

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»
(СПбГТИ(ТУ))

Кафедра механики

А.А. Кузьмин, Э.А. Павлова

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2016

УДК 621.822

ББК 34.445

Кузьмин, А. А. Расчет стержня переменного сечения: учебное пособие / А.А. Кузьмин, Э.А. Павлова – СПб. : Изд-во СПб ГТИ (ТУ), 2016. – 26 с.

Учебное пособие кратко излагает основы метода конечных элементов, содержание конкретных задач, стоявших перед разработчиками и методы решения этих задач. В пособии содержится пример решения практической задачи. Тематика учебного пособия и уровень изложения материала соответствуют требованиям федеральных государственных образовательных стандартов по направлению «Строительство» 08.03.01. с учетом ПК-1 и ПК-2.

Учебное пособие написано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Основы теории упругости» и предназначено для подготовки бакалавров по направлению «Строительство» 08.03.01., а также для углубленного изучения сопротивления материалов и прикладной механики студентами механических и химико-технологических специальностей.

Рис.5, библиогр. 4 назв.

Рецензенты: 1. Петербургский государственный университет путей сообщения, доцент кафедры «Прочность материалов и конструкций», канд. техн. наук Аллахвердов Б.М.
2. Яблокова М.А., д-р техн. наук, зав. кафедрой инженерного проектирования СПб ГТИ (ТУ), профессор.

Издание подготовлено в рамках выполнения государственного задания по оказанию образовательных услуг Минобрнауки России.

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии механического факультета СПб ГТИ (ТУ) 03. 02. 2016 года.

Рекомендовано к изданию РИС СПб ГТИ (ТУ)

СОДЕРЖАНИЕ

.Введение.....	4
1 Основы метода конечных элементов.....	5
2 Пример расчета.....	15
3 Анализ результатов расчета.....	20
4 Порядок оформления работы.....	23
Литература.....	24
Приложение. Варианты индивидуальных заданий.....	25

Введение

Основными целями науки о сопротивлении материалов является решение трех задач: проверка выполнения условия прочности, подбор сечения и определение предельной грузоподъемности. При практическом решении этих задач реальный объект заменяется на расчетную схему. Выбор расчетной схемы упрощает объект: сложные в геометрическом плане тела представляются как простые модели, свойства, зависящие от целого ряда факторов, заменяются на несколько констант, действующие нагрузки представляются в упрощенном виде. Расчет сложных объектов требует сложных расчетных схем и сложных аналитических решений. Применение методов теории упругости, теории пластичности, теории ползучести, строительной механики и других составляющих механики твердого тела позволяет решать достаточно сложные задачи, однако возможности аналитических методов ограничены. Широкое внедрение вычислительной техники открыло дорогу численным методам, которые позволяют решать задачи практически любой сложности. В настоящее время наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ). На его основе созданы и широко применяются известные программы (SCAD, BASE и др.). Для успешной работы в этих программах необходимо не только знакомство с предметной базой, но и знание основ МКЭ. Предлагаемое учебное пособие позволяет выполнить и сопоставить расчет стержня переменного сечения и методом КЭ и аналитически. Решение данной задачи позволяет оценить возможности метода конечных элементов и трудности при расчете сложных объектов аналитическими методами.

1 Основы метода конечных элементов

Проектирование крупных объектов, как правило, содержит три необходимых элемента: испытание макета, аналитический расчет и расчет численным методом. В качестве последнего чаще всего применяется метод конечных элементов (МКЭ). Идея метода состоит в разделении исследуемого объекта на дискретные области и аппроксимации рассчитываемой величины внутри каждой области с помощью полинома [1]. При этом рассчитываемой величиной может быть температура, давление, перемещение и другие физические величины. Конечной целью задач теории упругости является расчет напряженно-деформированного состояния. В зависимости от геометрической формы реального объекта расчетная схема может быть сведена к линейной, плоской и объемной задаче [2]. Рассмотрим наиболее простой случай – растяжение стержня.

