

Пример1. Плоскость задана следами (рис.70)

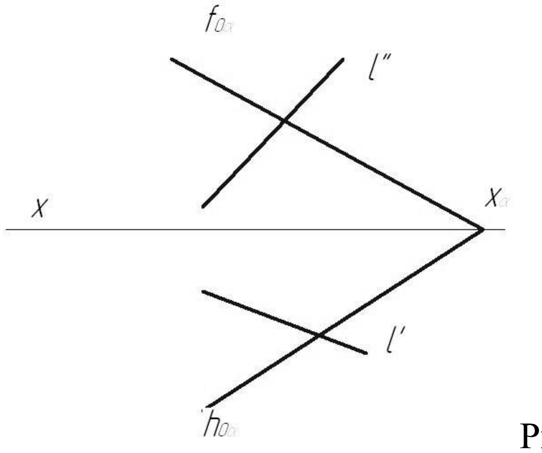


Рис.70

1. Для построения точки пересечения прямой l с плоскостью необходимо через прямую провести вспомогательную плоскость частного положения, например, фронтально-проецирующую $\beta \perp \pi_2$, $l'' \in f_{o\beta}$, $f_{o\beta}$ – собирающий след, $h_{o\beta} \perp x$ (рис.71).

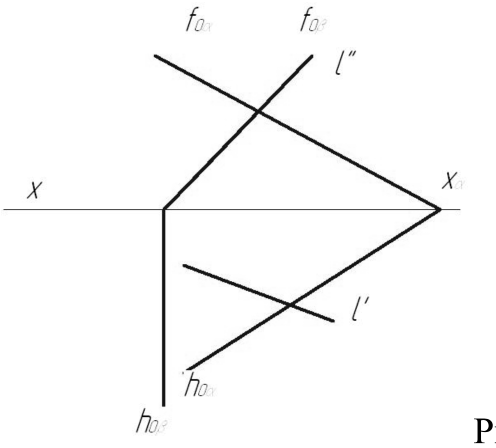


Рис.71

2. Строим линию пересечения *MN* заданной и вспомогательной плоскости $M'=h_{o\alpha}\cap h_{o\beta}$, $N''=f_{o\beta}\cap f_{o\alpha}$ (рис.72).

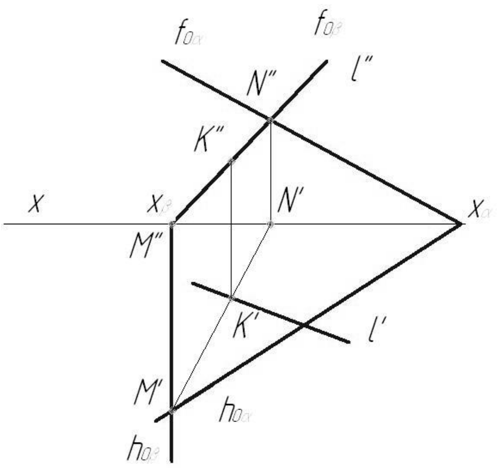


Рис.72

3. Определяем точку пересечения *K* заданной прямой *l* с линией пересечения *MN*. $K'=M'N'\cap l'$, K'' – в пересечении линии проекционной связи, проведенной из *K' и l ''*.

4. Видимость прямой *l* в случае задания плоскости следами не определяем.

Пример 2. Пересечение прямой с проецирующей плоскостью (рис.73).

При построении точки пересечения прямой с проецирующей плоскостью задача упрощается, т.к. одна из проекций искомой точки будет лежать на собирающем следе. На рис.73 дана горизонтально-проецирующая плоскость. Искомая точка *К* будет одновременно принадлежать плоскости α и прямой *a*.

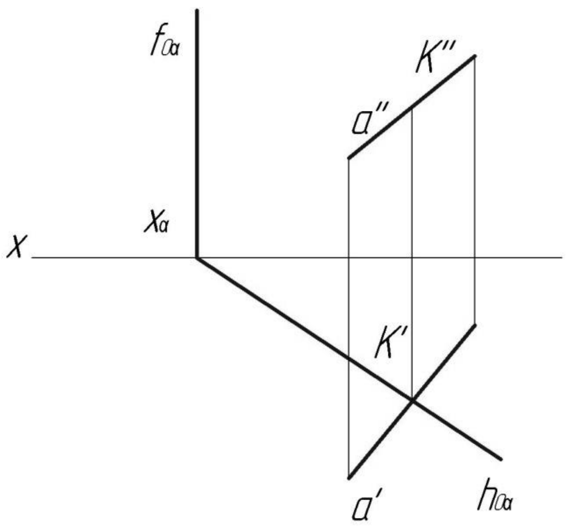


Рис.73

Пример 3**.** Плоскость задана плоской фигурой (рис.74).

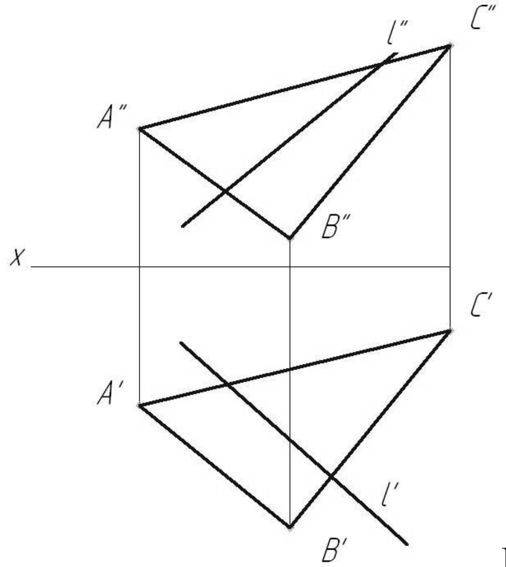


Рис.74

Через прямую l проводим вспомогательную плоскость частного положения, например, горизонтально-проецирующую $\beta \perp \pi_1 . l' \in h_{o\beta}$, $h_{o\beta}$ – собирающий след, $f_{o\beta} \perp x$ (рис.75).

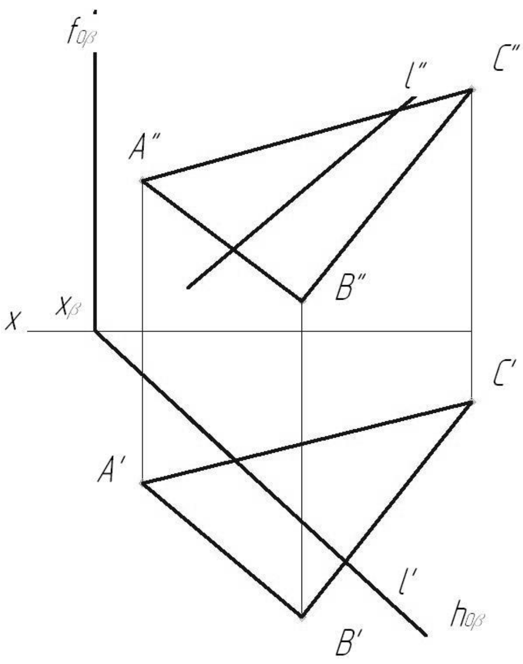


Рис.75

2. Строим линию пересечения *MN* заданной и вспомогательной плоскостей. $M'=A'C' \cap h\alpha\beta$ $M'' \in A''C''$ и $N'=B'C' \cap h\alpha\beta$ $N'' \in B''C''$ (рис. 76).

3. Строим точку пересечения *K* заданной прямой *l* с линией пересечения *MN*. $K''= M''N'' \cap l''$. *K'* находится в пересечении линии проекционной связи, проведенной из *K''* и *M'N'*.

4. Определяем видимость прямой относительно ΔABC с помощью конкурирующих точек.

Определяем видимость относительно плоскости π_2 .Отметим фронтальную проекцию *1''* совпадающую с *2''*. Горизонтальную проекцию *2'* отметим на *A'C'*, а *1'* на *l'*. Горизонтальная проекция *1'* лежит перед *2'*, следовательно, фронтальная проекция *2''* не видима относительно π_2. Точка *1* лежит на прямой l, она видима на π_2, следовательно, фронтальная проекция *l''* от 1"2" до *K''* видима, в точке *K''* видимость меняется на противоположную.

Определим видимость прямой *l* относительно плоскости π_1. Отметим горизонтальную проекцию *3'*, совпадающую с горизонтальной проекцией *M'*. $M'' \in A''C''$ уже отмечена, $3'' \in l''$. Фронтальная проекция *M''* лежит выше фронтальной проекции *3''*, следовательно, точка *M* видима относительно π_1. Точка *3* лежит на *l*, следовательно, от $M' \equiv 3'$ до *K'*, горизонтальная проекция *l'* невидима. В горизонтальной проекции *K'* видимость меняется на противоположную. За границами ΔABC прямая *l* везде видима.

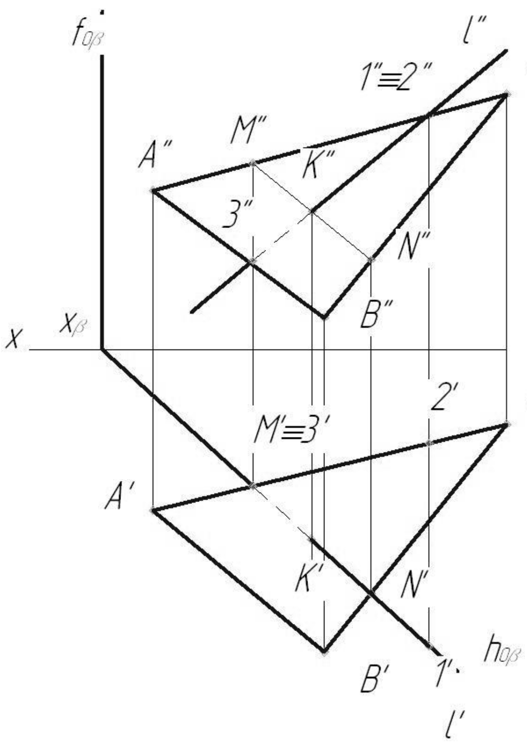


Рис.76

Взаимное расположение прямых линий и плоскостей

Прямые и плоскости могут быть параллельны или перпендикулярны друг другу.

Параллельность прямой и плоскости.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой, лежащей в этой плоскости.

Плоскость задана ΔABC. Через $(\cdot)D$ провели прямую l . Прямая $l \parallel BC$ (рис.77).

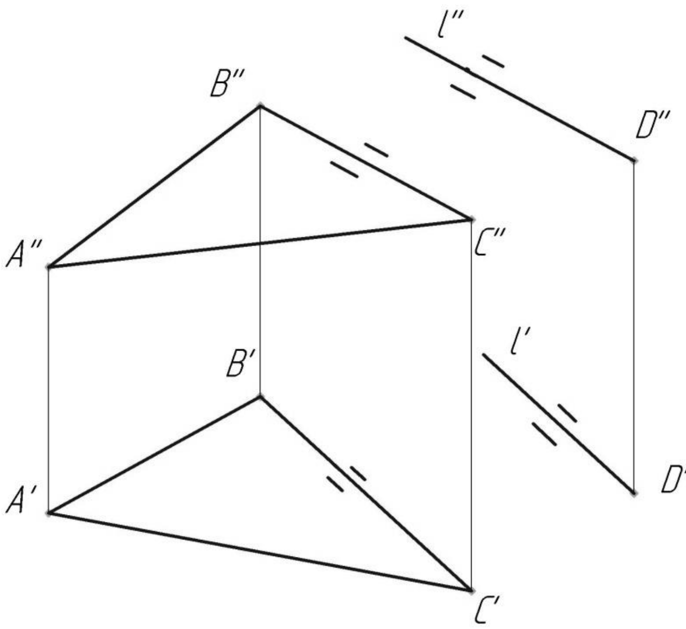


Рис.77

Параллельность плоскостей

Две плоскости параллельны между собой, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Плоскость задана двумя параллельными прямыми a и b. В этой плоскости проведем прямую *12*.

Через (·)*K* проведем две пересекающиеся прямые l и n. Прямая $a \parallel l$, прямая $12 \parallel n$. Эти две плоскости параллельны (рис.78).

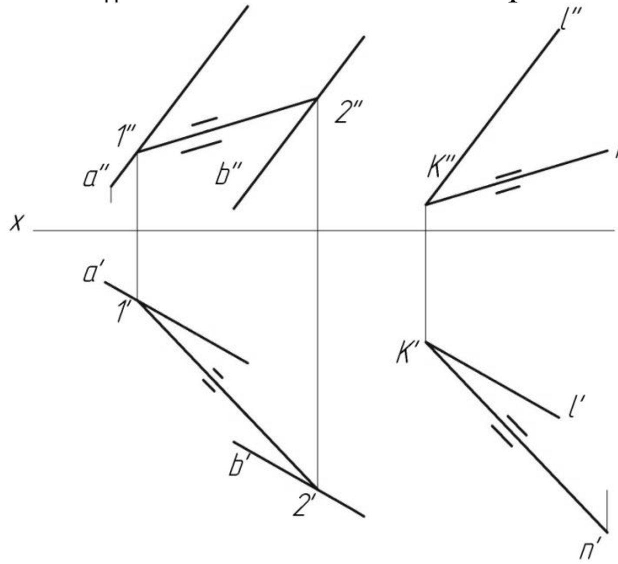


Рис.78

Перпендикулярность прямой и плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. А так как прямой угол, у которого одна из сторон параллельна плоскости проекций, проецируется ортогонально на эту плоскость в прямой угол, то, следовательно, горизонтальная проекция перпендикуляра к плоскости перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция - к фронтальной проекции фронтали.

На рис.79 показано построение прямой, проведенной из точки D (D', D'') перпендикулярно плоскости ΔABC. Прямая l перпендикулярна плоскости α, если $l' \perp h'(h_{0\alpha})$, $l'' \perp f''(f_{0\alpha})$.

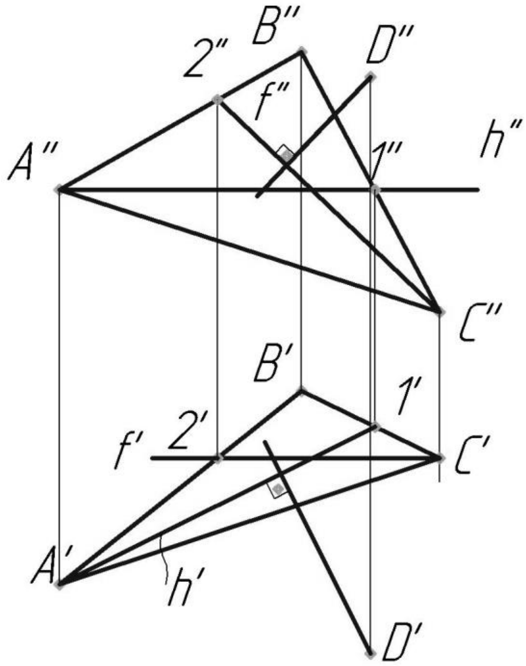


Рис.79

На рис.80 показано построение ⊥ из (•) D к плоскости, заданной следами.

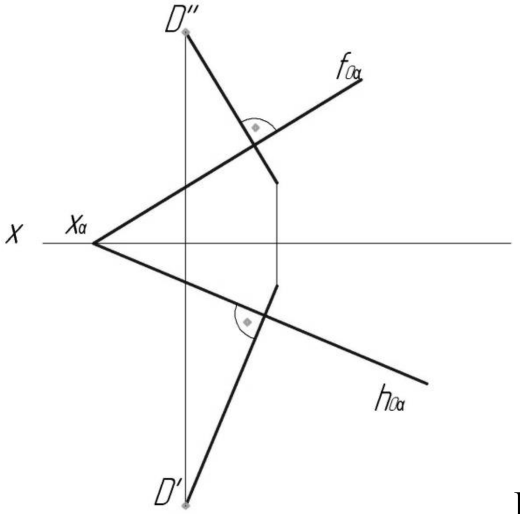


Рис.80

Позиционные задачи на взаимное расположение прямых и плоскостей

По своему характеру задачи в начертательной геометрии подразделяются на два типа: позиционные и метрические.

Позиционные задачи определяют взаимное расположение элементов. К таким задачам относятся задачи на нахождение точки пересечения прямой с плоскостью, пересечение плоскостей, параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости, параллельность и перпендикулярность плоскостей.

Метрические задачи - задачи на определение размеров и натуральных величин.

Чаще всего встречаются смешанные задачи. В этих задачах нужно позиционно найти нужный элемент и определить его размер. Приведем примеры решения таких задач.

Задача 1. Определить расстояние от точки D до плоскости ΔABC (рис.81).

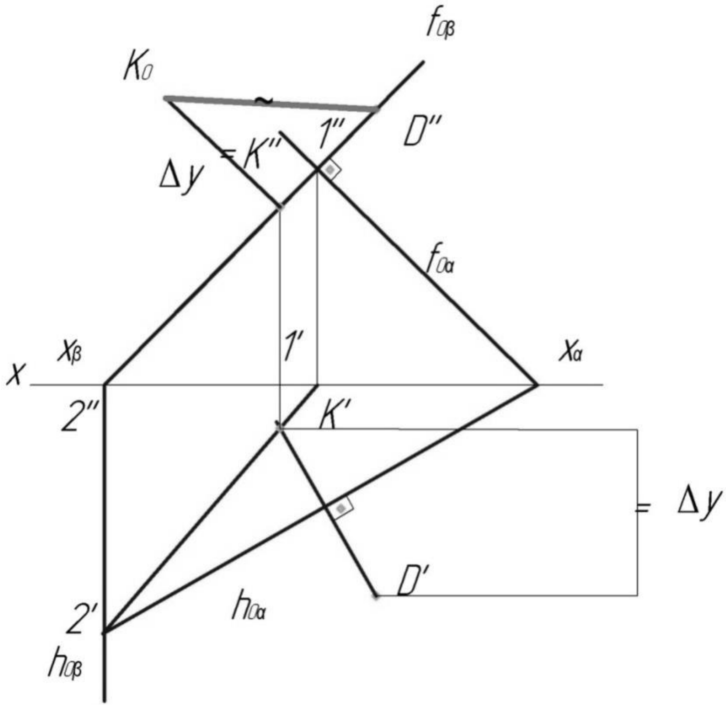


Рис.81

Из $(\cdot)D$ проводим к плоскости $\Delta ABC \perp DK$. Для этого проводим горизонталь C_1 и фронталь A_2.

$D'K' \perp C'1'$

$D''K'' \perp A''2''$

2. Определим точку встречи $\perp$ с плоскостью ΔABC - $(\cdot)K$

Перпендикуляр DK заключаем в горизонтально-проецирующую плоскость α, $h_{o\alpha}$ – горизонтальный собирательный след. Плоскости ABC и α пересекаются по прямой *3-4*. Точка K является точкой пересечения $\perp$ с плоскостью.

3.Решаем метрическую задачу: определяем расстояние DK методом прямоугольного треугольника.

Задача 2. Определение расстояния от $(\cdot)D$ до плоскости α заданной следами (рис.82).

