МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ
(МОДУЛЬ «ТЕОРИЯ АНАЛИЗА И СТАТИСТИКА»)

Прежде чем выполнять контрольную работу, студент должен изучить соответствующий теоретический материал, внимательно изучить примеры решения типовых задач, для чего необходимо в обязательном порядке обратиться к рекомендуемой литературе к данному учебному курсу.

Контрольные работы следует выполнять в электронном виде среды MS Word. Титульный лист оформляется согласно стандартному бланку титульных листов, размещенных на официальном сайте ФЭМ в разделе СДО. На титульном листе необходимо указать: наименование учебного заведения, наименование факультета, название кафедры: «Кафедра финансов и статистики», номер и название контрольной работы (указать модуль, по материалам которого выполняется отчетная контрольная работа), наименование специальности и номер группы, фамилию, имя, отчество и личный шифр студента.

Весь текст решаемых задач пишется студентом стандартным шрифтом Times New Roman № 14 с полуторным интервалом. Параметры страницы устанавливаются следующие: поля – верхнее и нижнее: 20 мм, левое – 25 мм, правое – 15 мм. Абзацный отступ – 1,25. Междустрочный интервал – 1,5. Формулы, графики и таблицы оформляются четко и разборчиво, причем графический материал и формулы оформляются при помощи встроенных конструкторов среды MS Word.

Номера варианта должен совпадать с номером вашей работы, указанным в профиле СДО ФЭМ.

Работы, выполненные не по вышеперечисленным требованиям, а также работы, содержащие неправильно решенные задачи, возвращаются преподавателем на доработку или исправление; работы, представленные с нарушением сроков сдачи, не принимаются и не рецензируются.

Для успешного выполнения контрольной работы студенту-заочнику необходимы усвоенные знания, полученные в процессе изучения и проработки лекций по учебному модулю «Теория анализа и статистика», хорошие знания курса элементарной математики, обеспечиваемые общеобразовательными средними школами, а также базовые знания в области обществознания, понимание основных процессов и механизмов, лежащих в основе хозяйственной деятельности фирм, организаций, промышленных предприятий, отраслей промышленности как в рамках государственного (национального) контекста, так и в международной системе хозяйствования. Это связано с тем, что учебный модуль «Теория анализа и статистика» является первым этапом освоения будущими экономистами основ так называемого экономико-математического моделирования, при помощи всего инструментария которого принимаются так называемые эффективные (оптимальные) решения, и строится деятельность по оптимальному управлению самыми разными экономическими процессами: от планирования производства до выработки оптимальных стратегий поведения участниками финансового рынка в рамках действующих финансово-кредитных институтов в сфере обращения финансовых инструментов на международном уровне.

Как видно из перечисленного, круг задач, решаемых при помощи экономико-математического моделирования, достаточно широк и разнообразен, так же как и разнообразен по сложности и степени восприятия соответствующий математический аппарат, активное внедрение которого в экономическую науку началось еще в начале прошлого века, а в настоящее время, в связи с ростом возможностей современных ЭВМ, значительно расширился круг задач экономико-математического плана, решение которых стало доступно практически с любой степенью точности в пределах весьма малых временных затрат.

Подобранная система вариантов задач, включенных в контрольную работу учебного модуля «Теория анализа и статистика» имеет целью закрепить и систематизировать теоретические сведения, полученные в процессе индивидуальной, самостоятельной работы над модулем. Дополнительно следует напомнить, что изучения одних только материалов лекций для успешного завершения работы над модулем и прохождения итоговой аттестации объективно недостаточно: студенту в обязательном порядке следует самостоятельно проработать всю основную литературу, рекомендованную к данному модулю: эта литература является смысловой и содержательной частью модуля «Теория анализа и статистика», а не факультативным приложением к нему.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ДЛЯ ПРОВЕРКИ ПРЕПОДАВАТЕЛЕМ (75 ВАРИАНТОВ, ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ)

Вариант 1.

1. В некоторой отрасли m заводов выпускают n видов продукции. Матрица $A_{m\times n}$ задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица $B_{m\times n}$ – во втором; $\left(a_{ij}, b_{ij}\right)$ – объемы продукции j-го типа на i-м заводе в первом и втором кварталах соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) объемы продукции; б) прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам; в) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если λ – курс доллара по отношению к рублю.

2. Выяснить, продуктивна ли матрица A:

а) $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

3. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Объем продукции u (ед.), произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\frac{5}{6}\cdot t^3 + \frac{15}{2}\cdot t^2 + 100\cdot t + 50$ (ед.), $1 \le t \le 8$, где t – рабочее время, часы. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

5. Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $K(x, y) = 30\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}$ (где x, y – количество единиц соответственно первого и второго ресурса). Стоимость единицы первого ресурса – 5, второго – 10 (ден. ед.). Найти максимальную прибыль при использовании этих ресурсов.

Вариант 2.

1. Предприятие производит n типов продукции, объемы выпуска заданы матрицей $A_{1\times n}$. Цена реализации единицы i-го типа продукции в j-м регионе задана матрицей $B_{n\times k}$, где k – число регионов, в которых реализуется продукция.

Найти матрицу выручки C по регионам.

Пусть $A_{1\times 3} = (100 \quad 200 \quad 100)$;

$$B_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Данные об исполнении баланса за отчетный период, ден. ед., приведены ниже в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт отрасли 1 должен увеличиться в два раза, а отрасли 2 – на 20%.

3. Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид: $y(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 250$ (ден. ед.). Найти средние и предельные издержки производства и вычислить их значения при $x = 10$.

4. Производственная функция $\pi(x, y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$, стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго – 10 ден. ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 (ден. ед.). В этих условиях найти оптимальное для производителя значение (x, y) количества используемых ресурсов.

5. Изменение производительности выпуска продукции с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $f = 32 - 2^{-0,5 \cdot t + 5}$, где t – время в месяцах. Найти объем продукции, произведенной: а) за первый месяц; б) третий месяц; в) шестой месяц; г) последний месяц года, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

Вариант 3.

1. Предприятие производит n типов продукции, используя m видов ресурсов. Нормы затрат ресурса i-го вида на производство единицы продукции j-го типа заданы матрицей затрат $A_{m \times n}$. Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа x_{ij} , записанное матрицей $X_{n \times 1}$.

Определить S – матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени. Дано

$$A_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad X_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

2. Экономика разделена на три отрасли: промышленность, сельское хозяйство, прочие отрасли. На плановый период заданы коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей (таблица).

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	промышленность	сельское хозяйство	прочие отрасли	
Промышленность	0,3	0,25	0,2	56
Сельское хозяйство	0,15	0,12	0,03	20
Прочие отрасли	0,1	0,05	0,08	12

Найти объем валовой продукции каждой отрасли, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей.

3. Зависимость между спросом q и ценой p единицы продукции, выпускаемой некоторым предприятием, задается соотношением $q = 18 - \sqrt{p}$. Найти эластичность спроса. Выяснить, при каких значениях цены спрос является эластичным, нейтральным и неэластичным. Какие рекомендации о цене единицы продукции можно дать руководителям предприятия при $p = 100$ и $p = 150$ ден. ед.?

4. Функция полезности имеет вид: $U(x, y) = 2 \cdot \ln(x - 1) + 3 \cdot \ln(y - 1)$. Цена единицы первого блага равна 8, второго – 16. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равна 1000. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была бы наибольшей?

5. Найти объем выпускаемой продукции за пять лет, если в функции Кобба–Дугласа $A(t) = e^t,\ L(t) = (t + 1)^2,\ K(t) = (100 - 3 \cdot t)^2,\ \alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0{,}5$ (t – время в годах).

Вариант 4.

1. Завод производит двигатели, которые либо сразу могут потребовать дополнительной регулировки (в 40 % случаев), либо сразу могут быть использованы (в 60 % случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, через месяц потребуют дополнительной регулировки в 65 % случаев, а в 35 % будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, через месяц потребуют ее в 20 % случаев, а в 80 % будут продолжать хорошо работать.

Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через два и три месяца после выпуска соответственно?

2. Дана матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; б) приращение вектора ΔX для увеличения выпуска конечной продукции на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

3. Опытным путем установлены функции спроса $q = \frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s = p + 0{,}5$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5 % относительно равновесной.

4. Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если задана производственная функция $K(x, y)$ и цены p_1 и p_2 единицы первого и второго ресурсов:

$$K(x, y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}; \quad p_1 = 4, \ \ p_2 = \frac{1}{48}.$$

5. По данным исследований о распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = \frac{x}{3-2\cdot x}$, где $x \in [0; 1]$. Вычислить коэффициент Джини k.

Вариант 5.

1. Три завода выпускают четыре вида продукции. Необходимо найти: а) матрицу выпуска продукции за квартал, если заданы матрицы помесячных выпусков A_1, A_2 и A_3; б) матрицы приростов выпуска продукции за каждый месяц B_1 и B_2 и проанализировать результаты. Дано

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Работа системы, состоящей из двух отраслей, в течение некоторого периода характеризуется данными, усл. ден. ед., приведенными в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Чистая продукция
	1	2	
1	100	160	240
2	275	40	85

Вычислить матрицу прямых затрат.

3. Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна единице?

4. Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если задана производственная функция $K(x, y)$ и цены p_1 и p_2 единицы первого и второго ресурсов:

$$K(x, y) = 10 \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}; \quad p_1 = 2, \; p_2 = \frac{2}{3}.$$

5. Найти выигрыши потребителей и поставщиков в предположении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид $p = 186 - x^2, \;\; p = 20 + \frac{11}{6} \cdot x$.

Вариант 6.

1. Предприятие производит n типов продукции, объемы выпуска заданы матрицей $A_{1\times n}$. Цена реализации единицы i-го типа продукции в j-м регионе задана матрицей $B_{n\times k}$, где k – число регионов, в которых реализуется продукция. Найти C – матрицу выручки по регионам, если

$$A = (10 \quad 40 \quad 10 \quad 20); \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Имеются данные (таблица) о работе системы нескольких отраслей в прошлом периоде и план выпуска конечной продукции Y_1 в будущем периоде, усл. ден. ед.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Чистая продукция	План Y_1
	1	2		
1	80	120	300	350
2	70	30	200	300

Найти матрицы прямых и полных затрат, а также выпуск валовой продукции в плановом периоде, обеспечивающей выпуск конечной продукции Y_1.

3. Задана функция $y = f(x)$ полных затрат предприятия на производство x единиц продукции. Определить связь между коэффициентами эластичности полных и средних затрат.

4. Задана производственная функция, цены единицы первого и второго ресурсов, а также ограничения I в сумме, которая может быть потрачена на приобретение ресурсов (сумма $\leq I$). Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит наибольшую прибыль:

$$K(x, y) = 10 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}; \quad p_1 = 2,\ p_2 = 4,\ I = 12.$$

5. Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией $z(t) = -0{,}00625 \cdot t^2 + 0{,}05 \cdot t + 0{,}5$ (ден. ед./ч), где t – время в часах от начала работы $(0 \leq t \leq 8)$. Найти функцию $u = u(t)$, выражающую объем продукции от времени t (в денежных единицах) и его величину за рабочий день.

Вариант 7.

1. Предприятие производит мебель трех видов и продает ее в четырех регионах. Матрица $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ задает цены реализации единицы мебели i-го типа в j-м регионе. Найти выручку предприятия в каждом регионе, если реализация мебели за месяц (по видам) задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

2. Дана матрица S полных затрат некоторой модели межотраслевого баланса:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 1{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) приращение валового выпуска ΔX_1 , обеспечивающее приращение конечной продукции $\Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$; б) приращение конечной продукции ΔY_2, соответствующее приращению валового выпуска

$$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

3. Объем производства зимней обуви u (ед.), выпускаемой некоторой фирмой, может быть описан уравнением $u = \frac{1}{3} \cdot t^3 - \frac{7}{2} \cdot t^2 + 6 \cdot t + 2100$ (ед.), где t – календарный месяц года. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения: а) в начале года ($t = 0$); б) в конце года ($t = 12$).

4. Задана производственная функция, цены единицы первого и второго ресурсов, а также ограничения I в сумме, которая может быть потрачена на приобретение ресурсов (сумма $\leq I$). Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит наибольшую прибыль:

$$K(x, y) = 24 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}; \quad p_1 = 27, \ \ p_2 = 4, \ \ I = 6.$$

5. Стоимость перевозки 1 т груза на 1 км (тариф перевозки) задается функцией $f(x) = \frac{10}{x+2}$ (ден. ед./км). Определить затраты на перевозку 1 т груза на расстояние 20 км.

Вариант 8.

1. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей $B = (10 \quad 15)$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100; 200 и 150 ед. продукции соответственно первого, второго и третьего видов?

2. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.

3. Зависимость между издержками производства y (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции x (ед.) выражается функцией $y = 10 \cdot x - 0{,}04 \cdot x^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 5 ед.

4. Потребитель имеет возможность потратить сумму 1000 (ден. ед.) на приобретение x единиц первого товара и y единиц второго товара. Задана функция полезности $U(x, y)$ и цены p_1, p_2 единицы соответственно первого и второго товаров. Найти значения (x, y), при которых полезность для потребителя будет наибольшей:

$$U(x, y) = 0{,}5 \cdot \ln(x - 2) + 2 \cdot \ln(y - 1); \quad p_1 = 0{,}2, \quad p_2 = 4.$$

5. Определить объем выпуска продукции за первые 5 ч работы при производительности $f(t) = 11{,}3 \cdot e^{-0{,}417 \cdot t}$, где t – время в часах.

Вариант 9.

1. Предприятие производит n типов продукции, используя m видов ресурсов. Нормы затрат ресурса i-го вида на производство единицы продукции j-го типа заданы матрицей затрат $A_{m \times n}$. Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа x_{ij}, записанное матрицей $X_{n\times 1}$. 1) полные затраты ресурсов трех видов на производство месячной продукции, если заданы нормы затрат матрицей

$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ и объем выпуска каждого из двух типов продукции $X=\begin{pmatrix}200\\ 300\end{pmatrix}$; 2)

стоимость всех затраченных ресурсов, если задана стоимость единицы каждого ресурса $P=(50 \quad 10 \quad 20)$.

2. Выяснить, продуктивна ли матрица A:

а) $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0\\ 0,1 & 0 & 0,3\\ 0,6 & 0,5 & 0,7\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,9 & 0,4\\ 0,5 & 0,5 & 0,5\\ 0,3 & 1,1 & 0,3\end{pmatrix}$.

3. Функция полных затрат в зависимости от объема выпускаемой продукции задана соотношением: $y=x^3-2\cdot x^2+96$. При каком объеме производства предельные и средние затраты совпадают? Найти коэффициенты эластичности полных и средних затрат при данном объеме.

4. Потребитель имеет возможность потратить сумму 1000 (ден. ед.) на приобретение x единиц первого товара и y единиц второго товара. Задана функция полезности $U(x,y)$ и цены p_1, p_2 единицы соответственно первого и второго товаров. Найти значения (x,y), при которых полезность для потребителя будет наибольшей:

$U(x,y)=2\cdot(x-1)^{\frac{1}{4}}+(y-1)^{\frac{1}{3}}$; $p_1=2$, $p_2=3$.

5. Найти объем продукции, выпущенной предприятием за год (258 рабочих дней), если ежедневная производительность этого предприятия задана функцией $f(t)=-0,0033\cdot t^2-0,089\cdot t+20,96$, где t – время в часах $1\le t\le 8$.

Вариант 10.

1. Продавец может закупить от одного до пяти билетов на спектакль по цене 100 руб. и продать перед его началом по 200 руб. каждый. Составить матрицу выручки продавца в зависимости от количества купленных им билетов (строка матрицы) и результатов продажи (столбец матрицы).

2. Данные об исполнении баланса за отчетный период, ден. ед., приведены ниже в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт отрасли 1 должен увеличиться в два раза, а отрасли 2 – на 20%.

3. Зависимость между количеством выпускаемых деталей в партии x (тыс. ед.) и затратами на их изготовление y (тыс. руб.) для предприятий отрасли выражается уравнением $y = \frac{27}{x} + 6$. Найти эластичность затрат для предприятий, выпускающих по 10 тыс. деталей в партии.

4. Идентифицированы функция издержек $C(x)$, а также функция количества реализованного товара $K(p, x)$ при установленной цене его единицы, равной p $(p > p_0)$. Найти оптимальные значения x и p для монополиста-производителя:

$$C(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{12} \cdot x^3; \qquad K(x, p) = \frac{x}{1+(p-p_0)^2}.$$

5. При непрерывном производстве химического волокна производительность $f(t)$ (т/ч) растет с момента запуска в течение 10 часов, а затем остается постоянной. Сколько волокна дает аппарат в первые сутки после запуска, если $f(t) = e^{\frac{t}{5}} - 1$ при $t \in [0; 10]$.

Вариант 11.

1. В ремонтную мастерскую поступают телефонные аппараты, из которых 70 % требуют малого ремонта, 20 % – среднего, 10 % – сложного. Статистически установлено, что через год из аппаратов, прошедших малый ремонт, 10 % требуют малого ремонта, 60 % – среднего, 30 % – сложного; из аппаратов, прошедших средний ремонт, – 20 % малого, 50 % – среднего, 30 % – сложного; из аппаратов, прошедших сложный ремонт, – 60 % малого, 40 % – среднего. Найти доли из отремонтированных в начале года аппаратов, которые будут требовать ремонта того или иного вида через один, два, три года.

2. Экономика разделена на три отрасли: промышленность, сельское хозяйство, прочие отрасли. На плановый период заданы коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей (таблица).

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	промышленность	сельское хозяйство	прочие отрасли	
Промышленность	0,3	0,25	0,2	56
Сельское хозяйство	0,15	0,12	0,03	20
Прочие отрасли	0,1	0,05	0,08	12

Найти объем валовой продукции каждой отрасли, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей.

3. Найти эластичность функции спроса при заданной стоимости p:

а) $q + 10 \cdot p = 50;\ \ p = 3;$

б) $5 \cdot q + 3 \cdot p = 70;\ \ p = 10;$

в) $p^2 + p + 4 \cdot q = 26;\ \ p = 2$ и $p = 4.$

4. Идентифицированы функция издержек $C(x)$, а также функция количества реализованного товара $K(p, x)$ при установленной цене его единицы, равной $p\ (p > p_0)$. Найти оптимальные значения x и p для монополиста-производителя:

$C(x) = 10 + x^2;\qquad K(x,p) = \frac{x}{1+\frac{p^2}{16}}.$

5. Найти объем выпуска продукции за четыре года, если в функции Кобба–Дугласа $A(t) = e^{3\cdot t}$, $L(t) = t + 1$, $K(t) = 10$, $a_0 = \alpha = \beta = \gamma = 1$.

Вариант 12.

1. В некоторой отрасли m заводов выпускают n видов продукции. Матрица $A_{m\times n}$ задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица $B_{m\times n}$ – во втором; (a_{ij}, b_{ij}) – объемы продукции j-го типа на i-м заводе в первом и втором кварталах соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) объемы продукции; б) прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам; в) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если λ – курс доллара по отношению к рублю.

2. Дана матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; б) приращение вектора ΔX для увеличения выпуска конечной продукции на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

3. Для следующих функций спроса найти значение p, при которых спрос является эластичным: а) $2\cdot p + 3\cdot q = 12$; б) $q = 50\cdot\left(15 - \sqrt{p}\right)$; в) $q = \sqrt[3]{3600 - p^2}$.

4. Производственная функция $\pi(x,y) = 30\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}$, стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго – 10 ден. ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 (ден. ед.). В этих условиях найти оптимальное для производителя значение (x, y) количества используемых ресурсов, используя функцию Лагранжа.

5. Кривые Лоренца распределения дохода в некоторых странах могут быть заданы уравнениями:

а) $y = 0{,}85 \cdot x^2 + 0{,}15 \cdot x$; б) $y = 2^x - 1$; в) $y = 0{,}7 \cdot x^3 + 0{,}3 \cdot x^2$.

Какую часть дохода получат 10 % наиболее низкооплачиваемого населения? Вычислить коэффициенты Джини для этих стран.

Вариант 13.

1. Предприятие производит n типов продукции, объемы выпуска заданы матрицей $A_{1\times n}$. Цена реализации единицы i-го типа продукции в j-м регионе задана матрицей $B_{n\times k}$, где k – число регионов, в которых реализуется продукция.

Найти матрицу выручки C по регионам.

Пусть $A_{1\times 3} = (100 \quad 200 \quad 100)$;

$$B_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Работа системы, состоящей из двух отраслей, в течение некоторого периода характеризуется данными, усл. ден. ед., приведенными в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Чистая продукция
	1	2	
1	100	160	240
2	275	40	85

Вычислить матрицу прямых затрат.

3. Выручка от продажи конфет составляет $p = 100 \cdot x - 0{,}5 \cdot x^2$, где x – объем проданной продукции (тыс. ед.). Найти среднюю и предельную выручки, если продано: а) 10 тыс. ед.; б) 60 тыс. ед.

4. Функция полезности имеет вид

$$U(x,y) = \ln(x-1) + \frac{1}{4} \cdot \ln(y-2),$$

где x, y – количества приобретенных единиц первого и второго благ. Найти частные эластичности функции полезности по переменным x и y и пояснить их смысл.

5. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$. Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

Вариант 14.

1. Предприятие производит n типов продукции, используя m видов ресурсов. Нормы затрат ресурса i-го вида на производство единицы продукции j-го типа заданы матрицей затрат $A_{m\times n}$. Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа x_{ij} , записанное матрицей $X_{n\times 1}$.

Определить S – матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени. Дано

$$A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad X_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

2. Имеются данные (таблица) о работе системы нескольких отраслей в прошлом периоде и план выпуска конечной продукции Y_1 в будущем периоде, усл. ден. ед.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Чистая продукция	План Y_1
	1	2		
1	80	120	300	350
2	70	30	200	300

Найти матрицы прямых и полных затрат, а также выпуск валовой продукции в плановом периоде, обеспечивающей выпуск конечной продукции Y_1.

3. Себестоимость производства телевизоров y (тыс. руб.) описывается функцией $y = 0{,}01 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 12 \ (5 \leq x \leq 50)$, где x – объем выпускаемой продукции в месяц (тыс. ед.). Определить скорость и темп изменения себестоимости при выпуске 20 и 40 тыс. ед. продукции.

4. Полезность от приобретения x единиц первого блага и y единиц второго блага имеет вид $U(x, y) = \ln x + \ln(2 \cdot y)$. Единица первого блага стоит 2, а второго – 3 (усл. ед.). На приобретение этих благ планируется потратить 100 (усл. ед.). Как следует распределить эту сумму, чтобы полезность была наибольшей?

5. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = \frac{100}{x+15}$. Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

Вариант 15.

1. Предприятие производит n типов продукции, используя m видов ресурсов. Нормы затрат ресурса i-го вида на производство единицы продукции j-го типа заданы матрицей затрат $A_{m \times n}$. Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа x_{ij} , записанное матрицей $X_{n \times 1}$.

Определить S – матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени. Дано

$A_{4\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad X_{3\times1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}$. Кроме того, найти полную стоимость всех затраченных за данный отрезок времени ресурсов, если $P = (10 \quad 20 \quad 10 \quad 10)$ - значения стоимости каждого вида ресурса в расчете на единицу.

2. Дана матрица S полных затрат некоторой модели межотраслевого баланса:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 1{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) приращение валового выпуска ΔX_1 , обеспечивающее приращение конечной продукции $\Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$; б) приращение конечной продукции ΔY_2, соответствующее приращению валового выпуска

$$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

3. Себестоимость продукции y связана с объемом выпускаемой продукции x уравнением: $y = 6 \cdot \ln(1 + 3 \cdot x)$. Определить среднюю и предельную себестоимости выпускаемой продукции при объеме, равном 10 ед.

4. Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $K(x, y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ (где x, y – количество единиц соответственно первого и второго ресурса). Стоимость единицы первого ресурса – 5, второго – 10 (ден. ед.). Найти максимальную прибыль при использовании этих ресурсов.

5. Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, законы спроса и предложения на который имеют следующий вид:

а) $p = 250 - x^2, p = \frac{1}{3} \cdot x + 20$; б) $p = 240 - x^2, p = x^2 + 2 \cdot x + 20$.

Вариант 16.

1. Завод производит двигатели, которые либо сразу могут потребовать дополнительной регулировки (в 40 % случаев), либо сразу могут быть использованы (в 60 % случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, через месяц потребуют дополнительной регулировки в 65 % случаев, а в 35 % будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, через месяц потребуют ее в 20 % случаев, а в 80 % будут продолжать хорошо работать.

Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через два и три месяца после выпуска соответственно?

2. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.

3. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (руб.) и выпуском продукции x (млн руб.) выражается уравнением $y = -0{,}5 \cdot x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции на 30 млн руб.

4. Производственная функция $\pi(x, y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$, стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго – 10 ден. ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 (ден. ед.). В этих условиях найти оптимальное для производителя значение (x, y) количества используемых ресурсов.

5. Изменение численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается следующим уравнением:

$$y' = 0{,}3 \cdot y \cdot (2 - 10^{-4} \cdot y),$$

где $y = y(t)$; t – время в годах. В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?