Первым этапом решаемой задачи является разбиение исследуемого объекта на подобласти (конечные элементы). Например, стержень

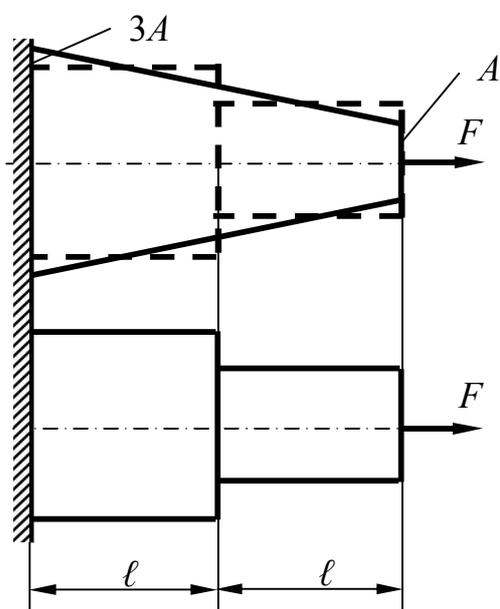


Рисунок 1 – Стержень переменного сечения

переменного сечения длиной 2ℓ (рисунок 1) можно представить как два стержня постоянного поперечного сечения, простейшая схема любого из которых имеет вид (рисунок 2). Прямолинейный отрезок длиной ℓ и является простейшим одномерным симплекс – элементом с двумя узлами. В нашем случае исследуемой функцией является перемещение и величину перемещения внутри элемента проще всего

аппроксимировать формулой [3]:

$$u = a_1 + a_2x \quad (1)$$

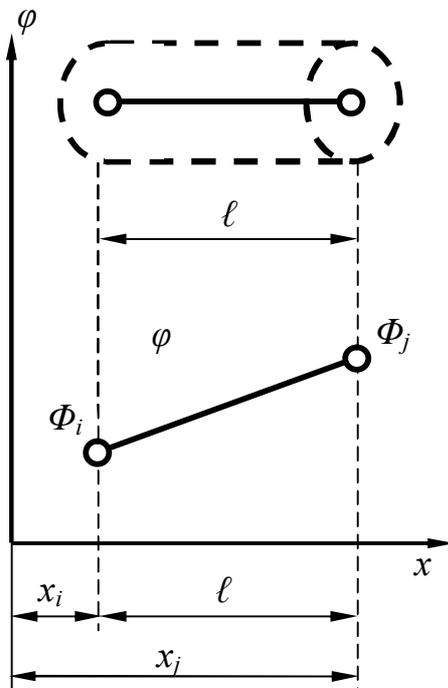


Рисунок 2 – Одномерный симплекс-элемент

Через значения перемещений в узловых точках можно определить коэффициенты a_1 и a_2 .

$$\begin{aligned} u &= u_i && \text{при} && x = x_i \\ u &= u_j && \text{при} && x = x_j, \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_i &= a_1 + a_2x_i \\ u_j &= a_1 + a_2x_j, \end{aligned} \quad (3)$$

откуда

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{u_i x_j - u_j x_i}{\ell} \\ a_2 &= \frac{u_j - u_i}{\ell} \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя a_1 и a_2 в формулу (1), получаем выражение для определения перемещений внутри элемента:

$$u = \frac{(u_i x_j - u_j x_i)}{\ell} + \frac{u_j - u_i}{\ell} \cdot x = \frac{x_j - x}{\ell} u_i + \frac{x - x_i}{\ell} u_j \quad (5)$$

величины $\frac{x_j - x}{\ell}$ и $\frac{x - x_i}{\ell}$ называются функциями формы и обозначаются N_i и N_j соответственно. В матричном виде соотношение 5 имеет вид

$$u = N_i u_i + N_j u_j = [N]\{U\}, \text{ где} \quad (6)$$

$[N] = [N_i \ N_j]$ – матричная строка

$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$ – вектор столбец узловых перемещений

Уравнение (6) справедливо как для скалярных (температура, концентрация, пьезометрический напор), так и для векторных (осевое перемещение, угловое перемещение) величин. При рассмотрении векторных величин в плоской и объемной задачах необходимо учитывать две и три компоненты перемещения соответственно, однако, эти задачи выходят за рамки настоящей работы.