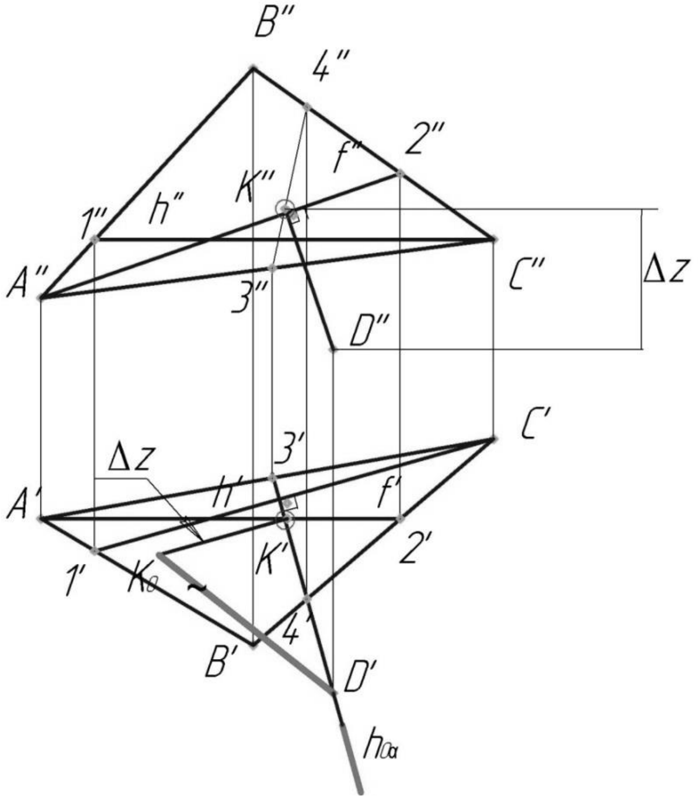


Рис.82

Строим проекции ⊥*DK*.

D"K"⊥fOa;

D'K'⊥hOa

2.Точка *К* - точка встречи ⊥ с плоскостью α.

Для ее нахождения заключаем *DK* во фронтально-проецирующую плоскость β. Плоскости α и β пересекаются по прямой *1-2*. При пересечении *1-2* с ⊥*DK* получаем(·)*К*.

3. *DK* - расстояние от точки *D* до плоскости α. Истинная величина *DK* определяется методом прямоугольного треугольника.

Способы преобразования чертежа

Решение многих метрических и позиционных задач значительно упрощается, если изменить положение проецируемого объекта и плоскости проекций. Способы преобразования применяются для определения истинных величин отрезков прямых, плоских фигур и ряда других случаев.

Способ вращения. При этом методе предмет вращается относительно некоторых осей, занимая выгодное положение для решения задачи.

Способ перемены плоскостей проекций. При этом методе положение предмета остается неизменным. Изменяют свое положение плоскости проекций.

Способ вращения

Способ вращения состоит в том, что объект вращают в пространстве вокруг оси до нужного положения относительно плоскостей проекций. Точки объекта описывают в пространстве дуги окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к осям вращения, а центры этих окружностей располагаются на оси вращения.

При вращении применяем его элементы: ось, плоскость, центр, радиус, угол вращения.

Вращение вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций.

Вращение точки. Рассмотрим вращение точки A вокруг оси I, перпендикулярной плоскости π_1 (рис.83).

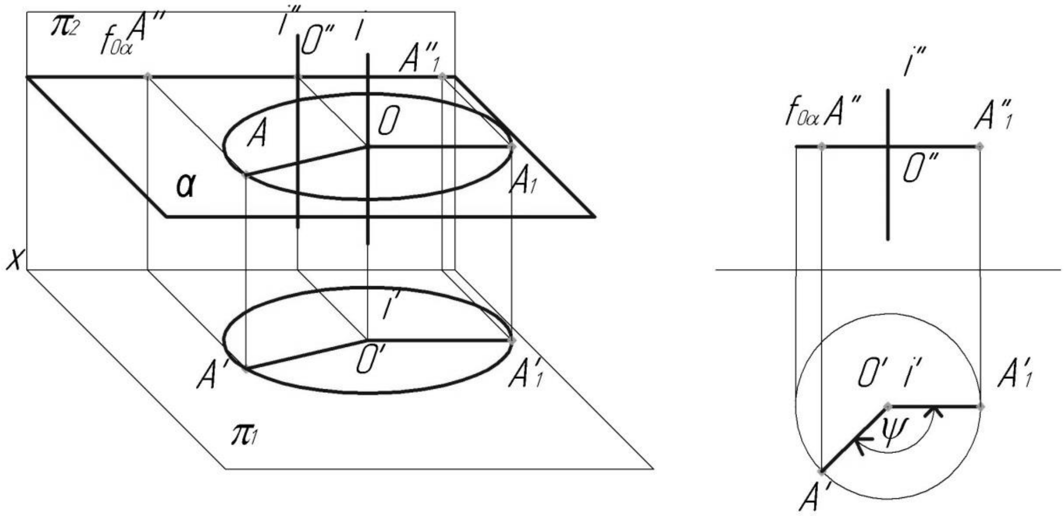


Рис.83 *а,б*

Ось вращения i проецируется на плоскость π_1 в точку, а на плоскость π_2 в прямую, перпендикулярную оси x. Траекторией движения точки A будет окружность, лежащая в плоскости α. Плоскость α и π_1 параллельны между собой (рис.83*а*). Центр вращения точка O. Расстояние от точки O до точки A есть радиус вращения. Если нужно повернуть точку A на угол ψ на плоскости π_1 то, откладывая этот угол на горизонтальной проекции (рис.83*б*), получим горизонтальную проекцию точки A - A'_1, а по ней найдем фронтальную проекцию A''_1 повернутой точки A_1.

По аналогии при вращении точки A вокруг оси, перпендикулярной фронтальной плоскости проекций, ее фронтальная проекция движется по окружности, а горизонтальная - по прямой, параллельной оси x (рис. 84).

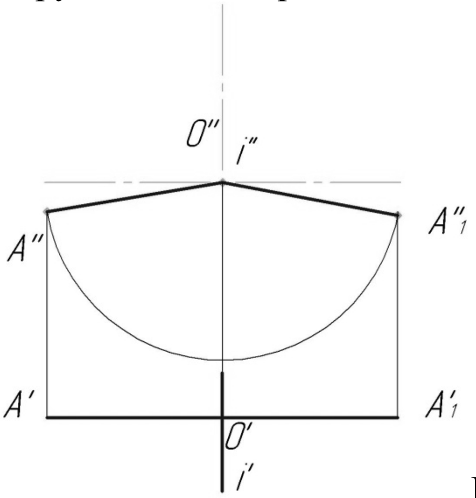


Рис.84

Вращение прямой

Решим задачу на определение истинной величины отрезка AB. Для простоты решения ось i проведем через точку A (рис.85). Ось ⊥ плоскости π_2. Прямую общего положения преобразуем в прямую горизонтальную. $A''_1B''_1$, || оси x, а A'_1B_1' есть истинная величина отрезка AB.

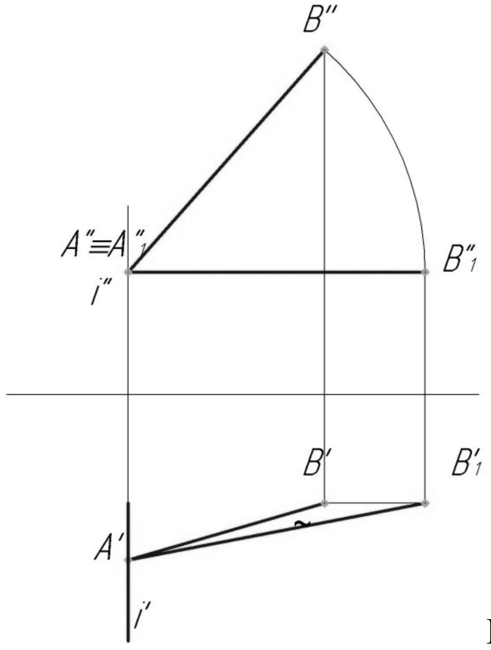


Рис.85

Вращение плоскости

Определим истинную величину треугольника ABC (рис.86). Треугольник ABC занимает фронтально-проецирующее положение. Повернем плоскость треугольника ABC, вокруг оси i так, чтобы она стала горизонтальной. Ось вращения перпендикулярна плоскости π_2.

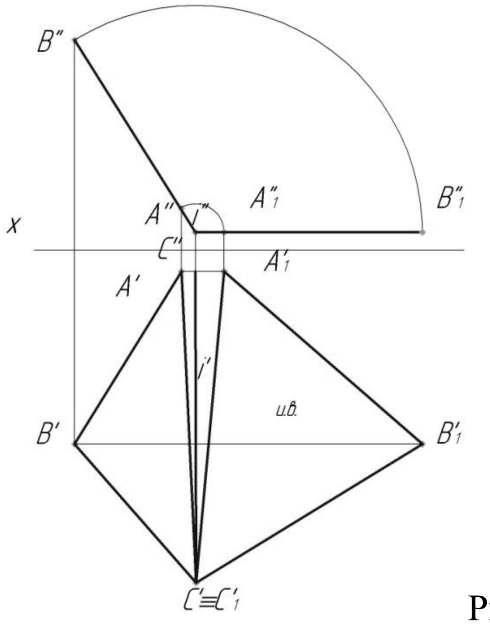


Рис.86

Вращение вокруг оси, параллельной одной из плоскостей проекций.

Сущность способа заключается в том, что одним поворотом вокруг горизонтали или фронтали плоскость или прямую можно расположить параллельно одной из плоскостей проекций и тем самым определить ее истинную величину.

На рис.87 показаны построения при вращении точки *A* вокруг горизонтали до положения, при котором радиус вращения $Ra=O'A0$ становится параллельным плоскости π_1 и проецируется на нее в натуральную величину.

Построения на эпюре сводятся к определению методом прямоугольного треугольника длины радиуса *RA* - откладыванию ее на перпендикуляре, проведенном из точки *A* к прямой b.

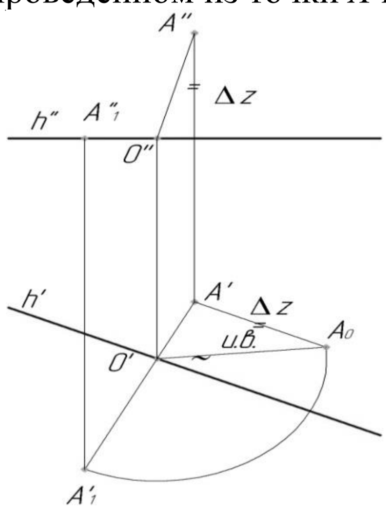


Рис.87

Приведем пример по определению истинной величины угла между двумя пересекающимися прямыми (рис.88).

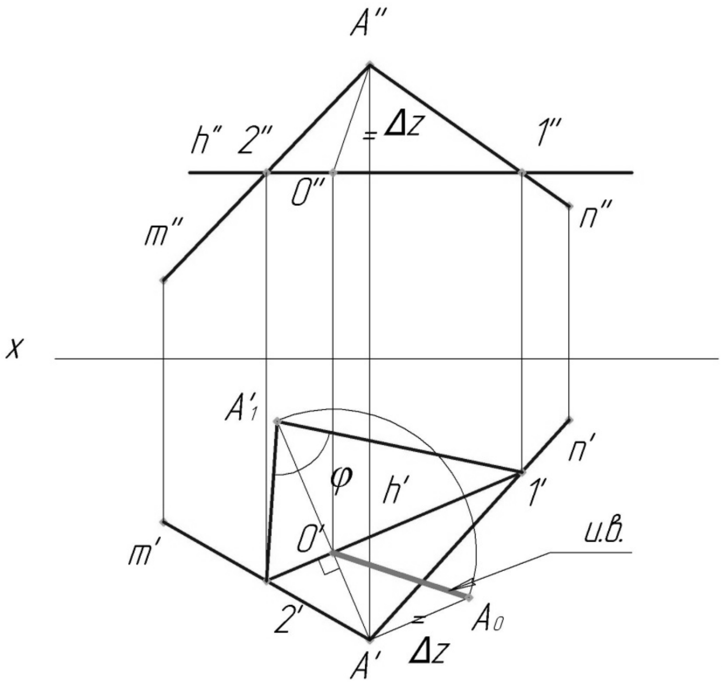


Рис.88

Плоскость задана пересекающимися прямыми m и n. В этой плоскости проводим горизонталь *12 (1'2' и 1''2'')*. Из A' к $1'2'$ проводим перпендикуляр $A'O'$. Строим его фронтальную проекцию $O''A''$. Методом прямоугольного треугольника определяем радиус вращения $O'A'$, он равен $O'A_0$. Эту величину отложим на продолжении перпендикуляра ($O'A_0 = O'A'_1$). Точки *1 (1'1'')* и *2 (2'2'')* неподвижны. A'_1 соединяем с $1'$ и $2'$, получаем плоскость параллельную π_1 и истинную величину угла φ между пересекающимися прямыми.

Способ совмещения

Способ совмещения - это способ вращения плоскости вместе с расположенными в ней геометрическими элементами вокруг одного из своих следов $h_{0\alpha}$ или $f_{0\alpha}$ до совмещения с соответствующей плоскостью проекций π_1или π_2 (рис.89).

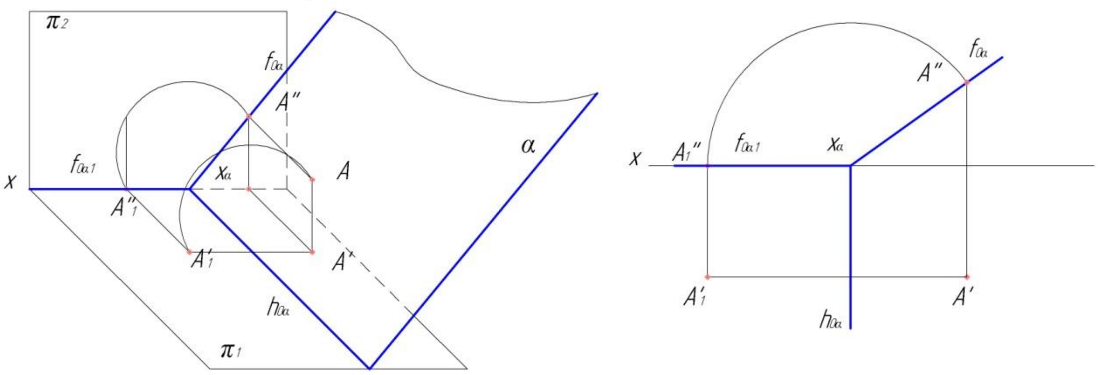


Рис.89.

Все геометрические элементы, лежащие в этой плоскости, изображаются в истинную величину на плоскости проекций, с которой производится совмещение. Совмещение позволяет найти величину плоской фигуры по ее проекциям или построить проекции плоской фигуры, лежащей в плоскости, по заданным ее размерам.

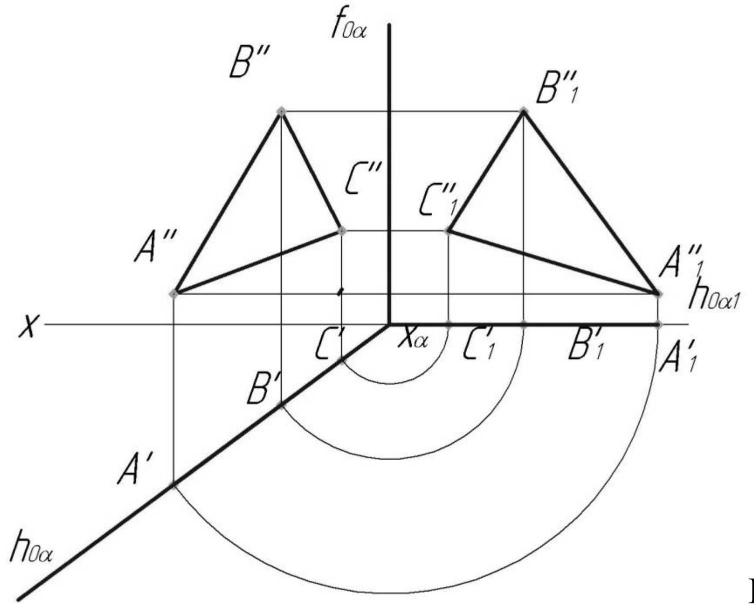


Рис.90

На рис.90 показано определение истинной величины треугольника *ABC* совмещением его с плоскостью π_2.

Если плоскость задана следами, то задача совмещения ее с плоскостью проекций сводится к построению совмещенного положения одного из следов, так как другой след, принимаемый за ось вращения, не меняет своего положения.

В нашей лекции мы изучаем совмещение только проецирующих плоскостей. При совмещении проецирующих плоскостей построение совмещенного следа упрощается, так как угол между совмещенным следом и следом, вокруг которого вращали плоскость, будет 90° (рис.91). Пример совмещения проецирующих плоскостей с плоскостью проекций π_1 приведен на рис.91.

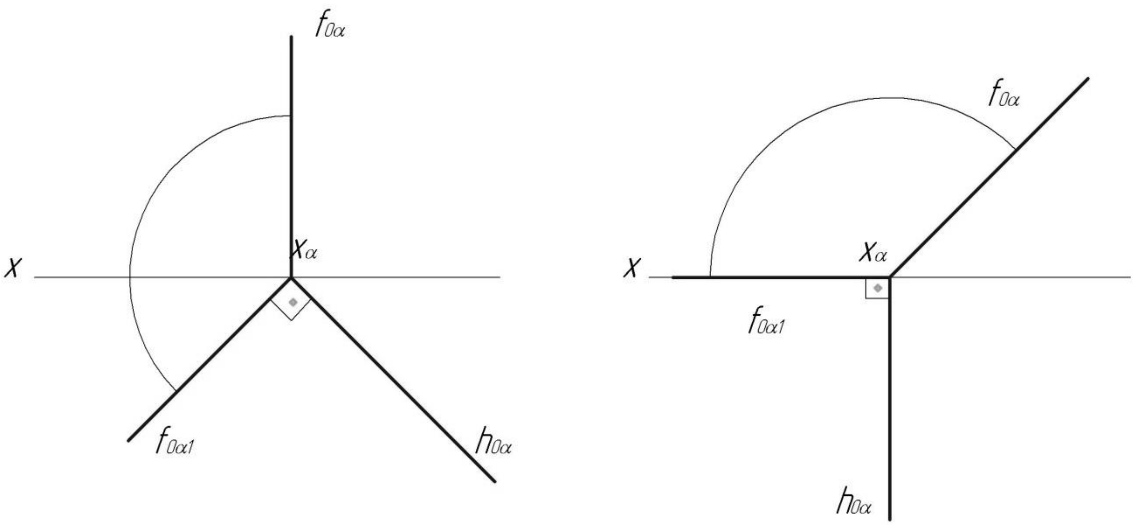


Рис.91

Способ перемены плоскостей проекций

Сущность способа состоит в том, что положение в пространстве объекта проецирования не изменяется, а одну из плоскостей проекций заменяют на новую, располагают ее перпендикулярно ко второй плоскости проекций, но в более выгодной позиции для решения задачи (рис.92).

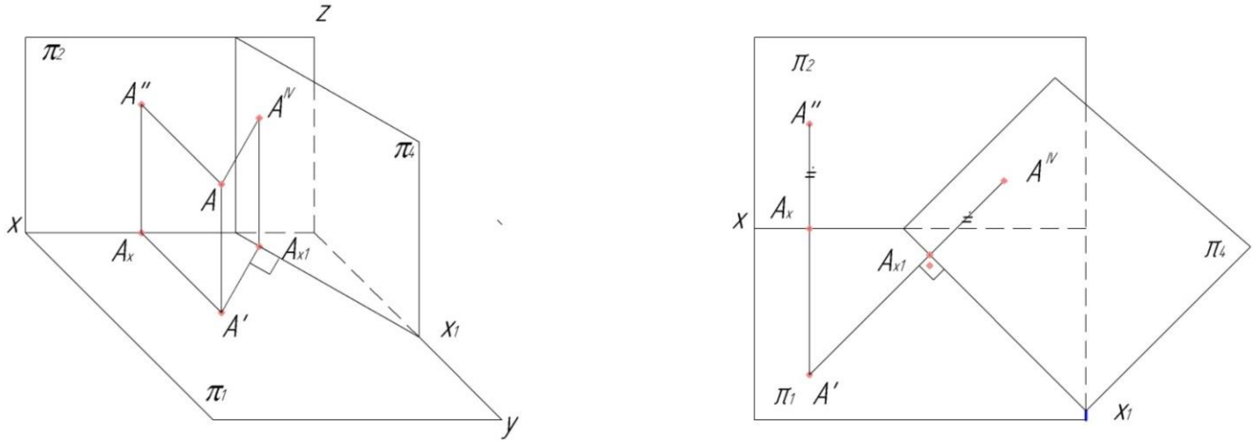


Рис.92.

