Министерство образования и науки российской федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
(математика – 1)

Методические указания и контрольная работа № 2
для студентов 1-го курса заочной формы обучения
технических специальностей

Санкт-Петербург
2013

Составители: Ю.А.Гусман, А.О.Смирнов, В.И.Франк.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор В.Г.Фарафонов

Методические указания и контрольная работа № 2 предназначены для студентов 1-го курса заочной формы обучения технических специальностей Излагаются основы теории дифференциального и интегрального исчисления; приведены варианты соответствующих контрольных заданий. Даны образцы выполнения типового контрольного задания.

Подготовлены к публикации кафедрой высшей математики и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом
Санкт-Петербургского государственного университета
аэрокосмического приборостроения.

Редактор
Верстальщик

Сдано в набор Подписано к печати
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.-печ. Л.
Уч.- изд. Л. Тираж экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., д. 67

Общие методические указания

Общий курс математики является фундаментом математического образования. Его изучение необходимо для успешного усвоения в дальнейшем общенаучных и специальных дисциплин.

Основной формой обучения студента заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. В помощь студентам-заочникам в университете организовано чтение лекций и практические занятия. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача экзаменов.

Курс высшей математики (математика – 1) изучается студентами технических специальностей в первом и втором семестре. В первом семестре студенты сдают два экзамена: первый – по линейной алгебре и аналитической геометрии; второй – по дифференциальному и интегральному исчислению одной переменной. Во втором семестре студенты изучают теорию рядов, функций нескольких переменных, двойные и криволинейные интегралы.

Для изучения теоретического материала и решения задач по этим темам рекомендуется следующая литература:

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман // СПб., 2005. 604 с.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С.Пискунов // Учебник для втузов в 2-х т. Т.II-М.: Интеграл-Пресс, 2009. 544 с.
3. Бугров С.Я., Никольский С.М. Высшая математика: Дифференциальное и интегральное исчисление / С.Я.Бугров, С.М.Никольский // Издательство Дрофа, 2004. 318 с.

4. Виленкин Н.Я. Алгебра и начала математического анализа /Н.Я.Виленкин, О.С.Ивашев-Мусатов, С.И.Шварцбурд // М.: Мнемозина, 2011. 351 с.
5. Вешев,Н.А.. Пределы и производная. Методические указания к решению контрольной работы № 1 по математическому анализу./ Н.А.Вешев, Г.М.Головачев, И.А.Губкин, О.Ю.Иванова // СПб.: ГУАП, 2012. 27 с.

В процессе изучения курса высшей математики студенты должны выполнить на первом курсе 3 контрольные работы. В первом семестре студенты выполняют две контрольные работы по математике. Данное пособие посвящено дифференциальному и интегральному исчислению; выполнение 2-й контрольной работы покажет степень усвоения этой темы.

Указания по выполнению контрольных работ

Студент должен выполнять контрольные работы по заданным задачам конкретного варианта, номер которого получается из следующей формулы: следует разделить номер учебного шифра на 20, остаток от деления – номер варианта (если остаток 0, то номер варианта – 20).

При оформлении и выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1. В начале работы должны быть ясно написаны фамилия студента, инициалы, номер студенческого билета, шифр, номер контрольной работы и дата отсылки работы в университет.

2. Контрольная работа выполняется в тетради (каждая контрольная работа в отдельной тетради), а не на листах, обязательно чернилами или шариковой ручкой (но не красными) с полями для замечаний рецензента.

3. Решения задач контрольной работы располагаются в порядке номеров, указанных в контрольных работах; перед решением задачи должно быть записано полностью ее условие, исходя из данных своего варианта задания. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку,

переписывая условие задачи, следует заменить общие данные конкретными из своего варианта.

4. Решения задач и объяснения к ним должны быть подробными, аккуратными, без сокращений слов; чертежи можно выполнять от руки.

Получив из университета прорецензированную работу, студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и недочеты. Если работа не зачтена, она должна быть в короткий срок либо выполнена заново целиком, либо должны быть заново решены задачи, указанные рецензентом. Зачтенные контрольные работы предъявляют преподавателю на экзамене.

Краткие теоретические сведения

1. Дифференциальное исчисление

1.1 Функции и их графики

1.1.1 Понятие функции и ее графика

Понятие функции - фундаментальное понятие математического анализа.

Пусть X - числовое множество. Правило, сопоставляющее каждому числу x из X некоторое число y,называют числовой функцией, заданной на X. Переменную, «пробегающую» множество X, называют аргументом функции. Стандартное обозначение функции y=f(x). Множество X называют областью задания или областью определения функции f и обозначают D(f). С каждой функцией связывают множество $f\ \ x\ /\ x\in X$. Его называют областью значений функции f и обозначают E(f).

В случае, когда числовое множество X совпадает с множеством N натуральных чисел, функцию называют числовой последовательностью. Для числовых последовательностей обычно вместо f(n) пишут x_n и обозначают: (x_n). Числа x_1, x_2,…,x_n,… называют членами последовательности.

Для наглядного изображения числовых функций используют их графики. Каждой паре чисел (x;f(x)), $x\epsilon X$, ставят в соответствие точку M(x;f(x)) координатной плоскости. Получившееся при этом множество точек называют графиком функции.

1.1.2 Основные элементарные функции и их графики

Функции, которые изучаются в школьной программе, обычно называются элементарными.

Перечислим основные элементарные функции и для наглядности дадим их графики:

1) Степенная функция: $y = x^{\alpha}$, где α вещественное число

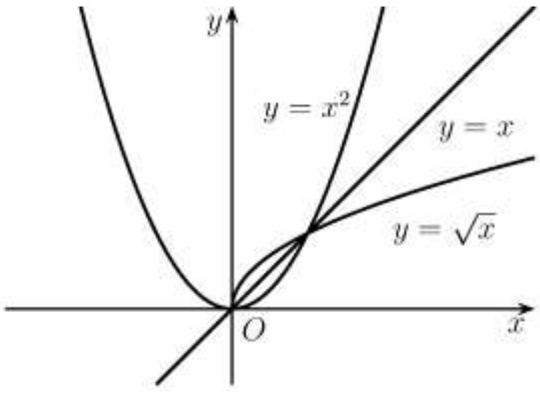


рис. 1.1. Степенная функция

2) Показательная функция: $y = a^x$, где – a положительное число, не равное единице

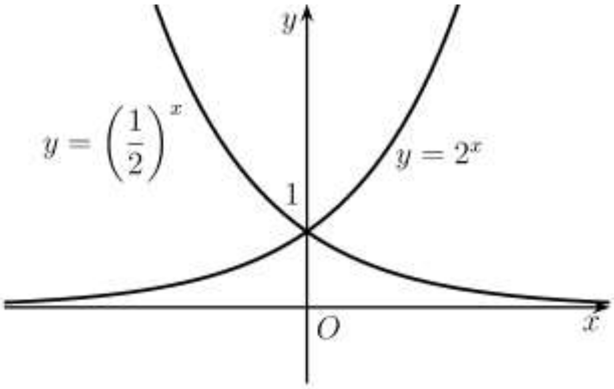


рис. 1.2. Показательная функция

3) Логарифмическая функция: $y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$ Функция определена при x>0.

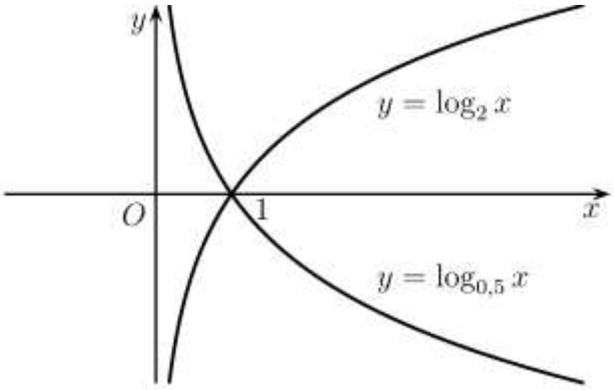


рис. 1.3. Логарифмическая функция

4) Тригонометрические функции: y=sinx (рис. 1.4). Функция имеет наименьший период равный 2π.

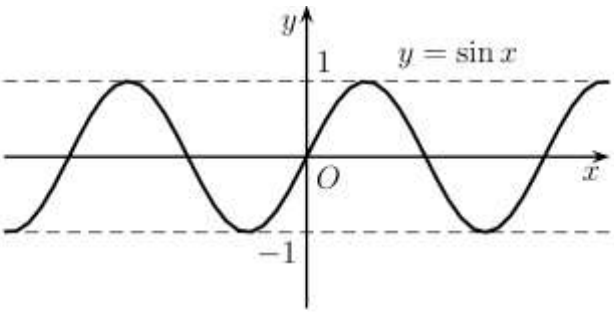


рис. 1.4. График синуса

y=cosx (рис. 1.5). Функция имеет наименьший период равный 2π.

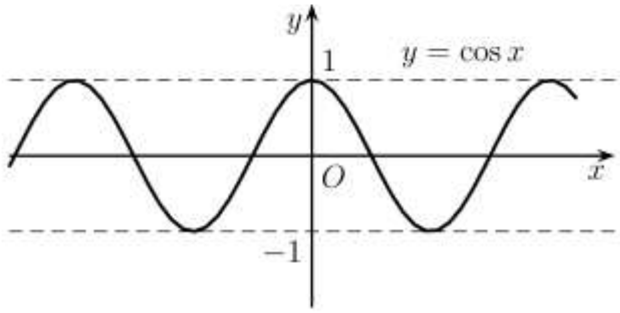
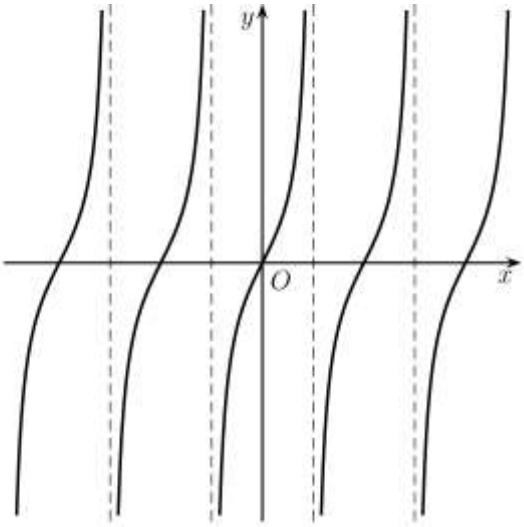


рис. 1.5. График косинуса

y=tgx (рис. 1.6). Функция имеет наименьший период равный π.

y=ctgx (рис. 1.7). Функция имеет наименьший период равный π.



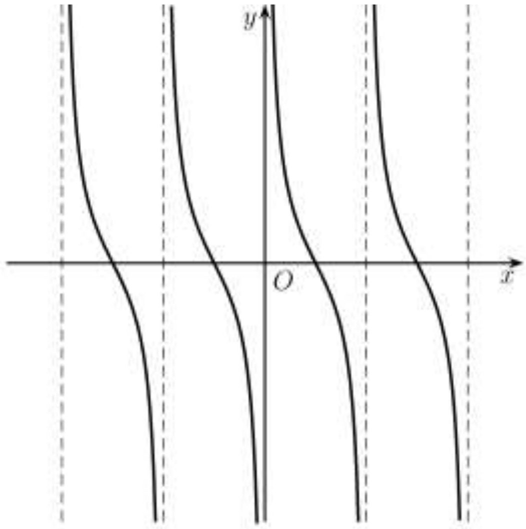


рис. 1.6. График тангенса рис. 1.7. График котангенса

К основным элементарным функциям также обычно относят и обратные тригонометрические функции:

y=axcsinx, $-1 \le x \le 1, \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2},$ (рис. 1.8);

y=arccosx, $-1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \pi,$ (рис. 1.9);

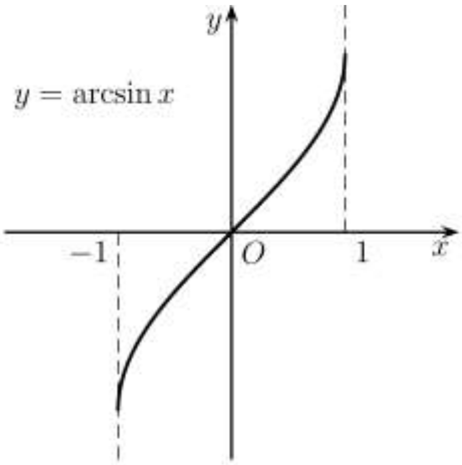


рис 1.8. График арксинуса

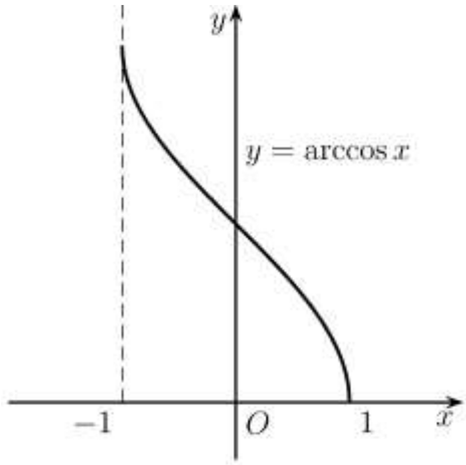


рис. 1.9. График арккосинуса

y=arctgx, $-\infty < x < \infty, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$ (рис. 1.10);

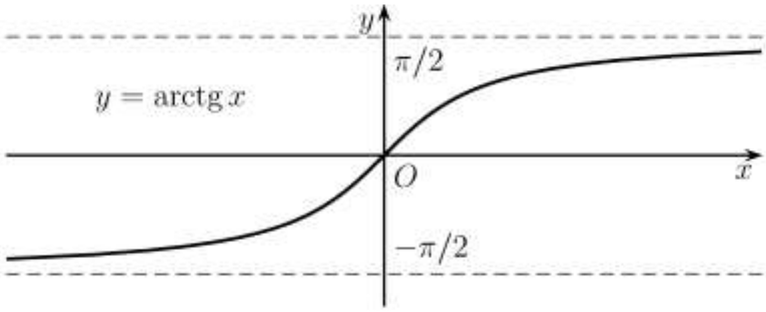


рис. 1.10. График арктангенса

y=arcctgx, $-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \pi,$ (рис. 1.11);