Вариант 17.

1. Три завода выпускают четыре вида продукции. Необходимо найти: а) матрицу выпуска продукции за квартал, если заданы матрицы помесячных выпусков A_1, A_2 и A_3; б) матрицы приростов выпуска продукции за каждый месяц B_1 и B_2 и проанализировать результаты. Дано

$$A_1=\begin{pmatrix}2&3&1&2\\4&2&2&1\\5&4&4&2\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}1&4&2&2\\3&3&3&2\\4&5&4&3\end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix}2&5&3&1\\3&4&3&1\\4&4&4&4\end{pmatrix}.$$

2. Данные об исполнении баланса за отчетный период, ден. ед., приведены ниже в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт отрасли 1 должен увеличиться в два раза, а отрасли 2 – на 20%.

3. Зависимость между себестоимостью готовой продукции предприятия y (млн руб.) и объемом выпускаемых изделий x (тыс. шт.) выражается уравнением: $y=\sqrt{x+4}-2$. Найти эластичность себестоимости продукции предприятия, выпускающего 12 тыс. шт. изделий. Какие рекомендации можно дать руководителям предприятий об изменении величины объема выпускаемой продукции?

4. Функция полезности имеет вид: $U(x,y)=2\cdot\ln(x-1)+3\cdot\ln(y-1)$. Цена единицы первого блага равна 8, второго – 16. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равна 1000. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была бы наибольшей?

5. Найти функцию спроса, если $E_y=-2=const$ и $y(3)=\frac{1}{6}$.

Вариант 18.

1. Предприятие производит n типов продукции, объемы выпуска заданы матрицей $A_{1\times n}$. Цена реализации единицы i-го типа продукции в j-м регионе задана матрицей $B_{n\times k}$, где k – число регионов, в которых реализуется продукция. Найти С – матрицу выручки по регионам, если

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 10 & 20 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Выяснить, продуктивна ли матрица A:

а) $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

3. Зависимость между объемом выпуска готовой продукции y (млн руб.) и объемом производственных фондов x (млн руб.) выражается уравнением: $y = 0{,}6 \cdot x - 4$. Найти эластичность выпуска продукции для предприятия, имеющего фонды в размере 40 млн руб.

4. Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если задана производственная функция $K(x, y)$ и цены p_1 и p_2 единицы первого и второго ресурсов:

$$K(x, y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y};\quad p_1 = 4,\ \ p_2 = \frac{1}{48}.$$

5. Функции спроса и предложения имеют соответственно вид:

$$y = 25 - 2 \cdot p + 3 \cdot \frac{dp}{dt};$$

$$x = 15 - p + 4 \cdot \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p = 9$.

Вариант 19.

1. Предприятие производит мебель трех видов и продает ее в четырех регионах. Матрица $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ задает цены реализации единицы мебели i-го типа в j-м регионе. Найти выручку предприятия в каждом регионе, если реализация мебели за месяц (по видам) задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

2. Дана матрица S полных затрат некоторой модели межотраслевого баланса:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 1{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) приращение валового выпуска ΔX_1 , обеспечивающее приращение конечной продукции $\Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$; б) приращение конечной продукции ΔY_2, соответствующее приращению валового выпуска

$$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

3. Функции спроса q и предложения s от цены p выражаются соответственно уравнениями: $q = 7 - p$ и $s = p + 1$.

Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 5 % относительно равновесной.

4. Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если заданы производственная функция $K(x, y)$ и цены p_1 и p_2 единицы первого и второго ресурсов:

$$K(x, y) = 10 \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}; \quad p_1 = 2,\ p_2 = \frac{2}{3}.$$

5. Известно, что рост числа $y = y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0{,}2 \cdot y}{m} \cdot (m - y),$$

где m – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1 % от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80 % от максимального?

Вариант 20.

1. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей $B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100; 200 и 150 ед. продукции соответственно первого, второго и третьего видов?

2. Экономика разделена на три отрасли: промышленность, сельское хозяйство, прочие отрасли. На плановый период заданы коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей (таблица).

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	промышленность	сельское хозяйство	прочие отрасли	
Промышленность	0,3	0,25	0,2	56
Сельское хозяйство	0,15	0,12	0,03	20
Прочие отрасли	0,1	0,05	0,08	12

Найти объем валовой продукции каждой отрасли, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей.

3. Функции спроса q и предложения s на некоторый товар от его цены x задаются уравнениями:

$$q = \frac{2 \cdot x + 15}{x + 5}; \quad s = \frac{3 \cdot x + 15}{x + 10}.$$

Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для равновесной цены; в) изменение дохода при изменении равновесной цены на 5 %.

4. Задана производственная функция, цены единицы первого и второго ресурсов, а также ограничения I в сумме, которая может быть потрачена на приобретение ресурсов (сумма $\leq I$). Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит наибольшую прибыль:

$K(x, y) = 10 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y};\quad p_1 = 2,\ p_2 = 4,\ I = 12.$

5. В поселке с населением 3000 человек распространение эпидемии гриппа (без применения экстренных санитарно-профилактических мер) описывается следующим уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}001 \cdot y \cdot (3000 - y),$$

где y – число заболевших в момент времени t; t – число недель. Сколько больных будет в поселке через две недели, если в начальный момент было трое больных?

Вариант 21.

1. Продавец может закупить от одного до пяти билетов на спектакль по цене 100 руб. и продать перед его началом по 200 руб. каждый. Составить матрицу выручки продавца в зависимости от количества купленных им билетов (строка матрицы) и результатов продажи (столбец матрицы).

2. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.

3. Зависимость потребления y от дохода x задается функцией $y = \frac{a \cdot x}{x+b}$. Показать, что эластичность функции потребления от дохода не зависит от параметра a и стремится к нулю при неограниченном возрастании дохода.

4. Задана производственная функция, цены единицы первого и второго ресурсов, а также ограничения I в сумме, которая может быть потрачена на приобретение ресурсов (сумма $\leq I$). Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит наибольшую прибыль:

$K(x, y) = 24 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2};\quad p_1 = 27,\ \ p_2 = 4,\ \ I = 6.$

5. Найти функцию спроса $y = y(p)$, если эластичность E_p постоянна и задана цена p при некотором значении спроса y:

а) $E_p = -\frac{1}{2},\ p = 5$ при $y = 2$;

б) $E_p = -3,\ p = 2$ при $y = 27$.

Вариант 22.

1. В ремонтную мастерскую поступают телефонные аппараты, из которых 70 % требуют малого ремонта, 20 % – среднего, 10 % – сложного. Статистически установлено, что через год из аппаратов, прошедших малый ремонт, 10 % требуют малого ремонта, 60 % – среднего, 30 % – сложного; из аппаратов, прошедших средний ремонт, – 20 % малого, 50 % – среднего, 30 % – сложного; из аппаратов, прошедших сложный ремонт, – 60 % малого, 40 % – среднего. Найти доли из отремонтированных в начале года аппаратов, которые будут требовать ремонта того или иного вида через один, два, три года.

2. Функция потребления некоторой страны имеет вид:

$$C(x) = 13 + 0{,}25 \cdot x + 0{,}37 \cdot x^{4/5},$$

где x – совокупный национальный доход.

Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 32.

3. Потребитель имеет возможность потратить сумму 1000 (ден. ед.) на приобретение x единиц первого товара и y единиц второго товара. Заданы функция полезности $U(x,y)$ и цены p_1, p_2 единицы соответственно первого и второго товаров. Найти значения (x,y), при которых полезность для потребителя будет наибольшей:

$$U(x,y) = 0{,}5 \cdot \ln(x-2) + 2 \cdot \ln(y-1); \quad p_1 = 0{,}2, \quad p_2 = 4.$$

4. Изменение производительности выпуска продукции с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $f = 32 - 2^{-0{,}5 \cdot t + 5}$, где t – время в месяцах. Найти объем продукции, произведенной: а) за первый месяц; б) третий месяц; в) шестой месяц; г) последний месяц года, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

5. Найти функцию спроса, если известно значение цены p при некотором спросе y и эластичность имеет следующий вид:

а) $E_p = \dfrac{y-100}{y}, \ \ 0 < y < 100, \qquad p = 90$ при $y = 10$;

б) $E_p = \frac{p}{p-20}, \ \ 0 < p < 20, \ \ p = 18$ при $y = 1$.

Вариант 23.

1. Функция сбережения некоторой страны имеет вид:

$$S(x) = 25 - 0{,}53 \cdot x - 0{,}41 \cdot x^{2/3},$$

где x – совокупный национальный доход.

Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 27.

2. Функция издержек имеет вид $C(x) = 100 + \frac{1}{2} \cdot x^2$, а доход при производстве x единиц товара определяется следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 4000 \cdot x, & \text{если } x < 100, \\ 4000 \cdot \left(100 + \sqrt{x - 100}\right), & \text{если } x > 100. \end{cases}$$

Определить оптимальное для производителя значение выпуска $x_{опт}$.

3. Потребитель имеет возможность потратить сумму 1000 (ден. ед.) на приобретение x единиц первого товара и y единиц второго товара. Заданы функция полезности $U(x,y)$ и цены p_1, p_2 единицы соответственно первого и второго товаров. Найти значения (x,y), при которых полезность для потребителя будет наибольшей:

$$U(x,y) = 2 \cdot (x-1)^{\frac{1}{4}} + (y-1)^{\frac{1}{3}}; \quad p_1 = 2, \; p_2 = 3.$$

4. Найти объем выпускаемой продукции за пять лет, если в функции Кобба–Дугласа $A(t) = e^t$, $L(t) = (t+1)^2$, $K(t) = (100 - 3 \cdot t)^2$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0{,}5$ (t – время в годах).

5. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид

$$y = 50 - 2 \cdot p - 4 \cdot \frac{dp}{dt};$$

$$x = 70 + 2 \cdot p - 5 \cdot \frac{dp}{dt}$$

соответственно. Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p(0) = 10$, и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

Вариант 24.

1. Капитал в 1 млрд руб. может быть размещен в банке под 10 % годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере 20 %, а издержки задаются квадратичной зависимостью. Прибыль облагается налогом в p (%). При каких значениях p вложение в производство является более эффективным, нежели чистое размещение капитала в банке?

2. Идентифицированы функция издержек $C(x)$, а также функция количества реализованного товара $K(p,x)$ при установленной цене его единицы, равной p $(p > p_0)$. Найти оптимальные значения x и p для монополиста-производителя:

$$C(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{12} \cdot x^3; \qquad K(x,p) = \frac{x}{1+(p-p_0)^2}.$$

3. По данным исследований о распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = \frac{x}{3-2\cdot x}$, где $x \in [0;1]$. Вычислить коэффициент Джини k.

4. Найти выражение объема реализованной продукции $y = y(t)$ и его значение при $t = 2$, если известно, что

кривая спроса имеет вид $p(y) = 3 - 2 \cdot y$,

норма акселерации $\frac{1}{l} = 1{,}5$,

норма инвестиций $m = 0{,}6$, $\quad y(0) = 1$.

5. В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Вариант 25.

1. Функция издержек имеет вид $C(x) = 10 + \frac{x^2}{10}$. На начальном этапе фирма организует производство так, чтобы минимизировать средние издержки $A(x)$. В дальнейшем на товар устанавливается цена, равная 4 ден. ед. за единицу. На сколько единиц товара фирме следует увеличить выпуск?

2. Идентифицированы функция издержек $C(x)$, а также функция количества реализованного товара $K(p,x)$ при установленной цене его единицы, равной p $(p > p_0)$. Найти оптимальные значения x и p для монополиста-производителя:

$$C(x) = 10 + x^2; \qquad K(x,p) = \frac{x}{1+\frac{p^2}{16}}.$$

3. Найти выигрыши потребителей и поставщиков в предположении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид $p = 186 - x^2$, $p = 20 + \frac{11}{6} \cdot x$.

4. Изменение численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается следующим уравнением:

$$y' = 0{,}3 \cdot y \cdot (2 - 10^{-4} \cdot y),$$

где $y = y(t)$; t – время в годах. В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?

5. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0,002. Необходимо: а) составить закон распределения отказавших за время t элементов; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины; в) определить вероятность того, что за время t откажет хотя бы один элемент.

Вариант 26.

1. Фирма минимизирует средние издержки, которые получаются в результате равными 30 руб./ед. Чему равны при этом предельные издержки?

2. Производственная функция $\pi(x, y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$, стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго – 10 ден. ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 (ден. ед.). В этих условиях найти оптимальное для производителя значение (x, y) количества используемых ресурсов, используя функцию Лагранжа.

3. Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией $z(t) = -0{,}00625 \cdot t^2 + 0{,}05 \cdot t + 0{,}5$ (ден. ед./ч), где t – время в часах от начала работы $(0 \leq t \leq 8)$. Найти функцию $u = u(t)$, выражающую объем продукции от времени t (в денежных единицах) и его величину за рабочий день.

4. Выяснить, по истечении какого промежутка времени объем реализованной продукции удвоится по сравнению с первоначальным, если значение коэффициента пропорциональности k в уравнении $y' = k \cdot y$ равно 0,1. На сколько процентов следует увеличить норму инвестиций, чтобы промежуток времени, необходимого для удвоения объема реализованной продукции, уменьшился на 20 %?

5. Нормально распределенная случайная величина имеет следующую функцию распределения: $F(x) = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \Phi(x-1)$. Из какого интервала $(1; 2)$ или $(2; 6)$ она примет значение с большей вероятностью?

Вариант 27.

1. Определить оптимальное для производителя значение выпуска $x_{\text{опт}}$ при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене p за единицу и известен вид функции издержек $C(x)$:

$C(x) = 13 + 2 \cdot x + x^3; \quad p = 14.$

2. Функция полезности имеет вид

$$U(x, y) = \ln(x-1) + \frac{1}{4} \cdot \ln(y-2),$$

где x, y – количества приобретенных единиц первого и второго благ. Найти частные эластичности функции полезности по переменным x и y и пояснить их смысл.

3. Стоимость перевозки 1 т груза на 1 км (тариф перевозки) задается функцией $f(x) = \frac{10}{x+2}$ (ден. ед./км). Определить затраты на перевозку 1 т груза на расстояние 20 км.

4. Найти функцию спроса, если $E_y = -2 = const$ и $y(3) = \frac{1}{6}$.

5. Постройте биномиальное распределение для серии независимых испытаний с вероятностью успеха p=0.5, 0.7, 0.9. Постройте графики распределения и функции распределения. Вычислите вероятность попадания значений случайной величины в интервал (1,6).

Вариант 28.

1. Определить оптимальное для производителя значение выпуска $x_{\text{опт}}$ при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене p за единицу и известен вид функции издержек $C(x)$:

$C(x) = 10 + x + \frac{1}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x}; \quad p = 8.$

2. Полезность от приобретения x единиц первого блага и y единиц второго блага имеет вид $U(x, y) = \ln x + \ln(2 \cdot y)$. Единица первого блага стоит 2, а второго – 3 (усл. ед.). На приобретение этих благ планируется потратить 100 (усл. ед.). Как следует распределить эту сумму, чтобы полезность была наибольшей?

3. Определить объем выпуска продукции за первые 5 ч работы при производительности $f(t) = 11{,}3 \cdot e^{-0{,}417 \cdot t}$, где t – время в часах.

4. Функции спроса и предложения имеют соответственно вид:

$$y = 25 - 2 \cdot p + 3 \cdot \frac{dp}{dt};$$

$$x = 15 - p + 4 \cdot \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p = 9$.

5. Провайдер обслуживает 1000 абонентов сети Internet. Вероятность того, что любой абонент захочет войти в сеть в течение часа, равна 0.002. Найти вероятность того, что в течение часа более 10 абонентов попытаются войти в сеть.

Вариант 29.

1. Определить оптимальное для производителя значение выпуска $x_{\text{опт}}$ при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене p за единицу и известен вид функции издержек $C(x)$:

$$C(x) = 8 + \frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{10} \cdot e^x; \quad p = 21{,}85.$$

2. Предприятие производит n типов продукции, используя m видов ресурсов. Нормы затрат ресурса i-го вида на производство единицы продукции j-го типа заданы матрицей затрат $A_{m\times n}$. Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа x_{ij} , записанное матрицей $X_{n\times 1}$.

Определить S – матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени. Дано

$$A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad X_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

3. Найти объем продукции, выпущенной предприятием за год (258 рабочих дней), если ежедневная производительность этого предприятия задана функцией $f(t) = -0{,}0033 \cdot t^2 - 0{,}089 \cdot t + 20{,}96$, где t – время в часах $1 \le t \le 8$.

4. Известно, что рост числа $y = y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0{,}2 \cdot y}{m} \cdot (m - y),$$

где m – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1 % от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80 % от максимального?

5. Постройте графики плотности нормального распределения и функции нормального распределения N(0,1) (стандартное нормальное распределение).

Вариант 30.

1. Найти максимальную прибыль, которую может получить фирма-производитель, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене p за единицу и известен вид функции издержек $C(x)$:

$$C(x) = 10 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}; \quad p = 10{,}5.$$

2. Работа системы, состоящей из двух отраслей, в течение некоторого периода характеризуется данными, усл. ден. ед., приведенными в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Чистая продукция
	1	2	
1	100	160	240
2	275	40	85

Вычислить матрицу прямых затрат.

3. При непрерывном производстве химического волокна производительность $f(t)$ (т/ч) растет с момента запуска в течение 10 часов, а затем остается постоянной. Сколько волокна дает аппарат в первые сутки после запуска, если $f(t) = e^{\frac{t}{5}} - 1$ при $t \in [0; 10]$.

4. В поселке с населением 3000 человек распространение эпидемии гриппа (без применения экстренных санитарно-профилактических мер) описывается следующим уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}001 \cdot y \cdot (3000 - y),$$

где y – число заболевших в момент времени t; t – число недель. Сколько больных будет в поселке через две недели, если в начальный момент было трое больных?

5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной равномерно на интервале (2,8).

Вариант 31.

1. Найти максимальную прибыль, которую может получить фирма-производитель, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене p за единицу и известен вид функции издержек $C(x)$:

$$C(x) = 8 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8}; \quad p = 6{,}5.$$

2. Функция полезности имеет вид: $U(x, y) = 2 \cdot \ln(x - 1) + 3 \cdot \ln(y - 1)$. Цена единицы первого блага равна 8, второго – 16. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равна 1000. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была бы наибольшей?

3. Найти объем выпуска продукции за четыре года, если в функции Кобба–Дугласа $A(t) = e^{3 \cdot t}$, $L(t) = t + 1$, $K(t) = 10$, $a_0 = \alpha = \beta = \gamma = 1$.

4. Найти функцию спроса $y = y(p)$, если эластичность E_p постоянна и задана цена p при некотором значении спроса y:

а) $E_p = -\frac{1}{2}$, $p = 5$ при $y = 2$;

б) $E_p = -3$, $p = 2$ при $y = 27$.

5. Случайная величина подчинена закону распределения Пуассона с интенсивностью потока событий, равному 3 событиям за час. Чему равны математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение такой случайной величины?

Вариант 32.

1. Найти максимальную прибыль, которую может получить фирма-производитель, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене p за единицу и известен вид функции издержек $C(x)$:

$$C(x) = 2 \cdot x + \frac{1}{20} \cdot e^{\frac{x}{2}}; \quad p = 40.$$

2. Данные об исполнении баланса за отчетный период, ден. ед., приведены ниже в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт отрасли 1 должен увеличиться в два раза, а отрасли 2 – на 20%.

3. Кривые Лоренца распределения дохода в некоторых странах могут быть заданы уравнениями:

а) $y = 0{,}85 \cdot x^2 + 0{,}15 \cdot x$;   б) $y = 2^x - 1$;   в) $y = 0{,}7 \cdot x^3 + 0{,}3 \cdot x^2$.

Какую часть дохода получат 10 % наиболее низкооплачиваемого населения? Вычислить коэффициенты Джини для этих стран.

4. Найти функцию спроса, если известно значение цены p при некотором спросе y и эластичность имеет следующий вид:

а) $E_p = \dfrac{y-100}{y}$, $0 < y < 100$, $p = 90$ при $y = 10$;

б) $E_p = \frac{p}{p-20}$, $0 < p < 20$, $p = 18$ при $y = 1$.

5. Случайная величина подчинена показательному (экспоненциальному) закону распределения с интенсивностью потока событий, равному 7 событий за год. Чему равны математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение такой случайной величины?

Вариант 33.

1. При производстве монополией x единиц товара цена за единицу составляет $p(x)$. Определить оптимальное для монополии значение выпуска

$x_{\text{опт}}$ (предполагается, что весь производственный товар реализуется), если издержки $C(x)$ имеют вид:

$$C(x) = 10 + x + \frac{x^2}{2}; \quad p(x) = 8 - \sqrt{x}.$$

2. В некоторой отрасли m заводов выпускают n видов продукции. Матрица $A_{m\times n}$ задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица $B_{m\times n}$ – во втором; $\left(a_{ij}, b_{ij}\right)$ – объемы продукции j-го типа на i-м заводе в первом и втором кварталах соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) объемы продукции; б) прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам; в) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если λ – курс доллара по отношению к рублю.

3. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$. Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

4. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид

$$y = 50 - 2\cdot p - 4\cdot\frac{dp}{dt};$$

$$x = 70 + 2\cdot p - 5\cdot\frac{dp}{dt}$$

соответственно. Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p(0) = 10$, и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

5. Непрерывная случайная величина подчинена закону распределения, плотность вероятности которого описывается формулой $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, если переменная x –величина положительная и плотность равна нулю, если переменная x – величина отрицательная. Чему равны математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение такой случайной величины?

Вариант 34.

1. При производстве монополией x единиц товара цена за единицу составляет $p(x)$. Определить оптимальное для монополии значение выпуска $x_{\text{опт}}$ (предполагается, что весь производственный товар реализуется), если издержки $C(x)$ имеют вид:

$$C(x) = 10 + (x-1)^2; \quad p(x) = 10 - \frac{4}{3} \cdot \sqrt{x}.$$

2. Предприятие производит n типов продукции, объемы выпуска заданы матрицей $A_{1\times n}$. Цена реализации единицы i-го типа продукции в j-м регионе задана матрицей $B_{n\times k}$, где k – число регионов, в которых реализуется продукция.

Найти матрицу выручки *C* по регионам.

Пусть $A_{1\times 3} = (100 \quad 200 \quad 100)$;

$$B_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = \frac{100}{x+15}$. Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

4. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют соответственно следующий вид:

$$y = 30 - p - 4 \cdot \frac{dp}{dt};$$

$$x = 20 + p + \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

5. Случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке [0; 1]. Чему равны математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение такой случайной величины?

Вариант 35.

1. При производстве монополией x единиц товара цена за единицу составляет $p(x)$. Определить оптимальное для монополии значение выпуска $x_{\text{опт}}$ (предполагается, что весь производственный товар реализуется), если издержки $C(x)$ имеют вид:

$$C(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8}; \quad p(x) = 8 - \frac{x}{2}.$$

2. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей $B = (10 \quad 15)$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100; 200 и 150 ед. продукции соответственно первого, второго и третьего видов?

3. Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, законы спроса и предложения на который имеют следующий вид:

а) $p = 250 - x^2, p = \dfrac{1}{3} \cdot x + 20$; б) $p = 240 - x^2, p = x^2 + 2 \cdot x + 20$.

4. Найти выражение объема реализованной продукции $y = y(t)$ и его значение при $t = 2$, если известно, что

кривая спроса имеет вид $p(y) = 3 - 2 \cdot y$,

норма акселерации $\frac{1}{l} = 1{,}5$,

норма инвестиций $m = 0{,}6, \quad y(0) = 1$.

5. Случайная величина имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 1.7 и средним квадратическим отклонением 4. Какова вероятность попадания такой случайной величины в интервал (1; 2)? Показать математическое ожидание и полученную вероятность на графике плотности нормального распределения.

Вариант 36.

1. Монополия устанавливает фиксированную цену $p = 380$ за единицу товара. Издержки при производстве x единиц товара равны $C(x) = 292 \cdot x + x^2$. При этом количество реализуемого товара $K(x)$ зависит от x следующим образом: $K(x) = x + \left(\sqrt{x_0} - \sqrt{x}\right)$. Определить значение x, при котором монополия получит максимальную прибыль.

2. Выяснить, продуктивна ли матрица A:

а) $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

3. Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $K(x, y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ (где x, y – количество единиц соответственно первого и второго ресурса). Стоимость единицы первого ресурса – 5, второго – 10 (ден. ед.). Найти максимальную прибыль при использовании этих ресурсов.

4. Изменение производительности выпуска продукции с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $f = 32 - 2^{-0{,}5 \cdot t + 5}$, где t – время в месяцах. Найти объем продукции, произведенной: а) за первый месяц; б) третий месяц; в) шестой месяц; г) последний месяц года, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

5. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [-3:4]. Найти вероятность попадания этой случайной величины в промежуток

(-2; 2). Построить график плотности этого распределения и указать на нем фигуру, соответствующую вычисленной вероятности. Найти математическое ожидание X и показать его на графике.

Вариант 37.