На рис.93 изображены проекции точки A в системе π_1/π_2 . Для замены плоскости π_2 на π_{21}вводим новую ось X_1 и изображаем точку в системе π_1/π_{21}. Положение оси X_1 в данном примере выбрано произвольно, так как не решается конкретная задача. Расстояние новой проекции точки от новой оси равно расстоянию заменяемой проекции от заменяемой оси. В нашем примере $A''_1A_{x1}=A''A_x=z_A$. Линии проекционной связи всегда перпендикулярны осям.

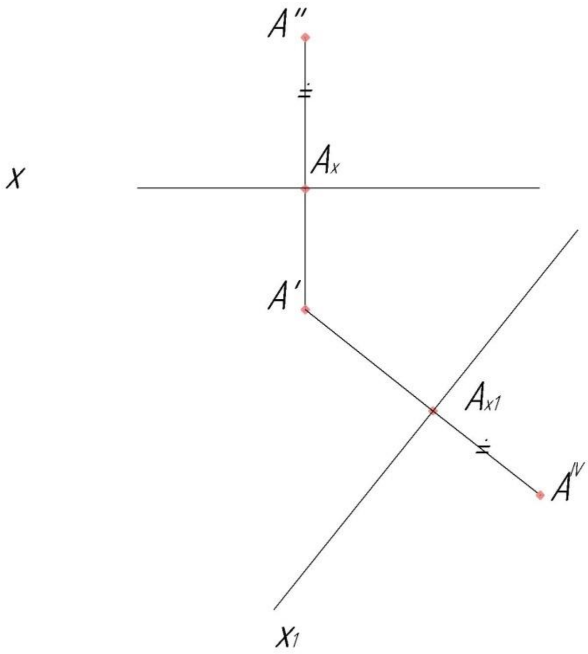


Рис.93

Заменой одной плоскости пользуются при определении истинной величины отрезка прямой общего положения и углов наклона ее к плоскостям проекций при преобразовании плоскости общего положения в проецирующую.

На рис.94 показано определение истинной величины отрезка *AB* и угла наклона его к плоскости π_1. Отрезок *AB* преобразуем во фронталь. Новую ось X_1 проводим параллельно горизонтальной проекции отрезка $A'B'$. Новая фронтальная проекция $A^{IV}B^{IV}{}_1$ и есть истинная величина отрезка. Угол α - угол наклона отрезка *AB* к плоскости π_1.

При решении задач на определение истинной величины плоской фигуры нужно применять две вспомогательные плоскости, разберем это на определении истинной величины треугольника *ABC* общего положения (рис.95).

Первая замена: в треугольнике *ABC* проводим горизонталь *h* и делаем ее проецирующей. Ось $x_1 \perp h'$. На новую плоскость π_4 треугольник проецируется в виде отрезка прямой $C^{IV}A^{IV}B^{IV}$. При первой замене плоскости мы преобразовали плоскость треугольника во фронтально-проецирующую.

Вторая замена: новую ось X_2 проводим || собирательному фронтальному следу $C^{IV}A^{IV}B^{IV}$. Строим новую горизонтальную проекцию ΔABC - в системе плоскостей π_4/π_5

Истинная величина фигуры по площади всегда больше любой из ее проекций. В этом методе всегда нужно обозначать оси проекций и положение самих плоскостей.

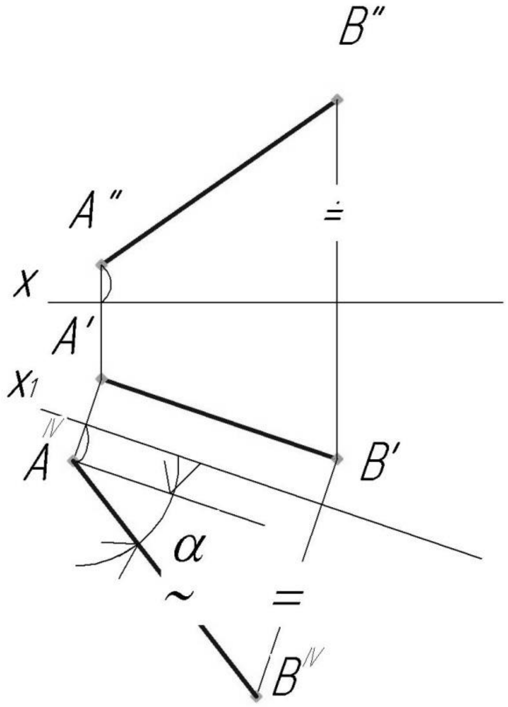


Рис.94

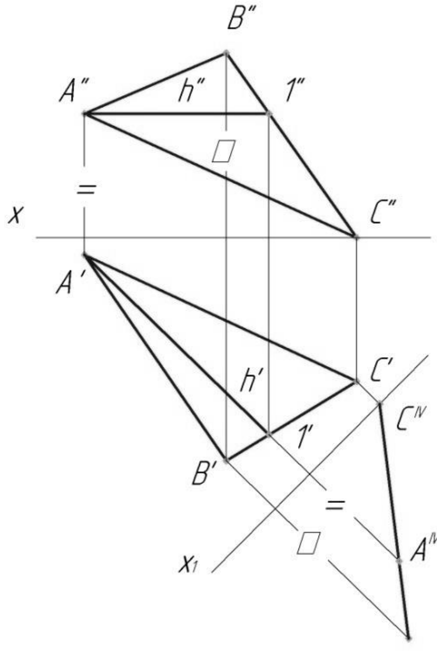


Рис.95

В этом методе всегда нужно обозначать оси проекций и положение самих плоскостей.

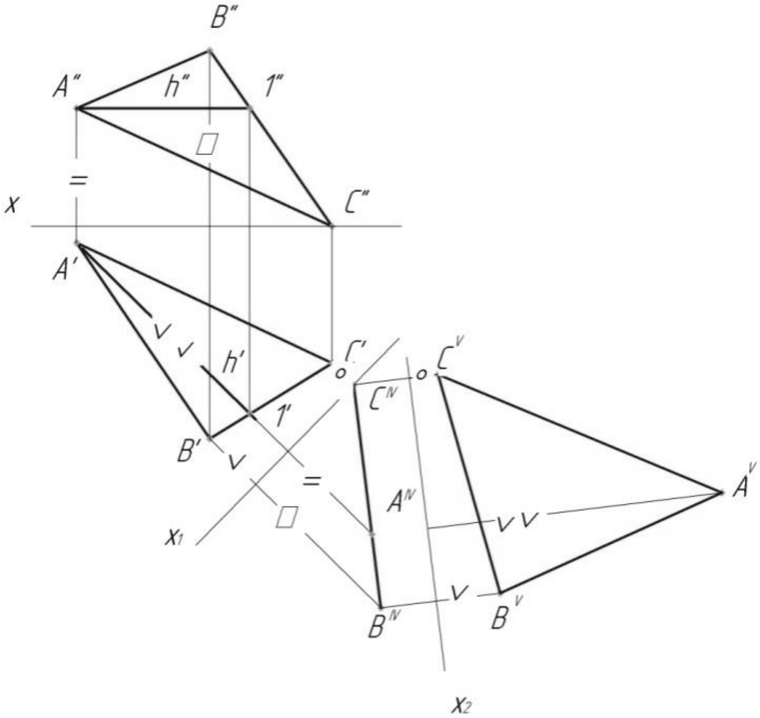


Рис.96

Метрические задачи с применением методов преобразования проекций

Эти задачи можно классифицировать на определение расстояний, определение углов, определение истинных величин плоских фигур. Часть задач мы уже рассмотрели при изучении методов преобразования.

Пример 1. Определить расстояния от точки A до прямой l (рис.97).

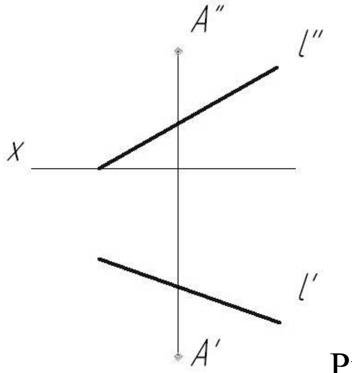


Рис.97

Расстояние от точки до прямой определяется длиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

1. На эпюре проекции перпендикуляра к прямой можно построить, если прямая параллельна плоскости проекций. Поэтому сначала строим дополнительную ортогональную проекцию прямой и точки A на плоскости π_4, параллельной прямой l и перпендикулярной к π_1. При этом ось X_1 параллельна l'.

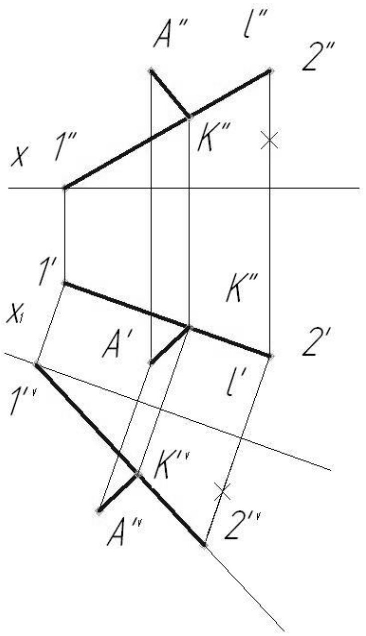
Для построения дополнительной проекции прямой l на ней отмечены точки *1* и *2* (рис.98).

2. Проводим дополнительную проекцию $A^{IV}K^{IV}$ перпендикуляра ($A^{IV}K^{IV} \perp l^{IV}$), а затем строим горизонтальную проекцию $A'K'$. Построена также и фронтальная $A''K''$ проекция перпендикуляра AK.

По двум данным проекциям отрезка AK ($A'K'$ *и* $A^{IV}K^{IV}$) находим его длину, построив дополнительную ортогональную проекцию отрезка на плоскости π_5, параллельной AK и перпендикулярной к π_4 (рис. 99).

Аналогично можно определить расстояние между двумя параллельными прямыми.

Пример 2. Определить расстояние от точки A до плоскости $\alpha(\Delta BCD)$ (рис.100).



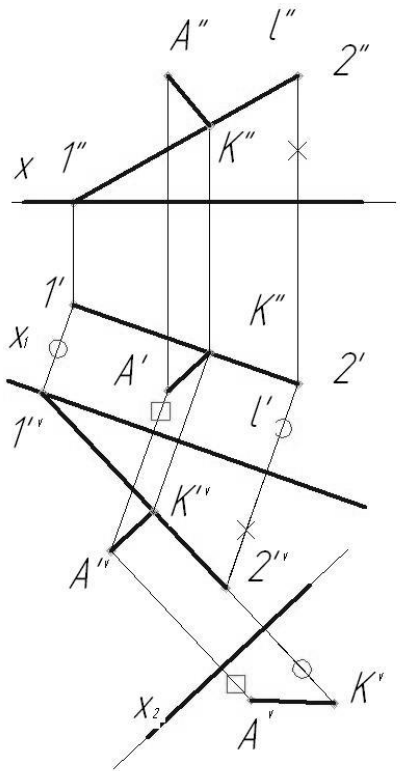


Рис.98 Рис.99

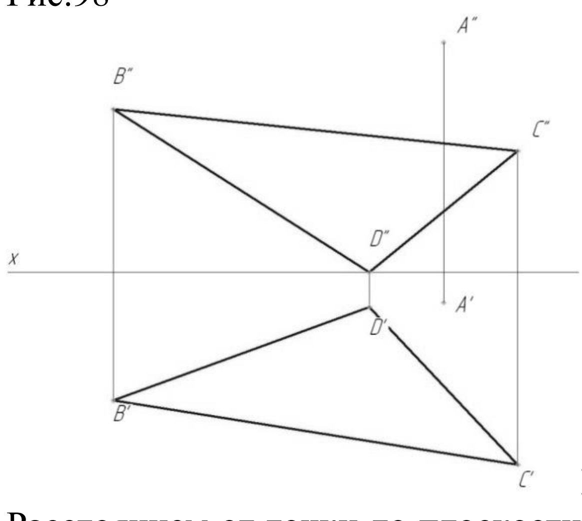


Рис.100

Расстоянием от точки до плоскости является длина отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Если плоскость является проецирующей, то перпендикуляр к ней параллелен плоскости проекций, и длина проекции его отрезка на этой плоскости проекций равна искомому расстоянию. Исходя из этого построим дополнительную ортогональную проекцию плоскости α и точки *A* на плоскости π4, перпендикулярной к плоскости α и к плоскости π1.

1. Плоскость π_4 будет перпендикулярна к плоскости α, если она перпендикулярна к горизонтали этой плоскости. При этом ось x_1 перпендикулярна к горизонтальной проекции h' горизонтали h плоскости α. Дополнительной ортогональной проекцией плоскости α на плоскость π_4 является прямая $B^{IV}C^{IV}D^{IV}$ (рис.101).

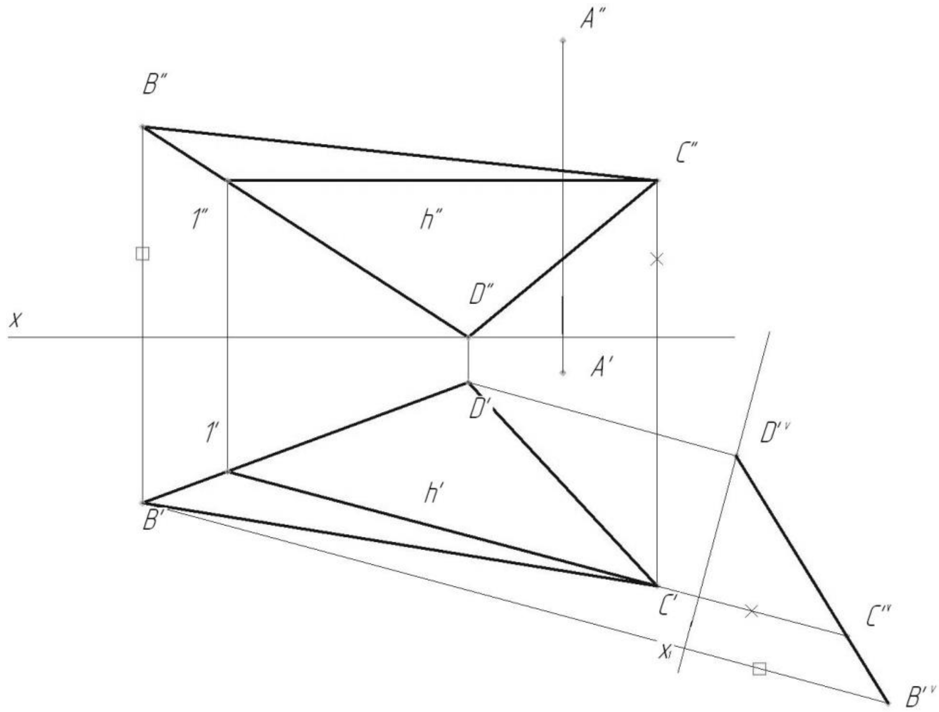


Рис.101

Из точки A^{IV} опускаем перпендикуляр $A^{IV}K^{IV}$ на прямую $B^{IV}C^{IV}D^{IV}$. Длина отрезка $A^{IV}K^{IV}$ равна расстоянию от точки A до плоскости $\alpha(\Delta BCD)$ (рис.102). Построим проекции отрезка AK. Горизонтальная проекция $A'K'$ параллельна оси x_1, так как отрезок AK параллелен плоскости π_4, и перпендикулярна к горизонтальной проекции h' горизонтали h плоскости α. Фронтальную проекцию K'' точки K строим по двум ее проекциям K' и K^{IV}.

На основании решения рассмотренной задачи можно определить расстояние между параллельными прямой и плоскостью, между двумя параллельными плоскостями.

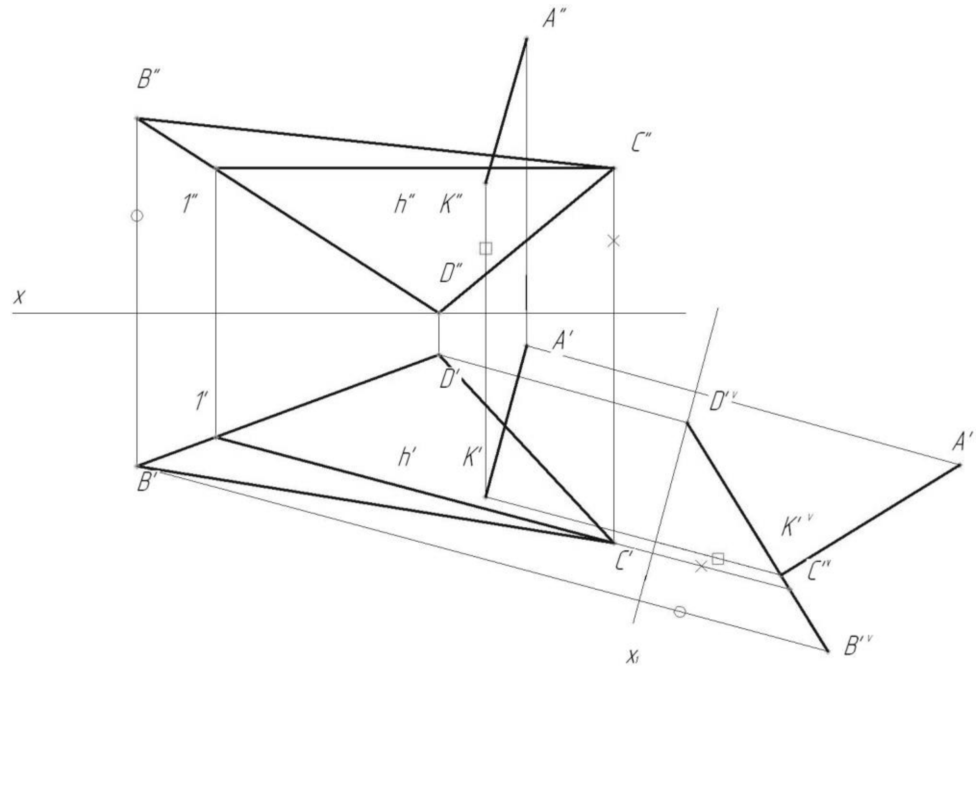


Рис.102

Пример3. Найти расстояние между параллельными плоскостями.

Решение задачи на определение расстояния между двумя плоскостями сводится к построению перпендикуляра, опущенного из любой точки одной плоскости на другую.