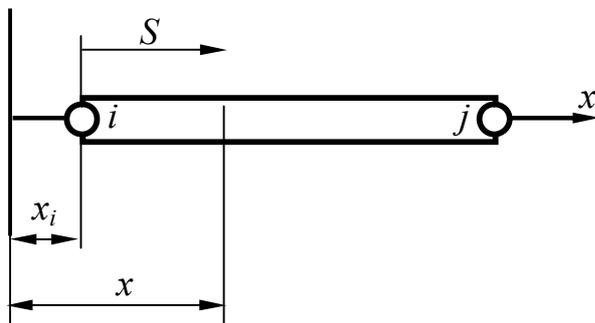


Рисунок 3 – Произвольный одномерный элемент

Для произвольного одномерного элемента (рисунок 3) можно ввести местную систему координат, поместив ее начало в i -ый узел.

$$x = x_i + S$$

В этом случае функции формы уравнения (5) примут вид

$$N_i = \frac{x_j - x_i - S}{\ell} = \frac{\ell - S}{\ell} = 1 - \frac{S}{\ell} \quad (7)$$

$$N_j = \frac{x_i + S - x_i}{\ell} = \frac{S}{\ell} \quad (8)$$

Перемещение произвольного сечения элемента можно записать как

$$u = \left(1 - \frac{S}{\ell}\right)u_i + \left(\frac{S}{\ell}\right)u_j \quad (9)$$

Очевидно, что с увеличением количества элементов, т.е. с уменьшением размеров каждого конечного элемента решение будет сходиться к точному. Из уравнения (9) следует, что сумма функций формы равна 1. Это утверждение справедливо и для двух – и трехмерных элементов. МКЭ для описания непрерывной функции (перемещения) использует дискретную модель. Внутри каждого элемента функция непрерывна, а любой узел одновременно принадлежит двум элементам, что обеспечивает непрерывность. На физическом уровне нарушение условия непрерывности означает разрушение (это справедливо как для продольного растяжения – сжатия, так и для кручения).

Рассмотрим растяжение стержня постоянного поперечного сечения жесткостью EA и длиной 2ℓ двумя продольными силами F_2 и F_3 (рисунок 4).

Для удобства вычислений силу F_2 приложили посередине стержня, но в общем случае она может быть приложена в любом сечении и

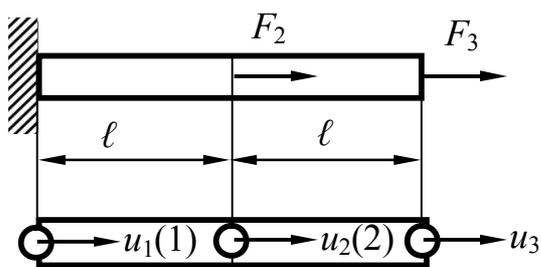


Рисунок 4 – Стержень постоянного сечения

конечные элементы могут быть произвольной длины. На рисунке 4 в круглых скобках указан номер элемента. На основании формулы (6) перемещение произвольного сечения внутри первого элемента имеет вид:

$$u^{(1)} = N_1^{(1)}u_1 + N_2^{(1)}u_2 = N_2^{(1)}u_2 = \frac{x}{\ell}u_2, \quad (10)$$

поскольку узловое перемещение $u_1 = 0$.

Перемещение произвольного сечения внутри второго элемента имеет вид:

$$u^{(2)} = N_2^{(2)}u_2 + N_3^{(2)}u_3 = \frac{\ell - x}{\ell}u_2 = \frac{x}{\ell}u_3 \quad (11)$$

Очевидно, что работа внешних сил будет равняться сумме произведений этих сил на перемещения, т.е. $F_2 \cdot u_2 + F_3 \cdot u_3$, а энергия упругой деформации всего стержня $\Pi^{(\Sigma)}$ состоит из энергии упругой деформации элементов.