1. Монополия производит фиксированное количество x единиц товара и устанавливает цену единицы товара $p > p_0$. Количество реализованного товара K зависит от p следующим образом:

$$K(p) = x \cdot e^{p_0 - p} \quad (p_0 < 1),$$

где p_0 – цена, при которой будет реализован весь товар.

Определить значение p, при котором монополия получит максимальную прибыль.

2. Дана матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; б) приращение вектора ΔX для увеличения выпуска конечной продукции на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

3. Производственная функция $\pi(x, y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$, стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго – 10 ден. ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 (ден. ед.). В этих условиях найти оптимальное для производителя значение (x, y) количества используемых ресурсов.

4. Найти объем выпускаемой продукции за пять лет, если в функции Кобба–Дугласа $A(t) = e^t$, $L(t) = (t+1)^2$, $K(t) = (100 - 3 \cdot t)^2$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0,5$ (t – время в годах).

5. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 3$. Найти вероятность попадания этой случайной величины в промежуток (0; $+\infty$). Построить график плотности этого распределения и указать на нем фигуру, соответствующую найденной вероятности. Найти математическое ожидание X и показать его на графике.

Вариант 38.

1. Монополия производит фиксированное количество x единиц товара и устанавливает цену единицы товара $p > p_0$. Количество реализованного товара K зависит от p следующим образом:

$$K(p) = \frac{x}{(1+p-p_0)^2} \quad \left(p_0 < \frac{1}{2}\right).$$

где p_0 – цена, при которой будет реализован весь товар.

Определить значение p, при котором монополия получит максимальную прибыль.

2. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.

3. Функция полезности имеет вид: $U(x,y) = 2 \cdot \ln(x-1) + 3 \cdot \ln(y-1)$. Цена единицы первого блага равна 8, второго – 16. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равна 1000. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была бы наибольшей?

4. Выяснить, по истечении какого промежутка времени объем реализованной продукции удвоится по сравнению с первоначальным, если значение коэффициента пропорциональности k в уравнении $y' = k \cdot y$ равно 0,1. На сколько процентов следует увеличить норму инвестиций, чтобы промежуток времени, необходимого для удвоения объема реализованной продукции, уменьшился на 20 %?

5. Случайная величина подчинена закону распределения Пуассона, причем интенсивность потока событий равна 7 событий за единицу времени. Найти вероятность того, что за единицу времени произойдет ровно 5 событий.

Вариант 39.

1. На начальном этапе производства фирма минимизирует средние издержки, причем функция издержек имеет вид $C(x) = 10 + 2 \cdot x + \frac{5}{2} \cdot x^2$. В дальнейшем цена единицы товара устанавливается $p = 37$. На сколько единиц товара фирме следует увеличить выпуск? На сколько при этом изменятся средние издержки?

2. Данные об исполнении баланса за отчетный период, ден. ед., приведены ниже в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт отрасли 1 должен увеличиться в два раза, а отрасли 2 – на 20%.

3. Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если задана производственная функция $K(x, y)$ и цены p_1 и p_2 единицы первого и второго ресурсов:

$K(x, y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}; \quad p_1 = 4, \;\; p_2 = \frac{1}{48}.$

4. Изменение численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается следующим уравнением:

$$y' = 0{,}3 \cdot y \cdot (2 - 10^{-4} \cdot y),$$

где $y = y(t)$; t – время в годах. В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?

5. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами m=10 и $\sigma = 2$. Найти вероятность попадания X в промежуток [6;12]. Построить график плотности заданного нормального распределения и указать на нем фигуру, соответствующую найденной вероятности.

Вариант 40.

1. Функция издержек имеет вид: $C(x) = 40 \cdot x + 0{,}08 \cdot x^3$. Доход от реализации единицы продукции равен 200. Найти оптимальное для производителя значение выпуска продукции.

2. Предприятие производит n типов продукции, используя m видов ресурсов. Нормы затрат ресурса i-го вида на производство единицы продукции j-го типа заданы матрицей затрат $A_{m \times n}$. Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа x_{ij} , записанное матрицей $X_{n \times 1}$.

Определить S – матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени. Дано

$$A_{4\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad X_{3\times1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

3. Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если задана производственная функция $K(x, y)$ и цены p_1 и p_2 единицы первого и второго ресурсов:

$$K(x, y) = 10 \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}; \quad p_1 = 2,\ p_2 = \frac{2}{3}.$$

4. По данным исследований о распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = \frac{x}{3-2\cdot x}$, где $x \in [0; 1]$. Вычислить коэффициент Джини k.

5. Случайная величина имеет равномерное распределение на интервале (5;7). Найти вероятность попадания X в промежуток [5.5; 6]. Построить график плотности заданного равномерного распределения и указать на нем фигуру, соответствующую найденной вероятности. Вычислить математическое ожидание данной случайной величины и показать его на графике.

Вариант 41.

1. Зависимость объема выпуска продукции V (в денежных единицах) от капитальных затрат x определяется функцией $V(x) = \frac{3}{4} \cdot \ln(1 + x^3)$. Найти интервал значений x, на котором увеличение капитальных затрат неэффективно.

2. Экономика разделена на три отрасли: промышленность, сельское хозяйство, прочие отрасли. На плановый период заданы коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей (таблица).

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	промышленность	сельское хозяйство	прочие отрасли	
Промышленность	0,3	0,25	0,2	56
Сельское хозяйство	0,15	0,12	0,03	20
Прочие отрасли	0,1	0,05	0,08	12

Найти объем валовой продукции каждой отрасли, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей.

3. Найти выигрыши потребителей и поставщиков в предположении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид $p = 186 - x^2$, $p = 20 + \frac{11}{6} \cdot x$.

4. Найти функцию спроса, если $E_y = -2 = const$ и $y(3) = \frac{1}{6}$.

5. Случайная величина имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 3 и средним квадратическим отклонением 5. Какова вероятность попадания такой случайной величины в интервал (2; 9)? Показать математическое ожидание и вычисленную вероятность на графике плотности нормального распределения.

Вариант 42.

1. Считается, что увеличение реализации y от затрат на рекламу x (млн руб.) определяется соотношением: $y = 0{,}1 \cdot \sqrt{x}$. Доход от реализации единицы продукции равен 20 тыс. руб. Найти уровень рекламных затрат, при котором фирма получит максимальную прибыль.

2. Завод производит двигатели, которые либо сразу могут потребовать дополнительной регулировки (в 40 % случаев), либо сразу могут быть использованы (в 60 % случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, через месяц потребуют дополнительной регулировки в 65 % случаев, а в 35 % будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, через месяц потребуют ее в 20 % случаев, а в 80 % будут продолжать хорошо работать.

Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через два и три месяца после выпуска соответственно?

3. Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если задана производственная функция $K(x, y)$ и цены p_1 и p_2 единицы первого и второго ресурсов:

$$K(x, y) = 10 \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}; \quad p_1 = 2, \; p_2 = \frac{2}{3}.$$

4. Стоимость перевозки 1 т груза на 1 км (тариф перевозки) задается функцией $f(x) = \frac{10}{x+2}$ (ден. ед./км). Определить затраты на перевозку 1 т груза на расстояние 20 км.

5. Случайная величина подчинена закону распределения Пуассона, причем интенсивность потока событий равна 6.3 событий за единицу времени. Найти вероятность того, что за единицу времени произойдет ровно 5 событий.

Вариант 43.

1. Количество реализуемой монополией продукции x в зависимости от цены единицы товара p определяется соотношением $x = x_0 \cdot \left(\sqrt{\frac{p_0}{p}} - 1\right)$ $(p <$

p_0). Найти значение цены p, при котором монополия получит наибольшую прибыль.

2. Работа системы, состоящей из двух отраслей, в течение некоторого периода характеризуется данными, усл. ден. ед., приведенными в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Чистая продукция
	1	2	
1	100	160	240
2	275	40	85

Вычислить матрицу прямых затрат.

3. Задана производственная функция, цены единицы первого и второго ресурсов, а также ограничения I в сумме, которая может быть потрачена на приобретение ресурсов (сумма $\leq I$). Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит наибольшую прибыль:

$K(x, y) = 10 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y};\quad p_1 = 2,\ p_2 = 4,\ I = 12.$

4. Функции спроса и предложения имеют соответственно вид:

$$y = 25 - 2 \cdot p + 3 \cdot \frac{dp}{dt};$$

$$x = 15 - p + 4 \cdot \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p = 9$.

5. Случайная величина подчинена закону распределения Пуассона с интенсивностью потока событий, равному 3 событиям за час. Чему равны математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение такой случайной величины?

Вариант 44.

1. Доход от производства продукции с использованием x единиц ресурсов составляет величину $400 \cdot \sqrt{x}$. Стоимость единицы ресурсов – 10 ден. ед. Какое количество ресурсов следует приобрести, чтобы прибыль была наибольшей?

2. Три завода выпускают четыре вида продукции. Необходимо найти: а) матрицу выпуска продукции за квартал, если заданы матрицы помесячных выпусков A_1, A_2 и A_3; б) матрицы приростов выпуска продукции за каждый месяц B_1 и B_2 и проанализировать результаты. Дано

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Задана производственная функция, цены единицы первого и второго ресурсов, а также ограничения I в сумме, которая может быть потрачена на приобретение ресурсов (сумма $\leq I$). Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит наибольшую прибыль:

$$K(x,y) = 24 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}; \quad p_1 = 27, \;\; p_2 = 4, \;\; I = 6.$$

4. Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией $z(t) = -0{,}00625 \cdot t^2 + 0{,}05 \cdot t + 0{,}5$ (ден. ед./ч), где t – время в часах от начала работы $(0 \leq t \leq 8)$. Найти функцию $u = u(t)$, выражающую объем продукции от времени t (в денежных единицах) и его величину за рабочий день.

5. Случайная величина подчинена показательному (экспоненциальному) закону распределения с интенсивностью потока событий, равному 7 событий за год. Чему равны математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение такой случайной величины?

Вариант 45.

1. Функция издержек имеет вид $C(x) = x + 0{,}1 \cdot x^2$. Доход от реализации единицы продукции равен 50. Найти максимальное значение прибыли, которое может получить производитель.

2. Имеются данные (таблица) о работе системы нескольких отраслей в прошлом периоде и план выпуска конечной продукции Y_1 в будущем периоде, усл. ден. ед.

Производящие	Потребляющие отрасли	Чистая	План

отрасли	1	2	продукция	Y_1
1 2	80 70	120 30	300 200	350 300

Найти матрицы прямых и полных затрат, а также выпуск валовой продукции в плановом периоде, обеспечивающей выпуск конечной продукции Y_1.

3. Потребитель имеет возможность потратить сумму 1000 (ден. ед.) на приобретение x единиц первого товара и y единиц второго товара. Задана функция полезности $U(x,y)$ и цены p_1, p_2 единицы соответственно первого и второго товаров. Найти значения (x,y), при которых полезность для потребителя будет наибольшей:

$$U(x,y) = 0{,}5 \cdot \ln(x-2) + 2 \cdot \ln(y-1); \quad p_1 = 0{,}2, \quad p_2 = 4.$$

4. Известно, что рост числа $y = y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0{,}2 \cdot y}{m} \cdot (m-y),$$

где m – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1 % от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80 % от максимального?

5. Распределение вероятностей случайной величины X задается интегральной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0,.при...x < 0 \\ x^3/125,.при..0 < x \le 5, \\ 1,.при.. > 5 \end{cases}$$

Построить график функции плотности распределения вероятностей случайной величины X. Вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (2;3). Найти для случайной величины X математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Показать вычисленную вероятность и математическое ожидание на графике функции плотности.

Вариант 46.

1. Зависимость дохода монополии от количества выпускаемой продукции x определяется как $D(x) = 100 \cdot x - 1000 \cdot \sqrt{x}$ $(400 \le x \le 900)$. Функция издержек на этом промежутке имеет вид $C(x) = 50 \cdot x + \frac{4}{5} \cdot x \cdot \sqrt{x}$. Найти оптимальное для монополии-производителя значение выпуска продукции.

2. Предприятие производит мебель трех видов и продает ее в четырех регионах. Матрица $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ задает цены реализации единицы мебели i-го типа в j-м регионе. Найти выручку предприятия в каждом регионе, если реализация мебели за месяц (по видам) задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

3. Потребитель имеет возможность потратить сумму 1000 (ден. ед.) на приобретение x единиц первого товара и y единиц второго товара. Задана функция полезности $U(x,y)$ и цены p_1, p_2 единицы соответственно первого и второго товаров. Найти значения (x,y), при которых полезность для потребителя будет наибольшей:

$$U(x,y) = 2 \cdot (x-1)^{\frac{1}{4}} + (y-1)^{\frac{1}{3}}; \quad p_1 = 2, \; p_2 = 3.$$

4. Определить объем выпуска продукции за первые 5 ч работы при производительности $f(t) = 11{,}3 \cdot e^{-0{,}417 \cdot t}$, где t – время в часах.

5. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{9 - x^2}}, x \in (-3;3) \\ 0, x \notin (-3;3) \end{cases}$$

Вычислить неизвестную константу $\boldsymbol{c}$.

Для случайной величины X:

а) Построить график функции плотности распределения вероятностей;

б) Вычислить математическое ожидание и дисперсию;

в) Найти вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (1;4).

Вариант 47.

1. Цена на продукцию монополии-производителя устанавливается в соответствии с соотношением, идентифицируемым как $p = p_0 \cdot \left(1 - 0{,}2 \cdot \sqrt{x}\right)$. При каком значении выпуска продукции доход от ее реализации будет наибольшим?

2. Дана матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; б) приращение вектора ΔX для увеличения выпуска конечной продукции на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

3. Идентифицированы функция издержек $C(x)$, а также функция количества реализованного товара $K(p, x)$ при установленной цене его единицы, равной $p\ (p > p_0)$. Найти оптимальные значения x и p для монополиста-производителя:

$$C(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{12} \cdot x^3; \qquad K(x, p) = \frac{x}{1 + (p - p_0)^2}.$$

4. Найти функцию спроса $y = y(p)$, если эластичность E_p постоянна и задана цена p при некотором значении спроса y:

а) $E_p = -\frac{1}{2},\ p = 5$ при $y = 2$;

б) $E_p = -3,\ p = 2$ при $y = 27$.

5. В страховую компанию в среднем поступает 2 иска в час. Определите вероятность того, что в течение 1,5 часов не поступит ни одного иска. Найти наивероятнейшее число поступивших за час исков и соответствующую этому вероятность.

Вариант 48.

1. Функция издержек имеет вид $C(x) = 2 \cdot x$ при $x \leq 100$;

$C(x) = 200 + p \cdot (x - 100)^2$ при $x > 100$. В настоящий момент уровень выпуска продукции $x = 200$. При каком условии на параметр p фирме выгодно уменьшить выпуск продукции, если доход от реализации единицы продукции равен 50?

2. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей $B = (10 \quad 15)$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100; 200 и 150 ед. продукции соответственно первого, второго и третьего видов?

3. Идентифицированы функция издержек $C(x)$, а также функция количества реализованного товара $K(p, x)$ при установленной цене его единицы, равной $p\ (p > p_0)$. Найти оптимальные значения x и p для монополиста-производителя:

$$C(x) = 10 + x^2; \qquad K(x, p) = \frac{x}{1 + \frac{p^2}{16}}.$$

4. Найти объем продукции, выпущенной предприятием за год (258 рабочих дней), если ежедневная производительность этого предприятия задана функцией $f(t) = -0{,}0033 \cdot t^2 - 0{,}089 \cdot t + 20{,}96$, где t – время в часах $1 \leq t \leq 8$.

5. В книге из 200 страниц имеется 20 опечаток. Какова вероятность того, что на одной случайно выбранной странице имеется две опечатки. Найти наивероятнейшее число опечаток на одной странице и соответствующую этому вероятность.

Вариант 49.

1. Объем продукции u (ед.), произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\frac{5}{6} \cdot t^3 + \frac{15}{2} \cdot t^2 + 100 \cdot t + 50 \text{ (ед.)},\ 1 \le t \le 8$, где t – рабочее время, часы. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

2. Дана матрица S полных затрат некоторой модели межотраслевого баланса:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 1{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) приращение валового выпуска ΔX_1, обеспечивающее приращение конечной продукции $\Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$; б) приращение конечной продукции ΔY_2, соответствующее приращению валового выпуска

$$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

3. Функция полезности имеет вид

$$U(x, y) = \ln(x - 1) + \frac{1}{4} \cdot \ln(y - 2),$$

где x, y – количества приобретенных единиц первого и второго благ. Найти частные эластичности функции полезности по переменным x и y и пояснить их смысл.

4. Выяснить, по истечении какого промежутка времени объем реализованной продукции удвоится по сравнению с первоначальным, если значение коэффициента пропорциональности k в уравнении $y' = k \cdot y$ равно 0,1. На сколько процентов следует увеличить норму инвестиций, чтобы промежуток времени, необходимого для удвоения объема реализованной продукции, уменьшился на 20 %?

5. Непрерывная случайная величина имеет плотность распределения следующего вида: $f(x)=a\cdot\sin x, x\in(0,\pi); f(x)=0, x\notin(0,\pi)$. Найти неизвестный параметр распределения. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Показать на графике плотности значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения. Найти вероятность попадания значений случайной величины в интервал $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$; показать на графике эту вероятность.

Вариант 50.

1. Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид: $y(x)=0{,}1\cdot x^3-1{,}2\cdot x^2+5\cdot x+250$ (ден. ед.). Найти средние и предельные издержки производства и вычислить их значения при $x=10$.

2. Продавец может закупить от одного до пяти билетов на спектакль по цене 100 руб. и продать перед его началом по 200 руб. каждый. Составить матрицу выручки продавца в зависимости от количества купленных им билетов (строка матрицы) и результатов продажи (столбец матрицы).

3. Полезность от приобретения x единиц первого блага и y единиц второго блага имеет вид $U(x,y)=\ln x+\ln(2\cdot y)$. Единица первого блага стоит 2, а второго – 3 (усл. ед.). На приобретение этих благ планируется потратить 100 (усл. ед.). Как следует распределить эту сумму, чтобы полезность была наибольшей?

4. При непрерывном производстве химического волокна производительность $f(t)$ (т/ч) растет с момента запуска в течение 10 часов, а затем остается постоянной. Сколько волокна дает аппарат в первые сутки после запуска, если $f(t) = e^{\frac{t}{5}} - 1$ при $t \in [0; 10]$.

5. Получить ряд распределения для случайной величины – числа попаданий в цель при двух выстрелах, если вероятность попадания в цель равна 0.8 при одном выстреле. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины. Построить график функции распределения и показать на нем математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

Вариант 51.

1. Зависимость между спросом q и ценой p единицы продукции, выпускаемой некоторым предприятием, задается соотношением $q = 18 - \sqrt{p}$. Найти эластичность спроса. Выяснить, при каких значениях цены спрос является эластичным, нейтральным и неэластичным. Какие рекомендации о цене единицы продукции можно дать руководителям предприятия при $p = 100$ и $p = 150$ ден. ед.?

2. Выяснить, продуктивна ли матрица A:

а) $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

3. Стоимость перевозки 1 т груза на 1 км (тариф перевозки) задается функцией $f(x) = \frac{10}{x+2}$ (ден. ед./км). Определить затраты на перевозку 1 т груза на расстояние 20 км.

4. Изменение численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается следующим уравнением:

$$y' = 0{,}3 \cdot y \cdot (2 - 10^{-4} \cdot y),$$

где $y = y(t)$; t – время в годах. В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?

5. Доход фирмы за месяц представляется нормально распределенной случайной величиной со средним значением 3 млн долл. и средним квадратическим отклонением 0.5 млн долл. Найдите вероятность того, что в данном месяце доход фирмы будет более 4 млн долл. Напишите формулу плотности распределения этой случайной величины, нарисуйте ее график и покажите на нем вычисленную вероятность.

Вариант 52.

1. Опытным путем установлены функции спроса $q = \frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s = p + 0{,}5$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5 % относительно равновесной.

2. Три завода выпускают четыре вида продукции. Необходимо найти: а) матрицу выпуска продукции за квартал, если заданы матрицы помесячных выпусков A_1, A_2 и A_3; б) матрицы приростов выпуска продукции за каждый месяц B_1 и B_2 и проанализировать результаты. Дано

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \; A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Найти объем выпуска продукции за четыре года, если в функции Кобба–Дугласа $A(t) = e^{3 \cdot t}$, $L(t) = t + 1$, $K(t) = 10$, $a_0 = \alpha = \beta = \gamma = 1$.

4. Функции спроса и предложения имеют соответственно вид:

$$y = 25 - 2 \cdot p + 3 \cdot \frac{dp}{dt};$$

$$x = 15 - p + 4 \cdot \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p = 9$.

5. Доход фирмы за месяц представляется нормально распределенной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 0.5 млн долл. Известно, что в 70% случаев доход фирмы превышает 4 млн долл. Найдите средний доход фирмы.

Вариант 53.

1. Объем производства зимней обуви u (ед.), выпускаемой некоторой фирмой, может быть описан уравнением $u = \frac{1}{3} \cdot t^3 - \frac{7}{2} \cdot t^2 + 6 \cdot t + 2100$ (ед.), где t – календарный месяц года. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения: а) в начале года ($t = 0$); б) в конце года ($t = 12$).

2. Экономика разделена на три отрасли: промышленность, сельское хозяйство, прочие отрасли. На плановый период заданы коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей (таблица).

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	промышленность	сельское хозяйство	прочие отрасли	
Промышленность	0,3	0,25	0,2	56
Сельское хозяйство	0,15	0,12	0,03	20
Прочие отрасли	0,1	0,05	0,08	12

Найти объем валовой продукции каждой отрасли, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей.

3. Кривые Лоренца распределения дохода в некоторых странах могут быть заданы уравнениями:

а) $y = 0{,}85 \cdot x^2 + 0{,}15 \cdot x$; б) $y = 2^x - 1$; в) $y = 0{,}7 \cdot x^3 + 0{,}3 \cdot x^2$.

Какую часть дохода получат 10 % наиболее низкооплачиваемого населения? Вычислить коэффициенты Джини для этих стран.

4. Найти функцию спроса, если $E_y = -2 = const$ и $y(3) = \frac{1}{6}$.

5. Случайная величина X имеет показательной распределение с параметром $\lambda = 2.4$. Найти вероятность попадания этой случайной величины в промежуток (-1.5; 3.2). Построить график плотности этого распределения и указать на нем фигуру, соответствующую найденной вероятности. Найти математическое ожидание X и показать его на графике. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Вариант 54.

1. Функция полных затрат в зависимости от объема выпускаемой продукции задана соотношением: $y = x^3 - 2 \cdot x^2 + 96$. При каком объеме производства предельные и средние затраты совпадают? Найти коэффициенты эластичности полных и средних затрат при данном объеме.

2. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.

3. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$. Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

4. В поселке с населением 3000 человек распространение эпидемии гриппа (без применения экстренных санитарно-профилактических мер) описывается следующим уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}001 \cdot y \cdot (3000 - y),$$

где y – число заболевших в момент времени t; t – число недель. Сколько больных будет в поселке через две недели, если в начальный момент было трое больных?

5. При данном технологическом процессе 85 % всей произведенной продукции является высшим сортом. Произведено 200 изделий. Какова вероятность того, что более 150 изделий будут изделиями высшего сорта? Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта.

Вариант 55.

1. Зависимость между количеством выпускаемых деталей в партии x (тыс. ед.) и затратами на их изготовление y (тыс. руб.) для предприятий отрасли выражается уравнением $y = \frac{27}{x} + 6$. Найти эластичность затрат для предприятий, выпускающих по 10 тыс. деталей в партии.

2. В ремонтную мастерскую поступают телефонные аппараты, из которых 70 % требуют малого ремонта, 20 % – среднего, 10 % – сложного. Статистически установлено, что через год из аппаратов, прошедших малый ремонт, 10 % требуют малого ремонта, 60 % – среднего, 30 % – сложного; из аппаратов, прошедших средний ремонт, – 20 % малого, 50 % – среднего, 30 % – сложного; из аппаратов, прошедших сложный ремонт, – 60 % малого, 40 % – среднего. Найти доли из отремонтированных в начале года аппаратов, которые будут требовать ремонта того или иного вида через один, два, три года.

3. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = \frac{100}{x+15}$. Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

4. Найти функцию спроса, если известно значение цены p при некотором спросе y и эластичность имеет следующий вид:

а) $E_p = \dfrac{y-100}{y}, \;\; 0 < y < 100, \qquad p = 90 \;\text{ при }\; y = 10;$

б) $E_p = \frac{p}{p-20}, \;\; 0 < p < 20, \;\; p = 18 \;\text{ при }\; y = 1.$

5. Распределение вероятностей случайной величины X задается интегральной функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0,.при...x<0 \\ x^3/125,.при..0<x\le 5, \\ 1,.при..>5 \end{cases}$$

Построить график функции плотности распределения вероятностей случайной величины X. Вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (2;3). Найти для случайной величины X математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Показать вычисленную вероятность и математическое ожидание на графике функции плотности.

Вариант 56.