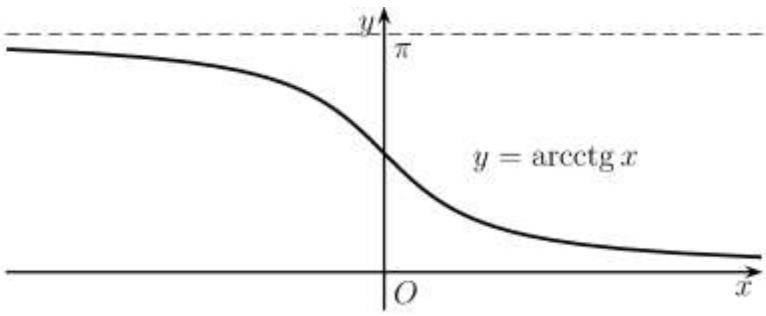


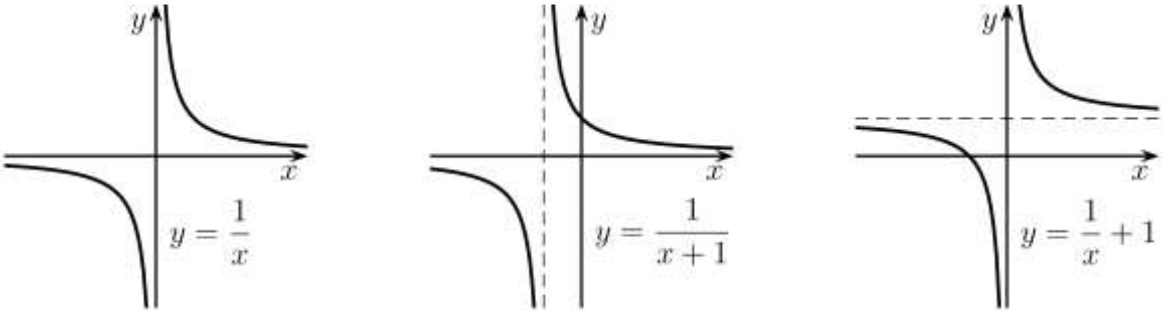
рис. 1.11. График арккотангенса

Обычно обратные тригонометрические функции возникают в результате интегрирования или при решении тригонометрических уравнений.

1.1.3 Простейшие преобразования графиков функций

Проиллюстрируем, как простейшие преобразования функций отражают изменения на их графиках:

Пусть *F(x)=f(x+a)+b*. Тогда график функции *F(x)* получается из графика функции *f(x)* с помощью параллельного переноса, при котором начало координат *O*(0;0) переходит в точку *A*(-*a*;*b*) (рис. 1.12).

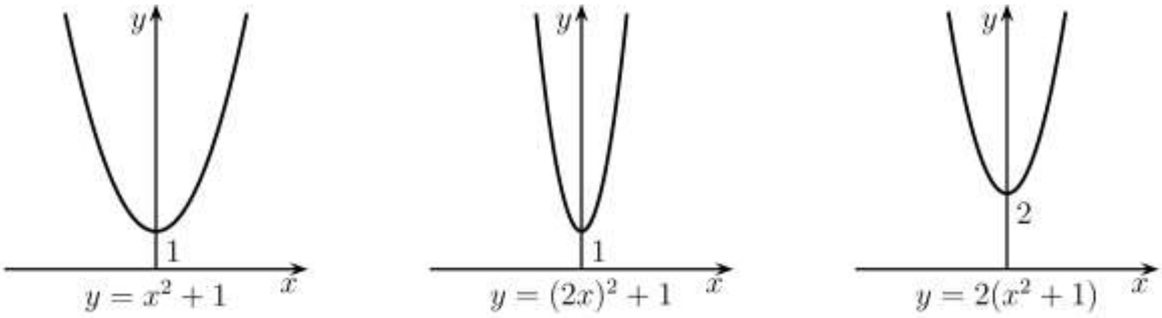


а) б) в)

рис. 1.12. Параллельный перенос

Следует помнить, что для почти всех функций $f(x+a) \neq f(x)+f(a)$.

Если же $k \neq 0,\ \ m \neq 0$ и $F(x) = kf(mx)$, то график функции *F(x)* получается из графика функции *f(x)* с помощью растяжения вдоль оси ординат с коэффициентом *k* и сжатия вдоль оси абсцисс с коэффициентом *m* (рис. 1.13).



а) б) в)

рис. 1.13. Растяжение и сжатие

Пример 1.1.1 Построить график функции $y = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$

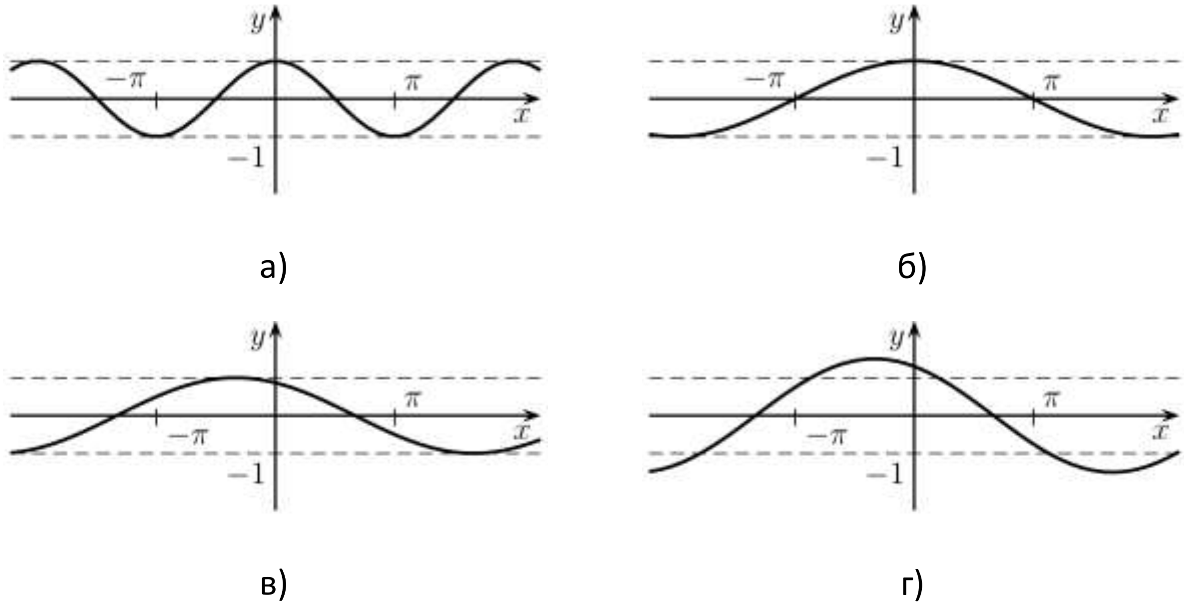
преобразованием графика функции y=cos x.

Решение.

Построим поэтапно: $y_1 = \cos x$ ðèñ.1.14 à) ; $y_2 = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ ðèñ.1.14 á) ;

$y_3 = \cos\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$ ðèñ.1.14 â) ; $y_4 = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$ ðèñ.1.14 ã) .

Строим график косинуса; растягиваем его в два раза вдоль оси абсцисс; сдвигаем влево на $\frac{\pi}{3}$ и, окончательно, растягиваем в полтора раза вдоль оси ординат (рис. 1.14).



а) б)

в) г)

рис. 1.14. Поэтапное построение графика

1.2 Теория пределов

1.2.1 Основные определения

Основные понятия теории пределов дадим первоначально на примере последовательностей (более общие понятия теории пределов для функций смотри, например, в рекомендуемой литературе).

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существует число M>0 такое, что для любого n выполняется неравенство $|x_n|<M$.

Определение. Конечное число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ если для сколь угодно малого положительного числа ε существует номер $N=N(\varepsilon)$, зависящий от ε, такой, что для всех значений x_n с номерами $n \geq N$, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность $\{x_n\}$, все значения которой равны одному и тому же числу a, называют постоянной и обозначают просто через a. Естественно пределом постоянной величины является сама постоянная.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если a=0.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой величиной, если для любого сколь угодно большого $E>0$ существует номер $N=N(E)$, зависящий от E, такой, что для всех значений x_n с номерами $n \geq N$, выполняется неравенство $|x_n|>E$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty.$

Последовательность, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой и наоборот. Т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0,$ и, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty.$ Заметим также, что любая положительная степень n является бесконечно большой, а любая отрицательная — бесконечно малой.

1.2.2 Основные теоремы теории пределов

Теорема 1. (О единственности предела) Последовательность не может иметь два различных (конечных) предела.

Теорема 2. (Предел суммы) Предел суммы двух величин, каждая из которых имеет предел, равен сумме пределов этих величин. Иначе говоря, если

$z_n = x_n + y_n$, $x_n \to a$, $y_n \to b$, то $z_n \to a+b$.

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b \right).$$

Теорема 3. (Предел разности) Предел разности двух величин, каждая из которых имеет предел, равен разности пределов этих величин. Иначе говоря, если

$z_n = x_n - y_n$, $x_n \to a$, $y_n \to b$, то $z_n \to a-b$.

Теорема 4. (Предел произведения) Предел произведения двух величин, каждая из которых имеет предел, равен произведению пределов этих величин. Иначе говоря, если

$z_n=x_n \cdot y_n$, $x_n \to a$, $y_n \to b$, то $z_n \to a \cdot b$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n)=c\lim_{n\to\infty}x_n.$$

Теорема 5. (Предел частного) Предел отношения двух переменных, каждая из которых имеет предел, равен отношению пределов этих величин, если предел знаменателя отличен от нуля. Иначе говоря, если

$z_n=x_n/y_n$, $x_n \to a$, $y_n \to b$, $b \neq 0$, то $z_n \to a/b$.

1.2.3 Случаи неприменимости основных теорем теории пределов. Неопределенность.

Основные теоремы теории пределов неприменимы, если переменные не имеют конечных пределов, или, в случае отношения, если в числителе и в знаменателе стоит бесконечно малая величина. В этом случае говорят, что возникает понятие неопределенности.

Неопределенностью вида $[\infty-\infty]$ называется сумма двух бесконечно больших величин разных знаков (или разность двух бесконечно больших величин одного знака).

Неопределенностью вида $[0\cdot\infty]$ называется произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую.

Неопределенностью вида $[0/0]$ называется отношение двух бесконечно малых величин.

Неопределенностью вида $[\infty/\infty]$ называется отношение двух бесконечно больших величин.

Нахождение конкретного ответа в случае неопределенности называется раскрытием неопределенности.

1.2.4 Замечательные пределы. Раскрытие неопределенностей.

Большая часть неопределенностей раскрывается при помощи известных, стандартных примеров, которые обычно называются замечательными пределами.

1) Неопределенность [∞/∞]:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+...+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+...+b_m} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k(a_0+\frac{a_1}{n}+...+\frac{a_k}{n^k})}{n^m(b_0+\frac{b_1}{n}+...+\frac{b_m}{n^m})},$$

и, если

k=m, то $x_n \to a_0/b_0$;

k<m, то $x_n \to 0$; (1.1)

k>m, то x_n является бесконечно большой величиной.

Пример 1.2.1 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}=[\frac{\infty}{\infty}]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n^2})}{(1-\frac{1}{n^2})}=\frac{1+0}{1-0}=1.$

Ответ: 1.

Пример 1.2.2 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ \ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\ $.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ \ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\ =\infty\cdot 0=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\ \cdot\ \sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

2) Неопределенность $[1^\infty]$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828..., \qquad (1.2)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e,$$

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ x\to\infty}}(1+\alpha)^{x}=e^{\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ x\to\infty}}(\alpha x)},$$

3) Неопределенность [0/0]:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (1.3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e. \qquad (1.4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (1.5)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

г) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k. \qquad (1.6)$$

Пример 1.2.2 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}=[1^{\infty}]=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{[\frac{0}{0}]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\right)}=e^{\frac{1}{2}\cdot 1}=\sqrt{e}.$$

Ответ: $\sqrt{e}$..

1.2.5 Использование эквивалентных бесконечно малых при раскрытии неопределенностей

Наиболее интересным типом неопределенностей является случай [0/0]. (Мы всегда имеем дело с этой неопределенностью при вычислении производных – смотри раздел 1.3). При вычислении этих неопределенностей удобно пользоваться понятием эквивалентных бесконечно малых.

Пусть бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ таковы, что выполняется условие $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$ Тогда бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными и обозначаются $\alpha\sim\beta.$

Пользуясь замечательными пределами, дадим таблицу эквивалентных бесконечно малых при стремлении аргумента к нулю:

$$\sin x \sim x, \tag{1.7}$$

$$tgx \sim x, \tag{1.8}$$

$$arc\sin x \sim x, \tag{1.9}$$

$$arctgx \sim x, \tag{1.10}$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \tag{1.11}$$

$$e^x-1 \sim x, \tag{1.12}$$

$$a^x-1 \sim x\ln a, \tag{1.13}$$

$$\ln(1+x) \sim x, \tag{1.14}$$

$$\log_a(1+x) \sim x\log_a e, \tag{1.15}$$

$$(1+x)^\alpha-1 \sim \alpha x. \tag{1.16}$$

При раскрытии неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$, разрешается в числителе и знаменателе величины заменять на эквивалентные, что может существенно упростить вычисление.

Пример 1.2.3 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{tg8x}.$

Решение.

Учитывая, что выражения в числителе и знаменателе являются бесконечно малыми, так как $e^{5x}-1\sim 5x,$ а $tg8x\sim 8x,$ то

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{tg8x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{8x}=\frac{5}{8}.$$

Ответ: 0,625.

