Задача 3. Реакции опор

Найти реакции связей (опор), наложенных на основное тело конструкции – балку или сварной стержень. Исходные данные приведены в таблице 1. Схемы конструкций приведены на рис. 10 (размеры, м).

Таблица 1 − Варианты заданий

Номер варианта исходных данных	Заданные величины				
	G, кН	P, кН	M, кН·м	q, кН/м	α, град
0	10	5	20	1	30
1	12	4	10	2	15
2	8	6	5	4	45
3	14	3	8	3	60
4	16	8	12	2	30
5	6	7	4	3	60
6	10	6	8	0,5	15
7	6	12	15	4	45
8	4	8	9	1,5	30
9	20	10	6	5	60

Теоретические сведения

Тела, ограничивающие перемещения данного тела, являются по отношению к нему связями. В точках контакта тела со связью возникают силы их взаимодействия. Силы, которыми связи действуют на данное тело, называются реакциями связей. При решении задач, кроме активных сил, действующих на данное тело, необходимо учитывать и эти контактные силы (реакции связей). Реакции связей определяют, решая уравнения равновесия, составляемые для отдельных тел или конструкций. Направления реакций связей во многих случаях могут и должны быть определены предварительно (до составления уравнений равновесия) из рассмотрения свойств связей. В вариантах предлагаемых заданий используются виды связей (опор), которые приведены ниже.

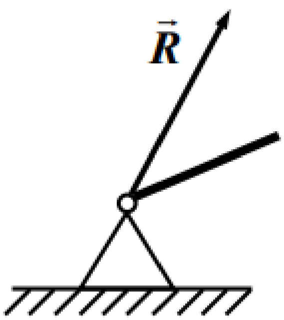

Рис. 1

Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора

Эта опора изображается, как показано на рисунке 1. Она препятствует любому поступательному движению (тела) балки, но дает ему возможность свободно поворачиваться вокруг оси шарнира. Реакция $\vec{R}$ цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.

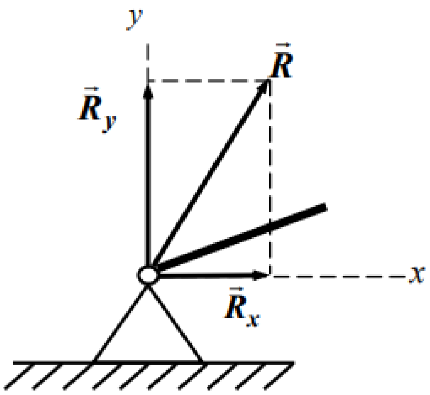

Рис. 2

При решении задач реакция $\vec{R}$ заменяется двумя взаимно перпендикулярными составляющими, например, $\vec{R}_x$ и $\vec{R}_y$ (рис. 2). Определив в ходе решения задачи составляющие $\vec{R}_x$ и $\vec{R}_y$, находят модуль и направление реакции $\vec{R}$. Если знак силы окажется отрицательным, то это означает, что направление силы противоположно тому, которое было предварительно указано на рисунке.

Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора (рис. 3), нижняя обойма которой поставлена на катки, не препятствует перемещению балки параллельно опорной плоскости, если не учитывать сил трения. Линию действия реакции такой опоры следует считать проходящей через центр шарнира перпендикулярно к опорной плоскости. Таким образом, не известен только модуль этой реакции.

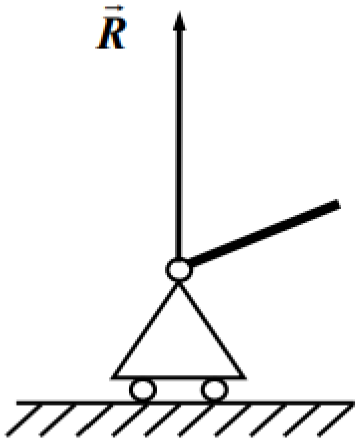

Рис. 3

Если на твердое тело наложена *гибкая связь* (нить, канат, трос, цепь и др.), то реакция связи, приложенная к телу в точке его крепления к связи, направлена вдоль связи от тела, как показано на рисунке 4.

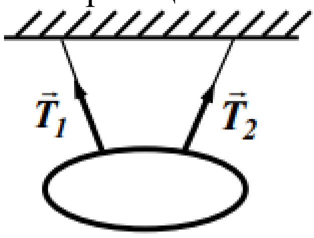

Рис. 4

Опорой конструкции может служить *невесомый стержень с двумя концевыми шарнирами* (рис. 5). Невесомым называют стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Реакция $\vec{R}$ прямолинейного стержня направлена вдоль оси стержня.

