Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

Кафедра машиноведения

Методические указания к изучению дисциплины «ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ»

для студентов направления подготовки
15.03.02 – «Технологические машины и оборудование»
заочной формы обучения
(профиль подготовки «Лифты и эскалаторы»)

Составитель

Н.В.Рокотов

Санкт-Петербург
2016

Введение

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам направления подготовки 15.03.02 – «Технологические машины и оборудование» заочной формы обучения в изучении дисциплины «Основы теории массового обслуживания». Методические указания содержат перечень разделов и тем для самостоятельного изучения, а также перечни заданий для контрольных работ и вопросов к зачету. Приводится список литературы, из которой можно получить необходимые сведения для изучения дисциплины, написания контрольной работы и подготовки к сдаче зачета.

В процессе изучения дисциплины студенты сначала прослушивают установочную лекцию, на которой получают основные сведения о дисциплине, список необходимой для ее изучения литературы и задания для написания контрольной работы. В следующем семестре читаются лекции и проводятся лабораторные занятия (для ускоренной формы обучения– только лабораторные занятия), по итогам которых сдается зачет. К зачету допускаются только студенты, успешно написавшие контрольную работу.

1. Цель дисциплины

Сформировать компетенции обучающегося в области разработки конвейерных линий, выбора количества параллельно работающих рабочих мест.

2. Задачи дисциплины

- Рассмотреть задачи, решаемые с помощью теории массового обслуживания.
- Раскрыть принципы составления входных и выходных потоков, алгоритмов решения задач массового обслуживания.
- Показать особенности имитационного моделированного на ЭВМ задач теории массового обслуживания.

3. Содержание дисциплины

Учебный модуль 1. Некоторые сведения из теории массового обслуживания

Тема 1. Основные понятия и определения. Потоки событий и их свойства (простейший поток; использование закона Пуассона).

Тема 2. Потоки с ограниченным воздействием (потоки Пальма, потоки Эрланга). Время обслуживания.

Тема 3. Математическое моделирование систем массового обслуживания.

Учебный модуль 2. Использование методов статистического моделирования для решения задач кинематики и динамики узлов машин, задач массового обслуживания

Тема 4. Методика реализации функций распределения дискретных и непрерывных случайных величин на ЭВМ. Реализация на ЭВМ случайных функций с заданными статистическими характеристиками

Тема 5. Суть метода статистического моделирования задач на ЭВМ и реализация данного метода в задачах массового обслуживания, кинематического анализа и синтеза рычажных механизмов, динамики механизмов (на примере приемно-намоточного механизма).

Тема 6. Построение АЧХ исследуемых объектов на ЭВМ по их математическим моделям.

4. Перечень вопросов к зачету

1. Задачи, решаемые в теории массового обслуживания.
2. Моментные характеристики случайных величин.
3. Основные распределения случайных величин (нормальное, равномерное, белый шум, Пуассона).
4. Поток событий и его свойства.
5. Простейшие стационарные потоки без последействия.
6. Потоки с последействием.
7. Нестационарный поток.
8. Поток с ограниченным последействием (поток Пальма).
9. Потоки Эрланга.
10. Время обслуживания.
11. Основы имитационного моделирования.
12. Исследование на ЭВМ систем массового обслуживания.
13. Получение на ЭВМ входных потоков.
14. Возможные состояния системы массового обслуживания.
15. Математическая модель для определения вероятностей состояний системы массового обслуживания.
16. Анализ результатов моделирования на ЭВМ системы массового обслуживания.

5. Контрольная работа

Неотъемлемой частью системы массового обслуживания является узел обслуживания, через который осуществляется взаимодействие входного и выходного потоков заявок. В случае транспортного обслуживания каналом может считаться отдельная единица транспортного средства.

Вид графической модели зависит как от числа каналов n, так и от допустимой длины очереди m. По указанным признакам различается ряд типов СМО, перечисленных в *табл. 1*.