1.3 Производная

1.3.1 Производная; ее геометрический и механический смысл

Производной функции $f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.17}$$

Геометрический смысл производной функции $f(x)$, вычисленной в точке x_0, есть тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в этой точке.

Механический смысл производной заключается в том, что если материальная точка за время t проходит путь $S(t)$, то производная функции $S(t)$, вычисленная в момент t_0, равна мгновенной скорости материальной точки в этот момент времени.

1.3.2 Примеры непосредственного вычисления производных. Таблица производных

Приведем простые примеры непосредственного вычисления производных.

Пример 1.3.1.

Вычислить производную $y=x^3$.

Решение.

Составим и преобразуем с помощью формулы разность кубов

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot \left((x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)x + x^2\right)}{\Delta x} =$$

$$= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

И тогда, переходя к пределу, получаем:

Ответ. $y'(x) = 3x^2$.

Пример 1.3.2.

Вычислить производную $y = \frac{1}{x}$.

Решение.

Составим и преобразуем

$$\frac{\vartriangle y}{\vartriangle x}=\frac{f(x+\vartriangle x)-f(x)}{\vartriangle x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\Delta x}\frac{x-\ x+\Delta x}{x\ \ x+\Delta x}=-\frac{1}{x\ \ x+\Delta x}.$$

И тогда, переходя к пределу, получаем:

Ответ. $y'(x)=-\frac{1}{x^2}.$

Пользуясь определением (1.17) , замечательными пределами (1.2) – (1.6) и таблицей эквивалентных бесконечно малых (1.7)–(1.16), запишем таблицу производных основных элементарных функций:

Таблица производных основных элементарных функций

1) $(C)'=0.$ (1.18)

2) $(x)'=1.$ (1.19)

3) $(x^k)'=kx^{k-1}.$ (1.20)

4) $(a^x)'=a^x\ln a.$ (1.21)

5) $(e^x)'=e^x.$ (1.22)

6) $\log_a x\ '=\frac{1}{x\ln a}.$ (1.23)

7) $\ln x\ '=\frac{1}{x}.$ (1.24)

8) $(\sin x)'=\cos x.$ (1.25)

9) $(\cos x)'=-\sin x.$ (1.26)

10) $tgx\ '=\frac{1}{\cos^2 x}.$ (1.27)

11) $ctgx\ '=-\frac{1}{\sin^2 x}.$ (1.28)

12) $\arcsin x\ '=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ (1.29)

13) $\arccos x\ ' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ (1.30)

14) $\operatorname{arctg} x\ ' = \frac{1}{1+x^2}.$ (1.31)

15) $\operatorname{arctg} x\ ' = -\frac{1}{1+x^2}.$ (1.32)

1.3.3 Правила дифференцирования. Производные сложной и обратной функции.

1) Постоянный множитель можно выносить за знак производной

$(C\cdot u(x))'=C\cdot u'(x).$ (1.33)

2) Производная суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных этих функций

$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x).$ (1.34)

3) Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную от второй

$(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\ v'(x).$ (1.35)

Пример 1.3.1 Найти производную функции $y=(x-1)e^x$.

Решение. Пользуясь правилами (1.34) и (1.35) и таблицей производных, получим:

$y'=(x-1)'\cdot e^x+(x-1)\cdot(e^x)'=1\cdot e^x+(x-1)\cdot e^x=xe^x.$

Ответ: xe^x.

4) Производная частного от деления двух дифференцируемых функций равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}. \qquad (1.36)$$

Пример 1.3.2 Найти производную функции $y = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.

Решение. Пользуясь формулой (1.36) и таблицей производных, получим:

$$y' = \frac{(2x+1)'(x^2-1) - (2x+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x^2-1)-(2x+1)2x}{(x^2-1)} =$$

$$= \frac{2x^2-2-4x^2-2x}{(x^2-1)^2} = -2\frac{(x^2+x+1)}{(x^2-1)^2}.$$

Ответ: $-2\dfrac{(x^2+x+1)}{(x^2-1)^2}$.

5) Пусть дана функция y=f(x) такая, что ее можно представить в следующем виде:

y=F(φ(x)), или y=F(t), t=φ(x).

Тогда y называют сложной функцией или композицией двух функций, а t – промежуточным аргументом.

Производная сложной функции y=F(φ(x)) по переменной x равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу t=φ(x) на производную промежуточного аргумента по переменной x

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x. \qquad (1.37)$$

Пример 1.3.3 Найти производную функции y=sin(x^2).

Решение. Пользуясь формулой (1.37) и таблицей производных, получим:

y=sint, t=x^2.

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = (\sin t)'_t \cdot (x^2)'_x = \cos t \cdot 2x = 2x\cos x^2.$$

Ответ: 2xcosx^2.

6) Если для функции y=f(x) существует обратная функция x=φ(y), которая в рассматриваемой точке y имеет производную, отличную от нуля, то в соответствующей точке x функция y=f(x), имеет производную, равную

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}. \qquad (1.38)$$

Пример 1.3.4 $s=te^{-t}$; найти $\frac{dt}{ds}$.

Решение. Пользуясь (1.37), (1.39) и таблицей производных, получим:

$$\frac{ds}{dt}=e^{-t}-te^{-t}.$$

Тогда, по (1.40):

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\frac{dt}{ds}}=\frac{1}{e^{-t}-te^{-t}}=\frac{e^{t}}{1-t}.$$

Ответ: $\frac{e^{t}}{1-t}$.

7) Если функция задана параметрически, то есть

$$\begin{cases} x=\varphi\ t\ , \\ y=\phi\ t\ , \quad t\in T, \end{cases} \qquad (1.39)$$

то $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \qquad (1.40)$$

1.3.4 Производные высших порядков

Пусть функция y=f(x) дифференцируема на некотором отрезке [a;b]. Значение производной f′(x), вообще говоря, зависит от x, т.е. производная f′(x) также представляет собой функцию от переменной x.

Дифференцируя эту функцию, мы получаем вторую производную от функции f(x).

$$y''=(y')'=f''(x). \qquad (1.41)$$

Аналогично, n – ая производная $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=f^{(n)}(x)$.

Отметим, в частности, что ускорение – это первая производная по времени от скорости или вторая производная по времени от пройденного пути:

$a=V'(t)=S''(t)$.

Пример 1.3.4 Найти вторую производную функции $y=e^x \cos 2x$.

Решение. Пользуясь (1.34), (1.35), (1.37), (1.41) и таблицей производных, получим:

$y'=(e^x)'\cos 2x+ e^x (\cos 2x)'=e^x\cos 2x+e^x(-2\sin 2x)=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)$.

$y''=(e^x)'(\cos 2x-2\sin 2x)+ e^x(\cos 2x-2\sin 2x)'=(e^x)(\cos 2x-2\sin 2x)+$

$+e^x(-2\sin 2x-4\cos 2x)=e^x(-3\cos 2x-4\sin 2x)$.

Ответ: $e^x(-3\cos 2x-4\sin 2x)$.

1.3.5 Дифференциал функции

Важным понятием, наряду с понятием производной функции, является дифференциал функции.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к определенному числу $f'(x)$ и, следовательно, отличается от производной $f'(x)$ на величину бесконечно малую: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$ где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0.$

Умножая все члены последнего равенства на $\Delta x,$ получим:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x. \tag{1.42}$$

Так как в общем случае $f'(x) \neq 0,$ то при постоянном $f'(x)$ и переменном $\Delta x \to 0$ произведение $f'(x)\Delta x$ есть бесконечно малая величина первого порядка относительно $\Delta x.$ Второе слагаемое в (1.42) есть величина бесконечно малая высшего порядка относительно $\Delta x.$ Следовательно, первое слагаемое в (1.42) (при $f'(x) \neq 0$) есть главная часть приращения, линейная относительно $\Delta x.$ Произведение $f'(x)\Delta x$ называют дифференциалом функции и обозначают dy или $df(x)$.

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (1.43)$$

Так как для y=x, dy=dx и $dy = \Delta x,$ то $dx = \Delta x,$ и формулу (1.43) можно переписать как $dy = f'(x)\,dx,$ (1.44)

и тогда формула (1.42) перепишется в виде:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \qquad (1.45)$$

В приближенных вычислениях удобно пользоваться приближенным равенством

$$\Delta y \approx dy, \qquad (1.46)$$

или в развернутом виде:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x. \qquad (1.47)$$

Вспоминая геометрический смысл производной (см. 1.3.1), заключаем, что геометрический смысл дифференциала функции f(x), соответствующий данным значениям x и Δx, равен приращению ординаты касательной к кривой y=f(x) в данной точке x.

1.4 Исследование функций

1.4.1 Возрастание и убывание функций. Максимум и минимум функций.

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и дифференцируема в промежутке (a,b). Если f′(x)>0 (f′(x)<0) для a<x<b, то эта функция возрастает (убывает) на отрезке. Эти условия позволяют решать вопрос о возрастании и убывании функции по знаку ее производной.

Особый интерес представляют точки, отделяющие друг от друга участки с различным поведением функции.

Пусть в точке $x=x_0$ и ее окрестности функция f(x) определена. Если при переходе аргумента (слева направо) через значение $x=x_0$ функция переходит от возрастания к убыванию, то говорят, что в точке $x=x_0$ функция имеет максимум, если же функция переходит от убывания к возрастанию, то она имеет в этой точке минимум.

Эти точки называются точками экстремума.

1.4.2 Необходимые и достаточные условия экстремума

Если функция f(x) имеет экстремум в точке $x=x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Из этого следует, что точки экстремума функции f(x) нужно рассматривать только среди тех, в которых ее первая производная равна нулю или не существует.

Это необходимое условие экстремума, и оно не является достаточным. Не при всяком значении x, при котором производная обращается в нуль или не существует, функция имеет экстремум.

Значения аргумента, при которых производная обращается в нуль или не существует, называются критическими точками.

Исследование функций в критических точках опирается на достаточные условия существования экстремума.

Достаточные условия экстремума функции, основанные на использовании первой производной

Пусть точка $x=x_0$ является критической точкой функции f(x). Функция f(x) непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки $x=x_0$).

Если при переходе слева направо через точку $x=x_0$ производная меняет знак с плюса на минус, то в точке $x=x_0$ функция имеет максимум.

Если при переходе слева направо через точку $x=x_0$ производная меняет знак с минуса на плюс, то в точке $x=x_0$ функция имеет минимум.

Если при переходе через критическую точку первая производная функции не меняет знак, то экстремума нет.

Достаточные условия экстремума функции, основанные на использовании второй производной.

Пусть в точке $x=x_0$ производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(x_0)=0$. Пусть существует и непрерывна в некоторой окрестности точки $x=x_0$ вторая производная $f''(x)$. Тогда, если $f''(x_0)<0$, то функция в точке $x=x_0$ имеет максимум, если $f''(x_0)>0$, то минимум. Если $f''(x_0)=0$, то в этом случае исследование проводится с помощью первой производной.

Пример 1.4.1 Исследовать на экстремум функцию $f(x)= x-3\sqrt{x}+4$.

Решение. Функция определена при $x\geq 0$.

Вычислим производную функции:

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\frac{x-1}{\sqrt{x}}.$$

Функция убывает при $f'(x)<0$ $x<1$; возрастает при $f'(x)>0$ $x>1$.

При $x=1$ производная $f'(x)=0$ и функция имеет экстремум (минимум).

Ответ: при $x=1$ минимум.

1.4.3 Выпуклость и вогнутость графика функции; точки перегиба

График функции $f(x)$ называется выпуклым на отрезке (a,b), если он расположен ниже касательной, проведенной к графику функции в любой точке этого отрезка (рис 1.15)

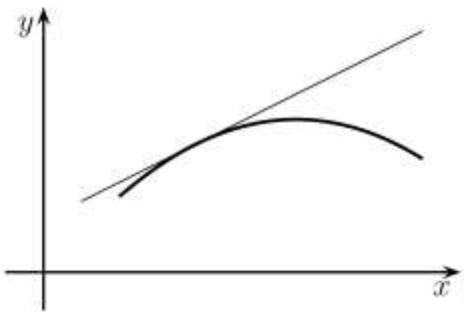


рис.1.15. Выпуклость функции

График функции f(x) называется вогнутым на отрезке (a,b), если он расположен выше касательной, проведенной к графику функции в любой точке этого отрезка (рис 1.16.)

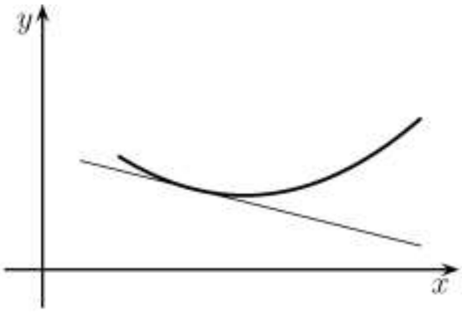


рис.1.16. Вогнутость функции

Точка, отделяющая выпуклую часть графика непрерывной функции от вогнутой, называется точкой перегиба графика (рис 1.17).

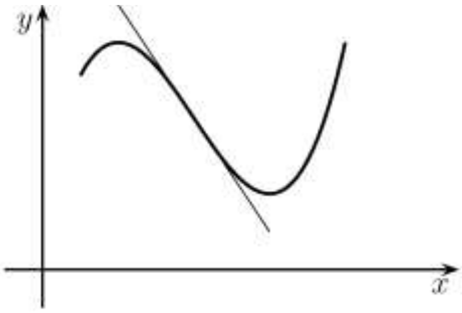


рис.1.17. Перегиб функции

В точках перегиба график функции лежит по обе стороны то касательной (пересекает касательную).

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции.

Если $f''(x)<0$ на отрезке (a,b), то график функции $y=f(x)$ выпуклый на этом отрезке; если же $f''(x)>0$ на (a,b), то график функции вогнутый.

Достаточное условие точки перегиба.