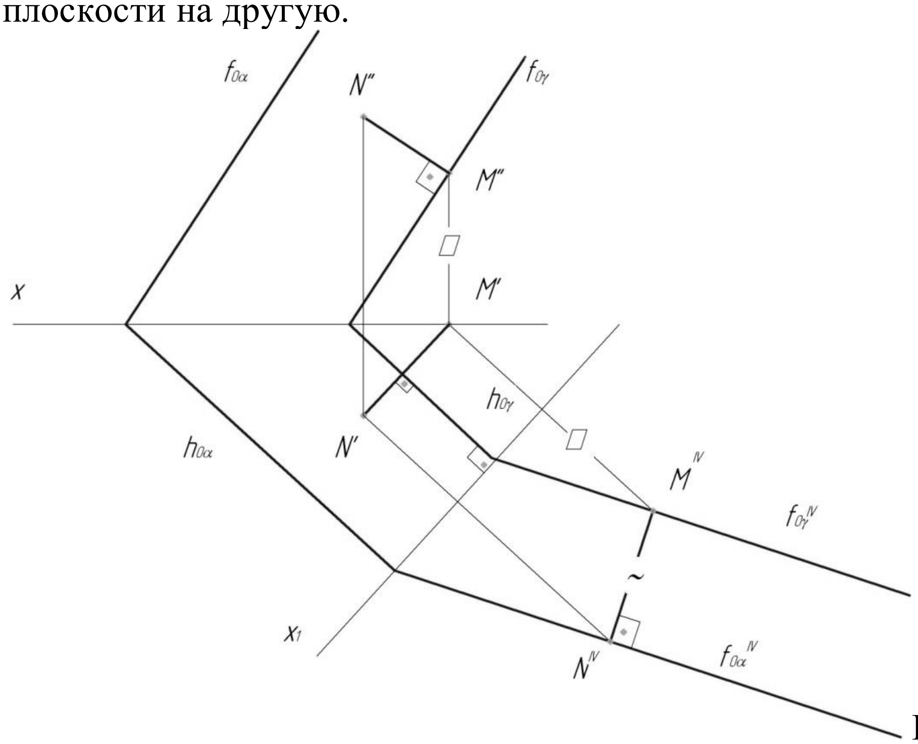


Рис.103

Преобразуем плоскости общего положения α и γ в плоскости проецирующие. В нашем примере во фронтально-проецирующие. Новую ось X_1 проводим ⊥горизонтальным следам $h_{0\alpha}$ и $h_{0\gamma}$. Для построения новых фронтальных следов используем произвольную точку M на одном из фронтальных следов. На плоскости π_4 опускаем перпендикуляр. Это и будет истинная величина расстояния между плоскостями α и γ. Строим горизонтальную и фронтальную проекцию перпендикуляра, зная, что горизонтальная проекция перпендикуляра $M'N'$ перпендикулярна горизонтальному следу плоскости, а фронтальная $M''N''$- фронтальному следу плоскости.

Поверхности

Геометрическая форма отдельных предметов представляет собой сочетание простых геометрических тел - многогранников и различных кривых поверхностей.

Из многогранников наибольший интерес представляют призмы, пирамиды, выпуклые многогранники.

Большое распространение получили и кривые поверхности. Они входят в очертания многих деталей машиностроения, изделий домашнего обихода, строительных сооружений.

Гранные поверхности

Гранные поверхности - поверхности, обревизованные перемещением прямолинейной образующей по ломаной линии, например, пирамидальные и призматические.

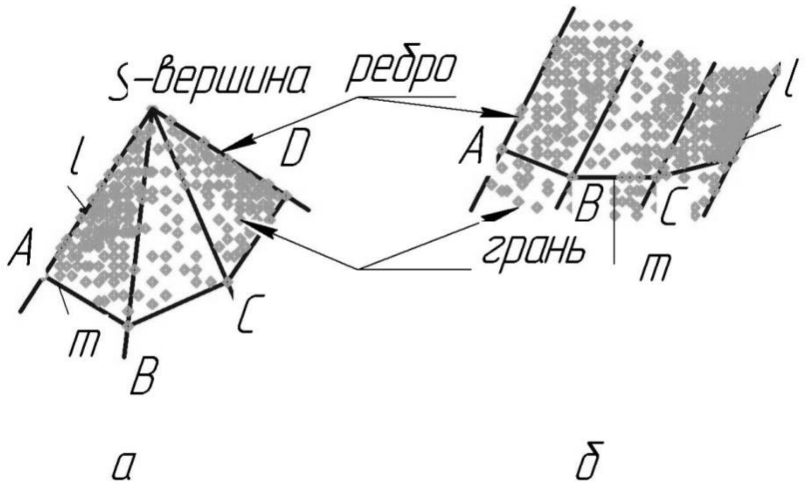


Рис.104

Пирамидальная поверхность (рис.104 *а*) - поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по ломаной направляющей, при этом одна точка (S) образующей неподвижна. Элементы пирамидальной поверхности: *l* - образующая, *m* - направляющая, S-вершина, *ASB*-грань ,*SA*-ребро.

Призматическая поверхность (рис. 104 *б*) образована движением прямолинейной образующей по ломаной направляющей, при этом образующая перемещается параллельно некоторому наперед заданному направлению. Элементы призматической поверхности аналогичны элементам пирамидальной поверхности (вершина S находится в бесконечности.)

Тело, ограниченное многогранной поверхностью, называется многогранником. Плоскости таких поверхностей называются гранями, общие соприкасающиеся стороны смежных граней называются ребрами. Пирамида показана на рис. 105.

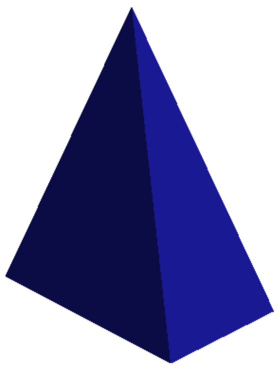


Рис.105

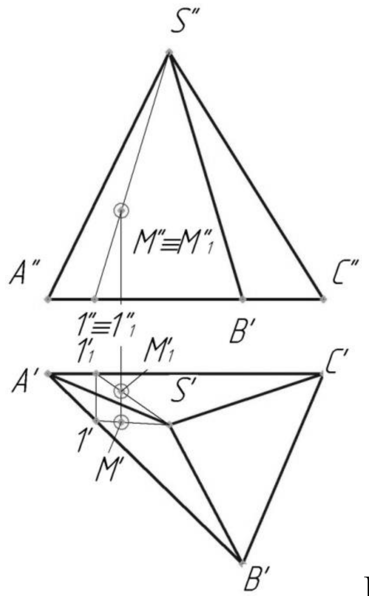


Рис.106

Для построения проекции точки, лежащей на грани, используют вспомогательную прямую, лежащую на этой грани (рис106).

Призма правильная шестигранная показана на рис.107

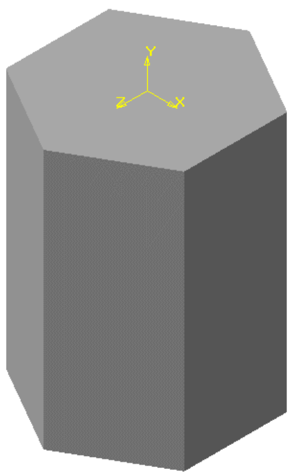


Рис.107

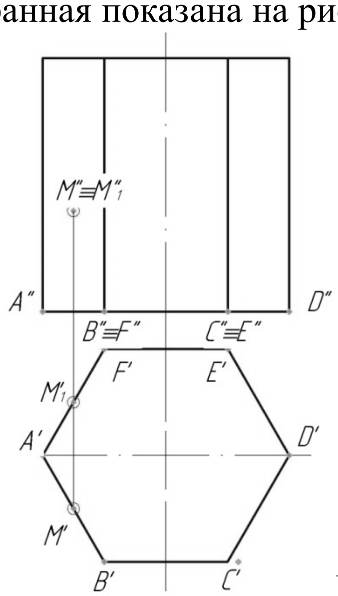


Рис.108

Точка на поверхности призмы показана на рис.108.

Кривые поверхности

Поверхность в начертательной геометрии рассматривается как совокупность последовательных положений образующей, перемещающейся в пространстве. Если образующая перемещается в пространстве по определенному закону, то поверхность называется закономерной; если движение образующей не подчиняется какому-либо закону, то поверхность называется незакономерной.

Поверхность, у которой образующей является прямая линия, называется линейчатой. Поверхность, образующая которой кривая линия, называется нелинейчатой.

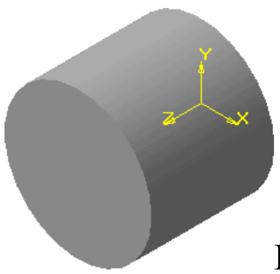
Кривых поверхностей великое множество. Мы будем рассматривать только некоторые: поверхности вращения.

Поверхности вращения

Поверхность вращения образуется вращением произвольной образующей вокруг неподвижной оси - оси поверхности. Если образующая является прямой линией, то получаем поверхность линейчатую, если образующая будет кривой линией - поверхность нелинейчатую.

К простейшим линейчатым поверхностям, которые мы рассмотрим, относятся цилиндр вращения и конус вращения.

Цилиндр вращения (рис.109).



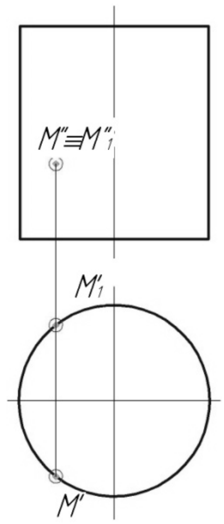


Рис.109

Мы рассмотрим только прямой круговой цилиндр. Все образующие такого цилиндра являются прямыми проецирующими. Поверхность цилиндра ограничивается двумя основаниями. Эти основания имеют форму окружности, и они всегда параллельны одной из плоскостей проекций. В нашем примере основания параллельны плоскости $\pi 1$. Точка на поверхности цилиндра вращения находится на образующей.

Конус вращения получается при вращении вокруг оси поверхности прямой образующей, пересекающейся с этой осью. Точка пересечения образующей с осью поверхности называется вершиной конуса.

На рис.110 изображен прямой круговой конус. Ось вращения такого конуса перпендикулярна плоскости проекций, основание - окружность. Точка на поверхности находится при помощи образующей, проходящей через эту точку.

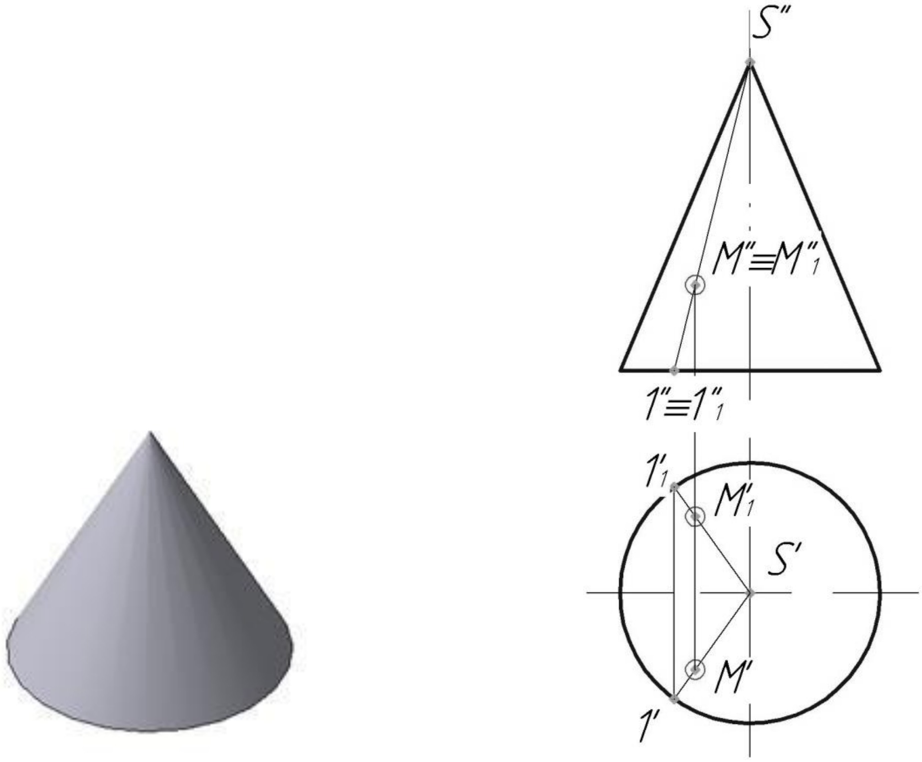


Рис.110

Из нелинейчатых поверхностей мы рассмотрим только сферу и тор.

Введем несколько понятий, связанных с такими поверхностями на примере сферы (рис111).

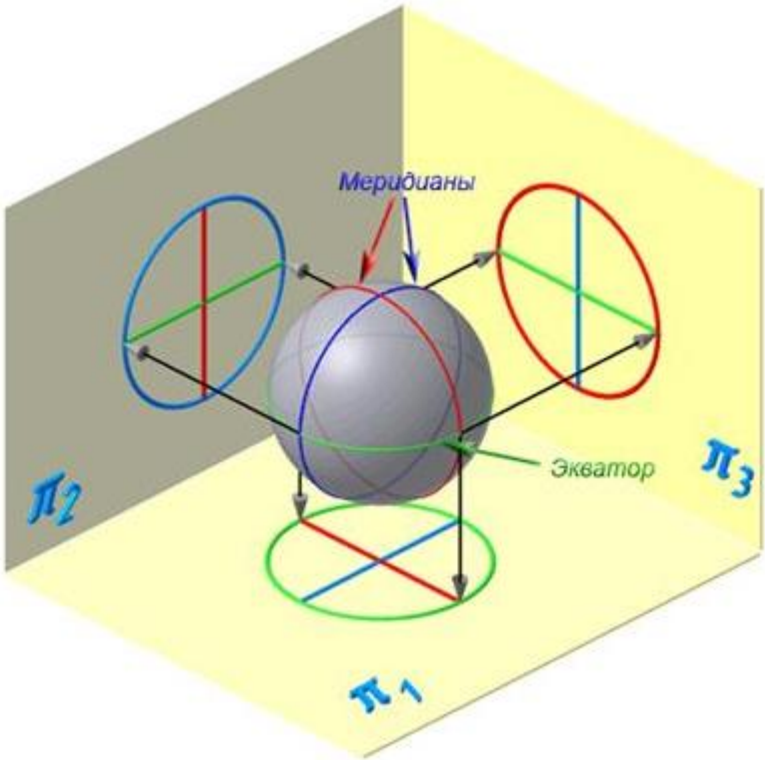


Рис. 111

У сферы образующей является окружность. Она вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций.

Плоскость, перпендикулярную оси поверхности, называют параллелью, она пересекает поверхность по окружности. Параллель с максимальным радиусом называют экватором. Плоскость, проходящую через ось вращения поверхности, называют меридиальной плоскостью. Линию пересечения поверхности с меридиальной плоскостью называют меридианом.

Точку на поверхности сферы находят при помощи параллелей (рис.112).

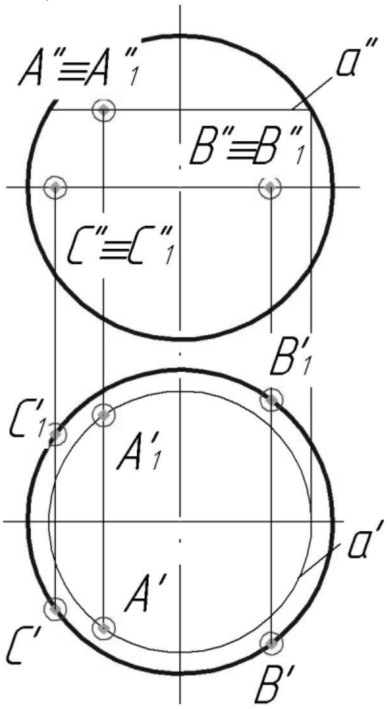


Рис.112

Поверхность тора может быть получена при вращении окружности вокруг оси, расположенной в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр (рис.113).

Точку на поверхности тора можно найти при помощи параллелей (рис.114).

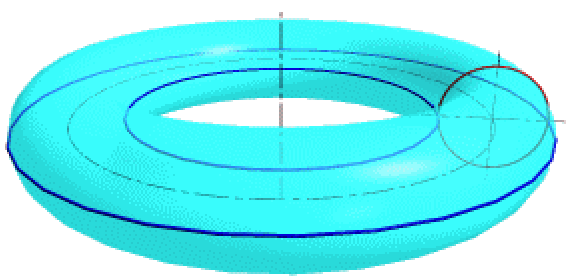


Рис.113

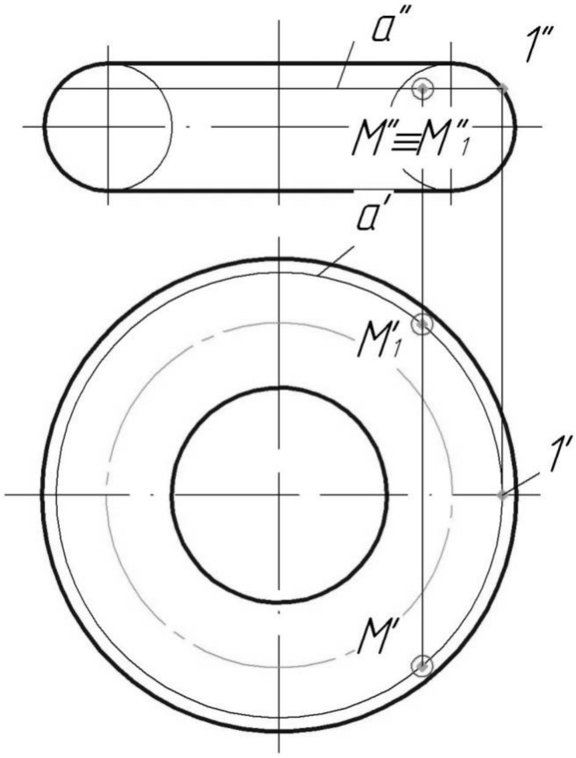


Рис.114

Пересечение поверхностей геометрических тел плоскостью

При пересечении любой поверхности плоскостью получается некоторого вида плоская фигура, называемая сечением.

Под сечением понимают ту часть секущей плоскости, которая находится внутри рассеченного тела и ограничена линией сечения. Линией сечения тела плоскостью называется контур этого сечения.

Плоскости, которые пересекают поверхности, называют секущими.

Пересечение многогранников плоскостью

При пересечении многогранников секущей плоскостью в сечении получаем многоугольник. Вершинами этого многоугольника являются точки пересечения ребер с секущей плоскостью. На рис.115 пирамида пересечена фронтально-проецирующей плоскостью. В сечении получили треугольник *KLM*.

На рис.116,117 приведен пример пересечения призмы фронтально-проецирующей плоскостью. В сечении получаем треугольник *123*.

Пересечение поверхностей вращения секущей плоскостью

Для решения подобных задач необходимо на поверхности цилиндра или конуса провести семейство образующих (сетку образующих). Как правило, достаточно *8-12* образующих. В остальном алгоритм такой же, как и для гранных тел.

