ВОЕННО – КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ им. А.Ф.МОЖАЙСКОГО
кафедра математики

Математический анализ

Курсовая работа

на тему

Приближенные вычисления в математическом анализе

Курсант 831 / гр.______________________________

Руководитель: проф. Д.А. Булекбаев

1. Отделить корни уравнения $f(x)=0$ графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0.001.		
№ варианта	$f(x)=0$	
1	$\arccos x^2 - x = 0$	0,8241323
2	$\ln x - \frac{1}{1+x^2} = 0$	1,40132162
3	$\ln\ln x - e^{-x^2} = 0$	2.7199475
4	$\mathrm{arctg}(1/x) - x^2 = 0$	0,911185096
5	$x - e^{(1/\sqrt{x})} = 0$	2,0207473 Знак изменен, иначе вещественных корней нет
6	$x^4 - 13x^2 + 36 - \frac{1}{x} = 0$	$\begin{pmatrix} 3.01090773467184878 \\ 1.97502077457005020 \\ 0.02778552365872219 \\ -2.02504205397370811 \\ -2.98867197892691307 \end{pmatrix}$
7	$2x^2 - x^4 - 1 - \frac{1}{x} = 0$	-1,36259858 Условия изменены, иначе один точный корень 1
8	$x - \frac{1}{\mathrm{arctg} x} = 0$	$\pm$1,16233983
9	$x^3 - 3x - 2e^{-x} = 0$	1,78546145
10	$x - \mathrm{arctg}(1/x) = 0$	$\pm$ 0,860333580
11	$\mathrm{tg}\, x - \frac{1}{x} = 0$	3,42600 Наименьший положительный
12	$\sin x^2 - 6x + 1 = 0$	0,17152212
13	$\cos x^2 - 10x = 0$	0.099995001
14	$\arccos(e^x - 3) - x = 0$	1,20989152
15	$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - e^{-x^2} = 0$	0,437906525
16	$e^x - \arccos\sqrt{x} = 0$	
17	$\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{x} = 0$	

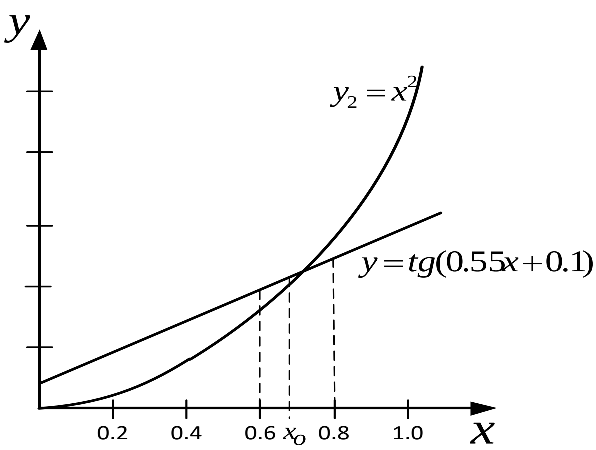
18	$\ln^2 x - \frac{1}{x} = 0$	
19	$\lg \ln x - \frac{1}{1+x^2} = 0$	
20	$\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} = 0$	
21	$\ln \frac{1+x}{1-x} - \cos x^2 = 0$	
22	$e^{-x^2} - \sqrt{x} = 0$	
23	$\operatorname{arctg} x - \ln x = 0$	3,69300
24	$x - \frac{1}{x^4 - 13x^2 + 36} = 0$	$\begin{pmatrix} 3.0109077346718487856 \\ 1.9[illegible]45700502086 \\ 0.027785523658722199 28 \\ -2.02504205397370811 7 \\ -2.98867197892691307 6 \end{pmatrix}$
25	$\frac{1}{3+2\cos x} - x^3 = 0$	0,599047604
26	$2x - e^{2x^2 - x^4 - 1} = 0$	0,19875072 Условия изменены, иначе один корень 1, который очевиден
27	$e^x - 3 - \cos x = 0$	1,2098915
28	$\operatorname{arctg} x + e^x = 0$	-0,60655540 Условия изменены, иначе корней вещественных нет
29	$\frac{1+x}{1-x} - e^{\frac{1}{x}} = 0$	-0,647918229
30	$\arccos x^2 - x^3 = 0$	0,8810
31	$x^3 + x - 5 = 0$	1,516