Пусть в точке $x=x_0$ $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через значение $x=x_0$ меняет знак. Тогда точка функции $y=f(x)$ с абсциссой $x=x_0$ есть точка перегиба.

Пример 1.4.2 Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика данной функции $f(x)=xe^x$.

Решение. Функция определена при любых x.

Вычислим производные функции:

$f'(x)=(xe^x)'=e^x+xe^x=e^x(x+1)$,

$f''(x)=(e^x(x+1))'=e^x(x+2)$.

График функции выпуклый при $f''(x)<0$ $x<-2$; вогнутый при $f''(x)>0$ $x>-2$.

При $x=-2$ $f''(x)=0$ и график функции имеет перегиб.

Ответ: График функции выпуклый при $x<-2$; вогнутый при $x>-2$.

График функции имеет перегиб при $x=-2$.

1.4.4 Асимптоты графика функции

Прямая называется асимптотой кривой $y=f(x)$, если расстояние до точки $M(x,y)$ кривой от этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении указанной точки по кривой от начала координат (т.е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности).

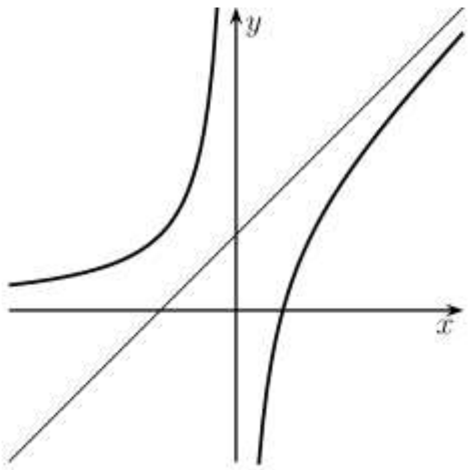


рис.1.18. Асимптоты

Нахождение асимптот.

Будем различать вертикальные и наклонные асимптоты (рис 1.18).

Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти такие значения x=a, при приближении к которым функция y=f(x) стремится к бесконечности. Тогда прямая x=a будет вертикальной асимптотой.

Для нахождения наклонных асимптот рассматриваются следующие пределы

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx). \qquad (1.50)$$

Если пределы (1.34) конечны, то прямые $y=kx+b$ при $x\to\pm\infty$ являются наклонными асимптотами. Если k=0, то прямая y=b есть горизонтальная асимптота.

Пример 1.4.3 Найти асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x+2}.$$

Решение. Функция определена при $x\neq-2$. Если $x\to-2$, $y\to\infty$.

Поэтому, график имеет вертикальную асимптоту x=-2.

Ищем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+3}{x(x+2)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{(x+2)}-1\cdot x\right)=-4.$$

Прямая $y=x-4$ наклонная асимптота .

Ответ: График функции имеет вертикальную асимптоту x=-2; наклонную асимптота y=x-4.

1.4.5 Построение графиков функций по характерным точкам

При построении графика функции y=f(x) полезно выяснять его характерные особенности по следующему плану.

1) Найти область определения функции.
2) Определить точки разрыва.
3) Исследовать функцию на четность, периодичность.

4) Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

5) Найти асимптоты.

6) Найти интервалы возрастания и убывания функции.

7) Найти точки экстремума и вычислить значения y=f(x) в этих точках.

8) Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.

Пункты 6) – 8) удобно объединять и результаты вносить в таблицу. По этим данным строится график функции. Удобно намечать элементы графика параллельно с исследованием.

Пример 1.4.4 Провести полное исследование и построить график функции $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Решение.

1) Область определения функции – вся ось ОХ, кроме точки x=0.

2) Точка разрыва x=0; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$.

3) Функция общего вида.

4) График пересекает ось ОХ в точке $x=-\sqrt[3]{4}$.

5) Вертикальная асимптота x=0.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^2\cdot x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3+4}{x^2}-x)=0.$$

Наклонная асимптота y=x.

6) $f'(x)=1-\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3-8}{x^3}$.

Функция убывает при x<2,возрастает при x>2.

7) f′(x)=0 при x=2. В данной точке минимум f(2)=3.

8) $f''(x)=\dfrac{24}{x^4}>0.$

График функции вогнутый.

Поместим основные данные в таблицу:

	$(-\infty;-\sqrt[3]{4})$	$-\sqrt[3]{4}$	$(-\sqrt[3]{4};0)$	0	(0;2)	2	$(2;\infty)$
f(x)	-	0	+		+	3	+
f′(x)	-	-	-		-	0	+
f′′(x)	+	+	+		+	+	+
Выводы	f<0, убывает, вогнута	f=0	f>0, убывает, вог-нута	Разрыв, x=0 вертикаль ная асимптота	f>0, убывает, вогнута	f=3, мини-мум	f>0, возрастает, вогнута, y=x наклонная асимптота

По таблице построим график (рис. 1.19)

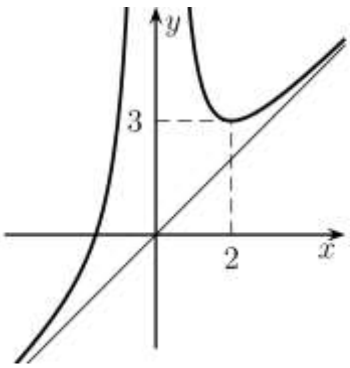


Рис. 1.19. График функции

2 Неопределенный и определенный интеграл

2.1 Неопределенный интеграл

2.1.1 Определение неопределенного интеграла

Задача, состоящая в определении функции F(x) по ее известной производной $F'(x)=f(x)$, представляет собой основную задачу интегрального исчисления.

Первообразной функции f(x), определенной на некотором промежутке называется функция F(x), определенная на том же промежутке и удовлетворяющая условию $F'(x)=f(x)$. Процесс нахождения первообразной называется интегрированием.

Если функция F(x) является первообразной функции f(x), то функция F(x)+C, где C - произвольная постоянная, также является первообразной функции f(x).

Множество всех первообразных F(x)+C называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается символом

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \quad (2.1)$$

где знак $\int$ называется знаком интеграла, f(x) - подынтегральной функцией, а f(x)+C - подынтегральным выражением.

2.1.2 Простейшие свойства неопределенного интеграла

1) Если a - постоянная величина, то

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx. \quad (2.2)$$

2) $\int(f(x)+g(x))=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$ (2.3)

3) $(\int f(x)dx)'=f(x).$ (2.4)

4) $\int dF(x)=F(x)+C.$ (2.5)

2.1.3 Таблица основных интегралов

Интегралы, помещенные в таблице, называются основными.

1) $\int dx=x+C.$ (2.6)

2) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1).$ (2.7)

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$ (2.8)

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1).$ (2.9)

5) $\int e^x dx = e^x + C.$ (2.10)

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ (2.11)

7) $\int \cos x dx = \sin x + C.$ (2.12)

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$ (2.13)

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$ (2.14)

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$ (2.15)

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$ (2.16)

12) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$ (2.17)

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm b}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm b}\right| + C.$ (2.18)

2.1.4 Замена переменной в неопределенном интеграле

Если интеграл не может быть вычислен непосредственно при помощи простейших свойств и формул из таблицы, то во многих случаях введение новой переменной t:

$x=\varphi(t) \rightarrow dx=\varphi'(t) \rightarrow \int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$ (2.19)

позволяет преобразовать подынтегральное выражение к более простому виду, интегрирование которого можно провести при помощи простейших свойств интеграла и формул из таблицы.

После нахождения первообразной в окончательном результате нужно выразить переменную t через переменную x.

Пример 2.1.1 Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

Решение.

Делаем замену $t=\sqrt{e^x+1}, \to x=\ln(t^2-1), \to dx=\dfrac{2tdt}{t^2-1},$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=\int \frac{2tdt}{t(t^2-1)}=2\int \frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C.$$

Ответ: $\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C.$

Если подынтегральное выражение может быть представлено в виде

$f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=f(\varphi(x))d(\varphi(x)),$

то обозначив $\varphi(x)=t$, получим

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=\int f(t)dt. \qquad (2.20)$$

Если полученный интеграл является табличным:

$\int f(t)dt=F(t)+C,$

то ответ будет иметь вид

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F(\varphi(x)+C. \qquad (2.21)$$

Такой метод вычисления интеграла называется методом подведения под знак дифференциала.

Пример 2.1.2 Вычислить интеграл $\int \sin^{\frac{3}{4}} x\cos xdx.$

Решение.

$$\int \sin^{\frac{3}{4}} x\cos xdx=\int \sin^{\frac{3}{4}} xd(\sin x)=\frac{4}{7}\sin^{\frac{7}{4}} x+C.$$

Ответ: $\dfrac{4}{7}\sin^{\frac{7}{4}} x+C.$

2.1.5 Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Формула

$$\int udv=uv-\int vdu, \qquad (2.22)$$

называется формулой интегрирования по частям и применяется тогда, когда интеграл, стоящий в правой части, проще, чем первоначальный интеграл.

Метод интегрирования по частям обычно используется в следующих случаях:

1) Если подынтегральное выражение имеет вид

$P_n(x)\cos axdx$, $P_n(x)\sin axdx$, $P_n(x)e^{ax}dx$,

где $P_n(x)$ - многочлен степени n, то в качестве функции u нужно выбрать $P_n(x)$, а в качестве дифференциала dv - произведение тригонометрической или показательной функции на дифференциал dx.

Тогда после интегрирования по частям получится интеграл того же типа, но степень многочлена уменьшится на единицу. Интегрируя по частям несколько раз, получим один из табличных интегралов.

2) Если подынтегральное выражение имеет вид

$P_n(x)\ln xdx$, $P_n(x)\mathrm{arctg}\,xdx$, $P_n(x)\arcsin xdx$,

где $P_n(x)$ - многочлен степени n, то в качестве функции u нужно выбрать функцию lnx, arctgx, arcsinx, соответственно, а в качестве дифференциала dv - произведение $P_n(x)$ dx.

Тогда после интегрирования по частям для функций lnx и arctgx получится интеграл от рациональной, а для arcsinx - интеграл от простой иррациональной функции.

Пример 2.1.3 Вычислить интеграл $\int x\ln xdx.$

Решение.

Принимая $u=\ln x\rightarrow du=\frac{dx}{x}, \quad dv=xdx\rightarrow v=\frac{x^2}{2},$ имеем

$$\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

Ответ: $\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$

2.1.6 Интегрирование рациональных дробей

Функция вида $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степени n и m, соответственно, называется рациональной дробью. Если m>n, то дробь называется правильной. Если m≤n, то дробь называется неправильной. Неправильную дробь всегда можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби делением числителя на знаменатель.

Следовательно, интегрирование рациональной дроби всегда может быть сведено к интегрированию многочлена и правильной дроби.

Сформулируем теорему о разложении правильной дроби на сумму простейших дробей.

Пусть знаменатель правильной несократимой дроби после разложения на множители имеет вид

$$Q_m(x)=a_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}...(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}... \quad p_1^2-4q_1<0, \quad p_2^2-4q_2<0.$$

Тогда дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей. В этой сумме каждому множителю вида $(x-a)^\alpha$ в знаменателе, где a - один из вещественных корней, а α - его кратность, соответствует сумма из α слагаемых вида

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}, \tag{2.23}$$

а каждому множителю $(x^2+px+q)^\beta$ в знаменателе – выражение вида

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_\beta x+N_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}, \tag{2.24}$$

где $A_1,A_2,…,M_1,M_2,…,N_1,N_2,…$ - некоторые вещественные числа, значения которых могут быть найдены после дополнительных вычислений (методом неопределенных коэффициентов).

Простейшими дробями называются – дроби вида

1) $$\frac{A}{x-a}, \tag{2.25}$$

2) $\frac{A}{(x-a)^n}, \quad (n>1),$ (2.26)

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$ (2.27)

4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad (n>1),$ (2.28)

где a,p,q,A,M,N – вещественные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней (дискриминант меньше нуля).

Итак, правильная рациональная несократимая дробь может быть разложена на сумму простейших дробей четырех типов с неопределен-ными коэффициентами.

Неопределенные коэффициенты могут быть найдены следующим образом. Запишем искомую дробь (в левой части равенства) в виде суммы вида (2.23) и (2.24) (в правой части). Приведя правую часть к наименьшему общему знаменателю, получим равенство двух дробей с одинаковыми знаменателями и получим равенство знаменателей.

Таким образом, получено тождественное (при всех x) равенство двух многочленов степени n; причем многочлен в левой части равенства с определенными значениями коэффициентов, а в правой – с неопределенными.

Так как два многочлена одинаковой степени могут быть тождественно равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях, то приравнивая их, получаем линейную систему, решив которую, найдем неопределенные коэффициенты.

Таким образом, интегрирование правильной рациональной несократимой дроби сводится к интегрированию простейших дробей.

Проведем интегрирование простейших дробей первых трех типов (четвертую – оставим без внимания).

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$ (2.29)

2) $$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C. \tag{2.30}$$

3) Дробь 3-го вида проинтегрируем с помощью метода выделения полного квадрата и введения новой переменной t:

$$x^2 + px + q = (x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left\{ \begin{matrix} t = x + \frac{p}{2} \\ a^2 = -\frac{D}{4} \end{matrix} \right\} = t^2 + a^2. \tag{2.31}$$

$$\int \frac{Mx+n}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M(x+p/2)+N-Mp/2}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}d(x+p/2) = M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + (n-\frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right| + \frac{2N-Mp}{2a}arctg\frac{t}{a} + C = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

(2.32)

Пример 2.1.4 Вычислить интеграл $\int \frac{3x^2-4x+4}{x(x^2+4)}dx.$

Решение. Так как подынтегральная функция является правильной рациональной несократимой дробью, то разложим ее на сумму простейших дробей первого и третьего типа:

$$\frac{3x^2-4x+4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+x(Bx+C)}{x(x^2+4)}.$$

Из тождественного равенства дробей при равных знаменателях, тождественно равны числители:

$3x^2-4x+4=(A+B)x^2+Cx+C$, откуда

$$\begin{cases} A+B=3, \\ C=-4, \\ 4A=4, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=2, \\ C=-4. \end{cases}$$

Тогда
$$\int \frac{3x^2-4x+4}{x(x^2+4)}dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x-4}{x^2+4}dx = \ln|x| + \int \frac{2xdx}{x^2+4} - 4\int \frac{dx}{x^2+4} =$$
$$= \ln|x| + \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} - 4\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} = \ln\left|x(x^2+4)\right| - 2arctg\frac{x}{2} + C.$$

Ответ: $\ln\left|x(x^2+4)\right| - 2arctg\frac{x}{2} + C.$

2.1.7 Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Интегрирование иррациональных функций путем непосредственного применения табличных формул и простейших методов интегрирования возможно лишь в исключительных случаях. Часто для того, чтобы проинтегрировать функции, содержащие иррациональные выражения, применяют подстановки, которые приводят к интегрированию рациональных выражений от нового аргумента.