$$\begin{aligned} \Pi^{(\Sigma)} &= \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} = \int_V \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} dV = A \int_0^{\ell} \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} dx + A \int_{\ell}^{2\ell} \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} dx = \\ &= A \int_0^{\ell} \frac{E \varepsilon^2}{2} dx + A \int_{\ell}^{2\ell} \frac{E \varepsilon^2}{2} dx \end{aligned} \quad (12)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^{(1)} &= \frac{du^{(1)}}{dx} = \frac{1}{\ell}(-u_1 + u_2) \\ \varepsilon_x^{(2)} &= \frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{1}{\ell}(-u_2 + u_3) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

поскольку $u_1 = 0$, уравнение (12) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \Pi^{(\Sigma)} &= \frac{AE}{2} \int_0^\ell \left(\frac{u_2}{\ell}\right)^2 dx + \frac{AE}{2} \int_\ell^{2\ell} \left(\frac{u_3}{\ell}\right)^2 dx - \frac{AE}{2} \int_\ell^{2\ell} \frac{2u_2 u_3}{\ell^2} dx + \frac{AE}{2} \int_\ell^{2\ell} \left(\frac{u_2}{\ell}\right)^2 dx = \\ &= \frac{AE}{2\ell} u_2^2 + \frac{AE}{2\ell} u_3^2 - \frac{AE u_2 u_3}{\ell} + \frac{AE}{2\ell} u_2^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Без учета перехода механической энергии в тепловую вся работа внешних сил переходит в энергию упругой деформации, и решение будет тем точнее, чем меньше разница между этими величинами $\Delta\Pi$:

$$\Delta\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} - F_2 \cdot u_2 - F_3 \cdot u_3 = \min \quad (15)$$

Поскольку и работу внешних сил и энергию упругой деформации определяют перемещения u_2 и u_3 , то и минимизацию $\Delta\Pi$ надо производить по u_2 и u_3 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Pi}{\partial u_2} &= 0 \\ \frac{\partial \Delta \Pi}{\partial u_3} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Pi}{\partial u_2} &= \frac{2AEu_2}{\ell} - \frac{AEu_3}{\ell} - F_2 = 0 \\ \frac{\partial \Delta \Pi}{\partial u_3} &= \frac{AEu_3}{\ell} - \frac{AEu_2}{\ell} - F_3 = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} 2u_2 - u_3 &= \frac{F_2 \ell}{AE} \\ -u_2 + u_3 &= \frac{F_3 \ell}{AE} \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

следовательно,

$$u_2 = \frac{(F_2 + F_3)\ell}{AE}; \quad u_3 = \frac{(F_2 + 2F_3)\ell}{AE}.$$

Поскольку перемещение внутри элемента описывалось линейной моделью и в пределах применимости закона Гука, поведение материалов описывается линейными зависимостями, то решение методом конечных элементов совпадало с известным результатом из курса сопротивления материалов. Если бы стержень имел, например, переменное сечение, то линейная модель перемещения внутри элемента была бы приближенной и теоретическое значение расходилось бы с расчетным по МКЭ.

В матричной форме система уравнений (17) имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} \frac{2AE}{l} & -\frac{AE}{l} \\ -\frac{AE}{l} & \frac{AE}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Поскольку $u_1 = 0$ не будет ошибочной записью следующего вида:

$$\begin{Bmatrix} \frac{AE}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2AE}{l} & -\frac{AE}{l} \\ 0 & -\frac{AE}{l} & \frac{AE}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

которую можно представить как:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (21)$$

$[K]$ – матрица жесткости всего стержня (глобальная матрица жесткости),

$\{U\}$ – вектор-столбец узловых перемещений,

$\{F\}$ – вектор-столбец нагрузки.

Поскольку заделка неподвижна, мнимая внешняя сила $F_1 = 0$, хотя безусловно в заделке действует реакция опоры.

Величина $\frac{2AE}{\ell}$ – сумма жесткости первого и второго конечных элементов, которые для удобства вычислений выбраны одинаковыми.

Если (20) разделить по штриховым линиям, то получится два равенства:

$$\left| \begin{array}{cc|c} \frac{AE}{\ell} & 0 & u_1 \\ 0 & \frac{AE}{\ell} & u_2 \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} \right\} \quad (22)$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} \frac{AE}{\ell} & -\frac{AE}{\ell} & u_2 \\ -\frac{AE}{\ell} & \frac{AE}{\ell} & u_3 \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{c} F_2 \\ F_3 \end{array} \right\}, \quad (23)$$

которые можно записать как:

$$[K^{(1)}] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (24)$$

$$[K^{(2)}] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (25)$$

Уравнения (24) и (25) связывают силы и перемещения внутри отдельного конечного элемента.

