САНКТ- ПЕТЕРБУРГСКОЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Слюсаренко А.С.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к Лабораторным Работам по теме
Интерполяция функций
по дисциплине
«МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ»

Санкт – Петербург

2023

Слюсаренко А.С. Методические указания к ЛР по теме Интерполяция функций.doc

Одобрено на заседании кафедры № 13

«_____»__________________2023г., протокол № __________

Методические указания составлены для ЛР по теме «Интерполяция функций»
ЛР 1 «Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа»
ЛР 2 «Интерполяционный многочлен в форме Ньютона»
как мощного и универсального средства приближения функций, а так же углубленного изучения функций программной системы по дисциплине «МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ», изучаемой студентами 3-4 курсов специальности ………… и выполняемой ими в семестре в объеме 12 часов.

«Интерполяция функций» ЛР 1 «Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа», ЛР 2 «Интерполяционный многочлен в форме Ньютона» выполняются на базе персонального компьютера с использованием универсального системного и специализированного пользовательского программного обеспечения.

1. Численные методы приближения функций.

Приближением функции называется процедура замены по определенному правилу функции f близкой к ней в том или ином смысле функцией g из некоторого фиксированного множества. В качестве приближающего множества частот берут подпространство алгебраических или тригонометрических многочленов (полиномов). Более гибкий и мощный аппарат приближения получают, рассматривая обобщенные полиномы

$$\mathrm{g}(x, a_0, a_1, ..., a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x), \tag{1}$$

где $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$ – некоторая система линейно независимых функций, выбираемая с учетом конкретных условий задачи и требований, предъявляемых к функции g. В дальнейшем будем считать, что функция g – полином такого вида.

Мерой погрешности приближения является, как правило, расстояние $\rho(\mathrm{f}, \mathrm{g})$ между приближаемой и приближающей функциями. Наиболее часто погрешность приближения на интервале $[a, b]$ оценивается в равномерной

$$\rho(\mathrm{f}, \mathrm{g})_c = \max_{[a,b]} \left| \mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x) \right| \tag{2}$$

и среднеквадратичной

$$\rho(\mathrm{f}, \mathrm{g})_{L_2} = \left\{ \int_a^b \left[\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

метриках, где $[a, b]$ – интервал, на котором строится приближение.

Рассмотрим две постановки задачи приближения.

1. Пусть в отдельных точках $x_0, x_1, ... x_n$ интервала $[a, b]$ заданы значения функции $\mathrm{f}(x_j)$; требуется восстановить ее значение для других $x \in [a, b]$.

Если параметры $a_0, a_1, ... a_n$ определяются из условий совпадения значений приближаемой и приближающей функций в точках x_j

$$\mathrm{g}(x_j) = \mathrm{f}(x_j), \quad j = 0,1,...,n, \tag{4}$$

то такой способ приближения называют интерполяцией, а точки x_j – узлами интерполяции. (Задачей экстраполяции называют задачу вычисления функции f в некоторой точке x^*, находящейся вне интервала $[a, b]$).

Предположим, что алгоритм построения приближающей функции не требует выполнения последнего условия, и значения функции вычисляются в произвольных точках, тогда говорят об аппроксимации функции.

2. Пусть функция f задана таблично по результатам измерений, т.е. значения функции $\mathrm{f}(x_j)$, вычисленные в точках x_j, $j = 0,1,...,n$, содержат ошибки ε_j. Построение приближающего полинома интерполяционным методом с использованием условий совпадения значений приближаемой и приближающей функций в узлах привело бы к повторению имеющихся ошибок.

Практика показала, что полином g^*, минимизирующий погрешность приближения в среднеквадратичной метрике, значительно лучше представляет функцию f. Таким образом, аппроксимирующий полином g^* строится из условия

$$\rho(\mathrm{f}, \mathrm{g}^*(a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*, x))_{L_2} = \min_{a_0, a_1, ..., a_n} \rho(\mathrm{f}, \mathrm{g}(a_0, a_1, ..., a_n, x))_{L_2}. \qquad (4)$$

Процедура таких построений носит название метода наименьших квадратов.

2. Исследование зависимостей поведения и точности интерполирующих полиномов от числа узлов и вида приближаемой функции.

2.1. Теоретическая часть

Интерполяция – один из способов аппроксимации данных.

В простейшем (одномерном) случае <u>задача интерполяции</u> [1-3] состоит в следующем: заданы точки (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ и требуется найти функцию φ(x), которая проходит через эти точки (см. рис. 1), т.е.

$$\varphi(x_i) = y_i\,,\ i = \overline{1,n}. \qquad (5)$$

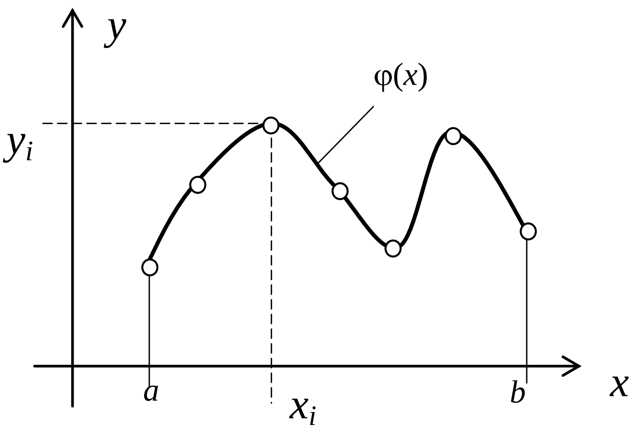

Рисунок 1 – интерполяция табличных данных (x_i, y_i) функцией φ(x)

Точки (x_i, y_i) называют <u>узлами интерполяции</u>, а функцию φ(x) – <u>интерполирующей функцией</u> или <u>интерполянтом</u>. Вид функции φ(x) определяет способ интерполяции. На практике в качестве интерполирующей функции φ(x) часто используются алгебраические полиномы различного вида, так как полиномы легко вычислять, дифференцировать и интегрировать. При этом интерполяция носит название <u>полиномиальной</u>.

Рассмотрим задачу <u>линейной интерполяции</u>. При этом интерполирующая функция имеет следующий вид:

$$\varphi(x)=\varphi(\vec{C},x)=C_0\varphi_0(x)+C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_m\varphi_m(x)=\sum_{k=0}^{m}C_k\varphi_k(x), \qquad (6)$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, … , $\varphi_m(x)$ – базисные функции.