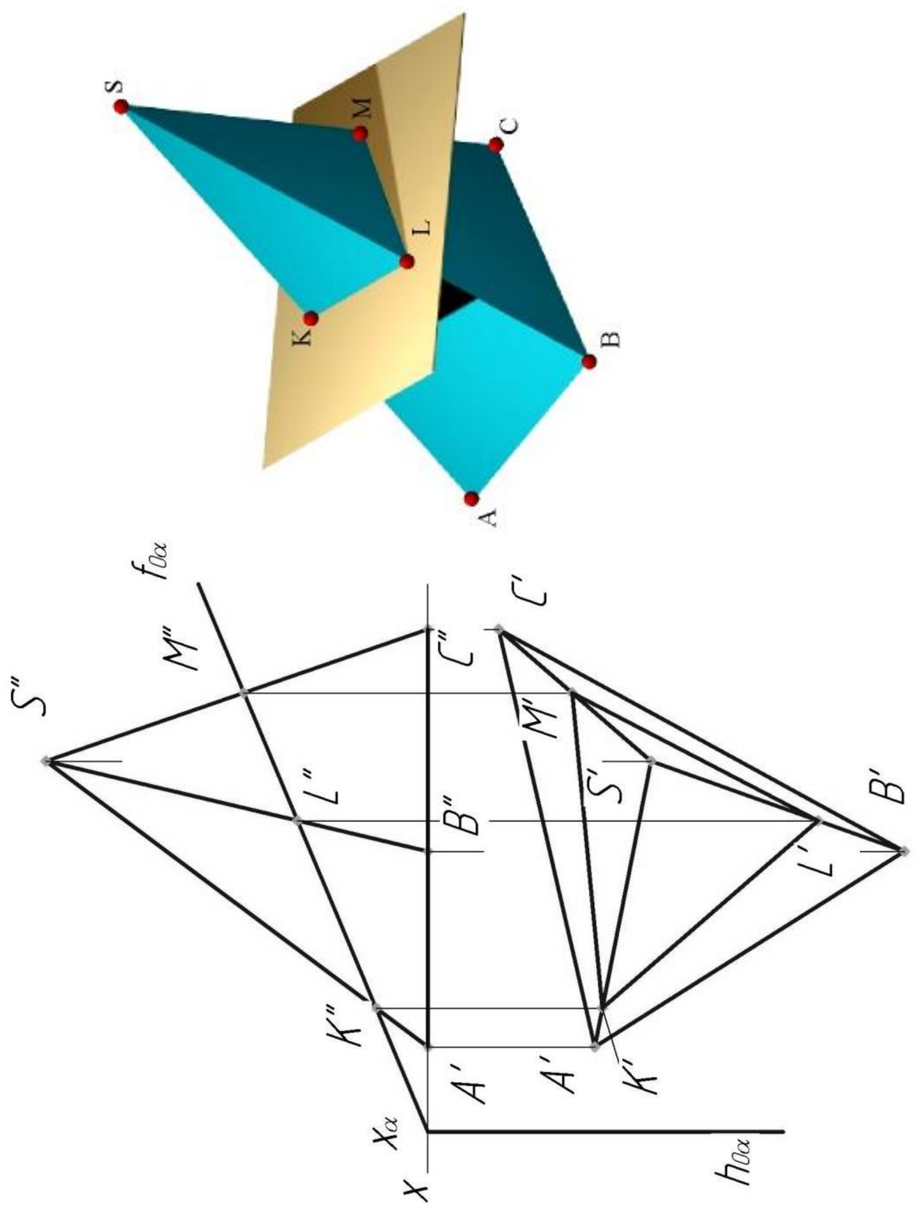


Рис.115

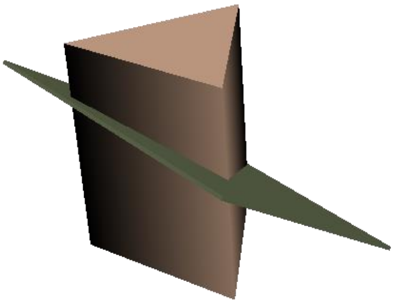


Рис.116

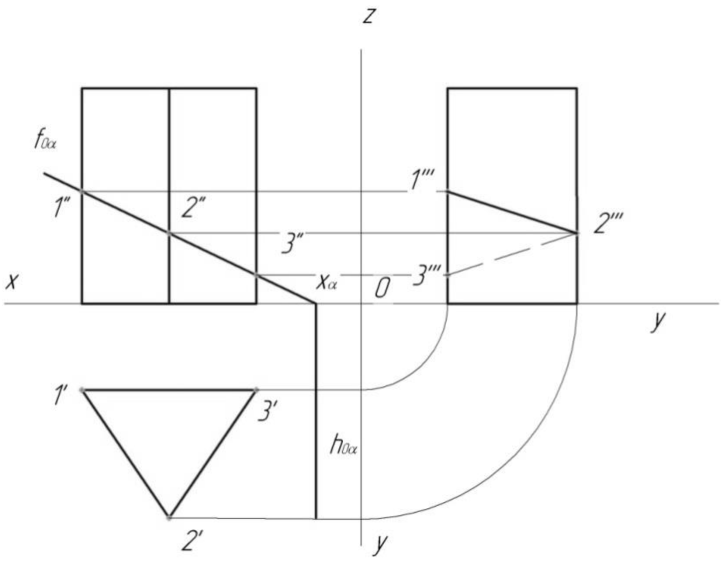


Рис.117

Сечение конуса плоскостью частного положения

При пересечении конуса секущей плоскостью (1), проходящей через вершину, в сечении получаем треугольник. Плоскость (2), параллельная основанию, в сечении дает окружность. Плоскость (3) в сечении дает эллипс. Плоскость (5), параллельная одной образующей, дает в сечении параболу. Плоскость (4), параллельная двум образующим, в сечении дает гиперболу (рис.118, 119,120,121,122).

Рис.118

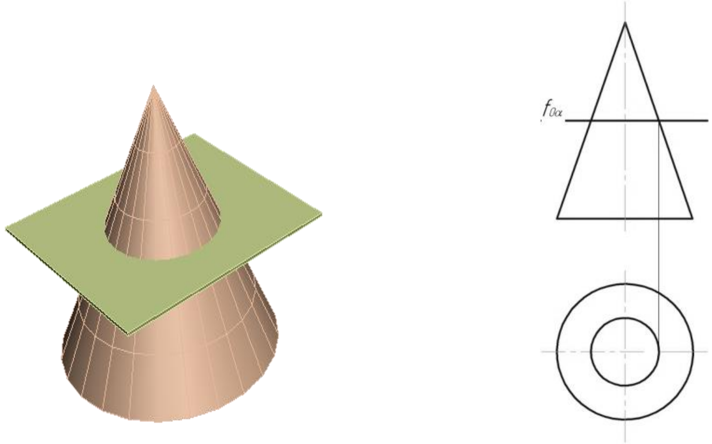


Рис.119

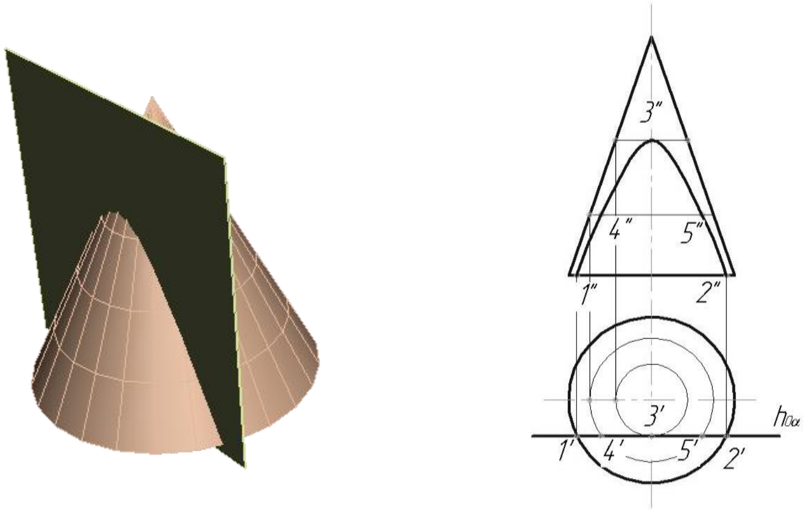


Рис.120

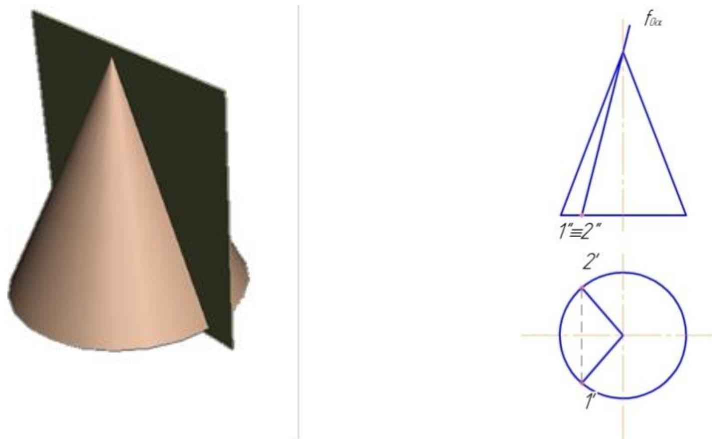


Рис.121

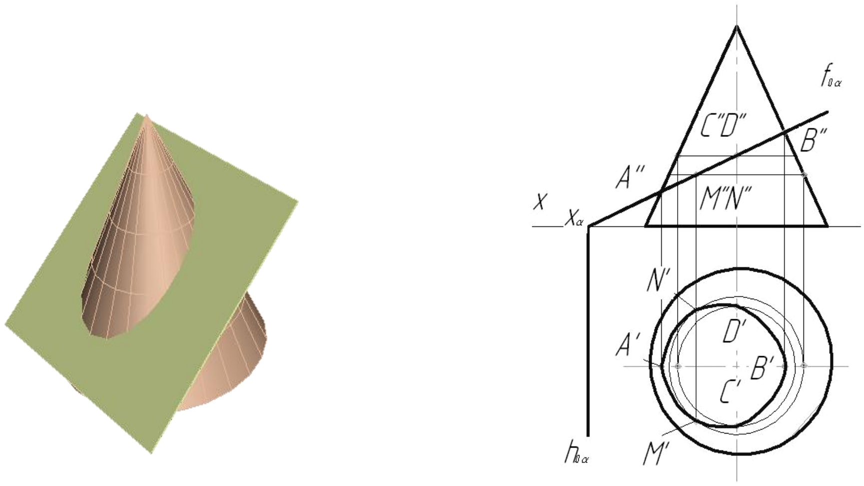


Рис.122

Рассмотрим подробно построение линии пересечения поверхности конуса с плоскостью (рис.123).

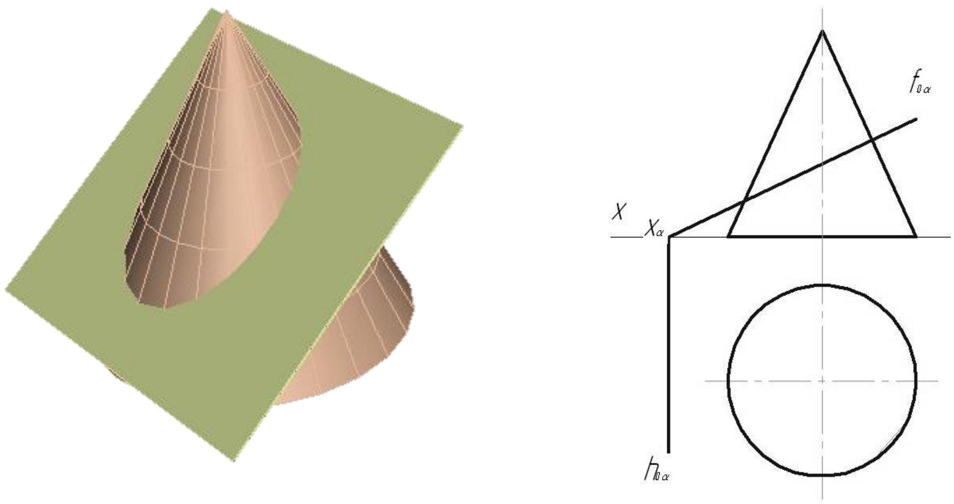


Рис.123

Задан конус и плоскость частного положения, в данной задаче плоскость фронтально-проецирующая $\alpha \perp \pi_2$, $f_{o\alpha}$ – собирающий след. Линия пересечения поверхности конуса с фронтально-проецирующей плоскостью представляет собой эллипс. Эллипс – это лекальная кривая, которая строится минимум по 8 точкам. Фронтальная проекция эллипса совпадает с фронтальным следом $f_{o\alpha}$.

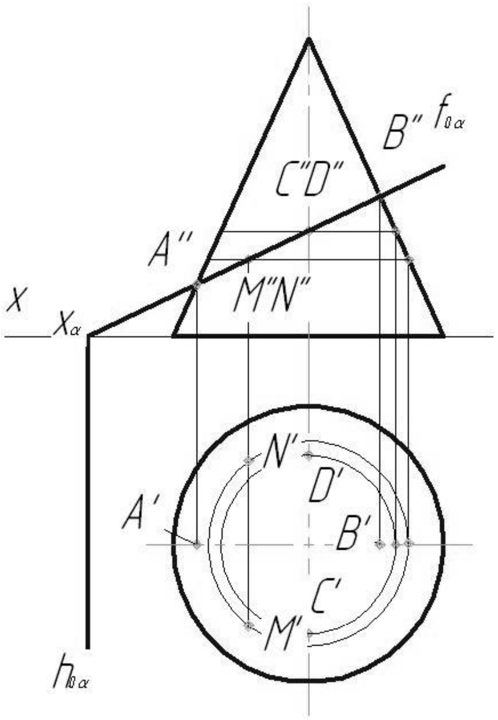


Рис.120

1. Возьмем ряд точек на $f_{o\alpha}$ и найдем их горизонтальные проекции. Отметим характерные фронтальные проекции A'' и B'' , C'' и D''. Остальные точки можно выбрать произвольно. Точка лежит на поверхности, если она принадлежит линии, лежащей на этой поверхности (рис.124). Горизонтальные проекции A' и B' получим на образующих, совпадающих с осью симметрии.

2. Для получения горизонтальных проекций C' и D' проведем параллельно основанию линию, горизонтальная проекция которой является окружностью, и на ней отметим C' и D'.

3. Фронтальные проекции M'' и N'' выбрали произвольно на собирающем следе $f_{o\alpha}$. Для нахождения горизонтальных проекций M', N' проведем линию параллельно основанию, горизонтальная проекция которой является также окружностью.

4. Полученные горизонтальные проекции точек надо соединить плавной кривой от руки, а затем обвести по лекалу (рис.125).

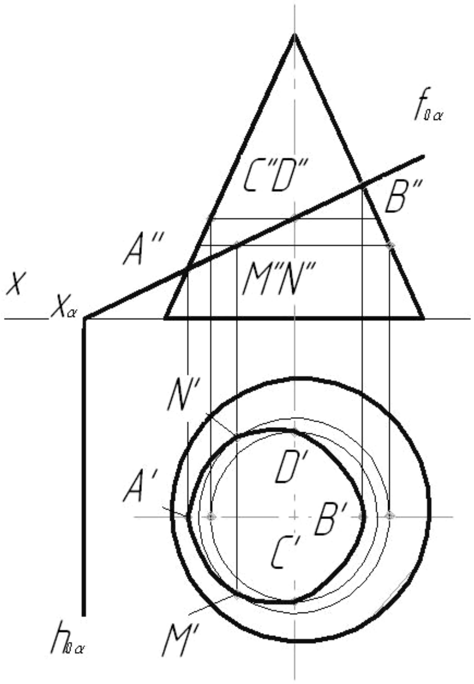


Рис.125

Сечение цилиндра плоскостью

Цилиндр является поверхностью проецирующей. При пересечении цилиндра плоскостью, параллельной основанию (рис.126 *а*), в сечении получаем окружность. Плоскость, параллельная двум образующим (рис.126 *б)*, в сечении дает прямоугольник. При пересечении цилиндра плоскостью (рис126 *в*) в сечении получаем эллипс.

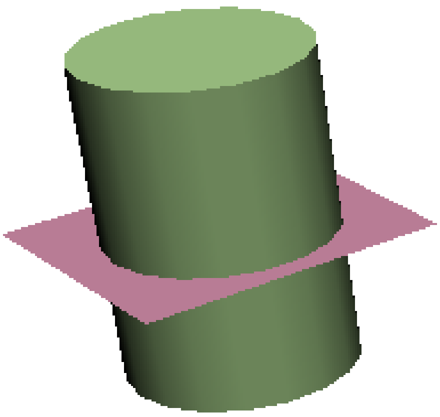
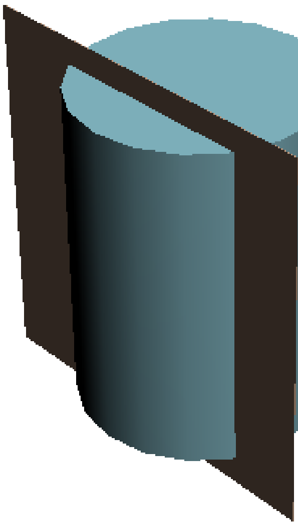


Рис.126 *а*



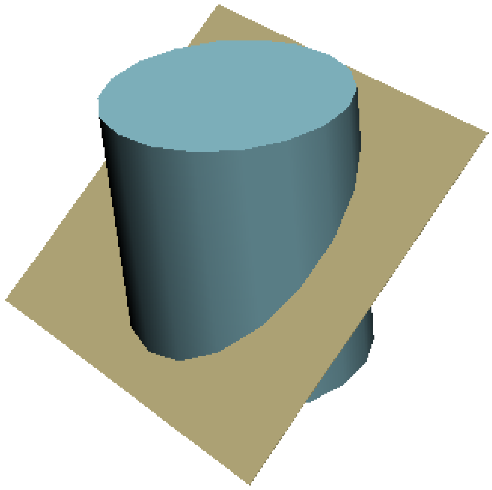


Рис.126*б* Рис.126*в*

Пересечение цилиндра с фронтально-проецирующей плоскостью показано на рис. 127.

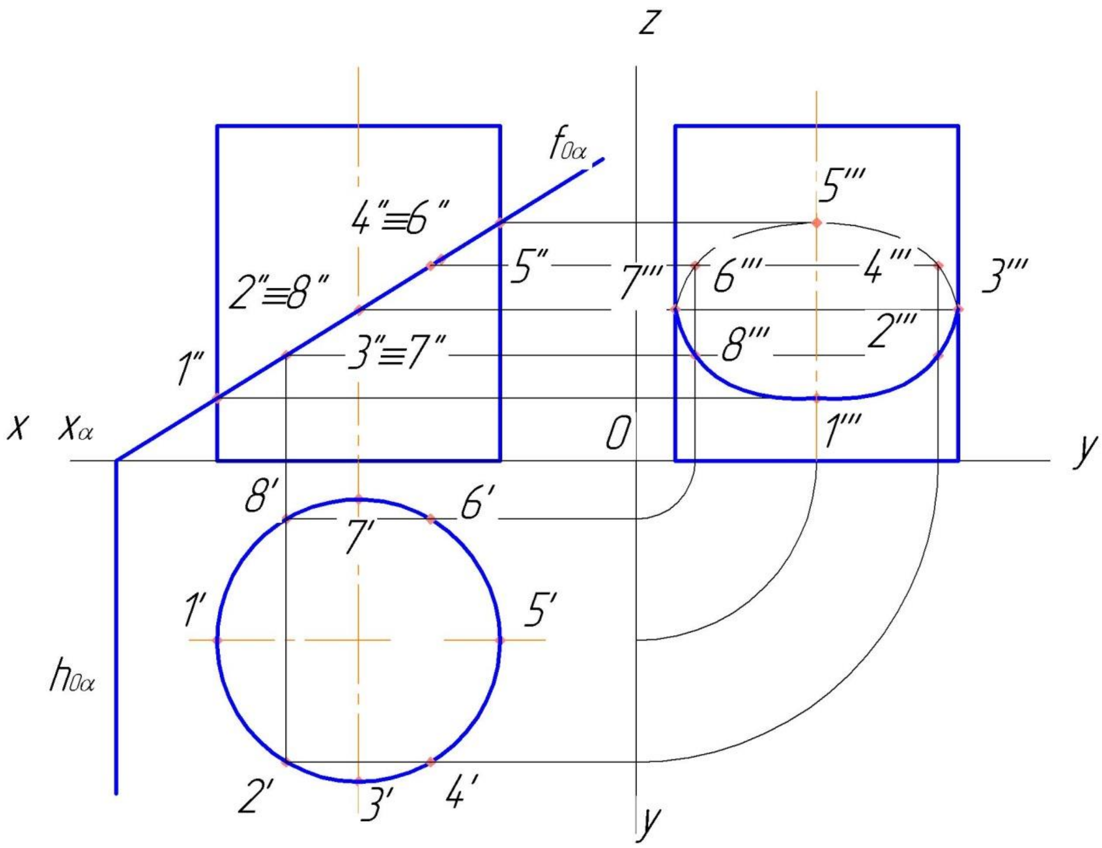


Рис.127

Пересечение прямой с поверхностью

При пересечении прямой с поверхностью нужно определить точки входа и выхода прямой из данной поверхности.

Алгоритм решения такой задачи сводится к следующему:

1.заключить прямую во вспомогательную плоскость;

2. построить линию пересечения вспомогательной плоскости с заданной поверхностью (построить фигуру сечения);

3.найти точки пересечения прямой с контуром фигуры сечения;

4.определить видимость прямой.