При интегрировании рациональной функции от радикалов вида $\sqrt[n]{x}$: $\int R(x,\sqrt[m]{x},\sqrt[n]{x},...,\sqrt[k]{x})dx$ лучше всего применять подстановку

$$x=t^N, \tag{2.33}$$

где N - наименьшее общее кратное чисел m,n,…k.

Пример 2.1.5 Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Делаем замену переменной $x=t^{2\cdot3}=t^6, \rightarrow dx=6t^5dt$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=6\left(\int\ t^2-t+1\ dt-\int\frac{dt}{t+1}\right)=$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln(t+1)\right)+C=2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+C=$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

Ответ: $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$

В некоторых стандартных случаях удобно применять тригонометрические подстановки.

Если в подынтегральное выражение входит $\sqrt{a^2-x^2}$, делаем подстановку x=asint и тогда

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a|\cos t|. \tag{2.34}$$

Если в подынтегральное выражение входит $\sqrt{a^2+x^2}$, делаем подстановку x=atgt и тогда

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\sqrt{1+tg^2 t}=\frac{a}{|\cos t|}. \qquad (2.35)$$

Если в подынтегральное выражение входит $\sqrt{x^2-a^2}$, делаем подстановку $x=\frac{a}{\sin t}$ и тогда

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}=a|ctgt|. \qquad (2.36)$$

2.1.8 Интегрирование тригонометрических функций

Рациональная функция от синуса и косинуса в общем случае может быть проинтегрирована с помощью универсальной тригонометрической подстановки tg(x/2)=t. Тогда

$x=2arctgt, \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$ и

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (2.37)$$

Пример 2.1.6 Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}.$

Решение.

Делаем универсальную тригонометрическую подстановку tg(x/2)=t.

Тогда: $x=2arctgt, \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},$

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

Ответ: $\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$

При интегрировании тригонометрических функций удобно использовать следующие формулы:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \cos mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x),$$
$$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x), \quad \sin mx\cdot\sin nx=\frac{1}{2}(\cos(m+n)x-\cos(m-n)x). \qquad (2.38)$$

2.2 Определенный интеграл

2.2.1 Определение определенного интеграла

Пусть задана функция y=f(x), непрерывная на промежутке [a,b].

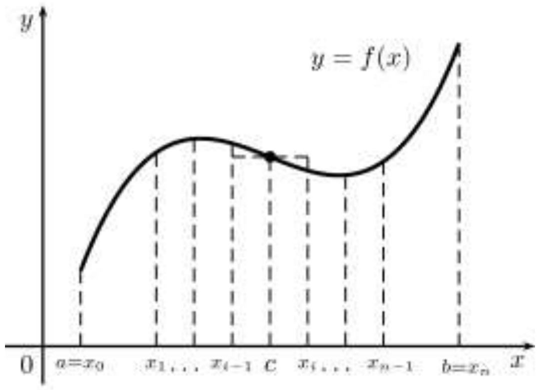


рис.2.1. К определению определенного интеграла

Разобьем промежуток [a,b] на n частей точками (рис. 2.1)

$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

Обозначим через $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.На каждом интервале $[x_{i-1},x_i]$ произвольным образом выберем точку c_i, составим сумму

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

и осуществляем предельный переход при $n\to\infty$ и $\Delta x_i\to 0$.

Если существует предел $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то он будет равен площади под кривой y=f(x).

Если существует предел при $n\to\infty$ последовательности S_n, который не зависит от способа разбиения промежутка [a,b] на части и от выбора точек c_i, то он называется определенным интегралом и обозначается

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\int_a^b f(x)dx. \tag{2.39}$$

2.2.2 Свойства определенного интеграла

Свойства определенного интеграла будут теми же, что и неопределенного интеграла:

1) Если c - постоянная величина, то

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \tag{2.40}$$

2) $$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{2.41}$$

Кроме того, для определенного интеграла будет выполняться свойство

3) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{2.42}$$

2.2.3 Формула Ньютона – Лейбница

Основная формула математического анализа – формула Ньютона – Лейбница:

Если известен неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \tag{2.43}$$

то $$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \tag{2.44}$$

Разность F(b)-F(a) называется двойной подстановкой и обозначается

$$F(b)-F(a) = F(x)_a^b. \tag{2.45}$$

Пример 2.2.1 Вычислить интеграл $\int_0^5 \frac{xdx}{x^2+1}$.

Решение.

$$\int_0^5 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)_0^5 = \frac{1}{2}\ln 26.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln 26.$

2.2.4 Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле

Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле выглядят несколько иначе, чем в случае неопределенного интеграла.

Пусть нужно выполнить замену переменной x=φ(t), где φ(t) - обратимая на [a,b] функция. Пусть при t=α, x=a и при t=β, x=b. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{2.46}$$

Подчеркнем, что в отличие от неопределенного интеграла, к старой переменной возвращаться не нужно.

Пример 2.2.2 Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$

Решение.

Делаем замену переменной x=sint, dx=costdt. Тогда

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \rightarrow t = \frac{\pi}{4}, \quad x = 1, \rightarrow t = \frac{\pi}{2},$$

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \cdot \cos t}{\sin^2 t}dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt =$$

$$= (-ctgt - t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $1 - \frac{\pi}{4}.$

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид: $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$

Пример 2.2.3 Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \ln x dx.$

Решение. Принимая $u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = dx \rightarrow v = x,$ имеем

$$\int\limits_1^e \ln x dx = x \ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = e - (e-1) = 1.$$

Ответ: 1.

2.2.5 Несобственные интегралы

По теореме Римана, если пределы определенного интеграла конечны, а подынтегральная функция непрерывна, то определенный интеграл существует (имеет конечное значение).

Если пределы бесконечны имеем случай несобственного интеграла первого рода, или определенный интеграл по бесконечному промежутку.

Если функция f(x) непрерывна на промежутке [a,∞), то по определению

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.47)$$

Если существует конечный предел в правой части, то несобственный интеграл называется сходящимся, а если не существует, то расходящимся.

Пример 2.2.4 Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} e^{-2x}dx.$

Решение.

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-2x}}{2}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-2b}}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: Данный интеграл сходится и равен $\frac{1}{2}.$

Аналогично определяется несобственный интеграл по промежутку (-∞,b].

И по определению $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \qquad (2.48)$$

где c - произвольное число.

Если подынтегральная функция имеет на промежутке интегрирования разрыв, то определенный интеграл в обычном смысле не существует и называется несобственным интегралом второго рода или определенным интегралом от разрывной функции.

Пусть точка разрыва совпадает с левым концом промежутка интегрирования. Тогда по определению интеграл равен следующему одностороннему пределу

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx. \tag{2.49}$$

Пример 2.2.5 Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \to 0} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \to 0} 2\sqrt{x}\Big|_c^1 = 2.$$

Ответ: Данный интеграл сходится и равен 2.

Если точка разрыва совпадает с правым концом промежутка интегрирования, то по определению интеграл равен следующему одностороннему пределу

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx. \tag{2.50}$$

Если же точка разрыва находится внутри промежутка интегрирования, то по определению интеграл равен сумме двух только что определенных несобственных интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{2.51}$$

Если интегралы, стоящие в правой части равенства существуют, то интеграл называется сходящимся, если не существует или равны бесконечности, то расходящимся.

2.2.6 Приложения определенных интегралов

Площадь плоской фигуры

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и двумя прямыми $x=a, x=b$ (рис.2.2), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx. \tag{2.52}$$

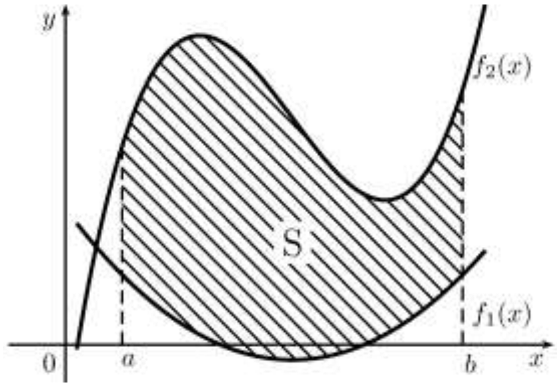


рис. 2.2. Площадь плоской фигуры

Пример 2.2.6 Вычислить площадь, заключенную между кривыми $y=2-x^2$, и $y=x^2$.

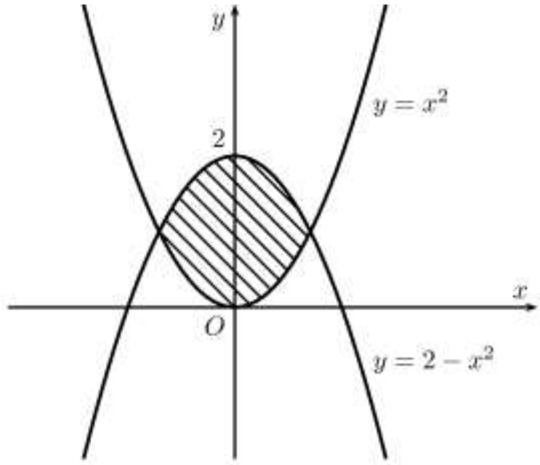


рис. 2.3. Площадь плоской фигуры

Решение.

Находим точки пересечения кривых (рис.2.3):

$$\begin{cases} y=2-x^2, \\ y=x^2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=\pm 1. \end{cases}$$

Область интегрирования [-1;1], поэтому:

$$S=\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^2)dx=\left(2x-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(2-\frac{2}{3}\right)-\left(-2+\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

Если кривая задана в полярных координатах $r=f(\varphi)$, то площадь сектора, ограниченная дугой кривой и двумя полярными радиусами $\varphi_1=\alpha$ и $\varphi_2=\beta$, выразится интегралом

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(f(\varphi))^2\,d\varphi. \qquad (2.53)$$

Пример 2.2.7 Вычислить площадь, заключенную внутри кривой $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Решение. В силу симметрии кривой (рис. 2.4) вычисляем одну четверть искомой площади и умножаем на четыре:

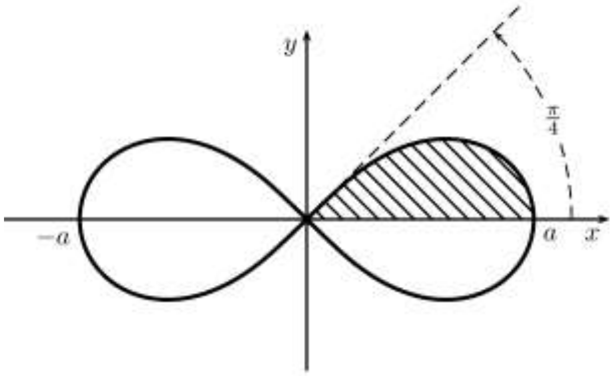


рис. 2.4. Площадь двулистника

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi d\varphi=2a^2\left.\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=a^2.$$

Ответ: a^2.

Длина дуги кривой

Длина дуги кривой $y=f(x)$,содержащейся между двумя точками с абсциссами $x=a$,$x=b$, вычисляется по формуле

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (2.54)$$

Пример 2.2.8 Найти длину дуги параболы $y=x^{3/2}$ от начала координат до точки $x=4$.

Решение.

Находим производную y′=3/2√x.

Тогда $$L=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\frac{8}{27}(\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}})_0^4=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

Ответ: $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$

Если кривая задана в полярных координатах r=f(φ), то длина кривой, ограниченной двумя полярными радиусами $\varphi_1=\alpha$ и $\varphi_2=\beta$, выразится интегралом

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}d\varphi. \qquad (2.55)$$

Пример 2.2.9 Найти длину кривой r=a(1-cosφ) (рис.2.5)

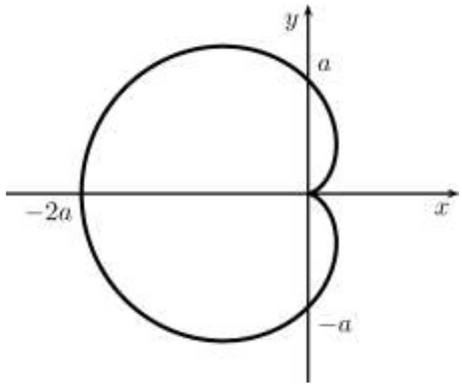


Рис 2.5. Длина дуги кардиоиды

Решение.

Находим производную r′=asinφ.

Тогда
$$L=2\int_0^\pi\sqrt{a^2(1-cos(\varphi))^2+a^2\sin^2\varphi}d\varphi=2a\int_0^\pi\sqrt{2(1-\cos\varphi)}d\varphi=$$
$$=4a\int_0^\pi\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=4a\cdot(-2\cos\frac{\varphi}{2})_0^\pi=8a.$$

Ответ: 8a.

Объем тела вращения

Объем тела, получающегося вращением кривой y=f(x), содержащейся между двумя точками с абсциссами x=a, x=b, вокруг оси OX,

вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (2.56)$$

Пример 2.2.10 Найти объем тела, образованного вращением одной полуволны синусоиды y=sinx вокруг оси OX (x меняется от 0 до π).