Используя условие (5) и выражение (6), получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(\vec{C},x_0)=C_0\varphi_0(x_0)+C_1\varphi_1(x_0)+\ldots+C_m\varphi_m(x_0)=y_0\\ \varphi(\vec{C},x_1)=C_0\varphi_0(x_1)+C_1\varphi_1(x_1)+\ldots+C_m\varphi_m(x_1)=y_1\\ \ldots\\ \varphi(\vec{C},x_n)=C_0\varphi_0(x_n)+C_1\varphi_1(x_n)+\ldots+C_m\varphi_m(x_n)=y_n\end{array}\right\} \qquad (7)$$

Единственное решение системы (3) существует при двух условиях:

1) число точек (x_i, y_i), $i=\overline{1,n}$ равно числу коэффициентов C_k, $k=\overline{0,m}$;
2) система уравнений (7) должна быть невырожденной, т.е. определитель системы $\Delta \neq 0$.

Таким образом, если выполняются вышеуказанные условия, то через точки (x_i, y_i) проходит единственная функция $\varphi(\vec{C},x)=\sum\limits_{k=0}^{m}C_k\varphi_k(x)$.

В случае <u>полиномиальной интерполяции</u> с <u>линейным оператором</u> базисные функции имеют следующий вид: $\varphi_0(x)=x^0=1$, $\varphi_1(x)=x^1=x$, $\varphi_2(x)=x^2$, … , $\varphi_m(x)=x^m$. Интерполирующая функция при этом имеет вид полинома степени m: $\varphi(x)=P_m(x)=C_0+C_1 x+C_2x^2+\ldots+C_mx^m$ и, следовательно, система (3) примет вид

$$\left.\begin{array}{l}C_0+C_1x_0+C_2x_0^2+\ldots+C_nx_0^n=y_0\\ C_0+C_1x_1+C_2x_1^2+\ldots+C_nx_1^n=y_1\\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\ C_0+C_1x_n+C_2x_n^2+\ldots+C_nx_n^n=y_n\end{array}\right\} \qquad (8)$$

В матричной форме систему (8) можно переписать как

$$\mathbf{A*C=B}, \qquad (9)$$

где

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}$$ – матрица Ван дер Монда; $$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix};\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}C_0\\ C_1\\ \vdots\\ C_n\end{bmatrix}.$$

Решением системы (9) будет вектор коэффициентов полинома **C**. Так как определитель матрицы Ван дер Монда всегда отличен от нуля (при $x_i \neq x_j$), то решение системы (9) – единственное. Для решения системы (9) необходимо найти обратную матрицу **A**. В этом случае решением (9) будет $\mathbf{C}=\mathbf{A}^{-1}*\mathbf{B}$.

***<u>Вывод</u>*:** Таким образом, через заданные на интервале $[a, b]$ точки (x_i, y_i), $i=\overline{0,n}$ всегда можно провести <u>единственный интерполяционный полином</u> $\varphi(x)=P_n(x)=C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n$, коэффициенты которого находятся в результате решения системы (4).

Выражение (1) определяет поведение функции $\varphi(x)$ только в узлах интерполяции (x_i, y_i), $i=\overline{0,n}$. Между узлами $\varphi(x)$ <u>может вести себя произвольным образом</u>, сколь угодно далеко, в принципе, отклоняясь от зависимости $f(x)$. Определить погрешность приближения можно, используя выражение для абсолютной ошибки $\varepsilon=| f(x) - \varphi(x) |$.

2.2. Идея Лагранжа полиномиальной интерполяции с линейным оператором

Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Пусть на интервале $[a,b]$ задана система интерполяционных узлов $x_0, x_1, ... x_n$. В которых известны значения функции $f(x_j)$. Как уже отмечалось выше, задача интерполяции алгебраическими многочленами состоит в построении многочлена

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

степени n, значения которого в заданных узлах интерполяции совпадают со значениями функции f в этих узлах:

$$L_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0,1,...,n.$$

Задача имеет единственное решение.

Идея Лагранжа искать Интерполяционный многочлен в виде

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} P_j(x)\, f(x_j). \qquad (10)$$

Теперь это кажется естественным

Удовлетворяя условиям интерполяции (7), получаем соотношения

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(x_j) f(x_i) = f(x_j), \quad j = 0,1,...,n, \qquad (11)$$

с одновременным наложением на функции $P_i(x)$ ограничений

$$P_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j, \quad i,j = 0,1...n \end{cases}.$$

Последние условия означают, что каждая из функций $P_i(x)$, $i = 0,1,...,n$, имеет не менее n нулей на интервале $[a,b]$. Поэтому целесообразно искать эти функции в виде

$$P_i(x) = A_i(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n).$$

Из условия $P_i(x_i) = 1$ имеем

$$1 = A_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n). \qquad (12)$$

Следовательно, искомые функции $P_i(x)$ вычисляются по формулам

$$P_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}.$$

Отсюда интерполяционный многочлен имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} f(x_i). \qquad (13)$$

Форма представления интерполяционного многочлена в виде линейной комбинации значении приближаемой функции $\mathrm{f}(x_i)$ с коэффициентами $P_i(x)$ называется формой Лагранжа. Если ввести обозначение

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(x\ )\,\mathrm{f}(x\ ) = \mathrm{f}(x\ ), \qquad (14)$$

по системе интерполяционных узлов $x_0, x_1, \ldots x_n$ с известными значениями функции $\mathrm{f}(x_j)$ в узлах.

Двухточечная интерполяция по Лагранжу.

В случае интерполяции по двум узлам x_0,x_1 со значениями функции f в них y_0 и y_1 согласно формулам (2.6) и (2.7) получим

$$L_2(x) = y_0 w_0(x) + y_1 w_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad (2.8)$$

Если $L_2(x)$ обозначить через y, то нетрудно убедиться, что уравнение (2.8) представляет собой уравнение прямой, проходящей через две точки: $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$.

Таким образом, кривую, изображающую функциональную зависимость $f(x)$ (см. рис. 1) на участке $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ при интерполяции по двум узлам, заменяем прямой, проходящей через те же точки.

Интерполяционная формула (2.2) для промежуточного значения $\tilde{x}$ дает значение $\bar{y}$ вместо неизвестного точного значения $\bar{y} = f(x)$. Используя большее количество узлов и аппроксимируя истинную кривую интерполяционным многочленом Лагранжа более высокого порядка, можно уточнить полученное значение $\bar{y}$.