Пример 1. Конус (рис.128)

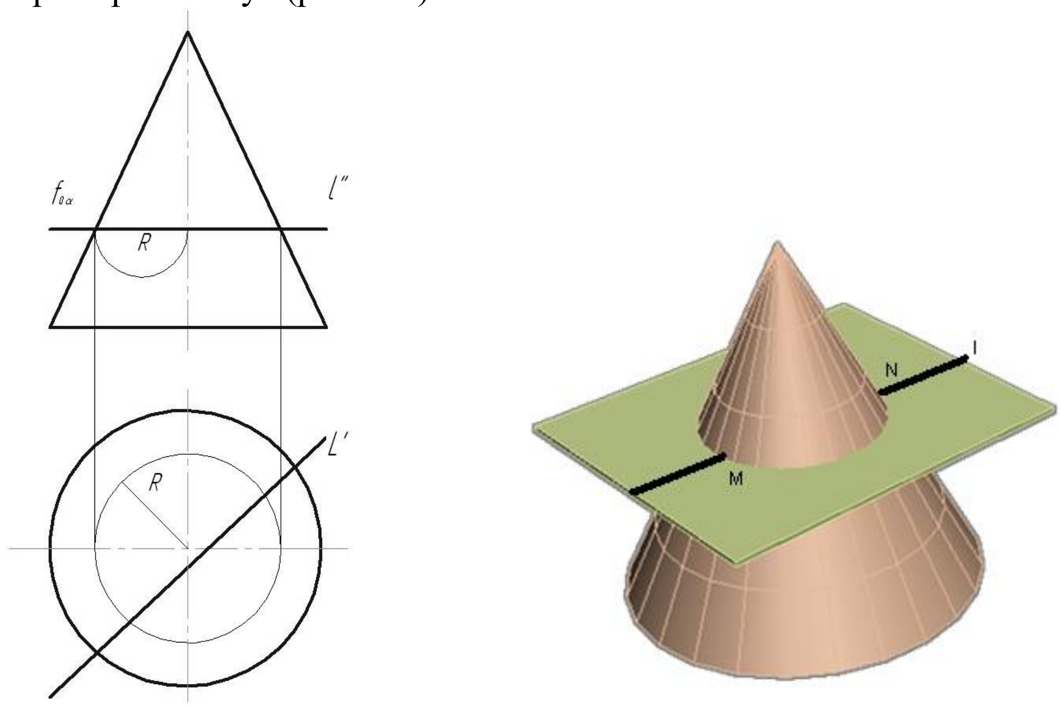


Рис.129

1. Заключаем прямую l в плоскость частного положения так, чтобы при пересечении конуса с плоскостью была простая линия пересечения – окружность. В данной задаче α – горизонтальная плоскость, $f_{o\alpha}$ собирающий след, $l'' \in f_{o\alpha}$ (рис. 130).

2. Строим линию пересечения конуса с плоскостью α. Это окружность радиуса R.

3. На пересечении горизонтальной проекции l' и окружности радиуса R отметим искомые горизонтальные проекции M' и N'. M'' и N'' отмечаем на l''.

4. Определяем видимость прямой l. Между получившимися точками M и N прямая всегда невидима. Горизонтальная проекция прямая l' видима (невидима только от M' до N'). Фронтальная проекция l'' до M'' видима, т.к. точка M лежит на видимой части конуса относительно π_2. Точка N лежит на невидимой части конуса относительно π_2, следовательно, фронтальная

проекция l'' от N'' до очерковой образующей невидима. За очертаниями конуса прямая l всегда видима (рис.130).

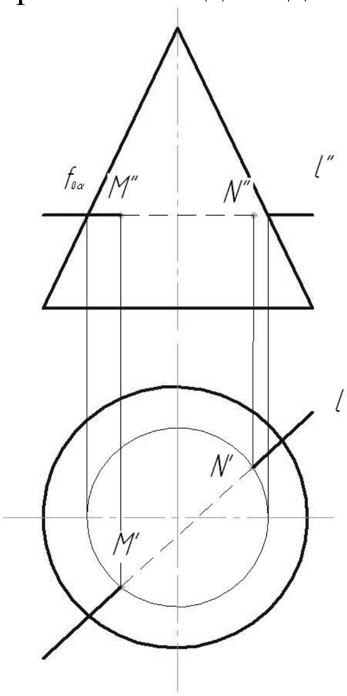


Рис.130

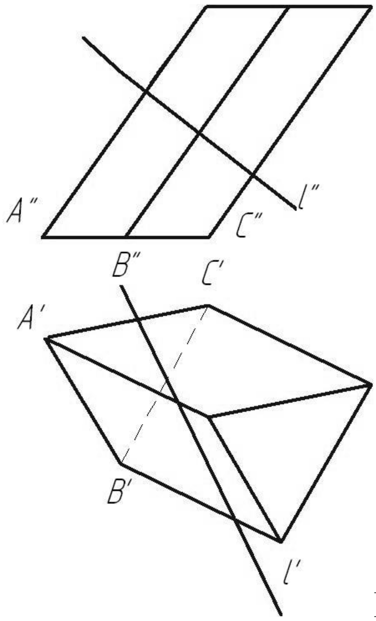


Рис.131

Пример 2. Гранная поверхность - призма (рис.131)

1. Заключаем прямую l во вспомогательную плоскость частного положения. Линией пересечения плоскости с гранной поверхностью будет ломаная линия. Заключаем прямую l во фронтально-проецирующую плоскость $\alpha \perp \pi_2$, $l'' \in f_{o\alpha}$, $f_{o\alpha}$ – собирающий след (рис.131).

2. Строим линию пересечения плоскости α с призмой. Отметим $1''$, $2''$, $3''$ на собирающем следе $f_{o\alpha}$.

3. Построим горизонтальные проекции $1'$, $2'$ и $3'$ на соответствующих ребрах.

4. Соединяем горизонтальные проекции $1'$-$2'$-$3'$ ломаной линией с учетом видимости.

5. На пересечении горизонтальной проекции l' с горизонтальной проекцией $1'$-$2'$-$3'$ отметим горизонтальные проекции M' и N' искомых точек M и N.

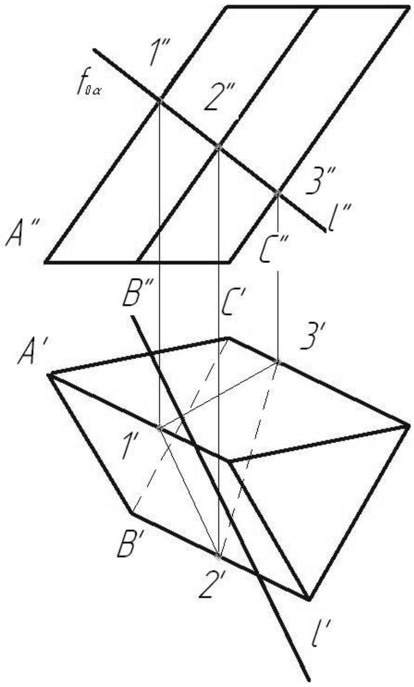


Рис.132

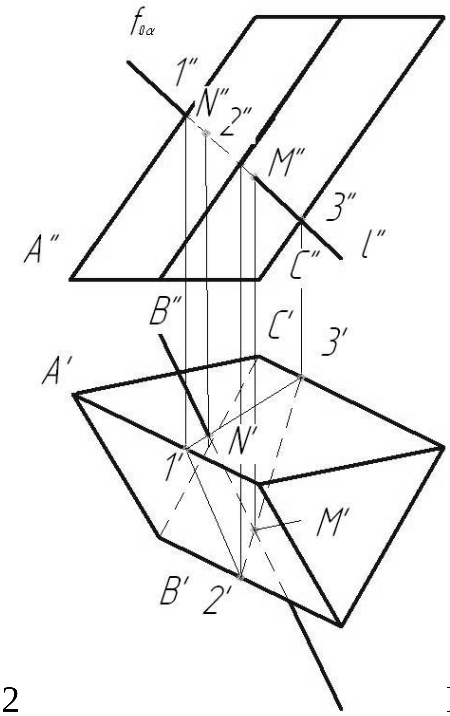


Рис.133

6. Построим фронтальные проекции M'' и N'' на l''.

7. Определяем видимость прямой l. Между полученными точками M и N прямая невидима всегда. Горизонтальная проекция l' невидима между $M'N'$ и от M' до горизонтальной проекции ребра B', т. к. горизонтальная проекция M' принадлежит невидимой относительно π_1 грани BC. На π_2: точка M лежит на грани BC видимой относительно π_2, следовательно, M'' видима, и фронтальная проекция l'' видима до M''. Точка N принадлежит грани AC, невидимой относительно π_2, следовательно, фронтальная проекция N'' не видима, и фронтальная проекция l'' от N'' невидима. За очертаниями призмы прямая l видима (рис.133).

Пример 3. Пересечение прямой со сферой показано на рис. 134.

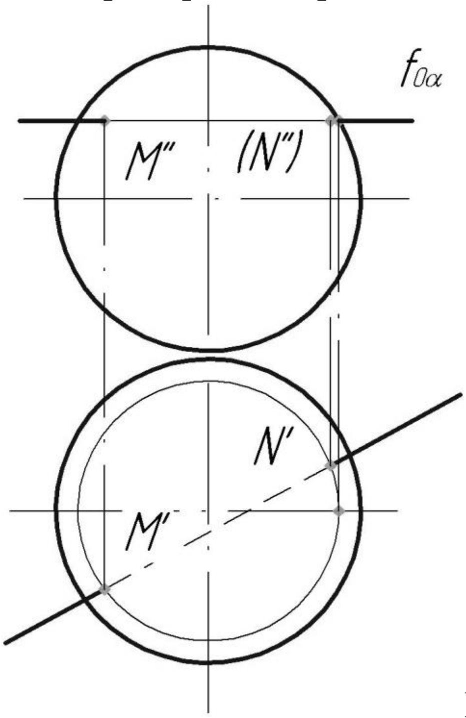


Рис. 134.

Взаимное пересечение поверхностей

Для построения линии пересечения двух поверхностей нужно найти ряд точек, общих для обеих поверхностей, и полученные точки соединить в определенной последовательности. В задачах встречаются различные комбинации пересекающихся поверхностей: цилиндр, конус, призма, пирамида, сфера, тор.

Основным способом решения подобных задач является способ вспомогательных секущих плоскостей. Вспомогательные секущие плоскости могут быть плоскостями уровня, проецирующими, общего положения. Их выбирают так, чтобы они пересекали поверхности по простейшим линиям (прямые, окружности).

Очень часто одна или обе пересекающиеся поверхности являются проецирующими. Проекция линии пересечения таких поверхностей на чертеже (на одном или двух плоскостях проекций) уже имеется, нужно лишь найти способ перенесения проекций точек на другую проекцию.

Взаимное пересечение многогранников

Рассмотрим пересечение призмы с пирамидой (рис. 135).

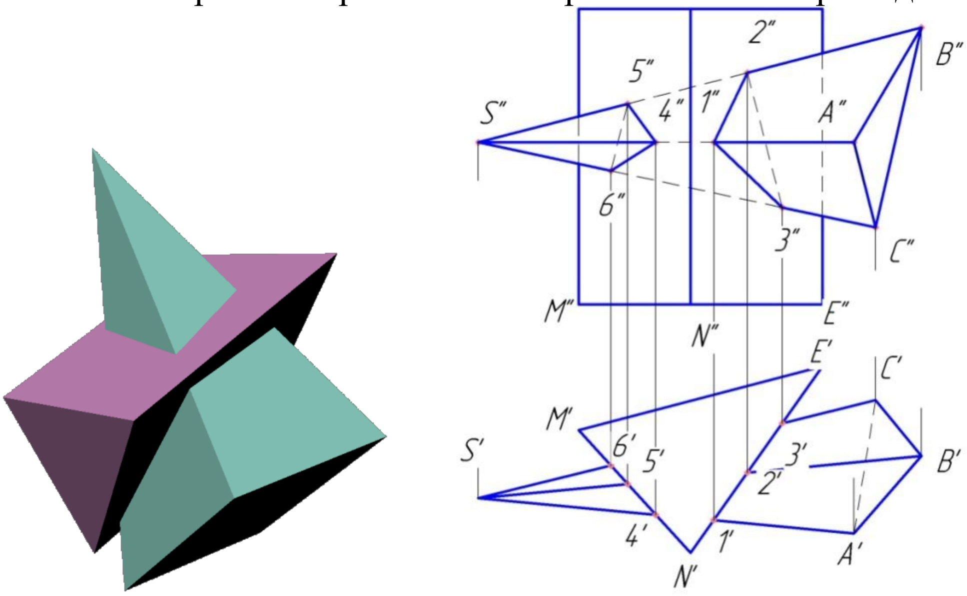


Рис.135

Призма занимает горизонтально-проецирующее положение.

Для построения линии пересечения этих поверхностей следует:

1. Определить точки пересечения ребер пирамиды с гранями призмы *1,2,3,4,5,6*.

2. Поверхности гранные - линии пересечения прямые линии. Соединяем полученные точки.

3. Определяем видимость.

Пересечение поверхностей вращения

Пример 1. Пересечение сферы с цилиндром. Цилиндр занимает фронтально-проецирующее положение (рис.136).

1.Поскольку цилиндр занимает фронтально проецирующее положение, фронтальные проекция линии пересечения совпадает с фронтальным очерком цилиндра. Остается построить горизонтальную проекцию окружности, принадлежащую поверхности сферы. Отметим характерные точки - фронтальные проекции точек, лежащих на экваторе сферы- G'',H'',F'',P''. Отметим фронтальные проекции M'',N'',K'',L'' , в которых будет меняться видимость линии пересечения. Горизонтальные проекции точек, принадлежащих поверхности сферы, находим при помощи окружностей соответствующего радиуса (рис.137).

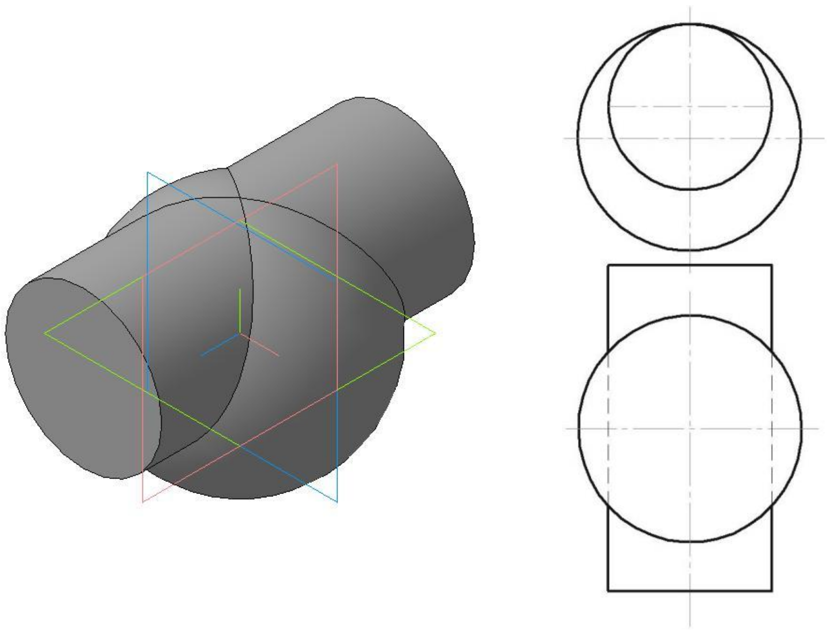


Рис.136

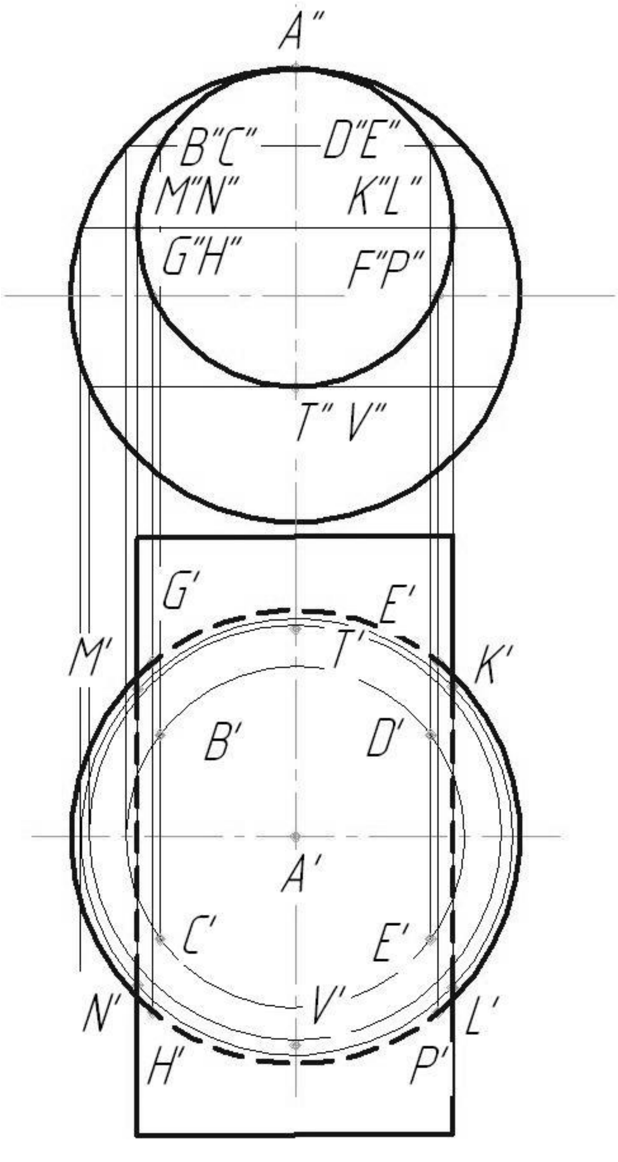


Рис.137

2. Соединим полученные точки плавной линией с учетом видимости. Точки, принадлежащие видимой части поверхности цилиндра, относительно горизонтальной плоскости проекций соединяем сплошной линией. В точках *M,N,K,L* происходит изменение видимости. Определим видимость горизонтальных очерков цилиндра и сферы (рис.138).

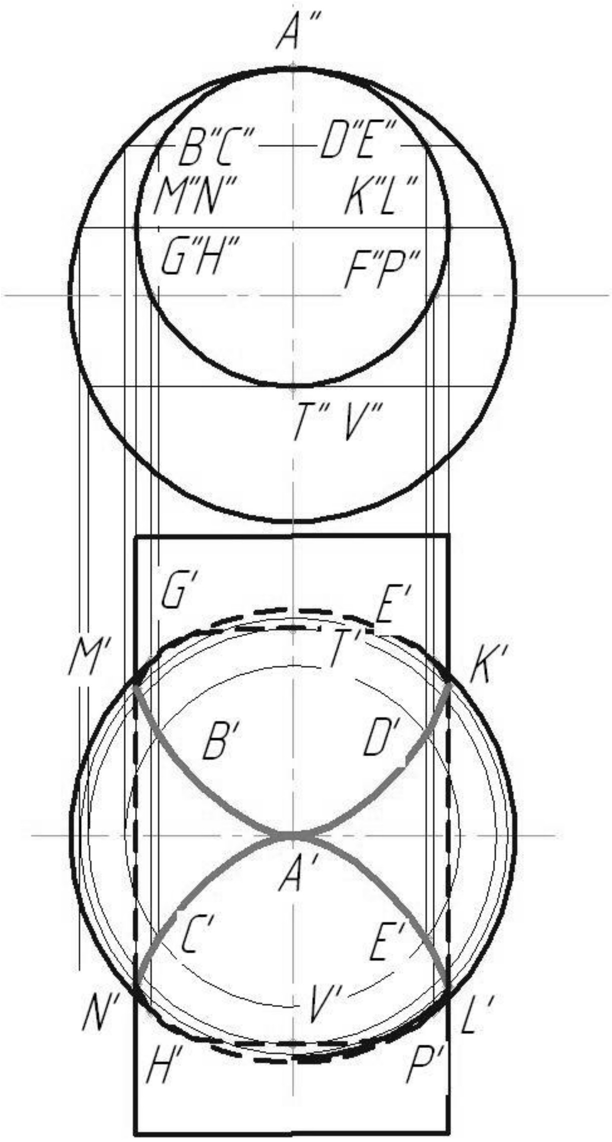


Рис.138

Пример 2. Пересечение сферы с конусом (рис.139).