Решение.

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ответ: $\pi^2/2$.

3 Решение типового варианта (№ 0)

Часть 1 Дифференциальное исчисление

00.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\dfrac{x-1}{x+2}$.

Решение.

Сначала запишем искомую функцию в виде:

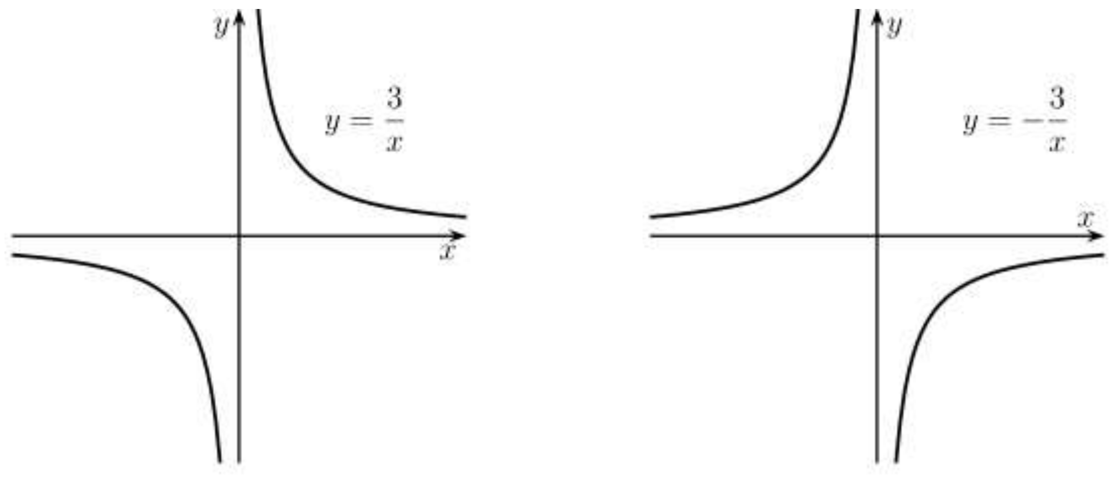
$$y=\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+2-3}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}.$$

Строим график данной функции поэтапно (рис. 3.1)

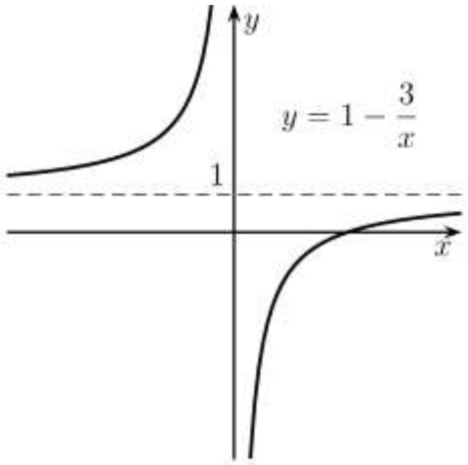
$$y_1=\frac{3}{x},\quad y_2=-\frac{3}{x},\quad y_3=1-\frac{3}{x},\quad y_4=1-\frac{3}{x+2}.$$

Начинаем с построения графика гиперболы y_1 (графика обратной пропорциональности (рис. 3.1 а)); потом строим y_2 отражением от оси OX (рис.3.1 б)); далее строим y_3, подымая предыдущий график на единицу (рис. 3.1 в)).

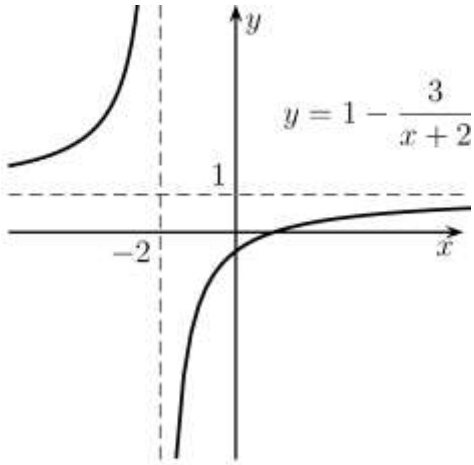
И, окончательно, строим y_4, сдвигая предыдущий график на две единицы влево (рис. 3.1 г)).



а) б)



в)



г)

Рис. 3.1. Поэтапное построение графика

00.02 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3tg3x}$.

Решение.

Пользуясь основными теоремами теории пределов и таблицей эквивалентных бесконечно малых, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3tg3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3\cdot 3x} = \frac{2}{9}.$$

Ответ:2/9.

00.03 Вычислить производные функций

a) $y = \sqrt{5x^2 - 7x + 3},$ b) y=x^{5}arcsin2x,

c) $y = \frac{x^4}{\ln x},$ d) y=tg^{2}3x, e) $x = t^5 + 2t, \quad y = t^3 + 2t - 1.$

Решение.

a) $y = \sqrt{5x^2 - 7x + 3}.$

Пользуясь правилами дифференцирования (1.34), (1.35), (1.37) и таблицей производных, получаем:

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 5x^2 - 7x + 3,$$
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(5x^2 - 7x + 3)' = \frac{10x - 7}{2\sqrt{5x^2 - 7x + 3}}.$$

Ответ: $\dfrac{10x-7}{2\sqrt{5x^2-7x+3}}$.

b) y=x^5arcsin2x.

Пользуясь правилами дифференцирования (1.35), (1.37) и таблицей производных, получаем:

$$y'=(x^5)'\arcsin 2x+x^5(\arcsin 2x)'=5x^4\arcsin 2x+x^5\cdot\frac{1\cdot 2}{\sqrt{1-(2x)^2}}=$$

$$=5x^4\arcsin 2x+\frac{2x^5}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Ответ: $5x^4\arcsin 2x+\dfrac{2x^5}{\sqrt{1-4x^2}}$.

c) $y=\dfrac{x^4}{\ln x}$.

Пользуясь (1.36) и таблицей производных, получаем:

$$y'=\frac{(x^4)'\ln x-x^4(\ln x)'}{\ln^2 x}=\frac{4x^3\ln x-x^4\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{x^3(4\ln x-1)}{\ln^2 x}.$$

Ответ: $\dfrac{x^3(4\ln x-1)}{\ln^2 x}$.

d) y=$tg^2$3x.

Пользуясь (1.37) и таблицей производных, получаем:

$$y'=2tg3x\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3.$$

e) $x=t^5+2t,\quad y=t^3+2t-1.$

Пользуясь (1.40) и таблицей производных, получаем:

$$y'=\frac{3t^2+2}{5t^4+2}.$$

Ответ: $\dfrac{3t^2+2}{5t^4+2}$.

00.04 Вычислить вторую производную функции y=x^2arctgx.

Решение.

Пользуясь правилами дифференцирования (1.34), (1.35), (1.36), (1.41) и таблицей производных, получаем последовательно первую и вторую производные:

$$y' = (x^2)' arctgx + x^2 (arctgx)' = 2xarctgx + \frac{x^2}{1+x^2} = 1 + 2xarctgx - \frac{1}{1+x^2},$$

$$y'' = (1)' + 2\Big((x)' arctgx + x (arctgx)'\Big) - \Big((1+x^2)^{-1}\Big)' = 2\left(arctgx + \frac{x}{1+x^2}\right) + \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Ответ: $2\left(arctgx + \frac{x^3+2x}{(1+x^2)^2}\right).$

00.04 Найти экстремумы функции $y = \frac{x^2}{x-1}.$

Решение. Рассмотрим функцию при x≠1.

Вычислим производную и приравняем ее нулю.

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Производная равна нулю при $x_1=0$ и $x_2=0$.

При прохождении критической точки $x_1=0$ производная меняет знак с плюса на минус, значит в ней есть экстремум, а именно – максимум, в которой функция равна нулю.

При прохождении критической точки $x_2=2$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит в ней есть экстремум, а именно – минимум, в которой функция равна четырем.

Ответ: при $x_1=0$ максимум, $y(0)=0$; при $x_2=2$ минимум, $y(2)=4$.

00.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x/2-\sin x$ на отрезке $[3\pi/2;2\pi]$.

Решение.

Вычислим производную и приравняем ее нулю.

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x.$$

Производная равна нулю при $\cos x = \frac{1}{2}, \rightarrow x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Заданному интервалу принадлежит только критическая точка x=5π/3, при прохождении которой производная меняет знак с плюса на минус, значит в ней есть экстремум, а именно – максимум, в которой функция равна

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}-\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 3,483.$$

Вычислим значения функции на концах заданного отрезка

$$f(\frac{3\pi}{2})=\frac{3\pi}{4}-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}-\ \ -1\ \ =\frac{3\pi}{4}+1\approx 3,355,$$

$$f(2\pi)=\pi-\sin(2\pi)=\pi-0=\pi\approx 3,141.$$

Ответ: наибольшее значение функции $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 3,483,$

наименьшее значение функции f(2π)=π≈3,141.

00.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\frac{4x}{4+x^2}$.

Решение.

1) Область определения функции – вся числовая ось.

2) Точек разрыва нет.

3) Функция нечетная (симметрична относительно начала координат).

4) График пересекает ось ОХ в начале координат.

5) Вертикальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(4+x^2)x}=0,\quad b=\lim_{x\to\infty}\ f(x)-kx\ =\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(4+x^2)}=0.$$

Наклонная (горизонтальная) асимптота y=0.

6) $$y'=\frac{4\ \ 4+x^2\ \ -4x\cdot 2x}{4+x^2\ \ ^2}=4\cdot\frac{4-x^2}{4+x^2\ \ ^2}.$$

Функция возрастает при 0<x<2, убывает при x>2

7) f′(x)=0 при x=2. В данной точке максимум f(2)=1.

8) $$y''=4\cdot\frac{-2x\left(4+x^2\right)^2-\left(4-x^2\right)\cdot 2\left(4+x^2\right)\cdot 2x}{\left(4+x^2\right)^4}=-8x\,\frac{4+x^2+8-2x^2}{\left(4+x^2\right)^3}=$$

$$=-8x\,\frac{12-x^2}{\left(4+x^2\right)^3}=\frac{8x(x^2-12)}{\left(4+x^2\right)^3}.$$

График функции выпуклый при $0<x<2\sqrt{3};$ вогнутый при $x>2\sqrt{3}.$

Поместим основные данные в таблицу (рис. 3.2).

x	0	(0;2)	2	(2;2√3)	2√3	(2√3;∞)
f(x)	0	+	1	+	+	+
f′(x)		+	0	-	-	-
f′′(x)	0	-	-	-	0	+
Выводы	f=0, - перегиб	f>0, возрастает, выпукла	f=1, максимум	f>0, убывает, выпукла	Перегиб	f>0,убывает, вогнута, асимптота y=0

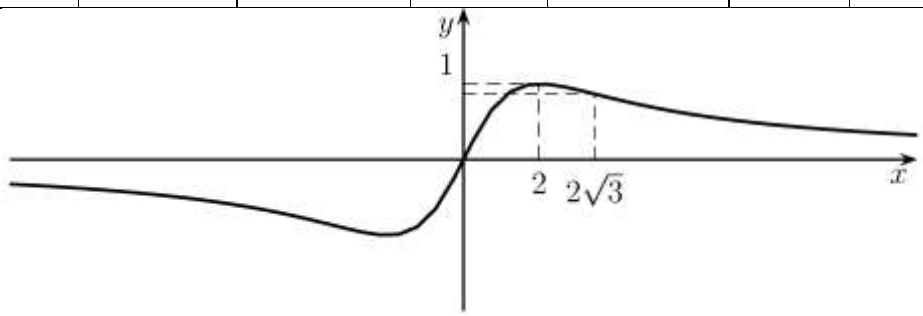


рис 3.2. График функции

Часть 2 Интегральное исчисление

00.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием.

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^{10}}}.$$

Решение.

Пользуясь простейшими свойствами неопределенного интеграла, формулой (2.16) и (2.20), получаем:

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^{10}}}=\frac{1}{5}\int \frac{5x^4dx}{\sqrt{1-x^{10}}}=\frac{1}{5}\int \frac{d(x^5)}{\sqrt{1-(x^5)^2}}=\frac{1}{5}\arcsin\left(x^5\right)+C.$$

Проверим полученный результат дифференцированием

$$\left(\frac{1}{5}\arcsin x^5+C\right)'=\frac{1}{5}\left(\arcsin x^5\right)'=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^5\right)^2}}\cdot\left(5x^4\right)=\frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}\arcsin\left(x^5\right)+C.$

00.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием.

$$\int x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)dx.$$

Решение.

Пользуясь простейшими свойствами неопределенного интеграла и формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле (2.22), получаем:

$$\int x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)dx=-\int x\cos 2x dx=\left\{\begin{matrix} u=x, & du=dx, \\ dv=\cos 2x dx, & v=\dfrac{\sin 2x}{2}\end{matrix}\right\}$$

$$=-\left(x\cdot\frac{\sin 2x}{2}-\int\frac{\sin 2x}{2}dx\right)=-\frac{x\sin 2x}{2}-\frac{\cos 2x}{4}+C.$$

Проверим полученный результат дифференцированием

$$\left(-\frac{x\sin 2x}{2}-\frac{\cos 2x}{4}+C\right)'=-\frac{1}{2}\left(x\sin 2x\right)'-\frac{1}{4}\left(\cos 2x\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\sin 2x+x\left(2\cos 2x\right)\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(-2\sin 2x\right)=-x\cos 2x=x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right).$$

Ответ: $-\frac{x\sin 2x}{2}-\frac{\cos 2x}{4}+C.$

00.09 Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{\left(x+3\right)dx}{x^3+x^2-2x}.$$

Решение.