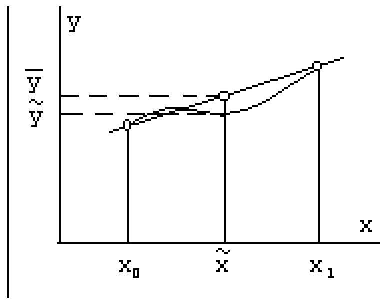

Рис. 2.1. Двухточечная интерполяция по Лагранжу.

Трехточечная интерполяция по Лагранжу

Пример 2.1. Построить **интерполяционный многочлен Лагранжа по узлам 0,2,3,5, в которых функция f принимает значения 1,3,2,5, с помощью интерполяционной формулы (2.2) оценить значение функции f при $x=1$.**

По формуле (2.7) формируем многочлены $w_0(x),w_1(x),w_2(x),w_3(x)$,и подставим их в формулу (2.6). Получим

$$L_3(x) = 1\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)} + 3\cdot\frac{x(x-3)(x-5)}{2(2-3)(2-5)} + 2\cdot\frac{x(x-2)(x-5)}{3(3-2)(3-5)} + 5\cdot\frac{x(x-2)(x-3)}{5(5-2)(5-3)} = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1$$

.

Значение функции f при $x=1$ (отсутствующем в таблице) оценивается величиной $L_3(1)=3{,}257$.

2.3. Интерполяционная схема Эйткена

Если требуется найти не общее выражение $L_n(x)$, а лишь его значения при некоторых x, то удобно воспользоваться так называемой интерполяционной схемой Эйткена, позволяющей вычислять значение интерполяционного многочлена Лагранжа в точке x путем последовательного применения операций одного и того же типа.

Запишем интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по двум узлам (2.8) в виде

$$L_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0},$$

где $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ – определитель второго порядка.

Очевидно, что при $x=x_0$, он принимает значение y_0, а при $x=x_1$ - значение y_1. Рассматривая узлы x_1 и x_2, точно так же можно образовать многочлен $L_{1,2}(x)$, принимающий при x_1 и x_2 значения y_1 и y_2 соответственно, и т.д. до $L_{n-1,n}(x)$, построенного по узлам x_{n-1} и x_n.

Образуем теперь $L_{012}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$

Это многочлен второй степени относительно x, обладающий следующими свойствами:

$$L_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x_0) & 0 \\ L_{12}(x_0) & x_2 - x_0 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & 0 \\ L_{12}(x_0) & x_2 - x_0 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = y_0$$

$$L_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_0 - x_1 \\ y_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = y_1, L_{012}(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x_2) & x_0 - x_2 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = y_2$$

Таким образом, $L_{012}(x)$ совпадает с интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по трем узлам x_0, x_1, x_2 и принимающим в них соответственно значения y_0, y_1, y_2.

И так далее.

В общем случае многочлен Лагранжа в схеме Эйткена

$$L_{012\ldots n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{012\ldots n-1}(x) & x_0 - x \\ L_{12\ldots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}}{x_n - x_0}$$

является интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по $n+1$ узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и принимающим в них заданные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$ соответственно.

Пример

Таблица 2.6

Вычисления интерполяционного полинома Лагранжа пятого порядка по схеме Эйткена

x_k	y_k	x_k-x	$L_{k-1,k}(x)$	$L_{k-2,k-1,k}(x)$	$L_{k-3,k-2,k-1,k}(x)$	$L_{k-4,k-3,k-2,k-1,k}(x)$	
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5	y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5	x_0-x x_1-x x_2-x x_3-x x_4-x x_5-x	$L_{01}(x)$ $L_{12}(x)$ $L_{23}(x)$ $L_{34}(x)$ $L_{45}(x)$	$L_{012}(x)$ $L_{123}(x)$ $L_{234}(x)$ $L_{345}(x)$	$L_{0123}(x)$ $L_{1234}(x)$ $L_{2345}(x)$	$L_{01234}(x)$ $L_{12345}(x)$	$L_{012345}(x)$

3. Подводные камни интерполяционной формулы Лагранжа

Однако достоинства простой и удобной формулы (2.4) «**сходят на нет**», если узлы интерполирования x_i по абсолютной величине меньше единицы.

В этом случае определитель системы (2.5) близок к нулю (линейные системы с близким к нулю определителем называются плохо обусловленными) и погрешности, возникающие при решении линейной системы (2.5), слишком велики.

3.1. Погрешность полиномиальной интерполяции.

Погрешность полиномиальной интерполяции. Лучший способ проверить качество интерполяции – вычислить значения интерполирующей функции в большом числе точек и построить график. Однако в некоторых ситуациях качество интерполянта можно проанализировать. Предположим, что величина y_i представляет собой точные значения известной функции $f(x)$ в точках x_i. Пусть $P_n(x)$ – единственный полином n-й степени, интерполирующий функцию по этим точкам (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$. Предположим, что во всех точках $x \in [a, b]$ функция $f(x)$ имеет $(n+1)$ непрерывную производную. Тогда можно показать [1, 2], что абсолютная ошибка интерполяции $\varepsilon(x)=|f(x)- P_n(x)|$ определяется выражением

$$\varepsilon(x) \le \frac{|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|}{(n+1)!} M_{n+1} = \frac{|\omega_h(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}, \qquad (10)$$

где $M_{n+1} = \max|f^{(n+1)}(x)|$ - максимальное значение $(n+1)$-й производной функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$; $\omega_h(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$.

Теперь посмотрим, что получится, если интерполировать известную функцию $f(x)$ все в большем и большем числе точек на фиксированном интервале. Выражение для погрешности (5) состоит из трех разных частей; факториал и произведение разностей с увеличением n уменьшают ошибку, но порядок производной при этом растет. Для многих функций величина M_{n+1} увеличиваются быстрее, чем $(n+1)!$. В результате полиномиальные интерполянты редко сходятся к обычной непрерывной функции. Практический эффект выражается в том, что интерполирующий полином высокой степени может вести себя "плохо" в точках, отличных от узлов интерполяции (x_i, y_i), $i = \overline{0, n}$. Поэтому на практике часто используют интерполянты степени не выше 5-6.