Образец выполнения задания

1. Отделить корни уравнения $\mathrm{tg}(0.55x+0.1)=x^2$ **графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0.001.**

Решение: Отделим корень графически. Построим графики функций $y_1=\mathrm{tg}(0.55x+0.1)$ и $y_2=x^2$, составив значений этих функций:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y_2=x^2$	0	0.04	0.16	0.36	0.64	1
$0.55x$	0	0.11	0.22	0.33	0.44	0.55
$y_1=\mathrm{tg}(0.55x+0.1)$	0.1	0.21	0.33	0.46	0.60	0.76



Таким образом, положительный корень уравнения заключен в промежутке [0.6; 0.8].

Чтобы уточнить корень методом хорд, определим знаки функции $f(x)=\mathrm{tg}(0.55x+0.1)-x^2$ на концах промежутка [0.6; 0.8] и знак второй производной в этом промежутке:

$f(0.6)=\mathrm{tg}0.43-0.36=0.4586-0.36=0.0986$;

$f(0.8)=\mathrm{tg}0.54-0.64=0.5994-0.64=-0.0406$;

$$f'(x)=\frac{0.55}{\cos^2(0.55x+0.1)}-2x;$$

$$f''(x)=0.55\cdot 2\cos^{-3}(0.55x+0.1)\sin(0.55x+0.1)\cdot 0.55-2=$$
$$=\frac{0.605\sin(0.55x+0.1)}{\cos^3(0.55x+0.1)}-2<0$$ при $x\in[0.6;0.8]$.

Тогда для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n),$$

где $b = 0.8; \quad x_0 = 0.6$.

Точность вычисления можно оценить из соотношения

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

где ξ - точное значение корня, а $m_1 = \min\limits_{[0.6;0.8]} |f'(x)|$.

Вычисления удобно располагать в таблице:

n	x_n	$0.8 - x_n$	$0.55x_n + 0.1$	$\mathrm{tg}(0.55x_n + 0.1)$
0	0.6	0.2	0.43	0.4586
1	0.742	0.058	0.5081	0.5570
2	0.750	0.50	0.5125	0.5627
3	0.7501	0.0498	0.5126	0.5628

n	x_n^2	$f(x_n)$	$f(0.8) - f(x_n)$	$h = \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n)$
0	0.36	0.0986	- 0.1392	- 0.142
1	0.5506	0.0064	- 0.0470	- 0.008
2	0.5625	0.0002	- 0.0408	- 0.0002
3	0.5628	0		

Ответ: $\xi \approx 0.750$.

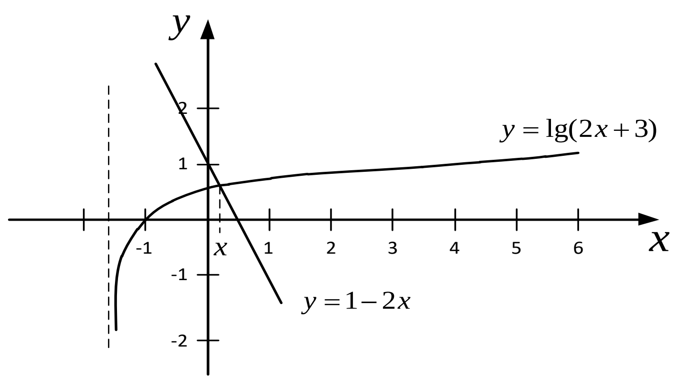
2. Отделить корни уравнения $f(x)=0$ графически и уточнить один из них методом простых итераций с точностью до 0.001.		
№ варианта	$f(x)=0$	**Ответы**
1	$\ln x+(x+1)^3=0$	0,224
2	$x\cdot 2^x=1$	0,641
3	$\sqrt{x+1}=\frac{1}{x}$	0,755
4	$x-\cos x=0$	0,73908513
5	$3x+\cos x+1=0$	– 0,607101648
6	$x+\ln x=0.5$	0,766248608
7	$2-x=\ln x$	1,557
8	$(x-1)^2=0.5e^x$	0,2133086343
9	$(2-x)e^x=0.5$	– 2,105466578
10	$2.2x-2^x=0$	0,781120438 2,4012345
11	$x^2+4\sin x=0$	0 –1,938861
12	$2x-\lg x=7$	3,789221
13	$5x-\ln x=8$	1,7069
14	$3x-e^x=0$	0,61923 1,51221
15	$x(x+1)^2=1$	0,465989
16	$x=(x+1)^3$	–2,347
17	$x^2=\sin x$	0 0,87689
18	$x^3=\sin x$	0 $\pm$ 0,92869
19	$x=\sqrt{\lg(x+2)}$	0,650656121
20	$x^2=\ln(x+1)$	0 0,74683
21	$2x+\lg x=-0.5$	0,154930932
22	$2x+\cos x=0.5$	–0,236125795
23	$\sin 0.5x+1=x^2, \qquad x>0$	–0,78562753 1,260785