Таблица 1. Типы систем массового обслуживания

№ п/п	Параметры СМО		Тип СМО
	n	m	
1	1	0	Одноканальная, без очереди
2	$n>1$	0	Многоканальная, без очереди
3	1	$1<m<\infty$	Одноканальная, с ограниченной очередью
4	$n>1$	$1<m<\infty$	Многоканальная, с ограниченной очередью
5	1	$m=\infty$	Одноканальная, с неограниченной очередью
6	$n>1$	$m=\infty$	Многоканальная, с неограниченной очередью

По числу обслуживающих каналов различают одноканальные и многоканальные СМО.

Находящиеся в СМО заявки могут либо ожидать обслуживания, либо находиться под обслуживанием. Часть заявок, ожидающих обслуживания, образует очередь.

В зависимости от целочисленного значения m используются следующие названия в классификации типов СМО:

1) $m=0$ – без очереди;

2) $m>0$ – с очередью.

Если число мест в очереди m является конечным, то в СМО могут происходить отказы в предоставлении обслуживания некоторым заявкам. В связи с этим СМО указанного типа называются системами с отказами. Отклоняются от обслуживания те заявки, в момент прихода которых все места в очереди случайно оказались занятыми, или, если $m=0$, все каналы оказались занятыми. Считается, что заявка, получившая отказ в обслуживании, навсегда теряется для СМО. Таким образом, пропускная способность СМО этого типа всегда меньше 100 %.

Если m не ограничено, что иногда условно записывают как $m=\infty$, то соответствующая СМО называется системой с ожиданием. В СМО данного типа пришедшая заявка при отсутствии возможности немедленного обслуживания ожидает обслуживания, какой бы длинной ни были очередь и продолжительность времени ожидания.

Основные обозначения, используемые при решении задач

Некоторые обозначения, применяемые в теории массового обслуживания, для формул:

n – число каналов в СМО;

λ – интенсивность входящего потока заявок $\Pi_{\text{вх}}$;

v – интенсивность выходящего потока заявок $\Pi_{\text{вых}}$;

μ – интенсивность потока обслуживания $\Pi_{\text{об}}$;

ρ – показатель нагрузки системы (трафик);

m – максимальное число мест в очереди, ограничивающее длину очереди заявок;

i – число источников заявок;

p_{k} – вероятность k-го состояния системы;

p_{o} – вероятность простаивания всей системы, т. е. вероятность того, что все каналы свободны;

$p_{\text{сист}}$ – вероятность принятия заявки в систему;

$p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа заявке в принятии ее в систему;

$p_{\text{об}}$ – вероятность того, что заявка будет обслужена;

A – абсолютная пропускная способность системы;

Q – относительная пропускная способность системы;

$\bar{N}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди;

$\bar{N}_{\text{об}}$ – среднее число заявок под обслуживанием;

$\bar{N}_{\text{сист}}$ – среднее число заявок в системе;

$\bar{T}_{\text{оч}}$ – среднее время ожидания заявки в очереди;

$\bar{T}_{\text{об}}$ – среднее время обслуживания заявки, относящееся только к обслуженным заявкам;

$\bar{T}_{\text{сист}}$ – среднее время пребывания заявки в системе;

$\bar{T}_{\text{ож}}$ – среднее время, ограничивающее ожидание заявки в очереди;

$\bar{K}$ – среднее число занятых каналов.

Абсолютная пропускная способность СМО A – среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени.

Относительная пропускная способность СМО Q – отношение среднего числа заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, к среднему числу поступающих за это время заявок.

Порядок выполнения контрольной работы

Контрольная работа включает две задачи для самостоятельного решения. Исходные данные для разных вариантов приведены в *табл. 2* и *3*. Номер варианта соответствует последней цифре номера зачетной книжки.

При решении задач массового обслуживания необходимо придерживаться нижеприведенной последовательности:

1) определение типа СМО по *табл. 1*;
2) выбор формул в соответствии с типом СМО;
3) решение задачи;
4) формулирование выводов по задаче.