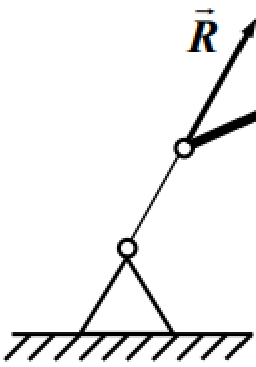

Рис. 5

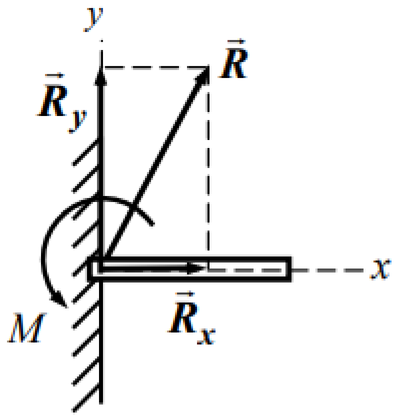

Рис. 6

В случае *заделки* одного тела в другое (рис. 6) реакцию опоры (стены) следует представить, как состоящую из силы $\vec{R}$, разложенной на составляющие $\vec{R}_x$ и $\vec{R}_y$, а также из момента M.

Во всех вариантах задания присутствует прямолинейный участок конструкции, находящийся под действием распределенной нагрузки постоянной интенсивности q (рис. 7). Такую нагрузку следует заменить ее равнодействующей $\vec{Q}$, направленной перпендикулярно нагруженному отрезку (длиной l) и приложенной в его середине. Модуль равнодействующей определяется выражением $Q = ql$.

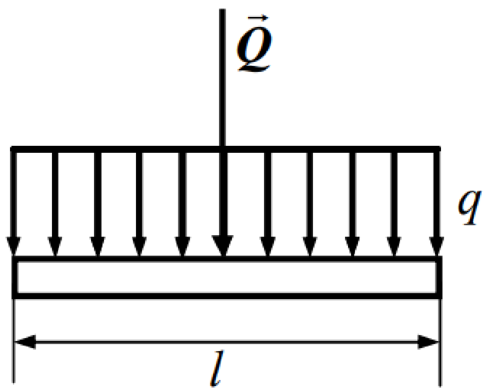

Рис. 7

Среди всевозможных уравнений равновесия тела под действием произвольной системы сил не может быть более трех независимых переменных. При составлении уравнений равновесия в первой форме требуют, чтобы суммы проекций всех сил на произвольно выбранные оси декартовых координат x, y и сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки O равнялись нулю, т. е. записывают уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = 0. \qquad (1)$$

При составлении уравнений равновесия можно ограничиться составлением одного уравнения равновесия в проекциях, например, на ось x, и добавить два уравнения моментов относительно двух произвольных точек A и B, взятых так, чтобы ось x не была перпендикулярна прямой AB:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,\ \sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0,\ \sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0. \qquad (2)$$

Так же можно составить три уравнения моментов относительно произвольно выбранных точек A, B и C, не лежащих на одной прямой:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0,\ \sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0,\ \sum_{i=1}^{n} M_C\left(\vec{F}_i\right) = 0. \qquad (3)$$

Задание рекомендуется выполнять в следующем порядке:

[1] выделить и изобразить на рисунке некоторое тело (конструкцию), из уравнений равновесия которого можно определить искомые реакции связей (опор);

[2] изобразить на рисунке задаваемые внешние силы, приложенные к этому телу (конструкции); при этом следует заменить распределенные нагрузки их равнодействующими;

[3] изобразить на рисунке реакции связей, наложенных на выбранное тело (конструкцию);

[4] выбрать и указать на рисунке направления осей декартовых координат и точку (или точки), относительно которой будет составлено уравнение моментов;

[5] составить уравнения равновесия тела;

[6] решая уравнения равновесия, определить неизвестные величины.

Уравнения равновесия можно составлять в любой из указанных форм (уравнения (1), (2) или (3)). Следует получить такие уравнения равновесия, в каждое из которых входила бы только одна неизвестная величина. В этом случае вместо совместного решения системы уравнений можно каждую из неизвестных величин непосредственно определить из соответствующего уравнения. Для этого оси координат целесообразно направить так, чтобы некоторые неизвестные силы оказались перпендикулярными к этим осям. Тогда величины этих неизвестных сил в соответствующее уравнение проекций не войдут. Если центр моментов, то есть точку, относительно которой должно быть составлено уравнение моментов, выбрать в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил, то из соответствующего уравнения моментов непосредственно определяется величина третьей неизвестной силы. Если, однако, при этом центр моментов оказывается расположенным так, что вычисление плеча искомой силы представляет значительные трудности, то лучше составить такое уравнение моментов (относительно другого центра), в которое войдут величины двух неизвестных сил, а затем совместно решить полученную систему уравнений.

Пример выполнения задания.

Схема 4, вариант задания 3

Найти реакции связей (опор), наложенных на основное тело конструкции – балку или сварной стержень. Схема конструкции показана на рис. 8 (размеры, м).