1. Найти эластичность функции спроса при заданной стоимости p:

а) $q+10\cdot p=50$; $p=3$;

б) $5\cdot q+3\cdot p=70$; $p=10$;

в) $p^2+p+4\cdot q=26$; $p=2$ и $p=4$.

2. Данные об исполнении баланса за отчетный период, ден. ед., приведены ниже в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт отрасли 1 должен увеличиться в два раза, а отрасли 2 – на 20%.

3. Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, законы спроса и предложения на который имеют следующий вид:

а) $p=250-x^2, p=\dfrac{1}{3}\cdot x+20$; б) $p=240-x^2, p=x^2+2\cdot x+20$.

4. Найти функцию спроса, если известно значение цены p при некотором спросе y и эластичность имеет следующий вид:

а) $E_p = \dfrac{y-100}{y}$, $0 < y < 100$, $p = 90$ при $y = 10$;

б) $E_p = \frac{p}{p-20}$, $0 < p < 20$, $p = 18$ при $y = 1$.

5. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{9-x^2}}, x \in (-3;3) \\ 0, x \notin (-3;3) \end{cases}$$

Вычислить неизвестную константу $\boldsymbol{c}$.

Для случайной величины X:

а) Построить график функции плотности распределения вероятностей;

б) Вычислить математическое ожидание и дисперсию;

в) Найти вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (1;4).

Вариант 57.

1. Для следующих функций спроса найти значение p, при которых спрос является эластичным: а) $2 \cdot p + 3 \cdot q = 12$; б) $q = 50 \cdot \left(15 - \sqrt{p}\right)$; в) $q = \sqrt[3]{3600 - p^2}$.

2. Завод производит двигатели, которые либо сразу могут потребовать дополнительной регулировки (в 40 % случаев), либо сразу могут быть использованы (в 60 % случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, через месяц потребуют дополнительной регулировки в 65 % случаев, а в 35 % будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, через месяц потребуют ее в 20 % случаев, а в 80 % будут продолжать хорошо работать.

Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через два и три месяца после выпуска соответственно?

3. Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $K(x,y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ (где x, y – количество единиц соответственно первого и второго ресурса). Стоимость единицы первого ресурса – 5, второго – 10 (ден. ед.). Найти максимальную прибыль при использовании этих ресурсов.

4. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид

$$y = 50 - 2 \cdot p - 4 \cdot \frac{dp}{dt};$$

$$x = 70 + 2 \cdot p - 5 \cdot \frac{dp}{dt}$$

соответственно. Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p(0) = 10$, и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

5. Фирма снабжает своей продукцией пять магазинов. От каждого магазина может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0.4 независимо от заявок других магазинов.

а) Какова вероятность того, что поступит не более двух заявок?

б) Какова вероятность, что количество поступивших заявок будет лежать в пределах от двух до четырех?

в) Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения именно такого числа заявок?

Вариант 58.

1. Выручка от продажи конфет составляет $p = 100 \cdot x - 0{,}5 \cdot x^2$, где x – объем проданной продукции (тыс. ед.). Найти среднюю и предельную выручки, если продано: а) 10 тыс. ед.; б) 60 тыс. ед.

2. Имеются данные (таблица) о работе системы нескольких отраслей в прошлом периоде и план выпуска конечной продукции Y_1 в будущем периоде, усл. ден. ед.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Чистая продукция	План Y_1
	1	2		
1	80	120	300	350
2	70	30	200	300

Найти матрицы прямых и полных затрат, а также выпуск валовой продукции в плановом периоде, обеспечивающей выпуск конечной продукции Y_1.

3. Функция полезности имеет вид: $U(x,y) = 2 \cdot \ln(x-1) + 3 \cdot \ln(y-1)$. Цена единицы первого блага равна 8, второго – 16. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равна 1000. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была бы наибольшей?

4. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют соответственно следующий вид:

$$y = 30 - p - 4 \cdot \frac{dp}{dt};$$

$$x = 20 + p + \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

5. На АТС поступило 1000 звонков от абонентов. Вероятность неправильного соединения равна 0.005. Какова вероятность, что произошло 8 неправильных соединений? Найти наивероятнейшее число неправильных соединений и соответствующую этому вероятность.

Вариант 59.

1. Себестоимость производства телевизоров y (тыс. руб.) описывается функцией $y = 0{,}01 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 12$ $(5 \le x \le 50)$, где x – объем выпускаемой продукции в месяц (тыс. ед.). Определить скорость и темп изменения себестоимости при выпуске 20 и 40 тыс. ед. продукции.

2. В некоторой отрасли m заводов выпускают n видов продукции. Матрица $A_{m\times n}$ задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица $B_{m\times n}$ – во втором; (a_{ij}, b_{ij}) – объемы продукции j-го типа на i-м заводе в первом и втором кварталах соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) объемы продукции; б) прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам; в) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если λ – курс доллара по отношению к рублю.

3. Полезность от приобретения x единиц первого блага и y единиц второго блага имеет вид $U(x, y) = \ln x + \ln(2 \cdot y)$. Единица первого блага стоит 2, а второго – 3 (усл. ед.). На приобретение этих благ планируется потратить 100 (усл. ед.). Как следует распределить эту сумму, чтобы полезность была наибольшей?

4. Найти выражение объема реализованной продукции $y = y(t)$ и его значение при $t = 2$, если известно, что

кривая спроса имеет вид $p(y) = 3 - 2 \cdot y$,

норма акселерации $\frac{1}{l} = 1{,}5$,

норма инвестиций $m = 0{,}6$, $\quad y(0) = 1$.

5. Монета брошена 200 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 80 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет более 150 раз. Найти наивероятнейшее число выпадений герба.

Вариант 60.

1. Себестоимость продукции y связана с объемом выпускаемой продукции x уравнением: $y = 6 \cdot \ln(1 + 3 \cdot x)$. Определить среднюю и предельную себестоимости выпускаемой продукции при объеме, равном 10 ед.

2. Дана матрица S полных затрат некоторой модели межотраслевого баланса:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 1{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) приращение валового выпуска ΔX_1 , обеспечивающее приращение конечной продукции $\Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$; б) приращение конечной продукции ΔY_2, соответствующее приращению валового выпуска

$$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

3. Производственная функция $\pi(x, y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$, стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго – 10 ден. ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 (ден. ед.). В этих условиях найти оптимальное для производителя значение (x, y) количества используемых ресурсов.

4. Изменение производительности выпуска продукции с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $f = 32 - 2^{-0{,}5 \cdot t + 5}$, где t – время в месяцах. Найти объем продукции, произведенной: а) за первый месяц; б) третий месяц; в) шестой месяц; г) последний месяц года, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

5. Имеется партия в 5000 деталей. Вероятность того, что деталь неисправна, равна 0.001. Найти вероятность того, что в этой партии 10 деталей неисправны. Найти наивероятнейшее число неисправных деталей в этой партии и соответствующую этому числу вероятность.

Вариант 61.

1. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (руб.) и выпуском продукции x (млн руб.) выражается уравнением $y = -0{,}5 \cdot x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции на 30 млн руб.

2. Предприятие производит n типов продукции, объемы выпуска заданы матрицей $A_{1\times n}$. Цена реализации единицы i-го типа продукции в j-м регионе задана матрицей $B_{n\times k}$, где k – число регионов, в которых реализуется продукция.

Найти матрицу выручки C по регионам.

3. Функция полезности имеет вид: $U(x, y) = 2 \cdot \ln(x - 1) + 3 \cdot \ln(y - 1)$. Цена единицы первого блага равна 8, второго – 16. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равна 1000. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была бы наибольшей?

4. Найти объем выпускаемой продукции за пять лет, если в функции Кобба–Дугласа $A(t) = e^t$, $L(t) = (t + 1)^2$, $K(t) = (100 - 3 \cdot t)^2$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0{,}5$ (t – время в годах).

5. Произведено 600 изделий. Вероятность брака для одного изделия равна 0.2. Найти вероятность того, что количество бракованных изделий превзойдет 400. Найти наивероятнейшее число бракованных изделий.

Вариант 62.

1. Зависимость между себестоимостью готовой продукции предприятия y (млн руб.) и объемом выпускаемых изделий x (тыс. шт.) выражается уравнением: $y = \sqrt{x + 4} - 2$. Найти эластичность себестоимости продукции предприятия, выпускающего 12 тыс. шт. изделий. Какие рекомендации можно дать руководителям предприятий об изменении величины объема выпускаемой продукции?

2. Дана матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; б) приращение вектора ΔX для увеличения выпуска конечной продукции на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

3. По данным исследований о распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = \frac{x}{3-2\cdot x}$, где $x \in [0; 1]$. Вычислить коэффициент Джини k.

4. Выяснить, по истечении какого промежутка времени объем реализованной продукции удвоится по сравнению с первоначальным, если значение коэффициента пропорциональности k в уравнении $y' = k \cdot y$ равно 0,1. На сколько процентов следует увеличить норму инвестиций, чтобы промежуток времени, необходимого для удвоения объема реализованной продукции, уменьшился на 20 %?

5. Вероятность того, что компакт-диски, подготовленные для записи информации, имеют дефекты, равна 0.02. Для записи взяты 1200 дисков. Какова вероятность того, что: а) менее 15 дисков будут бракованными; б) ровно 20 дисков будут иметь брак?

Вариант 63.

1. Зависимость между объемом выпуска готовой продукции у (млн руб.) и объемом производственных фондов х (млн руб.) выражается уравнением: $y = 0{,}6 \cdot x - 4$. Найти эластичность выпуска продукции для предприятия, имеющего фонды в размере 40 млн руб.

2. Предприятие производит n типов продукции, используя m видов ресурсов. Нормы затрат ресурса i-го вида на производство единицы продукции j-го типа заданы матрицей затрат $A_{m\times n}$. Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа x_{ij}, записанное матрицей $X_{n\times 1}$.

Определить S – матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени. Дано

$$A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad X_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

3. Найти выигрыши потребителей и поставщиков в предположении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид $p = 186 - x^2$, $p = 20 + \frac{11}{6} \cdot x$.

4. Изменение численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается следующим уравнением:

$$y' = 0{,}3 \cdot y \cdot (2 - 10^{-4} \cdot y),$$

где $y = y(t)$; t – время в годах. В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?

5. Из винтовки произведено 900 выстрелов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0.7. Найти вероятность того, что произойдет ровно 555 попаданий. Найти вероятность того, что произойдет менее 800 попаданий. Найти наивероятнейшее число попаданий.

Вариант 64.

1. Функции спроса q и предложения s от цены p выражаются соответственно уравнениями: $q = 7 - p$ и $s = p + 1$.

Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 5 % относительно равновесной.

2. Данные об исполнении баланса за отчетный период, ден. ед., приведены ниже в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт отрасли 1 должен увеличиться в два раза, а отрасли 2 – на 20%.

3. Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией $z(t) = -0{,}00625 \cdot t^2 + 0{,}05 \cdot t + 0{,}5$ (ден. ед./ч), где t – время в часах от начала работы $(0 \leq t \leq 8)$. Найти функцию $u = u(t)$, выражающую объем продукции от времени t (в денежных единицах) и его величину за рабочий день.

4. Найти функцию спроса, если $E_y = -2 = const$ и $y(3) = \frac{1}{6}$.

5. В банке оператор тратит на обслуживание одного клиента в среднем 20 минут. Какова вероятность того, что: а) за один час оператор обслужит два клиента; б) менее двух клиентов?

Вариант 65.

1. Функции спроса q и предложения s на некоторый товар от его цены x задаются уравнениями:

$$q = \frac{2 \cdot x + 15}{x + 5}; \quad s = \frac{3 \cdot x + 15}{x + 10}.$$

Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для равновесной цены; в) изменение дохода при изменении равновесной цены на 5 %.

2. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.

3. Стоимость перевозки 1 т груза на 1 км (тариф перевозки) задается функцией $f(x) = \frac{10}{x+2}$ (ден. ед./км). Определить затраты на перевозку 1 т груза на расстояние 20 км.

4. Функции спроса и предложения имеют соответственно вид:

$$y = 25 - 2 \cdot p + 3 \cdot \frac{dp}{dt};$$

$$x = 15 - p + 4 \cdot \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p = 9$.

5. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2.4$. Найти вероятность попадания этой случайной величины в промежуток (-1.5; 3.2). Построить график плотности этого распределения и указать на нем фигуру, соответствующую найденной вероятности. Найти математическое ожидание X и показать его на графике. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Вариант 66.

1. Зависимость потребления y от дохода x задается функцией $y = \frac{a \cdot x}{x+b}$. Показать, что эластичность функции потребления от дохода не зависит от параметра a и стремится к нулю при неограниченном возрастании дохода.

2. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей $B = (10 \quad 15)$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100; 200 и 150 ед. продукции соответственно первого, второго и третьего видов?

3. Определить объем выпуска продукции за первые 5 ч работы при производительности $f(t) = 11{,}3 \cdot e^{-0{,}417 \cdot t}$, где t – время в часах.

4. Известно, что рост числа $y = y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0{,}2 \cdot y}{m} \cdot (m - y),$$

где m – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1 % от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80 % от максимального?

5. Непрерывная случайная величина имеет плотность распределения следующего вида: $f(x) = a \cdot \sin x, x \in (0, \pi); f(x) = 0, x \notin (0, \pi)$. Найти неизвестный параметр распределения. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Показать на графике плотности значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения. Найти вероятность попадания значений случайной величины в интервал $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; показать на графике эту вероятность.

Вариант 67.

1. Функция потребления некоторой страны имеет вид:

$$C(x) = 13 + 0{,}25 \cdot x + 0{,}37 \cdot x^{4/5},$$

где x – совокупный национальный доход.

Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 32.

2. Экономика разделена на три отрасли: промышленность, сельское хозяйство, прочие отрасли. На плановый период заданы коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей (таблица).

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	промышленность	сельское	прочие	

		хозяйство	отрасли	
Промышленность	0,3	0,25	0,2	56
Сельское хозяйство	0,15	0,12	0,03	20
Прочие отрасли	0,1	0,05	0,08	12

Найти объем валовой продукции каждой отрасли, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей.

3. Найти объем продукции, выпущенной предприятием за год (258 рабочих дней), если ежедневная производительность этого предприятия задана функцией $f(t) = -0{,}0033 \cdot t^2 - 0{,}089 \cdot t + 20{,}96$, где t – время в часах $1 \leq t \leq 8$.

4. В поселке с населением 3000 человек распространение эпидемии гриппа (без применения экстренных санитарно-профилактических мер) описывается следующим уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}001 \cdot y \cdot (3000 - y),$$

где y – число заболевших в момент времени t; t – число недель. Сколько больных будет в поселке через две недели, если в начальный момент было трое больных?

5. Получить ряд распределения для случайной величины – числа попаданий в цель при двух выстрелах, если вероятность попадания в цель равна 0.8 при одном выстреле. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины. Построить график функции распределения и показать на нем математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

Вариант 68.

1. Функция сбережения некоторой страны имеет вид:

$$S(x) = 25 - 0{,}53 \cdot x - 0{,}41 \cdot x^{2/3},$$

где x – совокупный национальный доход.

Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 27.

2. Предприятие производит мебель трех видов и продает ее в четырех регионах. Матрица $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ задает цены реализации единицы мебели i-го типа в j-м регионе. Найти выручку предприятия в каждом регионе, если реализация мебели за месяц (по видам) задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

3. При непрерывном производстве химического волокна производительность $f(t)$ (т/ч) растет с момента запуска в течение 10 часов, а затем остается постоянной. Сколько волокна дает аппарат в первые сутки после запуска, если $f(t) = e^{\frac{t}{5}} - 1$ при $t \in [0; 10]$.

4. Найти функцию спроса $y = y(p)$, если эластичность E_p постоянна и задана цена p при некотором значении спроса y:

а) $E_p = -\frac{1}{2},\ p = 5$ при $y = 2$;

б) $E_p = -3,\ p = 2$ при $y = 27$.

5. Доход фирмы за месяц представляется нормально распределенной случайной величиной со средним значением 3 млн долл. и средним квадратическим отклонением 0.5 млн долл. Найдите вероятность того, что в данном месяце доход фирмы будет более 4 млн долл. Напишите формулу плотности распределения этой случайной величины, нарисуйте ее график и покажите на нем вычисленную вероятность.

Вариант 69.

1. Функция издержек имеет вид $C(x) = 100 + \frac{1}{2} \cdot x^2$, а доход при производстве x единиц товара определяется следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 4000 \cdot x, & \text{если } x < 100, \\ 4000 \cdot \left(100 + \sqrt{x - 100}\right), & \text{если } x > 100. \end{cases}$$

Определить оптимальное для производителя значение выпуска $x_{\text{опт}}$.

2. Выяснить, продуктивна ли матрица A:

а) $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

3. Найти объем выпуска продукции за четыре года, если в функции Кобба–Дугласа $A(t) = e^{3 \cdot t}$, $L(t) = t + 1$, $K(t) = 10$, $a_0 = \alpha = \beta = \gamma = 1$.

4. Найти функцию спроса, если известно значение цены p при некотором спросе y и эластичность имеет следующий вид:

а) $E_p = \dfrac{y - 100}{y}$, $0 < y < 100$, $p = 90$ при $y = 10$;

б) $E_p = \frac{p}{p-20}$, $0 < p < 20$, $p = 18$ при $y = 1$.

5. Доход фирмы за месяц представляется нормально распределенной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 0.5 млн долл. Известно, что в 70% случаев доход фирмы превышает 4 млн долл. Найдите средний доход фирмы.

Вариант 70.

1. Капитал в 1 млрд руб. может быть размещен в банке под 10 % годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере 20 %, а издержки задаются квадратичной зависимостью. Прибыль облагается налогом в p (%). При каких значениях p вложение в производство является более эффективным, нежели чистое размещение капитала в банке?

2. Работа системы, состоящей из двух отраслей, в течение некоторого периода характеризуется данными, усл. ден. ед., приведенными в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Чистая продукция
	1	2	
1	100	160	240
2	275	40	85

Вычислить матрицу прямых затрат.

3. Кривые Лоренца распределения дохода в некоторых странах могут быть заданы уравнениями:

а) $y = 0{,}85 \cdot x^2 + 0{,}15 \cdot x$; б) $y = 2^x - 1$; в) $y = 0{,}7 \cdot x^3 + 0{,}3 \cdot x^2$.

Какую часть дохода получат 10 % наиболее низкооплачиваемого населения? Вычислить коэффициенты Джини для этих стран.

4. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид

$$y = 50 - 2 \cdot p - 4 \cdot \frac{dp}{dt};$$

$$x = 70 + 2 \cdot p - 5 \cdot \frac{dp}{dt}$$

соответственно. Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p(0) = 10$, и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

5. В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Вариант 71.

1. Функция издержек имеет вид $C(x) = 10 + \frac{x^2}{10}$. На начальном этапе фирма организует производство так, чтобы минимизировать средние издержки $A(x)$. В дальнейшем на товар устанавливается цена, равная 4 ден. ед. за единицу. На сколько единиц товара фирме следует увеличить выпуск?

2. Три завода выпускают четыре вида продукции. Необходимо найти: а) матрицу выпуска продукции за квартал, если заданы матрицы помесячных выпусков A_1, A_2 и A_3; б) матрицы приростов выпуска продукции за каждый месяц B_1 и B_2 и проанализировать результаты. Дано

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$. Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

4. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют соответственно следующий вид:

$$y = 30 - p - 4 \cdot \frac{dp}{dt};$$

$$x = 20 + p + \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

5. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени *t* равна 0,002. Необходимо: а) составить закон распределения отказавших за время *t* элементов; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины; в) определить вероятность того, что за время *t* откажет хотя бы один элемент.

Вариант 72.

1. Фирма минимизирует средние издержки, которые получаются в результате равными 30 руб./ед. Чему равны при этом предельные издержки?

2. Дана матрица S полных затрат некоторой модели межотраслевого баланса:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 1{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) приращение валового выпуска ΔX_1 , обеспечивающее приращение конечной продукции $\Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$; б) приращение конечной продукции ΔY_2, соответствующее приращению валового выпуска

$$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

3. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = \frac{100}{x+15}$. Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

4. Найти выражение объема реализованной продукции $y = y(t)$ и его значение при $t = 2$, если известно, что

кривая спроса имеет вид $p(y) = 3 - 2 \cdot y$,

норма акселерации $\frac{1}{l} = 1{,}5$,

норма инвестиций $m = 0{,}6, \quad y(0) = 1$.

5. Нормально распределенная случайная величина имеет следующую функцию распределения: $F(x) = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \Phi(x - 1)$. Из какого интервала $(1; 2)$ или $(2; 6)$ она примет значение с большей вероятностью?

Вариант 73.

1. Определить оптимальное для производителя значение выпуска $x_{\text{опт}}$ при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене p за единицу и известен вид функции издержек $C(x)$:

$C(x) = 13 + 2 \cdot x + x^3; \quad p = 14.$

2. В некоторой отрасли m заводов выпускают n видов продукции. Матрица $A_{m \times n}$ задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица $B_{m\times n}$ – во втором; (a_{ij}, b_{ij}) – объемы продукции j-го типа на i-м заводе в первом и втором кварталах соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) объемы продукции; б) прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам; в) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если λ – курс доллара по отношению к рублю.

3. Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, законы спроса и предложения на который имеют следующий вид:

а) $p = 250 - x^2, p = \dfrac{1}{3}\cdot x + 20$; б) $p = 240 - x^2, p = x^2 + 2\cdot x + 20$.

4. Функция полезности имеет вид

$$U(x, y) = \ln(x-1) + \frac{1}{4}\cdot\ln(y-2),$$

где x, y – количества приобретенных единиц первого и второго благ. Найти частные эластичности функции полезности по переменным x и y и пояснить их смысл.

5. Ежедневная прибыль супермаркета является нормальной случайной величиной со средним значением 500 у. е. и неизвестной дисперсией. На основе наблюдений найдено, что вероятность отклонения от среднего значения в сторону уменьшения или увеличения ежедневной прибыли на 150 у. е. примерно равна 70 %. Оценить величину среднего квадратического отклонения этой случайной величины и найти вероятность того, что в случайно выбранный день недели прибыль супермаркета превзойдет 700 у. е.

Вариант 74.

1. Найти максимальную прибыль, которую может получить фирма-производитель, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене p за единицу и известен вид функции издержек $C(x)$:

$$C(x) = 10 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}; \quad p = 10{,}5.$$

2. Имеются данные (таблица) о работе системы нескольких отраслей в прошлом периоде и план выпуска конечной продукции Y_1 в будущем периоде, усл. ден. ед.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Чистая продукция	План Y_1
	1	2		
1	80	120	300	350
2	70	30	200	300

Найти матрицы прямых и полных затрат, а также выпуск валовой продукции в плановом периоде, обеспечивающей выпуск конечной продукции Y_1.

3. Найти величины используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если заданы производственная функция $K(x, y)$ и цены p_1 и p_2 единицы первого и второго ресурсов:

$$K(x, y) = 30 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}; \quad p_1 = 4, \ \ p_2 = \frac{1}{48}.$$

4. Найти функцию спроса, если $E_y = -2 = const$ и $y(3) = \frac{1}{6}$.

5. При данном технологическом процессе 85 % всей произведенной продукции является высшим сортом. Произведено 200 изделий. Какова вероятность того, что более 150 изделий будут изделиями высшего сорта? Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта.

Вариант 75.

1. На начальном этапе производства фирма минимизирует средние издержки, причем функция издержек имеет вид $C(x) = 10 + 2 \cdot x + \frac{5}{2} \cdot x^2$. В дальнейшем цена единицы товара устанавливается $p = 37$. На сколько единиц товара фирме следует увеличить выпуск? На сколько при этом изменятся средние издержки?

2. Завод производит двигатели, которые либо сразу могут потребовать дополнительной регулировки (в 40 % случаев), либо сразу могут быть использованы (в 60 % случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, через месяц потребуют дополнительной регулировки в 65 % случаев, а в 35 % будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, через месяц потребуют ее в 20 % случаев, а в 80 % будут продолжать хорошо работать.

Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через два и три месяца после выпуска соответственно?

3. Потребитель имеет возможность потратить сумму 1000 (ден. ед.) на приобретение x единиц первого товара и y единиц второго товара. Заданы функция полезности $U(x, y)$ и цены p_1, p_2 единицы соответственно первого и второго товаров. Найти значения (x, y), при которых полезность для потребителя будет наибольшей:

$$U(x, y) = 0{,}5 \cdot \ln(x-2) + 2 \cdot \ln(y-1); \quad p_1 = 0{,}2, \quad p_2 = 4.$$

4. Найти функцию спроса $y = y(p)$, если эластичность E_p постоянна и задана цена p при некотором значении спроса y:

а) $E_p = -\frac{1}{2}$, $p = 5$ при $y = 2$;

б) $E_p = -3$, $p = 2$ при $y = 27$.

5. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2.4$. Найти вероятность попадания этой случайной величины в промежуток (-1.5; 3.2). Построить график плотности этого распределения и указать на нем фигуру, соответствующую найденной вероятности. Найти математическое ожидание X и показать его на графике. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.