$[K^{(1)}]$ и $[K^{(2)}]$ – матрицы жесткости первого и второго конечных элементов. Из (20) схематически видно как, зная матрицы жесткости отдельных конечных элементов составить глобальную. При разделении исследуемой области на конечные элементы необходимо, чтобы внешние силы были приложены обязательно в узлах. При более частом разбиении стержня на конечные элементы матрицы жесткости всех последующих элементов имели бы вид аналогичный (23). Особенность записи определяющего уравнения для первого конечного элемента обусловлена неподвижностью заделки.

Таким образом, зная свойства материала, размеры поперечных сечений и длины конечных элементов можно получить определяющую систему уравнений и найти перемещения узловых точек.

Поскольку перемещения внутри каждого конечного элемента подчиняются линейному закону, то деформации, а, следовательно, и напряжения будут постоянными. При этом, зная перемещения, деформации можно определить из (13), а напряжения по закону Гука. Полученные таким способом напряжения будут постоянными внутри каждого конечного элемента, а в узлах произойдет их скачкообразное изменение. Для определения напряжений в узлах проще всего принять средние по двум соседним элементам значения. Более точные результаты дает применение теории сопряженной аппроксимации.

2 Пример расчета

Рассмотрим конкретный пример. Стержень, представленный на рисунке 1 имеет размеры $2\ell = 1000$ мм, $A = 100$ мм². На стержень действует сила $F = 10$ кН и он изготовлен из стали Ст.3 ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma] = 160$ МПа). Требуется методом конечных элементов проверить выполнение условия прочности, жесткости, построить эпюру перемещений и сравнить полученное решение с аналитическим.

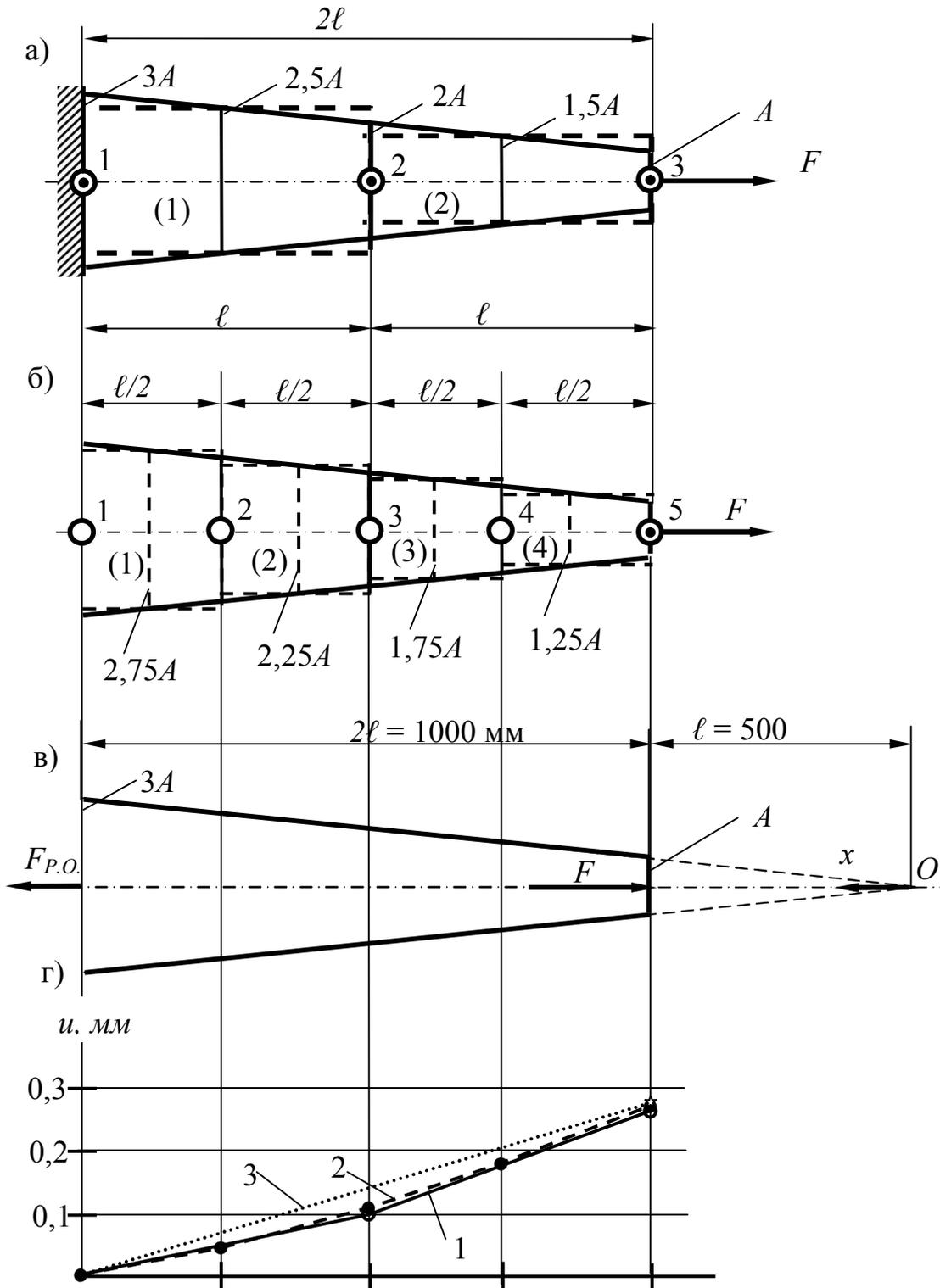
Разобьем стержень (рисунок 5.а) на два конечных элемента длиной $\ell = 500$ мм и площадью поперечного сечения $2,5A = 250$ мм² и $1,5A = 150$ мм² соответственно.