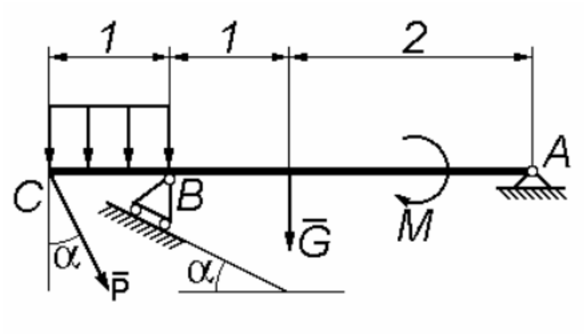

Рис. 8

Дано:

G= 14 кН,

P = 4 кН,

M = 7 кН·м,

q = 3 кН/м,

α = 60°

Найти: Реакции опор балки.

Решение

На балку действуют (рис. 9) следующие активные силы:

сила тяжести $\vec{G}$, приложенная в ее середине,

сила $\vec{P}$, направленная под углом α = 60° к вертикали,

равнодействующая $\vec{Q}$ распределенной нагрузки, равная $Q = q\cdot|CB| = 3$ кН, приложенная в середине участка CB и направленная вертикально вниз,

пара сил с моментом M.

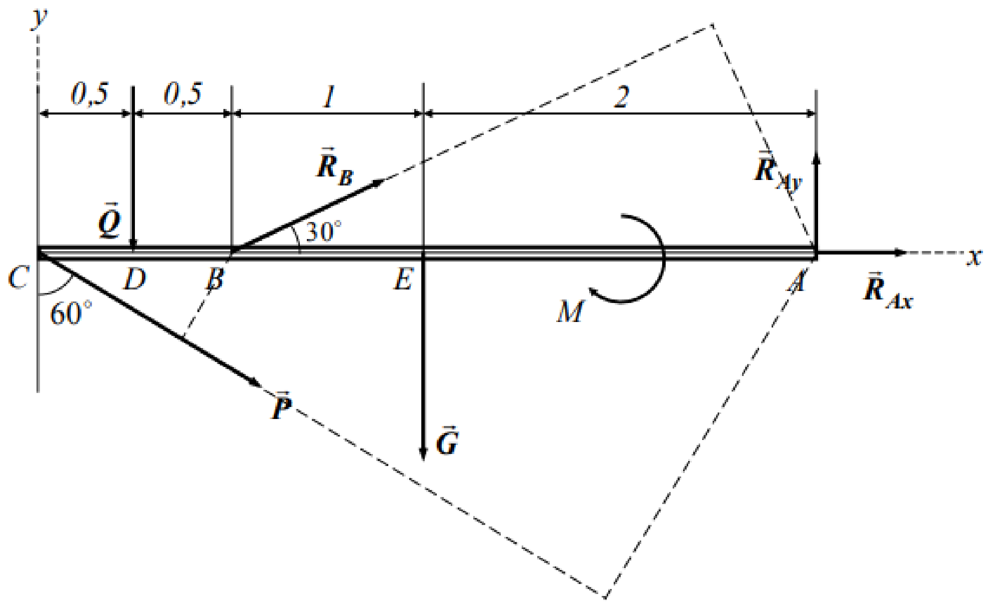

Рис. 9

Реакцию $\vec{R}_B$ опоры B направляем перпендикулярно опорной плоскости, неизвестную по направлению реакцию $\vec{R}_A$ представляем двумя взаимно перпендикулярными составляющими $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$. Уравнение равновесия балки в проекциях на ось x имеет вид

$$Psin60^{o} + R_B cos30^{o} + R_{Ax} = 0. \qquad (4)$$

Уравнение моментов относительно центра A имеет вид

$$P|CA|\sin30^{o} + Q|DA| - R_B\,|BA|\,\sin30^{o} + G|EA| - M = 0. \qquad (5)$$

Уравнение моментов относительно центра В имеет вид

$$P|CB|\sin30^{o} + Q|DB| - G|BE| - M + R_{Ay}|BA| = 0.$$

Решая эту систему уравнений равновесия, определим неизвестные величины. Уравнение моментов (5) позволяет вычислить реакцию R_{Ay}:

$$R_{Ay} = \frac{-P|CB|\sin30^{o} - Q|DB| + G|BE| + M}{|BA|} \approx 5{,}83 \text{ кН}.$$

Из уравнения моментов (1.6) находим реакцию R_B:

$$R_B = \frac{P|CA|\sin30^{o} + Q|DA| + G|EA| - M}{|BA|\sin30^{o}} \approx 26{,}33 \text{ кН}.$$

Подставив полученное значение R_B в уравнение (4), определяем неизвестную реакцию R_{Ax}:

$$R_{Ax} = -\,\mathrm{P}\sin60^{o} - R_B\cos30^{o} \approx -\,26{,}27 \text{ кН}.$$