Интегрирование правильной рациональной несократимой дроби осуществляется путем разложения на простейшие дроби (см. 2.1.6).

$$\frac{x+3}{x^3+x^2-2x}=\frac{x+3}{x\ \ x-1\ \ x+2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

A, B, C, найдем методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{x+3}{x\ \ x-1\ \ x+2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}=\frac{A\ \ x-1\ \ x+2\ +Bx\ \ x+2\ +Cx\ \ x-1}{x\ \ x-1\ \ x+2},$$

$$x+3=A\ \ x-1\ \ x+2\ +Bx\ \ x+2\ +Cx\ \ x-1\ ,$$

$$x=0,\to 3=-2A,\to A=-\frac{3}{2},$$

$$x=1,\to 4=3B,\to B=\frac{4}{3},$$

$$x=-2,\to 1=6C,\to C=\frac{1}{6}.$$

Интегрируя простейшие дроби (2.29), получаем:

$$\int\frac{x+3\ dx}{x^3+x^2-2x}=\int\left(-\frac{\frac{3}{2}}{x}+\frac{\frac{4}{3}}{x-1}+\frac{\frac{1}{6}}{x+2}\right)dx=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln|x+2|+C.$$

Ответ: $-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln|x+2|+C.$

00.10 Вычислить неопределенный интеграл

$$\int\frac{dx}{3cosx+4\sin x}.$$

Решение.

Пользуясь универсальной тригонометрической подстановкой (2.37), получаем:

$$\int\frac{dx}{3cosx+4\sin x}=\left\{\begin{aligned}&tg\frac{x}{2}=t,\\&dx=\frac{2dt}{1+t^2},\end{aligned}\right\}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3\ 1-t^2}{1+t^2}+\frac{4\cdot 2t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{3+8t-3t^2}=$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2-\frac{8}{3}t-1}=-\frac{2}{3}\int\frac{d\left(t-\frac{4}{3}\right)}{\left(t-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{25}{9}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{3}}\ln\left|\frac{t-2}{t+\frac{1}{3}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{tg\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}\right|+C.$$

Ответ: $-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{tg\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}\right|+C.$

00.11 Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$$

Решение.

Сделаем подстановку в определенном интеграле (2.46)

$e^x+1=t^2$, $e^x dx=2tdt$, $e^{\ln 3}+1=4=t^2$, $e^{\ln 8}+1=9$.

$$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{e^x dx}{e^x\sqrt{e^x+1}}=\int\limits_{2}^{3}\frac{2tdt}{t^2-1\;t}=2\int\limits_{2}^{3}\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|_2^3=\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}=\ln 3-\ln 2.$$

Ответ: ln3-ln2.

00.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-x^2}dx.$$

Решение.

Несобственный интеграл первого рода по определению (2.47) равен:

$$\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{0}^{b}e^{-x^2}\;\;-2x\;\;dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{0}^{b}e^{-x^2}d\;\;-x^2\;\;=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}{}_{0}^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\;e^{-b^2}-1\;=\frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится и равен ½.

Ответ: ½.

00.13 Найти длину дуги кривой y=lnx от x=√3 до x=√8.

Решение.

По формуле (2.54) длина дуги кривой:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(\frac{1}{x}))^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} x^2+1=t^2, \quad xdx=tdt, \\ 3+1=4=t^2, \quad 8+1=9=t^2, \end{matrix}\right\}=\int_2^3 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}(xdx)=$$

$$=\int_2^3 \frac{t\cdot tdt}{t^2-1}=\int_2^3 \frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1}=\int_2^3 dt+\int_2^3 \frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{4}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{3}\right|=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Ответ: $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

4 Контрольная работа № 2

Вариант № 1

Часть 1. Дифференциальное исчисление

01.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\frac{2x-1}{x-3}$.

01.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{5arctgx}$.

01.03 Вычислить производные функций

$a)\quad y=\sqrt{x^3-2x^2+5},\quad b)\quad y=\sqrt[3]{x+3}\arcsin 2x,$

$c)\quad y=\frac{e^{2x}}{\sin 3x},\quad d)\quad y=\sqrt{5x+tg^2\sqrt{x}},\quad e)\quad x=t+\ln(\cos t), y=t-\ln(\sin t).$

01.04 Вычислить вторую производную функции $y=\frac{x}{x^2-1}$.

01.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=\frac{x+6}{x^2+13},\quad [-5;5]$.

01.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=(x-1)^2(x+2)$.

Часть 2. Интегральное исчисление

01.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int (arctgx+2x+5)\frac{dx}{1+x^2}$.

01.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int x^2\sin 2x dx$.

01.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{2x+1}{x(x^2+2)}dx$.

01.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

01.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$.

01.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{x}dx.$

01.13 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=e^{x}$, $y=e^{-x}$, $x=1$.

Вариант № 2

Часть 1. Дифференциальное исчисление

02.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\dfrac{13-3x}{x-5}.$

02.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\ 1+5x}{e^{4x}-1}.$

02.03 Вычислить производные функций

$$a)\quad y=\ln\ 2\sin 3x+3\cos 2x\ ,\quad b)\quad y=\sqrt{3x+\sqrt{4x+\sqrt{5x+3}}},$$
$$c)\quad y=\sqrt[3]{tg\frac{3}{x}},\quad d)\quad y=arctg\sqrt{e^{-4x}+2x},\quad e)\quad x=2t-\sin 2t, y=\sin^{3}t.$$

02.04 Вычислить вторую производную функции $y=\ln ctg 2x.$

02.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=\dfrac{x}{2}+\cos x,\quad [\dfrac{\pi}{2};\pi]$

02.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{x+1^{\ 2}}{x-2}.$

Часть 2. Интегральное исчисление

02.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^{2}}}dx.$

02.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\dfrac{x}{\cos^{2}x}dx.$

02.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{x}{(x-2)(x^2+1)}dx.$

02.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{\sin x dx}{1-\sin x+\cos x}.$

02.11 Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\sin x}.$

02.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$

02.13 Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2=3x$, $x^2=3y$.

Вариант № 3

Часть 1. Дифференциальное исчисление

03.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\frac{3x+5}{3x+2}.$

03.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+6x^3-5}{9(x+2)^4+2x+10}.$

03.03 Вычислить производные функций

$$a)\quad y=e^{\sin 3x},\quad b)\quad y=\arcsin\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

$$c)\quad y=\frac{\sin 2x}{\sqrt{2x-3}},\quad d)\quad y=\sqrt{3-2x^2}\ln(3x+5),\quad e)\quad x=t+0,5\sin 2t, y=\cos^3 t.$$

03.04 Вычислить вторую производную функции $y=x^3\ln x.$

03.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=\frac{x-3}{x^2+16},\quad [-5;5].$

03.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$

Часть 2. Интегральное исчисление

03.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int \frac{dx}{\cos^2\ 5x+3}.$

03.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\ 5x^2+3x+2\ e^{2x}dx.$

03.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{(2x^2-13)}{x-3\ \ x^2-4x+5}dx.$

03.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos x(1-\sin x)}.$

03.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

03.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

03.13 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми xy=1, x=y, x=2.

Вариант № 4

Часть 1. Дифференциальное исчисление

04.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\frac{4-3x}{x+1}.$

04.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x}.$

04.03 Вычислить производные функций

$a)\quad y=\sqrt[3]{arctg\ \ 3-\sqrt{x}\ },\quad b)\quad y=e^{\cos^2\frac{1}{x}},$

$c)\quad y=\frac{\ln\ \ 4x-3}{\sqrt{\cos 2x}},\quad d)\quad y=\sqrt{tg2x}\ \ x^3+5x\ ,\quad e)\quad x=2t^4-t, y=8t^3+t+2.$

04.04 Вычислить вторую производную функции $y=xarctg2x.$

04.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y = \frac{x}{2} - \sin x, \quad \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right].$

04.06 Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}.$

Часть 2. Интегральное исчисление

04.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int \frac{e^x dx}{3e^x + 7^{\;6}}.$

04.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int (x^2 + 2x + 1) \ln x dx.$

04.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x^4 \;\; x^2 - 1 \;\; x - 2} dx.$

04.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}.$

04.11 Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin 3x dx.$

04.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{4 - x^{\;2}}}.$

04.13 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми y=ln(x+2), y=2lnx, y=0.

Вариант № 5

Часть 1. Дифференциальное исчисление

05.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y = x^2 - 6|x| + 10.$

05.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{5x}.$

05.03 Вычислить производные функций

$a)\quad y = \sin\ xe^{3x}\ ,\quad b)\quad y = \sqrt{1-x^2}\arcsin 2x,$

$c)\quad y = \frac{\sqrt[3]{2-5x}}{tg\frac{1}{x}},\quad d)\quad y = 2^{\sqrt{2x+\cos 2x}},\quad e)\quad x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t, y = t^2 + \frac{2}{t}.$

05.04 Вычислить вторую производную функции $y = e^{ctg 3x}.$

05.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y = \frac{x+3}{x^2+13},\quad [-3;7].$

05.06 Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{x^3}{2\ x+1\ ^2}.$

Часть 2. Интегральное исчисление

05.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}.$

05.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int arc\sin 2xdx.$

05.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{x^2+5}{x-1\quad x^2+3x+10}dx.$

05.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{\sin^4 x}.$

05.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx.$

05.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

05.13 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой ρ=acos3φ.

Вариант № 6

Часть 1. Дифференциальное исчисление

06.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\left|x^2-4x+3\right|$.

06.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+6x+9}{3x^2-x+10}\right)^x$.

06.03 Вычислить производные функций

$a)\quad y=\sqrt[3]{\ln\left(3x+e^{-\frac{1}{x}}\right)},\quad b)\quad y=\left(\sqrt{3x+4}+2\cos\frac{2}{x}\right)^2,$

$c)\quad y=arctg2x\,(5+tg3x),\quad d)\quad y=\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}},\quad e)\quad x=\arcsin(t^2-1), y=\arccos(2t).$

06.04 Вычислить вторую производную функции $y=e^x\cos x$.

06.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=\frac{\sqrt{3x}}{2}+\cos x,\quad [-\frac{3\pi}{2};-\pi]$.

06.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\frac{x}{(1-x^2)^2}$.

Часть 2. Интегральное исчисление

06.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\frac{(3x+7)\,dx}{4+x^2}$.

06.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int x\,arctg\,4x\,dx.$

06.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{x^2+x-1}{x^3(x-1)^2}dx.$

06.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

06.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$

06.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx.$

06.13 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$.

Вариант № 7

Часть 1. Дифференциальное исчисление

07.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=5-|x|-x^2.$

07.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}-\sqrt{x^2-8x+4}\right).$

07.03 Вычислить производные функций

$$a)\quad y=\sqrt[4]{3x^2+5x-\frac{6}{x}},\quad b)\quad y=tg^3\,\frac{2x^3-\sqrt{x}}{5+3x^2},$$

$$c)\quad y=\ln\frac{2x-3}{3x+4},\quad d)\quad y=\frac{\sin x}{e^{\cos 2x}},\quad e)\quad x=t^2+t+1, y=t^3+t.$$

07.04 Вычислить вторую производную функции $y=e^{2x}\sin x.$

07.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=\frac{x-5}{x^2+11},\quad [-3;7].$

07.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

Часть 2. Интегральное исчисление

07.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int (4x^2-9)^{29}\cdot xdx.$

07.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx.$

07.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx.$

07.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}.$

07.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$

07.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}.$

07.13 Найти длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$ от начала координат до точки с абсциссой x=5.

Вариант № 8

Часть 1. Дифференциальное исчисление

08.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\left|5-|x|\right|$.

08.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^3-27}-\sqrt{x^2-9}}{\sin(x-3)}.$

08.03 Вычислить производные функций

$a)\quad y=\sqrt[5]{2x^3+\frac{3}{x^2}+\sqrt{x}},\qquad b)\quad y=\frac{tg2x}{\sqrt{1+x^2}},$

$c)\quad y=\frac{1}{x}\arcsin 2x,\quad d)\quad y=\cos\frac{3}{x}\cdot e^{-x},\quad e)\quad x=ctgt, y=\frac{1}{\cos^2 t}.$

08.04 Вычислить вторую производную функции $y=e^{-x}\sin x.$

08.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=2tgx-tg^2x,\quad \left[0;\frac{\pi}{3}\right].$

08.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$

Часть 2. Интегральное исчисление

08.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\sqrt[3]{3+6x^5}\cdot x^4dx.$

08.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

08.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{x^3-8}.$

08.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{3+\sin x-2\cos x}dx.$

08.11 Вычислить определенный интеграл $\int_3^8\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

08.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_1^\infty\frac{dx}{1+x\sqrt{x}}.$

08.13 Найти длину цепной линии $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$ от точки x=0 до точки x=2.

Вариант № 9

Часть 1. Дифференциальное исчисление

09.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\sqrt{3x-5}$.

09.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+9}-x-3}{2x}$.

09.03 Вычислить производные функций

$a)\quad y=\left(\sin\frac{3}{x}+\cos\frac{x}{5}\right)^{10},\quad b)\quad y=\sqrt[4]{tg4x}\,\arccos\sqrt[4]{x^3},$

$c)\quad y=\frac{5x+e^{-3x}}{\ln x},\quad d)\quad y=\sqrt{arctg2x+arcctg3x},\quad e)\quad x=\frac{2-t}{2+t^2},\, y=\frac{t^2}{2+t^2}.$

09.04 Вычислить вторую производную функции $y=x\sqrt{1+x^2}$.

09.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=\frac{x^3-9x}{10},\quad [-2;-1]$.

09.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\frac{x+1\;^{3}}{x-2\;^{2}}$.

Часть 2. Интегральное исчисление

09.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int e^{arctgx^2}\,\frac{xdx}{1+x^4}$.

09.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

09.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{2x^2-5x+6}{x^2-4\;\;x^2+2}dx$.

09.10 Вычислить неопределенный интеграл

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+12\cos^2 x}.$$

09.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}$.

09.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$.

09.13 Вычислить длину дуги кардиоиды ρ=a(1+cosφ).