По аналогии с (20) определяющее уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{2,5AE}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2,5+1,5)AE}{\ell} & \frac{-1,5AE}{\ell} \\ 0 & \frac{-1,5AE}{\ell} & \frac{1,5AE}{\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \quad (26)$$

Для удобства вычислений (26) можно преобразовать к виду:

$$\frac{AE}{\ell} \begin{pmatrix} 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1,5 \\ 0 & -1,5 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \quad (27)$$



1 – 2 конечных элемента; 2 – 4 конечных элемента; 3 – теоретическое.

а – двухэлементная модель; б – четырехэлементная модель; в – графическое описание зависимости площади поперечного сечения A от координаты x ;

г – эпюры перемещений

Рисунок 5 – Расчетная схема стержня переменного сечения

После подстановки численных значений (27) имеет вид:

$$4 \cdot 10^4 \begin{vmatrix} 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1,5 \\ 0 & -1,5 & 1,5 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^4 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Поскольку $u_1 = 0$, определяющая система уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} 4u_2 - 1,5u_3 &= 0 \\ 4 \cdot 10^4(-1,5u_2 + 1,5u_3) &= 10^4 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Решая (29) получим $u_2 = 0,1$ мм, $u_3 = 0,267$ мм.

Выше и в дальнейшем для удобства вычислений силы выражаем в ньютонах, а длины в миллиметрах.

Рассмотрим тот же стержень, разделенный на четыре конечных элемента (рисунок 5.б) длиной 250 мм и площадью поперечного сечения 275 мм^2 , 225 мм^2 , 175 мм^2 и 125 мм^2 соответственно. Определяющее уравнение в этом случае примет вид:

$$\frac{AE}{\ell} \begin{pmatrix} 2,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2,75+2,25) & -2,25 & 0 & 0 \\ 0 & -2,25 & (2,25+1,75) & -1,75 & 0 \\ 0 & 0 & -1,75 & (1,75+1,25) & -1,25 \\ 0 & 0 & 0 & -1,25 & 1,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \quad (30)$$

Подставляя численные значения A , E , ℓ и F в формулу (30) получаем:

$$8 \cdot 10^4 \begin{pmatrix} 2,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,0 & -2,25 & 0 & 0 \\ 0 & -2,25 & 4,0 & -1,75 & 0 \\ 0 & 0 & -1,75 & 3,0 & -1,25 \\ 0 & 0 & 0 & -1,25 & 1,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10^4 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Решение системы уравнений (31) дает следующие результаты: $u_1 = 0$; $u_2 = 0,0456$ мм; $u_3 = 0,1012$ мм; $u_4 = 0,1726$ мм; $u_5 = 0,2726$ мм.