Для проверки вычислений составим уравнение равновесия балки в проекциях на ось y, направленную, как показано на рисунке 9. Справедливость проведенных расчетов подтверждается равенством

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = -P\cos60^{o} - Q + R_B\sin30^{o} - G + R_{Ay} \approx 0.$$

Модуль полной реакции R_A определяется следующим образом

$$R_A = \sqrt{\left(R_{Ax}\right)^2 + \left(R_{Ay}\right)^2} \approx 26{,}91 \text{ кН}.$$

<u>Ответ:</u>

$R_B \approx 26{,}27$ кН

$R_{Ax} \approx -26{,}27$ кН

$R_{Ay} \approx 5{,}83$ кН

$R_A \approx 26{,}91$кН

Варианты конструкций

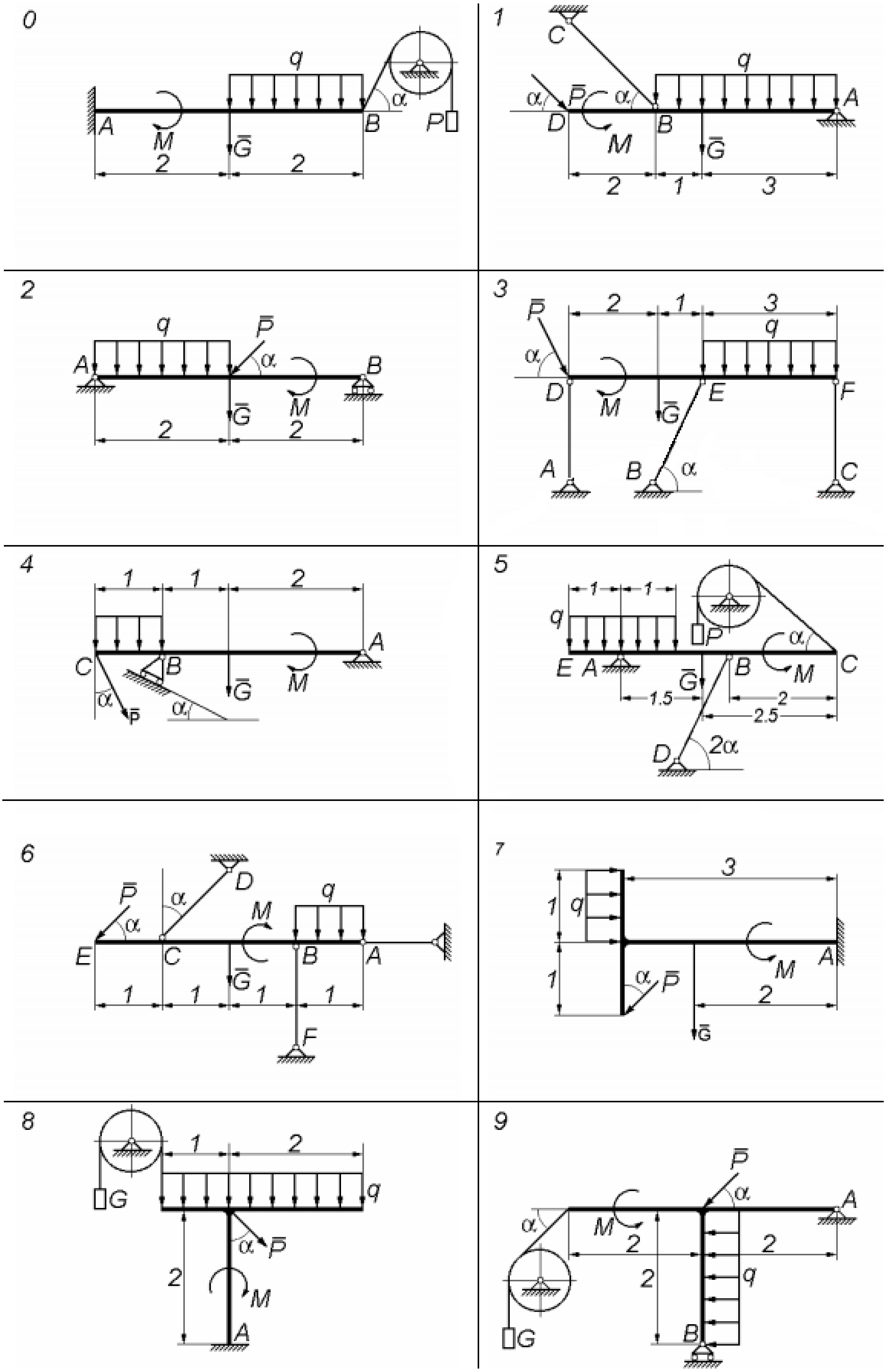

Рис. 10