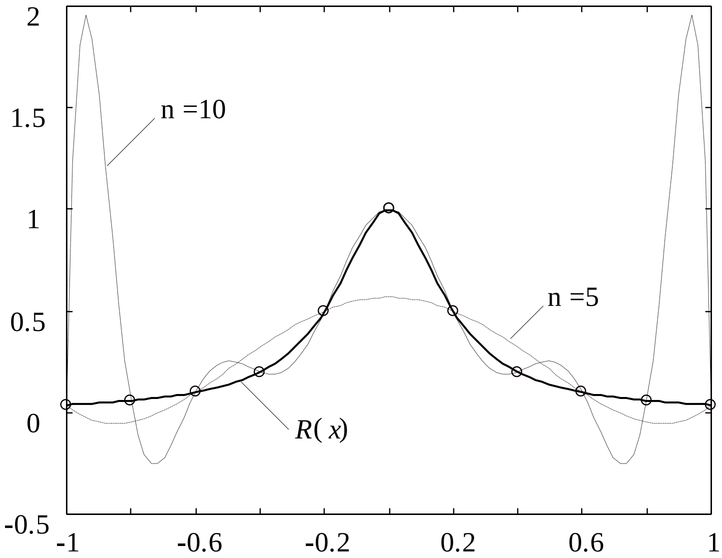

Рисунок 2 – интерполяция функции Рунге полиномом степени n

Примером может служить функция Рунге [4] вида $R(x)=1/(1+25x^2)$, график которой представлен на рис. 2. С увеличением порядка интерполирующего полинома при равномерном распределении узлов интерполяции на интервале [–1, 1] происходит ухудшение качества приближения на краях интервала. Это объясняется тем, что производные $R(x)$, которые фигурируют в выражении для погрешности интерполяции (5), быстро растут с увеличением числа n.

3.2. Влияние точности приближения от выбора узлов интерполяции

Точность приближения зависит не только от числа узлов интерполяции (т.е. порядка интерполирующего полинома), но и от их расположения на интервале $[a, b]$. В простейшем случае выбирается равномерное расположение точек (x_i, y_i), $i = \overline{0, n}$ на интервале $[a, b]$ с шагом $\Delta x=(b-a)/(n-1)$. Однако, как показывает практика, равномерное расположение не является оптимальным с точки зрения лучшего приближения $\varphi(x)$ к зависимости $f(x)$. Более оптимистичным для полиномиальной интерполяции является расположение узлов на интервале $[a, b]$ по формуле Чебышева

$$x_{i+1} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \; i = \overline{0, n}. \qquad (11)$$

Выражение (6) определяет так называемое оптимальное распределение узлов интерполяции на интервале $[a, b]$.

4. Варианты заданий для выполнения лабораторной работы

Функция $y = f(x)$ задана таблично. С помощью интерполяционных формул найти значения указанной в **Табл. 2.8** функции при данных значениях аргумента.

Построить таблицу значений x и y.

Таблица 4.1

Варианты заданий

№	*x*	*y*	*Метод*	*Вычисляемая функция*
1	0.62 0.67 0.74 0.80 0.87 0.96 0.99	0.537944 0.511709 0.477114 0.449329 0.418952 0.382893 0.371577	Схема Эйткена	$y = f(x)$; $x_1 = 0.846$; $x_2 = 0.752$
2	13.00 13.05 13.10 13.15 13.20 13.25	1.49936 1.50106 1.50292 1.50494 1.50711 1.50942	Схема Эйткена	$y = f(x)$; $x_1 = 13.12$; $x_2 = 13.173$; $x_3 = 1.32$
3	0.8902 0.8909 0.8919 0.8940 0.8944 0.8955 0.8965 0.8975 0.9010 0.9026	1.23510 1.23687 1.23941 1.24475 1.24577 1.24858 1.25114 1.25371 1.26275 1.26691	Схема Эйткена	$y = f(x)$; $x_1 = 0.8942$; $x_2 = 0.8963$; $x_3 = 0.9014$
4	2.8 2.9 3.0 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5	3.92847 4.41016 4.93838 5.51744 6.15213 6.84782 7.61045 8.44671	Интерполяционный полином Лагранжа	$y = f'(x)$; $x_1 = 3.02$; $x_2 = 3.31$; $x_3 = 3.46$
5	1.03 1.08 1.16 1.23 1.26 1.33 1.39	2.80107 2.94468 3.18993 3.42123 3.52542 3.78104 4.01485	Схема Эйткена	$y = f(x)$; $x_1 = 1.113$; $x_2 = 1.176$; $x_3 = 1.346$
6	0.180 0.185	5.61543 5.46693	Интерполяционный полином Лагранжа	$y = f(x)$; $x_1 = 0.1838$;

№	*x*	*y*	*Метод*	*Вычисляемая функция*
	0.190 *0.195* *0.200* *0.205*	*5.32643* *5.19304* *5.06649* *4.94619*		$x_2 = 0.1875;$ $x_3 = 0.1944$
7	*1.0* *1.1* *1.2* *1.3* *1.4* *1.5* *1.6* *1.7*	*1.0083* *1.1134* *1.3208* *1.3310* *1.4449* *1.5634* *1.6876* *1.8186*	Интерполяционный полином Лагранжа	$y = f'(x);$ $x_1 = 1.14;$ $x_2 = 1.42;$ $x_3 = 1.59$
8	*0.5400* *0.5405* *0.5410* *0.5420* *0.5429* *0.5440* *0.5449* *0.5455* *0.5465* *0.5473*	*1.66825* *1.66636* *1.66448* *1.66071* *1.65734* *1.65322* *1.64987* *1.64764* *1.65393* *1.64097*	Схема Эйткена	$y = f(x);$ $x_1 = 0.5415;$ $x_2 = 0.5424;$ $x_3 = 0.5445$
9	*0.6100* *0.6104* *0.6118* *0.6139* *0.6145* *0.6158* *0.6167* *0.6185* *0.6200* *0.6225*	*1.83781* *1.83686* *1.83354* *1.82860* *1.82720* *1.82416* *1.82207* *1.81791* *1.81446* *1.80876*	Схема Эйткена	$y = f(x);$ $x_1 = 0.6111;$ $x_2 = 0.6126;$ $x_3 = 0.6151$
10	*0.75* *0.80* *0.85* *0.90* *0.95* *1.00* *1.05* *1.10*	*0.2803* *0.3186* *0.3582* *0.4021* *0.4472* *0.4945* *0.5438* *0.5952*	Интерполяционный полином Лагранжа	$y = f'(x);$ $x_1 = 0.82;$ $x_2 = 1.03;$
11	*1.1* *1.2* *1.3* *1.4* *1.5* *1.6* *1.7* *1.8*	*0.8802* *0.9103* *0.9340* *0.9523* *0.9661* *0.9764* *0.9838* *0.9891*	Интерполяционная формула Лагранжа	$y = f'(x);$ $x_1 = 1.34;$ $x_2 = 1.65$
12	*50* *55*	*0.285* *0.319*	Интерполяционная формула Лагранжа	$y = f(x);$ $x_1 = 58;$