24	$0.5x+\lg(x-1)=0.5$	1,53816656
25	$\sin(0.5+x)=2x-0.5$	0,719456165
26	$\lg(x+2)+2x=3$	1,2445
27	$\lg(1+2x)=2-x$	1,41646835
28	$2\sin(x-0.6)=1.5-x$	0,903079149
29	$x+\lg(1+x)=1.5$	1,16461861
30	$x+\cos x=0{,}5$	–0,415082 Условия изменены, иначе один корень 0, который очевиден
31	$x^3+2x+4=0$	–1,1792

Образец выполнения задания

2. Отделить корни уравнения $2x+\lg(2x+3)=1$ **графически и уточнить один из них методом простых итераций с точностью до 0.001.**

Решение: Найдем приближенное значение корней графически. Построим графики функций $y_1=\lg(2x+3)$ и $y_2=1-2x$.



Из графика видно, что уравнение имеет один корень, лежащий в промежутке [0; 0.5].

Чтобы уточнить корень методом простых итераций, приведем уравнение к виду $x=\varphi(x)$. Функцию $\varphi(x)$ будем искать из соотношения $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{k}$, считая, что $|k|\ge\dfrac{Q}{2}$, где $Q=\max\limits_{[0;0.5]}|f'(x)|$; число k имеет тот же знак, что и $f'(x)$ в промежутке [0; 0.5].

Находим

$f(x)=2x+\lg(2x+3)-1$;

$f'(x)=2+\dfrac{0.8686}{2\cdot 0+3}$;

$M = \max\limits_{[0;0.5]} f'(x) = 2 + \dfrac{0.8686}{2 \cdot 0 + 3} \approx 2.2895$; $f'(x) > 0$ при $x \in [0; 0.5]$.

Примем $k = 2$, тогда

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{2} = x - x - \frac{\lg(3x+3)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lg(2x+3).$$

За начальное приближение возьмем $x_0 = 0$, все остальные приближения будем определять из равенства

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lg(2x_n + 3).$$

Точность вычисления можно оценить из соотношения

$$|\xi - x_n| \le \frac{M}{1-M} \cdot |x_n - x_{n-1}|,$$

где ξ - точное значение корня, а $M = \max\limits_{[0;0.5]} |\varphi'(x)|$.

Вычисления удобно располагать в таблице:

n	x_n	$2x_n + 3$	$\lg(2x_n + 3)$	$\frac{1}{2}\lg(2x_n + 3)$
0	0	3	0.4771	0.2386
1	0.2614	3.5228	0.5469	0.2734
2	0.2266	3.4532	0.5382	0.2691
3	0.2309	3.4618	0.5394	0.2697
4	0.2303	3.4606	0.5392	0.2696
5	0.2304			

Ответ: $\xi \approx 0.230$.