Деформации внутри самих конечных элементов составят:

$$\varepsilon^{(1)} = 0,1824 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon^{(2)} = 0,2224 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon^{(3)} = 0,2856 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon^{(4)} = 0,4000 \cdot 10^{-3},$$

а напряжения

$$\sigma^{(1)} = 36,48 \text{ МПа};$$

$$\sigma^{(2)} = 44,48 \text{ МПа};$$

$$\sigma^{(3)} = 57,12 \text{ МПа};$$

$$\sigma^{(4)} = 80,00 \text{ МПа}.$$

Указанные значения напряжений определялись из закона Гука при растяжении-сжатии, а представленные ниже значения напряжений в промежуточных узлах рассматривались как среднее между напряжениями в смежных конечных элементах:

$$\sigma_2 = 40,48 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = 50,80 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = 68,56 \text{ МПа}.$$

Незначительные расхождения с теоретическими значениями ($\sigma_2^T = 40 \text{ МПа}$; $\sigma_3^T = 50 \text{ МПа}$; $\sigma_4^T = 66,67 \text{ МПа}$) позволяют в данном случае не прибегать к теории сопряженной аппроксимации. Используемые выше надстрочные индексы в круглых скобках относят ту или иную величину к элементу, номер которого указан, а подстрочные индексы к узлу.

3 Анализ результатов расчета

Анализируя результаты расчета по двух- и четырехэлементной моделям видно, что с увеличением числа конечных элементов происходит небольшое увеличение абсолютного удлинения и при дальнейшем разбиении стержня на более короткие конечные элементы решение будет сходиться к теоретическому, которое приводится ниже.

В общем случае удлинение стержня, нагруженного, продольными силами, определяется по формуле [2]:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dx}{EA} \quad (32)$$

Поскольку стержень изготовлен из одного материала и на него действует одна постоянная сила, формула(32) преобразуется к виду:

$$\Delta l = \frac{N}{E} \int_0^l \frac{dx}{A(x)} \quad (33)$$

Для удобства аналитического описания зависимости площади поперечного сечения A от координаты x , представляем стержень (рисунок 5.а) в виде (рисунок 5.в), приняв за начало координат точку O . Очевидно, что площадь произвольного поперечного сечения стержня определяется как:

$$A(x) = 0,2x, \quad (34)$$

тогда полное удлинение стержня

$$\Delta \ell = \frac{N}{0,2E} \int_{\ell}^{3\ell} \frac{dx}{x} = \frac{N}{0,2E} (\ln 3\ell - \ln \ell) \quad (35)$$

что в численном выражении составляет:

$$\Delta \ell = \frac{10^4}{0,2 \cdot 2 \cdot 10^5} (\ln 1500 - \ln 500) = 2,5 \cdot 10^{-1} (7,31 - 6,21) = 0,275 \text{ мм}$$

Составляя результаты расчета методом конечных элементов с аналитическими видно, что с увеличением числа конечных элементов численное решение стремится к аналитическому, однако для полноты анализа необходимо экспериментальное подтверждение.

Очень часто макетные испытания крупных объектов проводят на десятикратно уменьшенных моделях. И в данном случае целесообразно провести испытание на растяжение конического стержня длиной 10 мм и сравнивать результаты эксперимента с результатом расчета по формуле (35). Повторно проводить расчеты методом конечных элементов необязательно, поскольку решение как уже было показано выше будет сходиться к теоретическому. При этом чем больше будет конечных элементов, а, следовательно, и число уравнений системы, тем решение будет точнее. Именно этим и объясняется широкое распространение МКЭ после активного развития вычислительной техники, позволяющей оперативно решать большие системы уравнений. До настоящего времени для решения систем линейных уравнений широко использовались метод исключения Гаусса и метод прогонки.