№	*x*	*y*	*Метод*	*Вычисляемая функция*
	60 *65* *70* *75* *80* *85*	*0.223* *0.042* *-0.148* *-0.273* *-0.283* *-0.178*		$x_2 = 79.1$
13	*0.11* *0.15* *0.21* *0.29* *0.35* *0.40*	*9.05421* *6.61659* *4.69170* *3.35106* *2.73951* *2.36552*	Схема Эйткена	$y = f(x);$ $x_1 = 0.186;$ $x_2 = 0.235;$ $x_3 = 0.314$
14	*1.415* *1.420* *1.425* *1.430* *1.435* *1.440*	*0.888551* *0.889599* *0.890637* *0.891667* *0.892687* *0.893698*	Интерполяционная формула Лагранжа	$y = f(x);$ $x_1 = 1.4179;$ $x_2 = 1.4258;$ $x_3 = 1.4315$
15	*0.02* *0.08* *0.12* *0.17* *0.23* *0.30*	*1.02316* *1.09590* *1.14725* *1.21483* *1.30120* *1.40976*	Интерполяционная формула Лагранжа	$y = f(x);$ $x_1 = 0.102;$ $x_2 = 0.114;$ $x_3 = 0.154$
16	*0.210* *0.215* *0.220* *0.225* *0.230* *0.235*	*4.83170* *4.72261* *4.61855* *4.51919* *4.42422* *4.33337*	Интерполяционная формула Лагранжа	$y = f(x);$ $x_1 = 0.2121;$ $x_2 = 0.2232;$ $x_3 = 0.2244$

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Выборка экспериментальных данных представляет собой массив данных, который характеризует процесс изменения измеряемого сигнала в течение заданного времени (либо относительно другой переменной). Для выполнения теоретического анализа измеряемого сигнала необходимо найти аппроксимирующую функцию, которая свяжет дискретный набор экспериментальных данных с непрерывной функцией - интерполяционным полиномом n-степени. Данный интерполяционный полином n-степени может быть записан, например, в форме Ньютона (один из способов представления).

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона – это математическая функция позволяющая записать полином n-степени, который будет соединять все заданные точки из набора значений, полученных опытным путём или методом случайной выборки с постоянным/переменным временным шагом измерений.

1. Интерполяционная формула Ньютона для неравноотстоящих значений аргумента

В общем виде интерполяционный многочлен в форме Ньютона записывается в следующем виде:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\left(f(x_0,\dots,x_k)\cdot\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)\right)$$

где n – вещественное число, которое указывает степень полинома;

$f(x_0,\dots,x_k)$ – переменная, которая представляет собой разделенную разность k-го порядка, которая вычисляется по следующей формуле:

$$f(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+k}) - f(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_i}$$

Разделённая разность является симметричной функцией своих аргументов, то есть при любой их перестановке её значение не меняется. Следует отметить, что для разделённой разности k-го порядка справедлива следующая формула:

$$f(x_0,x_1,\dots,x_k) = \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{j=0,\,j\neq i}^{k}(x_i-x_j)}\right)$$

В качестве примера, рассмотрим построение полинома в форме Ньютона по представленной выборке данных, которая состоит из трех заданных точек $\left[x_0, f(x_0); \quad x_1, f(x_1); \quad x_2, f(x_2)\right]$. Интерполяционный многочленв форме Ньютона, который проходит через три заданных точки, будет записываться в следующем виде:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)\cdot(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1)$$

- Разделенная разность 1-го порядка определяется следующим выражением

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Следует отметить, что данное выражение может быть переписано в другом виде:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

- Разделенная разность 2-го порядка определяется следующим выражением

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Следует отметить, что данное выражение может быть переписано в другом виде:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1)}$$

Форма Ньютона является удобной формой представления интерполяционного полинома n-степени, так как при добавлении дополнительного узла все вычисленные ранее слагаемые остаются без изменения, а к выражению добавляется только одно новое слагаемое. Следует отметить, что интерполяционный полином в форме Ньютона только по форме отличается от интерполяционного полинома в форме Лагранжа, представляя собой на заданной сетке один и тот же интерполяционный полином.

Следует отметить, что полином в форме Ньютона может быть представлен в более компактном виде (по схеме Горнера), которая получается путем последовательного вынесения за скобки множителей $(x - x_i)$

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0)\cdot\left[f_{01} + (x - x_1)\cdot\left[f_{012} + (x - x_2)\cdot\left[f_{0123} + \ldots\right]\right]\right]$$

2. Интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих значений аргумента

В случае если значения функции заданы для равноотстоящих значений аргумента, которые имеют постоянный шаг измерений $(x_n = x_0 + n \cdot h)$, то используют другую форму записи интерполяционного многочлена по формуле Ньютона.

• Для интерполирования функции в конце рассматриваемого интервала (*интерполирование назад и экстраполирование вперед*) используют интерполяционный полином в форме Ньютона в следующей записи:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0) + \frac{\Delta f^2(x_0)}{2! \cdot h^2} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \ldots$$
$$+ \frac{\Delta f^n(x_0)}{n! \cdot h^n} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$$

где конечные разности k-порядка определяются по следующему выражению

$$\Delta^k f(x_i) = \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i)$$

Получаемые конечные разности удобно представлять в табличной форме записи, в виде горизонтальной таблице конечных разностей. В этой формуле из таблицы конечных разностей используются $\Delta^k f_0$ верхней диагонали.

x_0	$\underline{f_0}$	$-$	$-$	$-$
x_1	f_1	$\underline{\Delta f_0 = f_1 - f_0}$	$-$	$-$
x_2	f_2	$\Delta f_1 = f_2 - f_1$	$\underline{\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0}$	$-$
x_3	f_3	$\Delta f_3 = f_3 - f_2$	$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$	$\underline{\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0}$