3.Используя метод Эйлера – Коши, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0.2) = 0.25$ на отрезке [0.2; 1.2] с шагом $h = 0.1$. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.	
№ варианта	$y' = f(x,y)$
1	$y' = 0.133(x^2 + \sin 2x) + 0.872y$
2	$y' = 0.215(x^2 + \cos 1.5x) + 1.283y$
3	$y' = 0.158(x^2 + \sin 0.8x) + 1.164y$
4	$y' = 0.173(x^2 + \cos 0.7x) + 0.754y$
5	$y' = 0.221(x^2 + \sin 1.2x) + 0.452y$
6	$y' = 0.163(x^2 + \cos 0.4x) + 0.635y$
7	$y' = 0.218(x^2 + \sin 1.6x) + 0.718y$
8	$y' = 0.145(x^2 + \cos 0.5x) + 0.842y$
9	$y' = 0.213(x^2 + \sin 1.8x) + 0.368y$
10	$y' = 0.127(x^2 + \cos 0.6x) + 0.573y$
11	$y' = 0.232(x^2 + \sin 1.4x) + 1.453y$
12	$y' = 0.417(x^2 + \cos 0.8x) + 0.972y$
13	$y' = 0.324(x^2 + \sin 1.5x) + 1.612y$
14	$y' = 0.263(x^2 + \cos 1.2x) + 0.453y$
15	$y' = 0.372(x^2 + \sin 0.7x) + 0.758y$
16	$y' = 0.343(x^2 + \cos 0.4x) + 1.315y$
17	$y' = 0.276(x^2 + \sin 1.6x) + 0.988y$
18	$y' = 0.173(x^2 + \cos 0.6x) + 1.534y$
19	$y' = 0.258(x^2 + \sin 0.4x) + 0.724y$
20	$y' = 0.317(x^2 + \cos 1.4x) + 1.344y$
21	$y' = 0.166(x^2 + \sin 1.1x) + 0.883y$

22	$y' = 0.215(x^2 + \cos 0.9x) + 1.213y$
23	$y' = 0.188(x^2 + \sin 1.5x) + 0.885y$
24	$y' = 0.314(x^2 + \cos 0.6x) + 0.772y$
25	$y' = 0.418(x^2 + \sin 1.2x) + 1.344y$
26	$y' = 0.273(x^2 + \cos 1.3x) + 0.687y$
27	$y' = 0.176(x^2 + \sin 0.8x) + 1.247y$
28	$y' = 0.245(x^2 + \cos 0.4x) + 1.452y$
29	$y' = 0.184(x^2 + \sin 0.6x) + 0.747y$
30	$y' = 0.212(x^2 + \cos 1.2x) + 1.544y$
31	$y' = 0.122(x^2 + \sin 0.8x) + 1.121y$

Образец выполнения задания

4. Используя метод Эйлера – Коши, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = 0.185(x^2 + \cos 0.7x) + 1.843y$**, удовлетворяющего начальному условию** $y(0.2) = 0.25$ **на отрезке [0.2; 1.2] с шагом** $h = 0.1$**. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.**

Решение:

Используем формулу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = h \cdot f(x_{i+1}, y_i + k_1).$$

Вычисления удобно располагать в таблице:

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	k_1	$f(x_{i+1}, y_i + k_1)$	k_2	$\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$
0	0.2	0.25	0.6513	0.0651	0.7784	0.0778	0.0715
1	0.3	0.3215	0.7901	0.0790	0.9455	0.0946	0.0868
2	0.4	0.4083	0.9599	0.0960	1.1495	0.1150	0.1055
…	…	…	…	…	…	…	…

Решения дают значения x_i и $y(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, ..., 10$) (первые три столбца таблицы).

Ответ:

i	x_i	y_i
0	0.2	0.25
1	0.3	0.3215
2	0.4	0.4083
…	…	…

4.Используя метод Рунге – Кутта, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$ на отрезке [0;1] с шагом $h = 0.1$. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.	
№ варианта	$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$
1	$y' = 1 + 0.2y\sin x - y^2$, $y(0) = 0$
2	$y' = \cos(x+y) + 0.5(x-y)$, $y(0) = 0$
3	$y' = \dfrac{\cos x}{x+1} - 0.5y^2$, $y(0) = 0$
4	$y' = (1-y^2)\cos x + 0.6y$, $y(0) = 0$
5	$y' = 1 + 0.4y\sin x - 1.5y^2$, $y(0) = 0$
6	$y' = \dfrac{\cos y}{x+2} + 0.3y^2$, $y(0) = 0$
7	$y' = \cos(1.5x+y) + (x-y)$, $y(0) = 0$
8	$y' = 1 - \sin(x+y) + \dfrac{0.5y}{x+2}$, $y(0) = 0$
9	$y' = \dfrac{\cos y}{1.5+x} + 0.1y^2$, $y(0) = 0$
10	$y' = 0.6\sin x - 1.25y^2 + 1$, $y(0) = 0$
11	$y' = \cos(2x+y) + 1.5(x-y)$, $y(0) = 0$
12	$y' = 1 - \dfrac{0.1y}{x+2} - \sin(2x+y)$, $y(0) = 0$
13	$y' = \dfrac{\cos y}{1.25+x} - 0.1y^2$, $y(0) = 0$
14	$y' = 1 + 0.8y\sin x - 2y^2$, $y(0) = 0$
15	$y' = \cos(1.5x+y) + 1.5(x-y)$, $y(0) = 0$
16	$y' = 1 - \sin(2x+y) + \dfrac{0.3y}{x+2}$, $y(0) = 0$
17	$y' = \dfrac{\cos y}{1.75+x} - 0.5y^2$, $y(0) = 0$
18	$y' = 1 + (1-x)\sin y - (2+x)y$, $y(0) = 0$
19	$y' = (0.8-y^2)\cos x + 0.3y$, $y(0) = 0$
20	$y' = 1 + 2.2\sin x + 1.5y^2$, $y(0) = 0$
21	$y' = \cos(x+y) + 0.75(x-y)$, $y(0) = 0$

22	$y' = 1 - \sin(1.25x + y) + \frac{0.5y}{x+2}, \quad y(0) = 0$
23	$y' = \frac{\cos y}{x+2} - 0.3y^2, \quad y(0) = 0$
24	$y' = 1 - \sin(1.75x + y) + \frac{0.1y}{x+2}, \quad y(0) = 0$
25	$y' = \frac{\cos y}{1.25 + x} - 0.5y^2, \quad y(0) = 0$
26	$y' = \cos(1.5x + y) - 2.25(x + y), \quad y(0) = 0$
27	$y' = \frac{\cos y}{1.5 + x} - 1.25y^2, \quad y(0) = 0$
28	$y' = 1 - (x-1)\sin y + 2(x + y), \quad y(0) = 0$
29	$y' = 1 - \sin(0.75x - y) + \frac{1.75y}{x+1}, \quad y(0) = 0$
30	$y' = \cos(x - y) + \frac{1.25y}{1.5 + x}, \quad y(0) = 0$
31	$y' = 0.4\sin x - 1.2y^2 + 1, \quad y(0) = 0$

Образец выполнения задания

4. Используя метод Рунге – Кутта, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x, y) = 1 + 0.2y\sin x - 1.5y^2$**, удовлетворяющего начальному условию** $y(0) = 0$ **на отрезке [0;1] с шагом** $h = 0.1$**. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.**

Решение:

Значения $y_{i+1} = y(x_{i+1})$, где $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ определятся по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}),$$

$$k_3 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3).$$

Вычисления удобно располагать в таблице:

x	$y(x)$	$\sin x$	$0.2y\sin x$	$-1.5y^2$	$f(x,y)$	$h\cdot f(x,y)$	Δy
0	0	0	0	0	1	0.1	0.1000
0.05 0.05 0.10	0.0500 0.0498 0.0997	0.0500 0.0500 0.0998	0.0500 0.0500 0.0020	- 0.0038 - 0.0037 - 0.0149	0.9967 0.9968 0.9871	0.0997 0.0997 0.0987	0.1994 0.1994 0.0987
							$\frac{1}{6}\cdot 0.5979 =$ $= 0.0996$
0.10	0.0997	0.0998	0.0020	- 0.0149	0.9871	0.0987	0.0987
0.15 0.15 0.20	0.1490 0.1482 0.1968	0.1494 0.1494 0.1987	0.0045 0.0044 0.0078	- 0.0333 - 0.0329 - 0.0581	0.9712 0.9715 0.9497	0.0971 0.0972 0.0950	0.1942 0.1944 0.0950
							$\frac{1}{6}\cdot 0.5823 =$ $= 0.0970$
0.20	0.1966	0.1997	0.0078	- 0.0580	0.9498	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Окончательные значения x_i и $y(x_i)$ записать в отдельной таблице:

x	$y(x)$
0	0
0.10	0.0997
0.20	0.1966
…	…