На основании выполненных расчетов и проведенного эксперимента можно заключить, что МКЭ дает результаты близкие к теоретическим

решениям и имеет экспериментальное подтверждение, чем и объясняется его широкое применение. В настоящей работе рассматривается простейший случай решения одномерной задачи – растяжение-сжатие. Однако методом конечных элементов удобно решать задачи изгиба стержневых конструкций [4], а самое главное плоские, осесимметричные и объемные задачи. Помимо задач теории упругости методом конечных элементов можно решать тепловые задачи, задачи диффузии, фильтрации, гидродинамики, в том числе и нестационарные. Для решения последних может использоваться как чистый МКЭ, так и его сочетание с методом конечных разностей.

4 Порядок оформления работы

Работа оформляется по аналогии с расчетно-графическими работами по сопротивлению материалов [4]. Пояснительная записка содержит задание, введение, необходимые расчеты с пояснениями, расчетные схемы и графики (рисунок 5.а – 5.г) с таблицами. В таблицах приводятся результаты расчета перемещений, напряжений и деформаций МКЭ, аналитически и экспериментально. Приводится оценка погрешности. Завершается пояснительная записка выводами и (или) основными результатами. На формате А 2 приводится основной графический материал (рисунок 5.а – 5.г) и наиболее важные таблицы.

В качестве рассчитываемой модели для любого индивидуального задания предлагается использовать расчетную схему стержня переменного сечения как на рис.5а. Значения величин A и l , соответствующие каждому варианту задания, приведены в таблице приложения. Значения допускаемого напряжения и модуля упругости всех трех предлагаемых материалов (стали, меди и алюминия), а также наименование конкретной марки материала студенты выбирают по своему усмотрению на основе справочной литературы. В случае невыполнения условия прочности следует произвести корректировку величины A .

ЛИТЕРАТУРА:

- 1 Александров, А.В. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: учебник для строительных спец. вузов // А.В. Александров, В.Д. Потапов.—2-е изд., испр.-М.; Высшая школа. 2002,- 400с.
- 2 Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник для вузов // В.И. Феодосьев.—11-е изд., стер., М.; МГТУ им. Баумана, 2003. – 591с.
- 3 Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов. // Л. Сегерлинд.--М: «Мир», 1979.- 392с.
- 4 Бартенев, Д.А. Основы метода конечных элементов: учебное пособие для студентов механических специальностей // Д.А. Бартенев, Н.А. Марцулевич, О.В. Сташевская.- СПб.; СПб ГТИ(ТУ), 2008. – 30с.

Приложение

(обязательное)

Варианты индивидуальных заданий

ℓ , мм	сталь			алюминий			медь		
	2А	3А	4А	2А	3А	4А	2А	3А	4А
400	1	2	3	4	5	6	7	8	9
420	10	11	12	13	14	15	16	17	18
440	19	20	21	22	23	24	25	26	27
460	28	29	30	31	32	33	34	35	36
480	37	38	39	40	41	42	43	44	45
500	46	47	48	49	50	51	52	53	54
520	55	56	57	58	59	60	61	62	63
540	64	65	66	67	68	69	70	71	72
560	73	74	75	76	77	78	79	80	81
580	82	83	84	85	86	87	88	89	90
600	91	92	93	94	95	96	97	98	99
620	100	101	102	103	104	105	106	107	108
640	106	110	111	112	113	114	115	116	117
660	118	119	120	121	122	123	124	125	126
680	127	128	129	130	131	132	133	134	135
700	136	137	138	139	140	141	142	143	144
720	145	146	147	148	149	150	151	152	153
740	154	155	156	157	158	159	160	161	162

Кафедра механики

Учебное пособие

Расчет стержня переменного сечения

Александр Алексеевич Кузьмин

Эмилия Александровна Павлова

Отпечатано с оригинал-макета. Формат 60x90 1/16

Печ.л. 1,63. Тираж 30 экз.

Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26
Типография издательства СПб ГТИ(ТУ), тел. 49-49-365