• Для интерполирования функции в начале рассматриваемого интервала (*интерполирование вперед и экстраполирование назад*) используют интерполяционный полином в форме Ньютона в следующей записи:

$$P_n(x) = f(x_n) + \frac{\Delta f(x_n)}{h} \cdot (x - x_n) + \frac{\Delta f^2(x_n)}{2! \cdot h^2} \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$+ \frac{\Delta f^n(x_n)}{n! \cdot h^n} \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_1)$$

где конечные разности k-порядка определяются по следующему выражению

$$\Delta^k f(x_n) = \Delta^{k-1} f(x_{n-1}) - \Delta^{k-1} f(x_n)$$

Получаемые конечные разности удобно представлять в табличной форме записи, в виде горизонтальной таблице конечных разностей. В формуле из таблицы конечных разностей используются $\Delta^k f_i$ нижней диагонали.

x_0	$\underline{f_0}$	$\Delta f_1 = f_0 - f_1$	$\Delta^2 f_2 = \Delta f_2 - \Delta f_1$	$\underline{\Delta^3 f_3 = \Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_3}$
x_1	f_1	$\Delta f_2 = f_1 - f_2$	$\underline{\Delta^2 f_3 = \Delta f_2 - \Delta f_3}$	–
x_2	f_2	$\underline{\Delta f_3 = f_2 - f_3}$	–	–
x_3	$\underline{f_3}$	–	–	–

3. Погрешность интерполяционного полинома в форме Ньютона

Рассмотрим функцию f(x), которая непрерывна и дифференцируема на рассматриваемом отрезке [a, b]. Интерполяционный полином P(x) в форме Ньютона принимает в точках $\{x_1;\ x_2;\ x_3\}$ заданные значения функции $\{f(x_1);\ f(x_2);\ f(x_3)\}$. В остальных точках интерполяционный полином P(x) отличается от значения функции f(x) на величину ***остаточного члена***, который определяет абсолютную погрешность интерполяционной формулы Ньютона:

$$R_n(x) = f(x) - P(x)$$

Абсолютную погрешность интерполяционной формулы Ньютона определяют следующим образом:

$$|R_n(x)| \le \frac{M^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|$$

Переменная $M^{(n+1)}(x)$ представляет собой верхнюю границу значения модуля (n+1)-й производной функции f(x) на заданном интервале [a, b]

$$M^{(n+1)}(x) = \max_{[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

В случае равноотстоящих узлов $(x - x_n = h \cdot (q - k),\ k = 0,1,2,...,n)$ абсолютная погрешность интерполяционной формулы Ньютона определяют следующим образом:

$$\left|R_n(x)\right| \le h^{n+1} \cdot \frac{M^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \cdot \left|q \cdot (q-1) \cdot \ldots \cdot (q-n)\right|$$

Выражение записано с учетом следующей формулы:

$$\left|\omega_n(x)\right| = \prod_{j=0}^{n} \left(x - x_j\right) = h^{n+1} \cdot \left|q \cdot (q-1) \cdot \ldots \cdot (q-n)\right|$$

Выбор узлов интерполяции

С помощью корректного выбора узлов можно минимизировать значение $\omega_n(x)$ в оценке погрешности, тем самым повысить точность интерполяции. Данная задача может быть решена с помощью многочлена Чебышева:

$$T_{n+1}(x) = \frac{b-a}{2^{2\cdot n+1}} \cdot \cos\left((n+1) \cdot \arccos\left(\frac{2 \cdot x - (b+a)}{b-a} \right) \right)$$

В качестве узлов следует взять корни этого многочлена, то есть точки:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot (n+1)} \cdot \pi \right)$$

4. Методика вычисления полинома в форме Ньютона (прямой способ)

Алгоритм вычисления полинома в форме Ньютона позволяет разделить задачи определения коэффициентов и вычисления значений полинома при различных значениях аргумента:

1. В качестве исходных данных задается выборка из n-точек, которая включает в себя значения функции и значения аргумента функции.
2. Выполняется вычисление разделенных разностей n-порядка, которые будет использоваться для построения полинома в форме Ньютона.
3. Выполняется вычисление полинома n-степени в форме Ньютона по следующей формуле:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_0, \ldots, x_k) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right)$$

Алгоритм вычисления полинома в форме Ньютона $(P_n(x))$ представлен на рисунке 1.

Следует отметить, что разделённые разности k-го порядка в соответствии с представленной методикой перезаписывается в вектор столбец функции $F_x(i)$, а результирующая разделенная разность всегда находится в первой ячейке функций $F_x(i)$.

$$\textit{Исходные данные}$$
$$F_x[0\ldots n] - \textit{значение функции}$$
$$X[0\ldots n] - \textit{значение аргумента функции}$$
$$n - \textit{количество исходных точек}$$
$$\textit{Алгоритм вычисления}$$
$$D(x) = 1$$
$$P(x) = F_x(0)$$
$$For\ \ j = 1\ldots n$$
$$\left[\begin{array}{l} For\ \ i = 0\ldots n-j \\ \left[\, F_x(i) = \dfrac{F_x(i+1) - F_x(i)}{X(i+j) - X(i)} \right. \\ Next \\ D(x) = D(x)\cdot[x - x(j-1)] \\ P(x) = P(x) + F_x(0)\cdot D(x) \\ \\ \end{array}\right.$$
$$Next$$

Рис.1. Методика вычисления полинома в форме Ньютона

Рассмотрим, каким образом будет изменяться вектор столбец функции $F_x(i)$ при выполнении расчета по представленной методике.

$$F_x(i) = \left.\begin{array}{c} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \\ \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\ \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \\ - \end{array}\right|_{j=1} \rightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{f(x_2,x_1)-f(x_1,x_0)}{x_2-x_0} \\ \dfrac{f(x_3,x_2)-f(x_2,x_1)}{x_3-x_1} \\ - \\ - \end{array}\right|_{j=2} \rightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{f(x_3,x_2,x_1)-f(x_2,x_1,x_0)}{x_3-x_0} \\ - \\ - \\ - \end{array}\right|_{j=3}$$

В качестве примера рассмотрим следующую практическую задачу. В рамках задачи известен набор **шести значений**, которые получены методом случайной выборки для различных моментов времени. Следует отметить, что данная выборка значений описывает функция $f(x) = \cos(x)\cdot\sqrt{x}$ на интервале [0, 10]. Необходимо построить многочлен в форме Ньютона для представленного набора значений. С помощью интерполяционной формулы вычислить приближенное значение функции в точке $x = 9{,}5$, а также определить оценку погрешности результата вычислений.