Обе поверхности общего вида. У этих поверхностей имеется общая плоскость симметрии, поэтому линия пересечения будет симметрична относительно этой плоскости. Обе поверхности второго порядка, следовательно, линия их пересечения пространственная кривая четвертого порядка.

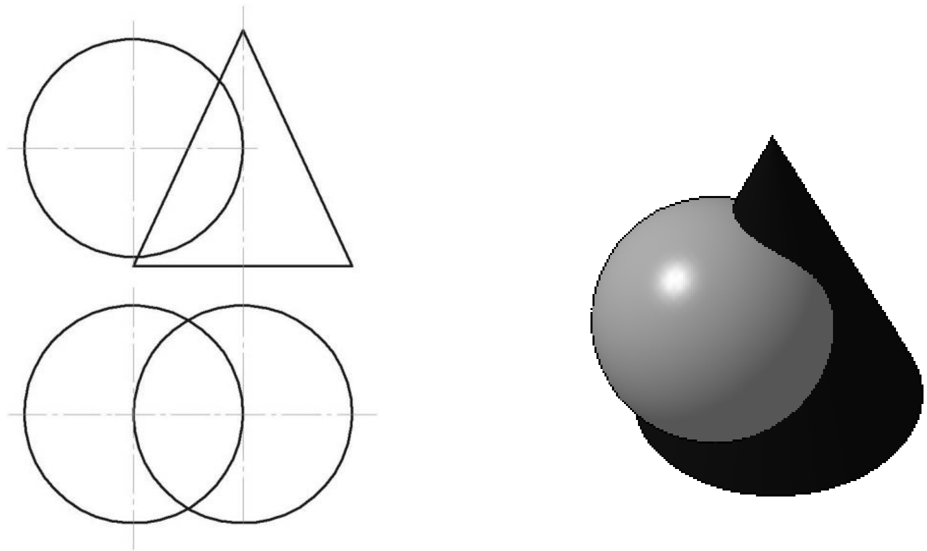


Рис.139

Ход решения:

1.Отметим характерные точки линии пересечения. Точки *A* и *B* лежат на пересечении фронтальных очерков. Точки *C* и *D* найдем на пересечении экватора сферы *a* и окружности *b* поверхности конуса, лежащих в одной горизонтальной плоскости α. Аналогично могут быть найдены и другие точки линии пересечения. Так точки *M* и *N* строим как пересечение окружностей *c* и *d*, принадлежащих одной горизонтальной плоскости β (рис.139).

3. Полученные точки соединяем плавной кривой с учетом видимости. При установлении видимости следует помнить, что эта линия будет видима, если она принадлежит как поверхности сферы, так и конуса. Точки *A* и *B* отделяют видимую относительно фронтальной плоскости часть линии пересечения (она проходит через точки *A, C, M, B*) от невидимой. В данной задаче фронтальные проекции видимой и невидимой части линии пересечения совпадают.

Точки *C* и *D* отделяют видимую относительно горизонтальной плоскости часть линии пересечения от невидимой. Точка *A* видима относительно горизонтальной плоскости проекций, так как лежит выше экватора сферы. Следовательно линия, проходящая через точки *A, C, D* - видима, остальная часть линии невидима. Определим видимость очерков поверхности конуса и сферы (рис.141).

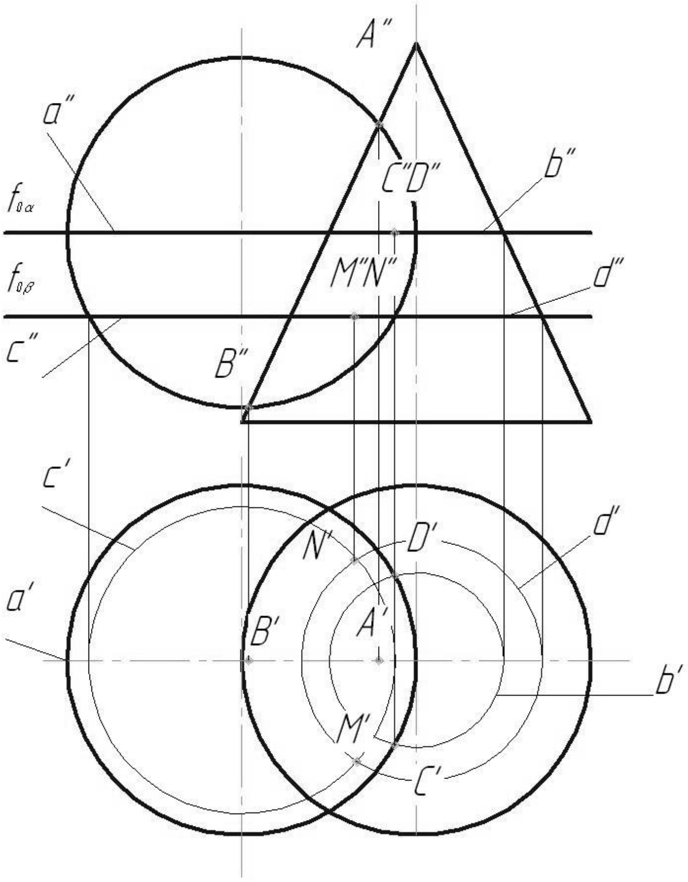


Рис.140

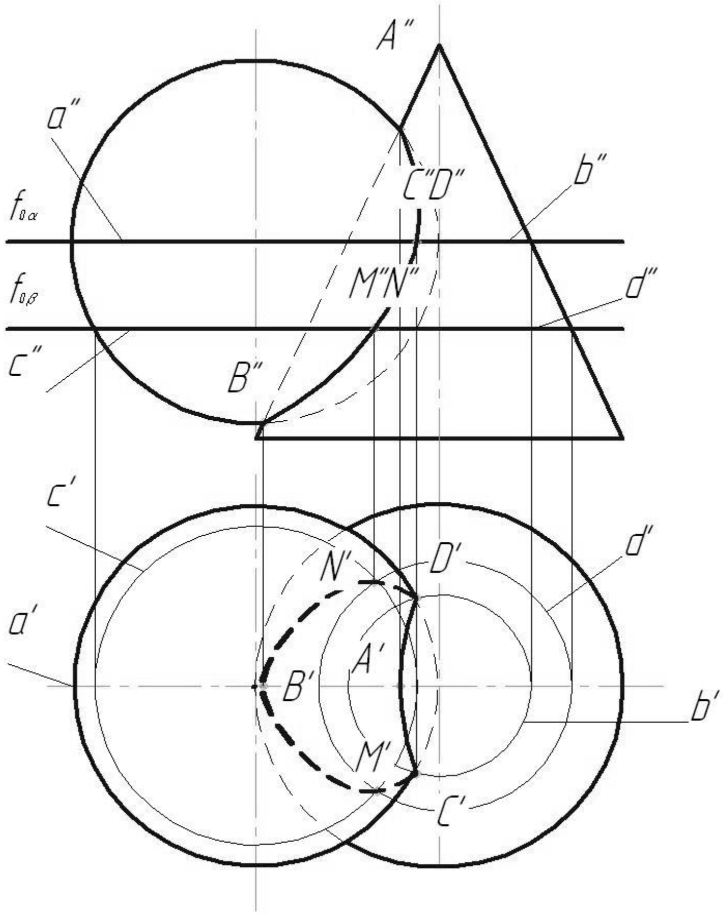


Рис.141

Геометрические тела с вырезом

Пример 1. Вырез на конусе (рис.142).

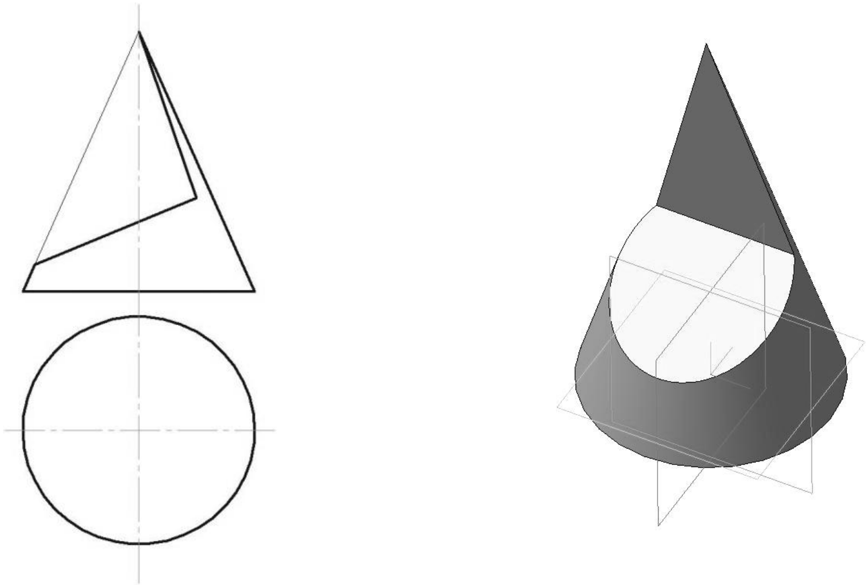


Рис.142

Вырез произведен двумя плоскостями. Одна проходит через вершину конуса и рассечет его поверхность по образующим. Вторая плоскость - фронтально-проецирующая, линия пересечения – часть эллипса, ограниченная прямой принадлежащей линии пересечения плоскостей.

1. Отметим фронтальные проекции характерных точек для построения выреза - *A'', B'', C'', M'',N''* (рис. 143).

2. Точки *D* и *E* выбраны произвольно для построения эллипса, т.к. линия среза от *A* до *CN* представляет собой часть эллипса.

3. Найдем горизонтальные проекции точек *A, B, C, D, E, N*. Точки лежат на поверхности конуса, а значит, они лежат на линиях, принадлежащих поверхности конуса. Горизонтальные проекции точек *M* и *B, D* и *E* найдены на окружностях, принадлежащих поверхности конуса. Точки *C* и *N* - на образующих S_1 и S_2.

4. Соединяем полученные горизонтальные проекции. *S'C'* и *S'N'* – прямые, *C', B', D', A', E', M', N'* – кривая линия - часть эллипса (рис.142).

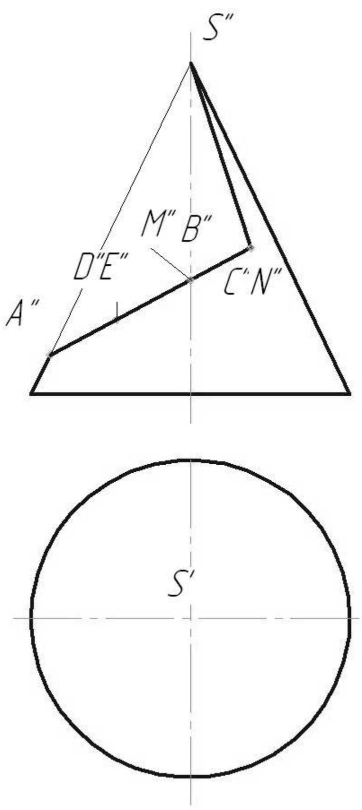


Рис.143

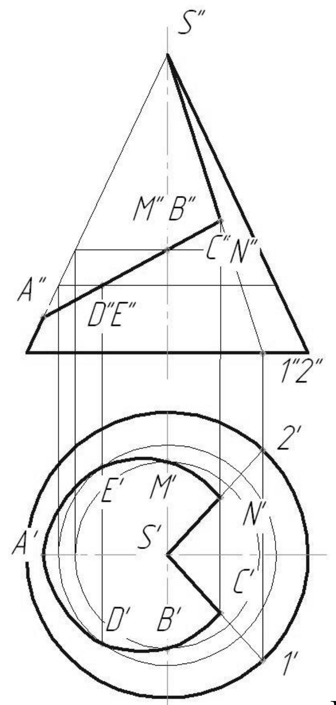


Рис.144

Строим профильную проекцию конуса и профильные проекции точек. Соединяем их (рис.145).

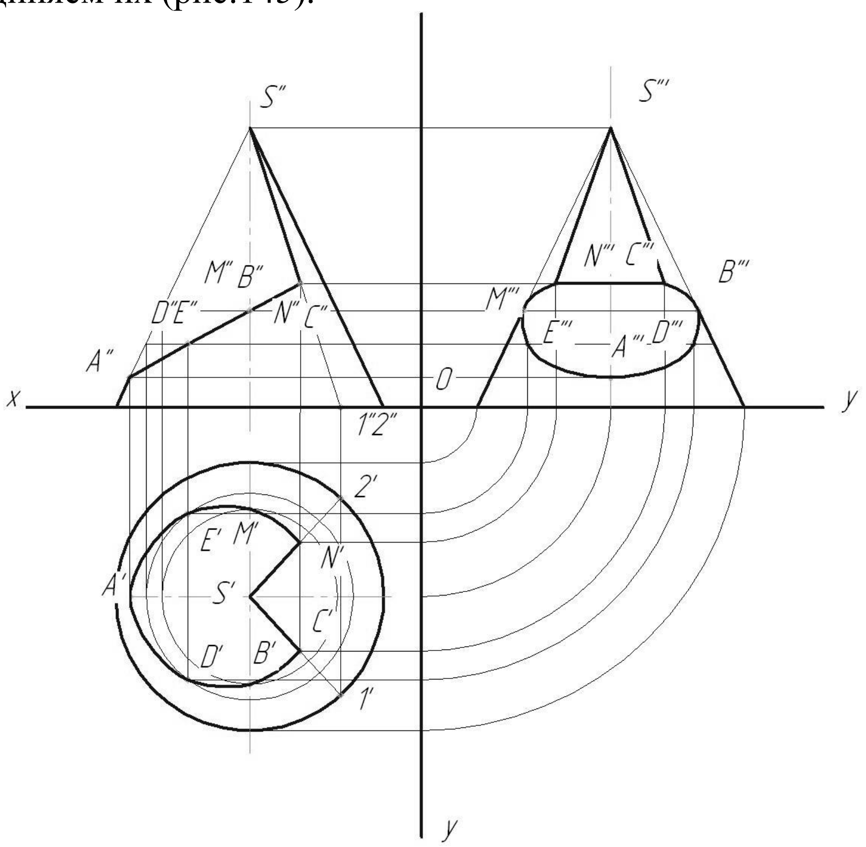


Рис.145

Пример 2. Вырез на цилиндре (рис.146).

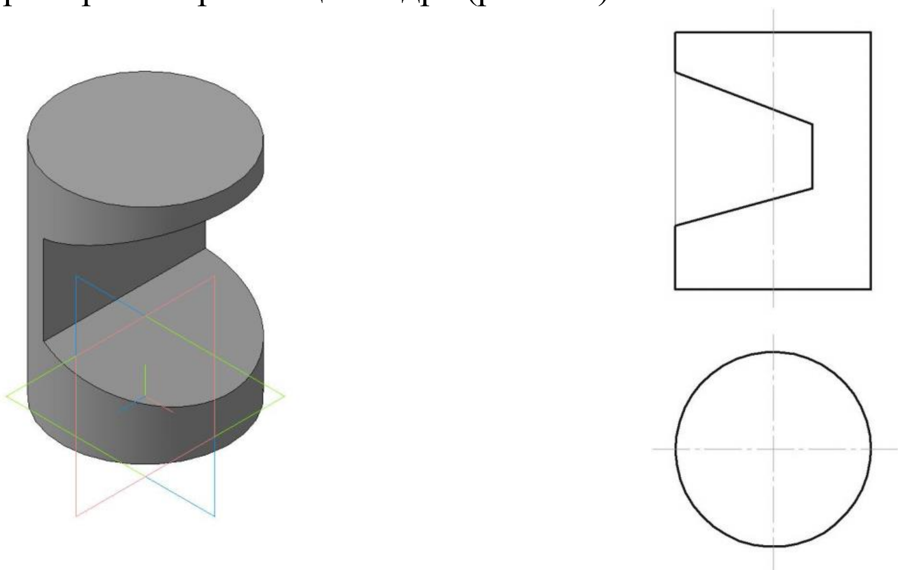


Рис.146

Вырез произведен тремя плоскостями. Наклонные фронтально-проецирующие плоскости рассекут цилиндр по части эллипса, ограниченного прямой. Плоскость, параллельная оси вращения, пересекает поверхность цилиндра по образующим.

1.Отметим на фронтальной проекции выреза фронтальные проекции *A",F",G",K",L",P"*. Характерные точки *D",E" ,M",N"* - на оси симметрии цилиндра, *B",C",T",V "* - отмечены произвольно на линии, принадлежащей поверхности цилиндра. Все точки принадлежат боковой поверхности цилиндра, которая проецируется в окружность на горизонтальной плоскости проекций. Поэтому все горизонтальные проекции точек принадлежат этой окружности (рис.147).

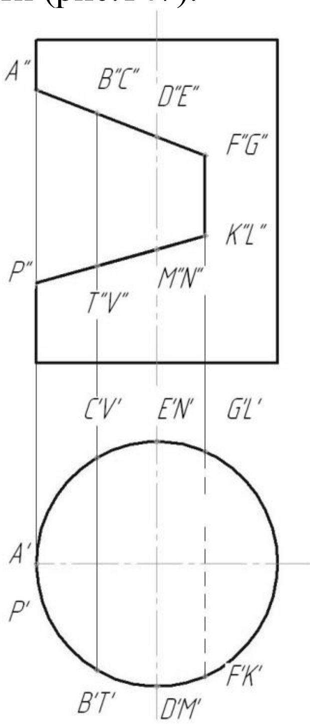


Рис.147

Найдем профильные проекции всех точек. Затем полученные точки соединяем. Линия *GECABDF* - часть эллипса, *FK* и *GL* отрезки прямых, *GF* и *KL*-отрезки прямых, *LNVPTMK* - часть эллипса (рис. 148).

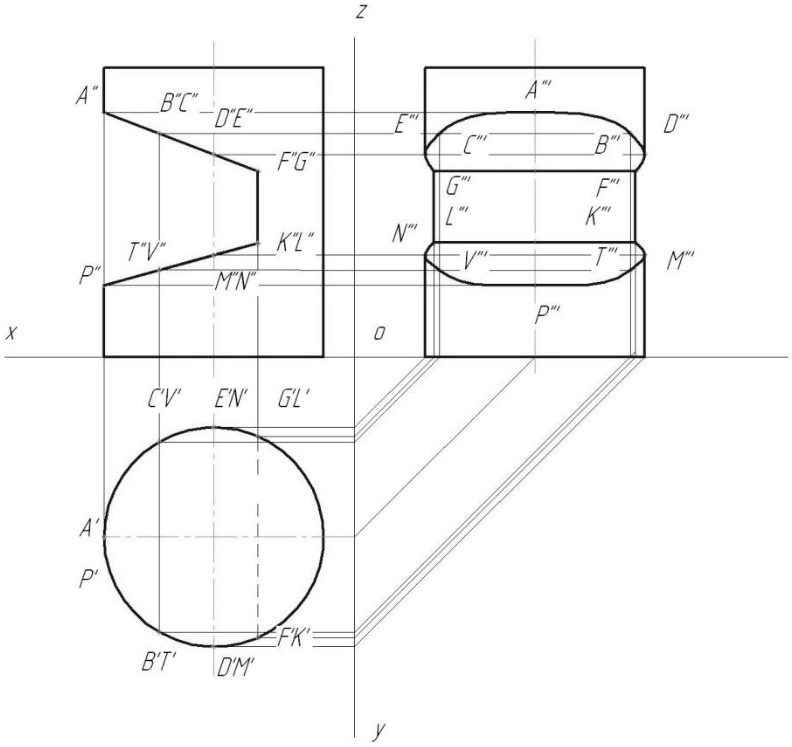


Рис.148

Пример 3. Вырез на призме (рис.149).