Пример решения задачи теории массового обслуживания

На сортировочную станцию прибывают составы с интенсивностью 0,9 состава в час. Среднее время обслуживания одного состава 0,7 часа. Определить показатели эффективности работы сортировочной станции: интенсивность потока обслуживаний, среднее число заявок в очереди, интенсивность нагрузки канала (трафик), вероятность, что канал свободен, вероятность, что канал занят, среднее число заявок в системе, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее время пребывания заявки в системе.

Решение. Сортировочную станцию можно рассматривать как одноканальную СМО с неограниченным ожиданием (т. е. с очередью). Таким образом, параметры системы: число каналов $n = 1$, число мест в очереди $m = \infty$.

Интенсивность входящего потока $\lambda = 0,9$ состава в час, среднее время обслуживания одной заявки $\bar{T}_{\text{об}} = 0,7$ ч, интенсивность потока обслуживаний

$$\bar{T}_{\text{об}} = \frac{1}{\mu}, \tag{1}$$

$\mu = 1/0,7 = 1,429$. Таким образом, нагрузка системы

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{T}_{\text{об}}, \tag{2}$$

$\rho = 0,9/1,429 = 0,63$, или $\rho = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63$.

Среднее число составов, ожидающих обслуживания

$$\bar{N}_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \tag{3}$$

$\bar{N}_{\text{оч}} = 0,63^2/(1-0,63) = 1,073.$

Так как $\rho < 1$, то очередь составов на сортировку не может бесконечно возрастать, значит, предельные вероятности существуют. Вероятность того, что станция свободна p_0, рассчитывается по следующей формуле:

$$p_k = \rho^k (1-\rho);\ k = 0,1,2... \tag{4}$$

$$p_0 = 1-\rho,$$

$p_0 = 1-0,63 = 0,37$, тогда вероятность того, что станция занята $p_{зан} = 1-0,37 = 0,63$.

Среднее число заявок (составов) в системе (на сортировочной станции) рассчитывается по следующей формуле:

$$\bar{N}_{сист} = \bar{N}_{оч} + \bar{N}_{об} = \frac{\rho}{1-\rho}, \tag{5}$$

где $\bar{N}_{об} = \rho$; $\bar{N}_{сист} = 0,63/(1-0,63) = 1,703$ или $\bar{N}_{сист} = 0,63 + 1,073 = 1,703$.

Среднее время пребывания заявки (состава) в очереди (в ожидании сортировки)

$$\bar{T}_{оч} = \frac{\bar{N}_{оч}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}, \tag{6}$$

$\bar{T}_{оч} = 1,073/0,63 = 0,63^2/(0,9(1-0,63)) = 0,63/(1,429(1-0,63)) = 1,19$.

Среднее время пребывания заявки (состава) в системе (на сортировочной горке под обслуживанием в ожидании обслуживания)

$$\bar{T}_{сист} = \bar{T}_{оч} + \bar{T}_{об} = \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{N}_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \tag{7}$$

$\bar{T}_{сист} = 0,7 + 1,19 = 0,63/(0,9(1-0,63)) = 1,703/0,9 = 1/(1,429(1-0,63)) = 1,89$.

Вывод. Очевидно, что скорость обслуживания составов на сортировочной станции невысокая, так как время на ожидание обслуживания (1,19 ч) превышает время на обслуживание (0,7 ч). Для повышения эффективности работы сортировочной горки необходимо уменьшить время обслуживания одного состава или увеличить число сортировочных станций.

Задачи для самостоятельного решения студентами

Задача 1. Интенсивность потока пассажиров в кассах железнодорожного вокзала составляет $\lambda = 1,35$ чел. в мин. Средняя продолжительность обслуживания кассиром одного пассажира $\bar{T}_{об} = 2$ мин. Определить минимальное количество кассиров $n = n_{min}$, при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{\min}$ (вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели, вероятность очереди, среднее число заявок находящихся в очереди, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее число заявок, находящихся в системе, среднее время пребывания заявки в системе, доля занятых обслуживанием кассиров, абсолютная пропускную способность) (*табл. 2*).