Многочлен в форме Ньютона, который строится на основании **шести значений**, представляет собой полином 5 степени. Результат построения полинома в форме Ньютона показан в графическом виде.

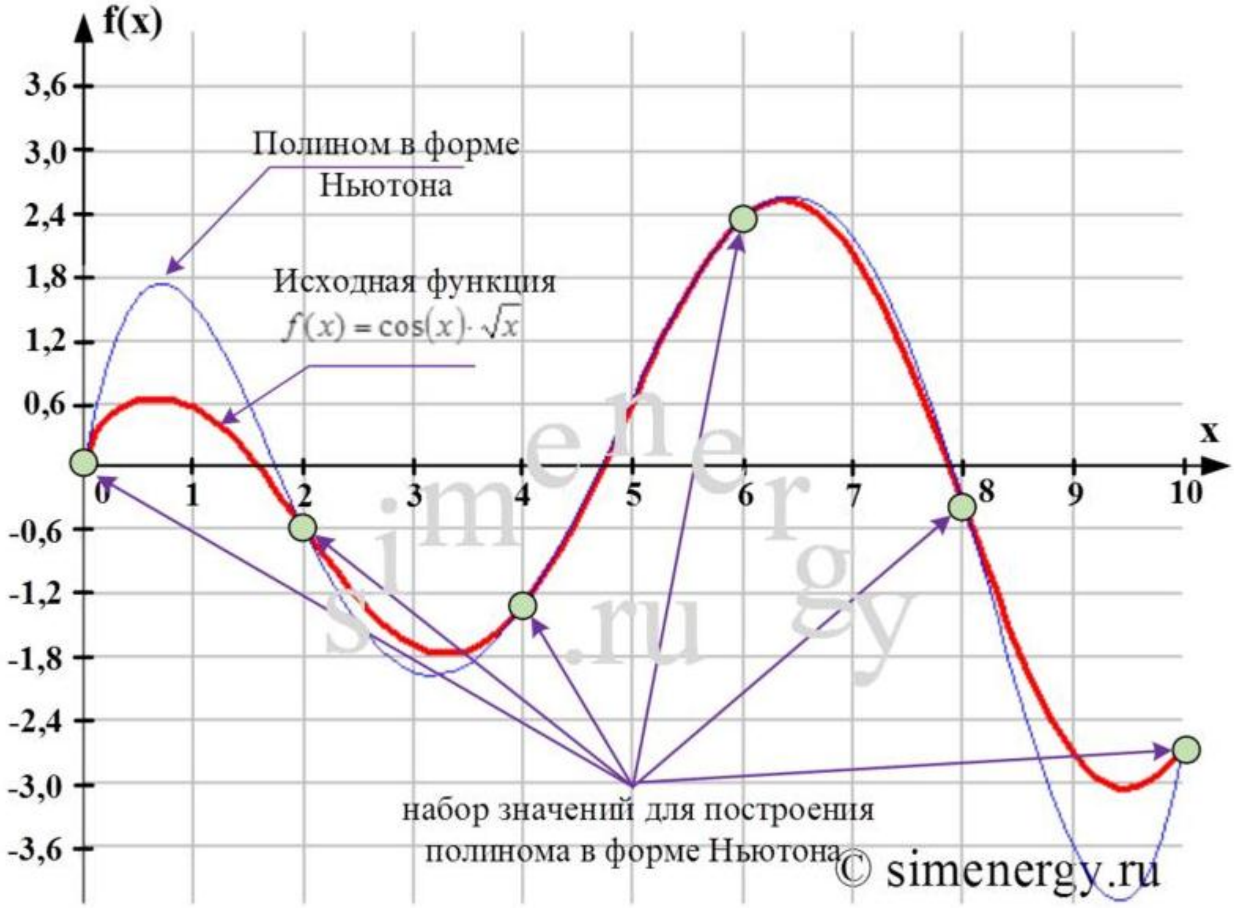

Рис.2. Исходная функция и полином в форме Ньютона, построенный по шести заданным точкам

С помощью найденного полинома можно определить значение функции в любой точке заданного интервала. Определение промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений называется «интерполяцией». В соответствии с условиями задачи полином в форме Ньютона в точке x=9,5 принимает следующее значение: L(9,5)= – 4,121. Из графика видно, что полученное значение не совпадает со значением функции f(x) на величину абсолютной погрешности интерполяционной формулы Ньютона.

Интерполяционный полином в форме Ньютона часто оказывается удобным для проведения различных теоретических исследований в области вычислительной математики. Так, например, полином в форме Ньютона используются для интерполяции, а также для численного интегрирования таблично-заданной функцией.

Таблица 4.2

Варианты заданий

При вычислении функции привести обоснование используемого варианта вычислительной схемы интерполяционного полинома Ньютона («дельта – набла» _ «вперед – назад»)

№	***x***	***y***	***Метод***	***Вычисляемая функция***
1	*0.62* *0.67* *0.74* *0.80* *0.87* *0.96* *0.99*	*0.537944* *0.511709* *0.477114* *0.449329* *0.418952* *0.382893* *0.371577*	Схема Горнера	$y = f(x)$; $x_1 = 0.846$; $x_2 = 0.752$
2	*13.00* *13.05* *13.10* *13.15* *13.20* *13.25*	*1.49936* *1.50106* *1.50292* *1.50494* *1.50711* *1.50942*	Схема Горнера	$y = f(x)$; $x_1 = 13.12$; $x_2 = 13.173$; $x_3 = 1.32$
3	*0.8902* *0.8909* *0.8919* *0.8940* *0.8944* *0.8955* *0.8965* *0.8975* *0.9010* *0.9026*	*1.23510* *1.23687* *1.23941* *1.24475* *1.24577* *1.24858* *1.25114* *1.25371* *1.26275* *1.26691*	Схема Горнера	$y = f(x)$; $x_1 = 0.8942$; $x_2 = 0.8963$; $x_3 = 0.9014$
4	*2.8* *2.9* *3.0* *3.1* *3.2* *3.3* *3.4* *3.5*	*3.92847* *4.41016* *4.93838* *5.51744* *6.15213* *6.84782* *7.61045* *8.44671*	Интерполяционный полином Ньютона	$y = f'(x)$; $x_1 = 3.02$; $x_2 = 3.31$; $x_3 = 3.46$
5	*1.03* *1.08* *1.16* *1.23* *1.26* *1.33* *1.39*	*2.80107* *2.94468* *3.18993* *3.42123* *3.52542* *3.78104* *4.01485*	Схема Горнера	$y = f(x)$; $x_1 = 1.113$; $x_2 = 1.176$; $x_3 = 1.346$
6	*0.180* *0.185*	*5.61543* *5.46693*	Интерполяционный полином Ньютона	$y = f(x)$; $x_1 = 0.1838$;