Вариант № 10

Часть 1. Дифференциальное исчисление

10.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\sqrt{6-5x}.$

10.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\ \ e^{2x^2}\ +\sin 6x}{\ln\ \ e^{3x^2}\ +cos 5x}.$

10.03 Вычислить производные функций

$$a)\quad y=\ \ arc\sin x+arc\cos x\ ^{10},\quad b)\quad y=\sqrt{\frac{\ln 2x}{x^2+1}},$$

$$c)\quad y=\left(e^{-\frac{2}{x}}+\sqrt{ctg\frac{3}{x}}\right)^3,\quad d)\quad y=\sqrt{1-x^2}\cdot arctgx,\quad e)\quad x=2\cos^3 2t, y=\sin^3 2t.$$

10.04 Вычислить вторую производную функции $y=x\sin^2 x.$

10.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x},\quad [\frac{1}{2};2].$

10.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=x+arctgx.$

Часть 2. Интегральное исчисление

10.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

10.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\frac{3x+5\ \ dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}.$

10.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^4-16}.$

10.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int tg^5 x dx.$

10.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 arctgx dx.$

10.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{{x^2-4}^3}}.$

10.13 Вычислить периметр криволинейного треугольника, образованного кривыми

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \quad x^2+y^2=2x, \quad y=0.$$

Вариант № 11

Часть 1. Дифференциальное исчисление

11.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y = e^{2x-5}.$

11.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-5x}-\sqrt{1-8x}}{4x+5x^2}.$

11.03 Вычислить производные функций

$$a)\quad y=\sqrt[3]{3x^4+e^{-3x}+\cos 2x}, \quad b)\quad y=\left(tg\frac{3}{x}+2x\right)\cdot e^{-4x},$$

$$c)\quad y=\frac{\ln\left(x+\sqrt{5+x^2}\right)}{5+x^2}, \quad d)\quad y=\arcsin\ 2^{\sin 2x^2}\ , \quad e)\quad x=t+\ln(tgt), y=t-\ln(\cos t).$$

11.04 Вычислить вторую производную функции $y=e^{-x^2}.$

11.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=\frac{x}{e^x}, \quad [0.5;2].$

11.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$

Часть 2. Интегральное исчисление

11.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int \frac{arc^3 \cos x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

11.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int \frac{4x-3}{x^2-5x+4}dx.$

11.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^3+x}dx.$

11.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

11.11 Вычислить определенный интеграл $\int_1^4 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}.$

11.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_1^3 \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x-2}}dx.$

11.13 Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OX плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$y=\frac{x^2}{4}, \quad y=-\frac{x^2}{4}, \quad x^2+y^2=12.$$

Вариант № 12

Часть 1. Дифференциальное исчисление

12.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=2^{|x-2|}.$

12.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 5x}{xarctg 2x}.$

12.03 Вычислить производные функций

$$a)\quad y=\sqrt{12x^5+tg\frac{3}{x}}, \quad b)\quad y=\left(\sin\frac{5}{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)e^{-\frac{6}{x}},$$

$$c)\quad y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\arccos 2x}, \quad d)\quad y=\ln\ arctg\sqrt[4]{3x}\ , \quad e)\quad x=t-3\cos 3t, y=\cos^3 t.$$

12.04 Вычислить вторую производную функции $y = xe^{-x^2}.$

12.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y = x^2e^{-x}, \quad [-1;1].$

12.06 Провести полное исследование и построить график функции $y = x^3e^{-x}.$

Часть 2. Интегральное исчисление

12.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int 5x^7+7\ ^{40} x^6dx.$

12.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

12.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{x^2-x+1}{x^4+2x^2-3}dx.$

12.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int \cos 3x \cos 5x \sin 7x dx.$

12.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}.$

12.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{x^5}{x^3+4\ ^{2}}dx.$

12.13 Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OX плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$y^2 = 9x, \quad y = 3x.$$

Вариант № 13

Часть 1. Дифференциальное исчисление

13.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\log_5\ 5-15x$.

13.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+12}-2\sqrt{8-x}}{x-4}.$

13.03 Вычислить производные функций

$a)\quad y=\sqrt[3]{7x\sqrt{x}+ctg\,\dfrac{2}{x}},\quad b)\quad y=\left(\cos\dfrac{4}{x}+\sqrt[5]{3x}\right)\cdot e^{-x^2},$

$c)\quad y=\dfrac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1+4x^2}},\quad d)\quad y=arctg\ \ 2\cos 3x+7x\ \ ,\quad e)\quad x=2t-\cos 2t, y=\sin^3 t.$

13.04 Вычислить вторую производную функции $y=arctgx^2.$

13.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=x-2arctgx,\quad [-\pi;\pi].$

13.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\ln\ 2x^2+3$.

Часть 2. Интегральное исчисление

13.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\displaystyle\int\frac{3x^2+5\ \ dx}{x^3+5x+23}.$

13.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\displaystyle\int\frac{6x-7}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx.$

13.09 Вычислить неопределенный интеграл $\displaystyle\int\frac{x^3+x}{x^2+5x+4}dx.$

13.10 Вычислить неопределенный интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin^2 x+7\cos^2 x}.$

13.11 Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_2^7\frac{x}{\sqrt{x+2}+3}dx.$

13.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\cos 3x dx.$

13.13 Определить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой y=e^{-x}, от x=0 до x=∞.

Вариант № 14

Часть 1. Дифференциальное исчисление

14.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\log_3\ 9-3x$.

14.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\ e^{x^3}+\sin 9x}{\ln\ e^{x^4}-\cos 5x}.$

14.03 Вычислить производные функций

$$a)\quad y=\frac{1}{\sqrt{\cos 2x+e^{-3x}}},\quad b)\quad y=\frac{\ln\ 5x+e^{2x}}{\sqrt{3\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}},$$

$$c)\quad y=\arccos 4x\cdot\ln\ 3x+1\ ,\quad d)\quad y=arctg\left(\frac{5}{x}+\sin 5x\right),\quad e)\quad x=t^2+\sqrt{t}, y=t^3+\sqrt[3]{t}.$$

14.04 Вычислить вторую производную функции $y=xe^{\frac{1}{x}}.$

14.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=x^4+4x^3+4x^2+1,\quad [-1,5;1].$

14.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{x-3}{e^x}.$

Часть 2. Интегральное исчисление

14.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int 2^{\frac{1}{x}}\dfrac{dx}{x^2}.$

14.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx.$

14.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx.$

14.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int \sin^3 x\cos^2 xdx.$

14.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^8 \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}.$

14.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\cos x}dx.$

14.13 Найти объем тела, полученного от вращения кардиоиды ρ=a(1+cosφ) вокруг полярной оси.

Вариант № 15

Часть 1. Дифференциальное исчисление

15.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\log_2(4+3x)$.

15.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{2x-6}+\sqrt[3]{7-x}}{x^2+x^3}.$

15.03 Вычислить производные функций

$$a)\quad y=\left(\sqrt{e^{5x}}-x^3\cdot\cos\frac{x}{3}\right)^2,\quad b)\quad y=\frac{\arcsin\frac{3}{x}}{5+x^4},$$

$$c)\quad y=\sqrt{3x+\sqrt{4x+\sqrt{5x+2}}},\quad d)\quad y=x^5\cdot e^{-x^3},\quad e)\quad x=\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-t, y=t-\frac{3}{t^3}.$$

15.04 Вычислить вторую производную функции $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$

15.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=arctg\frac{1-x}{1+x},\quad [0;1].$

15.06 Провести полное исследование и построить график функции $y = x - 5arctgx.$

Часть 2. Интегральное исчисление

15.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int \sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} dx.$

15.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int x\sqrt{3-x}dx.$

15.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 - 2} dx.$

15.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$

15.11 Вычислить определенный интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

15.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

15.13 Вычислить площадь поверхности вращения тангенсоиды y=tgx от x=0 до x=π.

Вариант № 16

Часть 1. Дифференциальное исчисление

16.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y = 3^{2-|x|}.$

16.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 6x}.$

16.03 Вычислить производные функций

$$a) \quad y = \left(4 \arcsin 5x + \frac{3}{x}\right)^3, \quad b) \quad y = \frac{x^2+4}{\ln\ 3x+5},$$

$$c) \quad y = \sqrt{\sin 5x} \cdot arctg\frac{4}{x}, \quad d) \quad y = tg\sqrt{arcctgx^2}, \quad e) \quad x = \arccos(2-t^2), y = \arcsin(3t^3).$$

16.04 Вычислить вторую производную функции $y = arctg\sqrt{x} - \sqrt{x}.$

16.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y = \frac{x^2+1}{x}, \quad [0,5;1,5].$

16.06 Провести полное исследование и построить график функции $y = x^2 \ln x.$

Часть 2. Интегральное исчисление

16.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}.$

16.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int x^2 e^{3x} dx.$

16.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 4x + 4}.$

16.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

16.11 Вычислить определенный интеграл $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx.$

16.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

16.13 Вычислить объем тора, полученного вращением окружности $x^2+(y-5)^2=4$ вокруг оси OX.

Вариант № 17

Часть 1. Дифференциальное исчисление

17.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\lg\ 10x-25$.

17.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-1}{4arctg3x}$.

17.03 Вычислить производные функций

$a)\quad y=\sqrt{x^3+x}\cdot\arcsin\dfrac{1}{x},\quad b)\quad y=x\arcsin\dfrac{2x+1}{3},$

$c)\quad y=\ln\ 3\sqrt[3]{\sin 4x}\ ,\quad d)\quad y=e^{-\sqrt{tg4x}},\quad e)\quad x=t^2-2t+4, y=t^3-t.$

17.04 Вычислить вторую производную функции $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

17.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=x^3e^x,\quad [2;4].$

17.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=x^2e^{-x}$.

Часть 2. Интегральное исчисление

17.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2\ \arccos x}}$.

17.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int x\ln^2 xdx.$

17.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int\dfrac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}dx.$

17.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int\dfrac{dx}{4\sin^2 x-9\cos^2 x}$.

17.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^4\dfrac{x^2dx}{4+\sqrt{x}}$.

17.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_1^9 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{9-x}}$.

17.13 Вычислить длину дуги кардиоиды ρ=2(1-cosφ), находящейся внутри окружности ρ=1.

Вариант № 18

Часть 1. Дифференциальное исчисление

18.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=5-6x-x^2$.

18.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{7\sqrt{x^4+1}}$.

18.03 Вычислить производные функций

$$a)\quad y=\frac{\sin^2 4x}{\sqrt{\cos 6x}},\quad b)\quad y=3^{tg\frac{3}{x^2}},$$

$$c)\quad y=\sqrt{arctg2x}\cdot e^{-x^2},\quad d)\quad y=\frac{\ln\ x^2+1}{x\ 1+x^2},\quad e)\quad x=tgt, y=\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}.$$

18.04 Вычислить вторую производную функции $y=\ln\left(\frac{3x-7}{3x+5}\right)$.

18.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=\frac{8}{x}+\frac{x^2}{2},\quad [1;4]$.

18.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\frac{1}{e^x-1}$.

Часть 2. Интегральное исчисление

18.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int tg\ \ e^x\ \ e^x dx$.

18.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int x\arcsin\frac{1}{x}dx.$

18.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{xdx}{x^3-1}dx.$

18.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int ctg^6 xdx.$

18.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 9}\frac{dx}{e^x+1}.$

18.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}.$

18.13 Вычислить длину дуги одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$$

Вариант № 19

Часть 1. Дифференциальное исчисление

19.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y=\lg(3-|x|).$

19.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^5-1}{4x}.$

19.03 Вычислить производные функций

$$a)\quad y=\sqrt[3]{4\sqrt[4]{x^2+2}+e^{tg 2x}},\quad b)\quad y=\frac{e^{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}},$$

$$c)\quad y=arctg\sqrt{5x+\sin 2x},\quad d)\quad y=2^{\arcsin\frac{1}{x}},\quad e)\quad x=\frac{3-t^2}{3-t}, y=\frac{1+t}{2+t^2}.$$

19.04 Вычислить вторую производную функции $y=\frac{x-1}{x+1}e^{-x}.$

19.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=x+2\sqrt{x},\quad [0;4].$

19.06 Провести полное исследование и построить график функции $y = \ x+2 \ e^{\frac{1}{x}}.$

Часть 2. Интегральное исчисление

19.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int \frac{2^x + 7^x \ \ dx}{40^x}.$

19.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int x^2 cos 3x dx.$

19.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x+2 \ \ x^2+4x+5}.$

19.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{5\sin x + 7\cos x}.$

19.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^{64} \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx.$

19.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x \ \ 2-x}}.$

19.13 Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми

$y^2 = 4x, \quad x = 4.$

Вариант № 20

Часть 1. Дифференциальное исчисление

20.01 С помощью преобразований на плоскости построить график функции $y = \lg|x-4|.$

20.02 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3^x - x^3}{x-3}.$

20.03 Вычислить производные функций

$a)\quad y=\sqrt[5]{3x^2+4\sqrt{5x+\sqrt{2x+1}}},\quad b)\quad y=\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{\cos 3x},$

$c)\quad y=arctg^2\ \ 3ctg2x\ ,\quad d)\quad y=5^{-\sin 3x}\cdot tg\dfrac{4}{x},\quad e)\quad x=2tg^3t, y=3ctg^3t.$

20.04 Вычислить вторую производную функции $y=e^{\cos x}.$

20.05 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=\sqrt{100-x^2},\quad -6;8$.

20.06 Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{e^{-x}}{x^2}.$

Часть 2. Интегральное исчисление

20.07 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int\dfrac{dx}{(1+x^2)\cdot x^2}.$

20.08 Вычислить неопределенный интеграл и проверить результат дифференцированием: $\int xarctg\dfrac{1}{x}dx.$

20.09 Вычислить неопределенный интеграл $\int\dfrac{2x-3}{x\ \ x+3^{\ 3}}dx.$

20.10 Вычислить неопределенный интеграл $\int\sin^6 x\cos^5 xdx.$

20.11 Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}dx.$

20.12 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_0^3\dfrac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}.$

20.13 Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ плоской фигуры, ограниченной кривыми

$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1,\quad y^2=\dfrac{3}{4}x,\quad y=0.$

Содержание