Таблица 2. Исходные данные для решения задачи 1

Показатель	Вариант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ	1,37	1,62	1,42	1,83	1,75	1,55	1,4	1,65	1,7	1,3
$\bar{T}_{об}$	2,3	2	1	2,5	1,5	1,7	1,2	2,6	1	2,5

Указание. Прежде чем использовать формулы предельных вероятностей, необходимо быть уверенным в их существовании, ведь в случае, когда время $t \to \infty$, очередь может неограниченно возрастать. Доказано, что если $\rho < 1$, т. е. среднее число приходящих заявок меньше среднего числа обслуженных заявок (в единицу времени), то предельные вероятности существуют. Если $\rho \geq 1$, очередь растет до бесконечности. Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\rho / n < 1$, т. е. при $n > \rho$.

Задача 2. На грузовой станции имеется два выгрузочных фронта. Интенсивность подхода составов под выгрузку составляет 0,4 состава в сутки. Среднее время разгрузки одного состава – 2 суток. Приходящий поезд отправляется на другую станцию, если в очереди на разгрузку стоят более трёх составов. Оценить эффективность работы выгрузочных фронтов грузовой станции: вероятность, что выгрузочные фронты свободны, вероятность, что состав останется без разгрузки, относительную пропускную способность, абсолютную пропускную способность, среднее число поездов, ожидающих разгрузки, среднее число заявок в системе, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее время пребывания заявки в системе (*табл. 3*).

Таблица 3. Исходные данные для решения задачи 2

Показатель	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ	0,5	0,9	0,5	0,3	0,6	0,8	0,9	0,4	0,6	0,5
$\bar{T}_{об}$	2	1	1,5	1,4	1,3	1,2	1,5	2	1,9	1,4

6. Учебная литература

а) основная учебная литература

1. Поршнев, С. В. MATLAB 7. Основы работы и программирования: учебник / С. В. Поршнев. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006. – 320 с.
2. Кочетков, Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. – М.: Форум, 2011. – 240 с.
3. Ивченко, Г.И. Теория массового обслуживания / Г.И.Ивченко, В.А.Каштанов, И.Н.Коваленко. – Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 304 с.
4. Климов Г.П. Теория массового обслуживания [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Климов Г.П.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011.— 312 с
5. Карташевский В.Г. Основы теории массового обслуживания [Электронный ресурс]: учебник для вузов/ Карташевский В.Г.- Электрон. текстовые данные.— М.: Горячая линия - Телеком, 2013.- 130 с

б) дополнительная литература и другие информационные источники

6. Дьяконов, В. П. MATLAB: учебный курс / В. П. Дьяконов. – СПб: Питер, 2001. – 560 с.
7. Кирсанов, А. А. Теория массового обслуживания / А. А. Кирсанов. – М.: Высш. школа, 1982. – 156 с.
8. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М.: Наука, 1964. – 576 с.
9. Хемминг, Р. В. Численные методы (для научных работников и инженеров) / Р. В. Хемминг. – М.: Наука, 1968. – 400 с.
10. Вентцель, Е. С. Имитационное моделирование / Е. С. Вентцель. – М.: Наука, 1968. – 152 с.
11. Марковец, А. В. Лабораторный практикум № 141 по курсу «Вычислительные методы для инженеров». Ч. 1 / А. В. Марковец, И. М. Беспалова. – СПб.: СПГУТД, 2007. – 84 с.
12. Шишмарев, В. Ю. Надежность технических систем / В. Ю. Шишмарев. – М.: Академия, 2011. – 304 с.
13. Кудрявцев Е.М. GPSS World. Основы имитационного моделирования различных систем [Электронный ресурс]/ Кудрявцев Е.М.— Электрон. текстовые данные.— М.: ДМК Пресс, 2007.— 320 с.
14. Основы теории массового обслуживания: метод. указания / сост. Н. В. Рокотов, Л. С. Мазин. – СПб.: ФГБОУ ВО «СПбГУПТД», 2015. – 30 с