№	*x*	*y*	*Метод*	*Вычисляемая функция*
	0.190 *0.195* *0.200* *0.205*	*5.32643* *5.19304* *5.06649* *4.94619*		$x_2 = 0.1875;$ $x_3 = 0.1944$
7	*1.0* *1.1* *1.2* *1.3* *1.4* *1.5* *1.6* *1.7*	*1.0083* *1.1134* *1.3208* *1.3310* *1.4449* *1.5634* *1.6876* *1.8186*	Интерполяционный полином Ньютона	$y = f'(x);$ $x_1 = 1.14;$ $x_2 = 1.42;$ $x_3 = 1.59$
8	*0.5400* *0.5405* *0.5410* *0.5420* *0.5429* *0.5440* *0.5449* *0.5455* *0.5465* *0.5473*	*1.66825* *1.66636* *1.66448* *1.66071* *1.65734* *1.65322* *1.64987* *1.64764* *1.65393* *1.64097*	Схема Горнера	$y = f(x);$ $x_1 = 0.5415;$ $x_2 = 0.5424;$ $x_3 = 0.5445$
9	*0.6100* *0.6104* *0.6118* *0.6139* *0.6145* *0.6158* *0.6167* *0.6185* *0.6200* *0.6225*	*1.83781* *1.83686* *1.83354* *1.82860* *1.82720* *1.82416* *1.82207* *1.81791* *1.81446* *1.80876*	Схема Горнера	$y = f(x);$ $x_1 = 0.6111;$ $x_2 = 0.6126;$ $x_3 = 0.6151$
10	*0.75* *0.80* *0.85* *0.90* *0.95* *1.00* *1.05* *1.10*	*0.2803* *0.3186* *0.3582* *0.4021* *0.4472* *0.4945* *0.5438* *0.5952*	Интерполяционный полином Ньютона	$y = f'(x);$ $x_1 = 0.82;$ $x_2 = 1.03;$
11	*1.1* *1.2* *1.3* *1.4* *1.5* *1.6* *1.7* *1.8*	*0.8802* *0.9103* *0.9340* *0.9523* *0.9661* *0.9764* *0.9838* *0.9891*	Интерполяционная формула Ньютона	$y = f'(x);$ $x_1 = 1.34;$ $x_2 = 1.65$
12	*50* *55*	*0.285* *0.319*	Интерполяционная формула Ньютона	$y = f(x);$ $x_1 = 58;$

№	*x*	*y*	*Метод*	*Вычисляемая функция*
	60 *65* *70* *75* *80* *85*	*0.223* *0.042* *-0.148* *-0.273* *-0.283* *-0.178*		$x_2 = 79.1$
13	*0.11* *0.15* *0.21* *0.29* *0.35* *0.40*	*9.05421* *6.61659* *4.69170* *3.35106* *2.73951* *2.36552*	Схема Горнера	$y = f(x);$ $x_1 = 0.186;$ $x_2 = 0.235;$ $x_3 = 0.314$
14	*1.415* *1.420* *1.425* *1.430* *1.435* *1.440*	*0.888551* *0.889599* *0.890637* *0.891667* *0.892687* *0.893698*	Интерполяционная формула Ньютона	$y = f(x);$ $x_1 = 1.4179;$ $x_2 = 1.4258;$ $x_3 = 1.4315$
15	*0.02* *0.08* *0.12* *0.17* *0.23* *0.30*	*1.02316* *1.09590* *1.14725* *1.21483* *1.30120* *1.40976*	Интерполяционная формула Ньютона	$y = f(x);$ $x_1 = 0.102;$ $x_2 = 0.114;$ $x_3 = 0.154$
16	*0.210* *0.215* *0.220* *0.225* *0.230* *0.235*	*4.83170* *4.72261* *4.61855* *4.51919* *4.42422* *4.33337*	Интерполяционная формула Ньютона	$y = f(x);$ $x_1 = 0.2121;$ $x_2 = 0.2232;$ $x_3 = 0.2244$

5. Библиографический список

1. Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш, Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1988.
2. Slyusarenko A.S. To the Problem of Rounding Errors Evaluation [текст]. /International Scientific Review of Problems and Prospects of Modern Science and Education //Collection of Scientific Articles. XlV International Correspondence Scientific and Practical Conference (Boston, USA, May 24-25, 2018). - Boston. 2018, pp.12–26. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://.pdf / (дата обращения: 12. 03.20202).
3. Slusarenko A.S. A-Type Data Processing Technology: the First Real Step from Electronics Abacus to Intellectual Computer /Third International Conference On Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, May 10 - 12, 2000. Embry-Riddle Aeronautical University, Daytona Beach, Florida, USA, Pp. 36-49.
4. Алимов А.Л., Гаврилова С.В., Слюсаренко А.С.. и др. Разработка математического обеспечения для расчета характеристик цифровой измерительной системы. Отчет НИР/ЛИАП. Руководитель В.М. Кушуль. N. Гос. Рег. У26481. Л.,1989. 149с.
5. Слюсаренко А.С. Критерии факторизации данных для цифровой коррекции показаний СИТ ЛА./В кн.: Вычислительная техника в автоматизированных системах контроля и управления: Межвуз. сб. науч. тр. Пенз. Гос-го Техн. Ун-та. - Пенза: Изд-во ПГТУ. 1996. с.48-53.
6. Алимов А.Л., Щадилов А.Е. Оптимальное адаптивное сжатие цифровых сообщений по алгоритму кусочно-линейной аппроксимации. Автометрия, 1983, N 3. - с.14-18
7. Слюсаренко А.С. Методологические аспекты построения конечных моделей измерительной и числовой информации. //Научная сессия. Сб. докл. В 3ч. Ч.1. Технические науки:/ГУАП, Спб, 2019. – с.138-152.

Оглавление