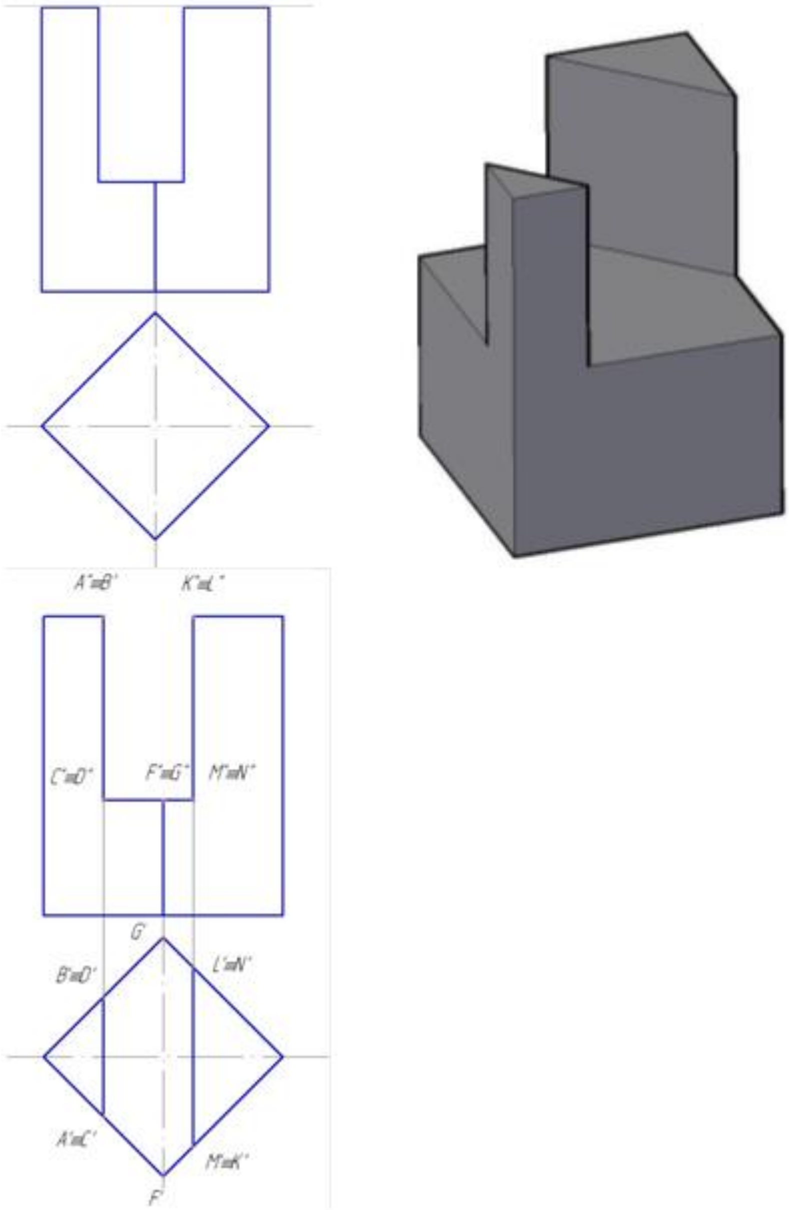


Рис.149

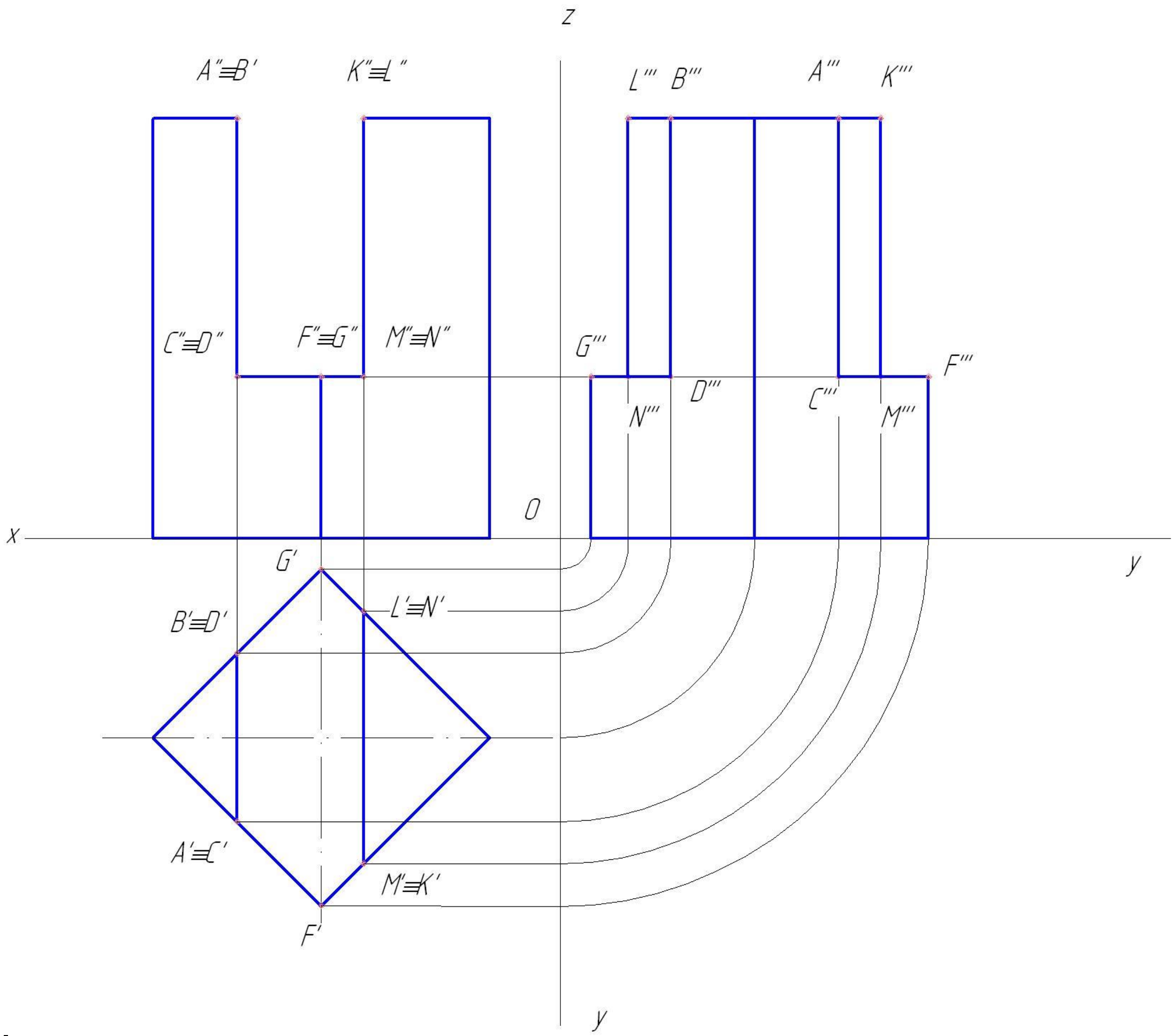
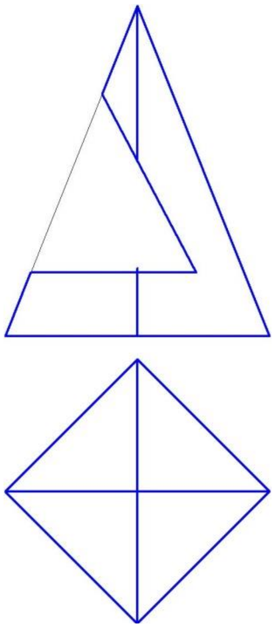
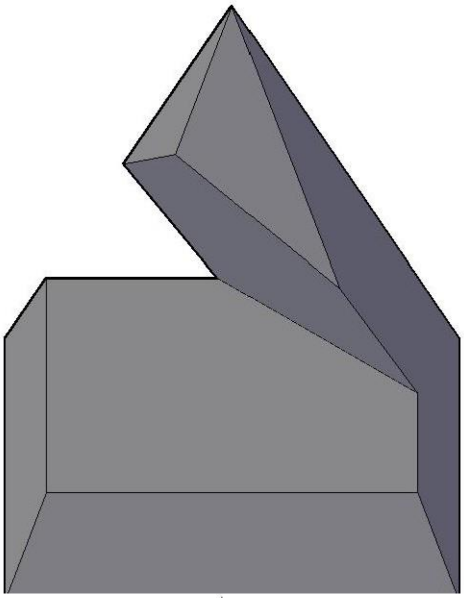
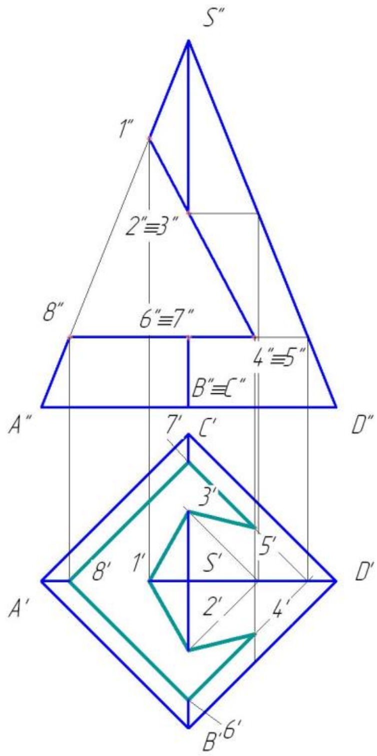


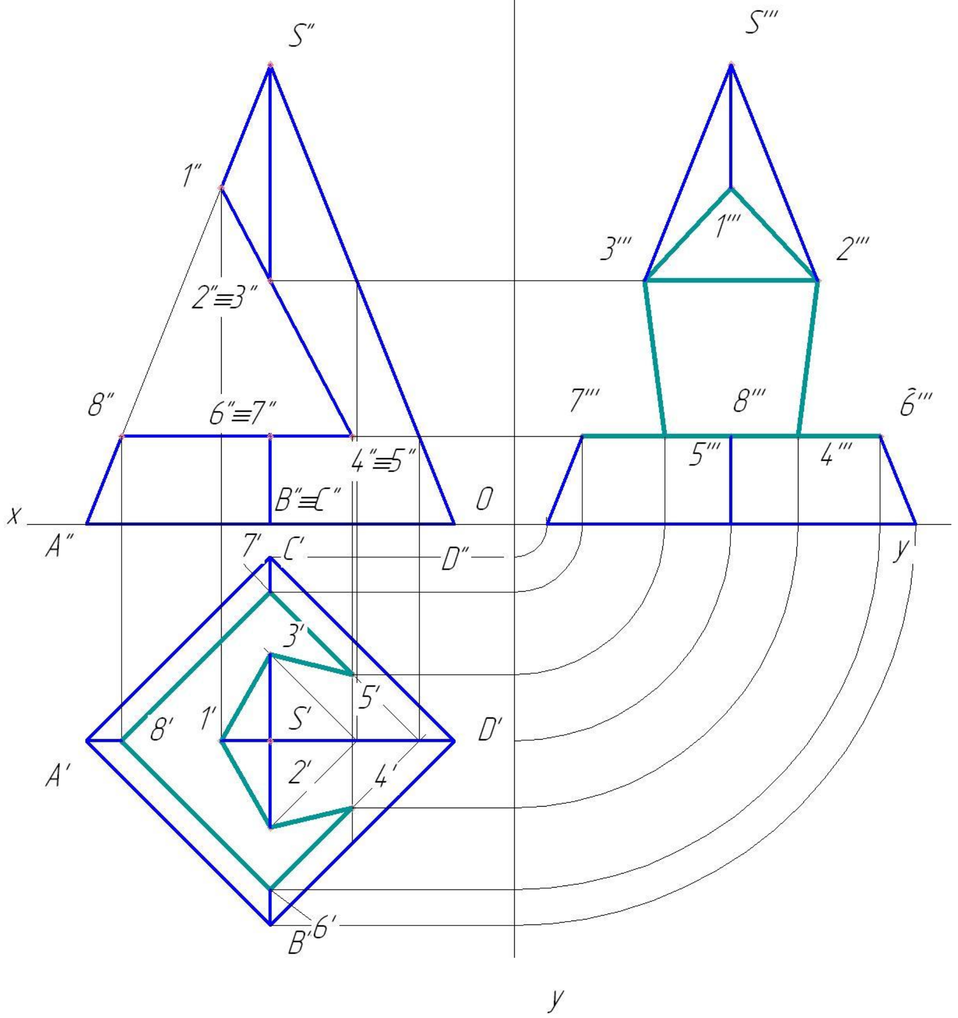
Рис.150

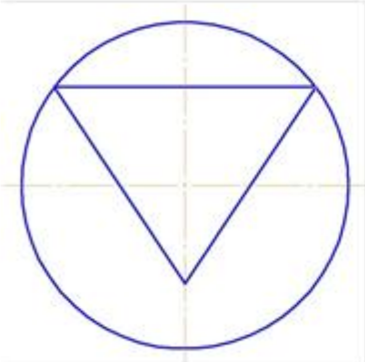
Пример 4. Вырез на пирамиде (рис.150).
Пример 5. Вырез на сфере (рис. 151

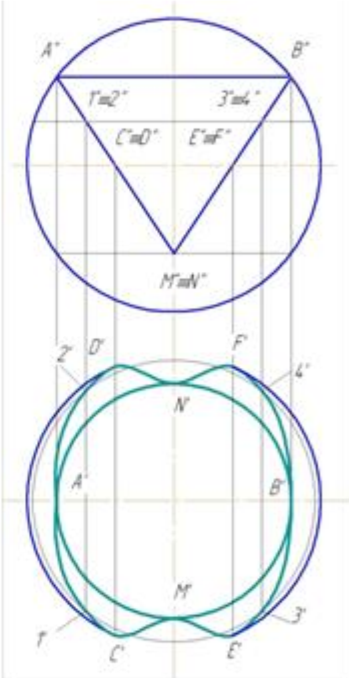


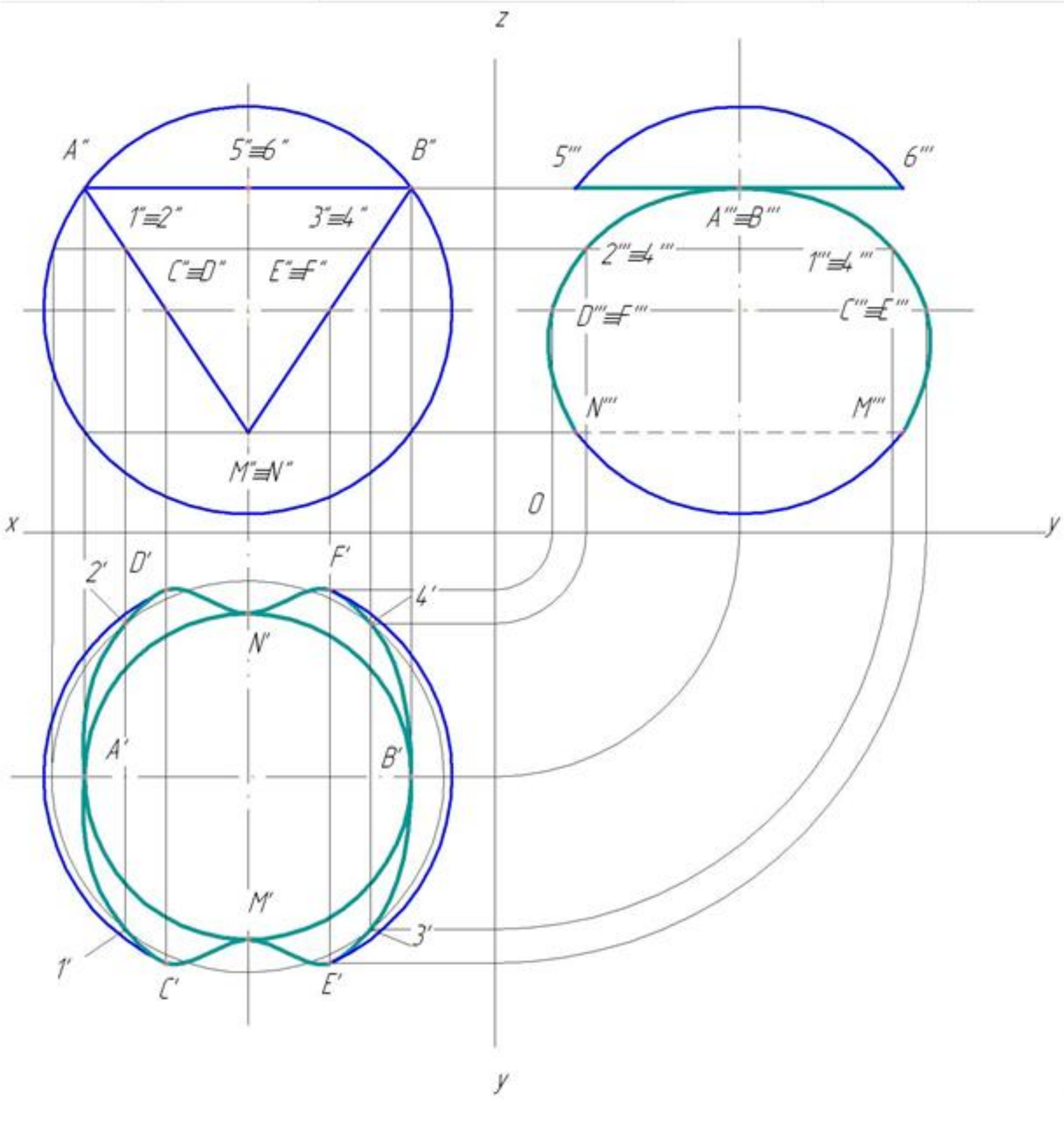



S″
1″
2″≡3″
8″
6″≡7″
4″≡5″
B″≡C″
A″
D″
7′ C′
3′
5′
8′
1′
S′
D′
A′
2′
4′
B′ 6′


S″
1″
2″≡3″
8″
6″≡7″
4″≡5″
B″≡C″
0
x
A″
7′ C′
D″
3′
5′
1′
8′
S′
D′
A′
2′
4′
B′ 6′
S‴
3‴
1‴
2‴
7‴
8‴
6‴
5‴
4‴
y
y




A"
B"
1"≡2"
3"≡4"
C"≡D"
E"≡F"
M"≡N"
2'
D'
F'
4'
N'
A'
B'
M'
1'
3'
C'
E'


z
A"
5"≡6"
B"
5'''
6'''
1"≡2"
3"≡4"
A'''≡B'''
C"≡D"
E"≡F"
2'''≡4'''
1'''≡4'''
D'''≡F'''
C'''≡E'''
N'''
M'''
M"≡N"
O
x
y
2'
D'
F'
4'
N'
A'
B'
M'
3'
1'
C'
E'
y

Библиографический список

1. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. – М.: Наука, 2000 – 272с.

2. Крылов Н.Н. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 2007 – 224с.

3. Локтев О.В. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высшая школа, 2001 – 130с.

4. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.: Машиностроение, 1983 – 240с.

Оглавление

Редактор *Т. С. Хирувимова*
Редактор *Л. В. Лукьянчук*
Компьютерная верстка – *Р. П. Абакаров*

Подписано в печать с оригинал-макета 23.09.11.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Уч.-изд. л. ____. Печ. л. ____. Тираж _____ экз. Заказ № ___. С ____.

Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет
Издательско-полиграфический отдел СПбГЛТУ
194021, Санкт-Петербург, Институтский пер., 5