Министерство образования и науки Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания 7 и 8 для студентов заочной формы обучения

Направления:

15.03.02 (151000.62) Технологические машины и оборудование

15.03.04 (220700.62) Автоматизация технологических процессов и производств

Составитель
Г. П. Мещерякова

Санкт-Петербург

2016

РЕКОМЕНДОВАНО
На заседании кафедры
31.08.15

УТВЕРЖДЕНО

Контрольные работы должны быть выполнены в отдельной тетради с соблюдением правил, обязательных для выполнения всех работ по математике и представлены на проверку в сроки, установленные учебным графиком.

Если работа присылается on line, то она должна быть **отсканирована** с **рукописного варианта** с сохранением нумерации страниц. **Не допускается выполнение работы в текстовых и формульных редакторах. Такие работы автоматически не будут проверяться.**

Если все задания выполнены без ошибок, то студент допускается к защите контрольной работы, которая происходит во время экзаменационной сессии перед экзаменом по математике.

Если в работе есть ошибки, то их нужно исправить в **этой же тетради в конце** и прислать на повторную проверку. На сессию необходимо привезти рукописный вариант, в котором сделаны исправления.

Прежде чем приступать к выполнению контрольных работ, студенту необходимо изучить соответствующий теоретический материал, который имеется на сайте..

Если в процессе изучения теорем или при решении задач возникают вопросы, то можно обратиться к преподавателям кафедры математики для получения консультации.

Во время экзаменационной сессии для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия, которые носят обзорный характер.

При выполнении контрольной работы обратите внимание на оформление:

НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ ДОЛЖНЫ БЫТЬ УКАЗАНЫ:

Фамилия, имя, отчество.

Номер студенческого билета (или зачетной книжки).

Название дисциплины и номер контрольной работы.

Номер варианта.

Номер варианта, который должен выполнять студент, соответствует последней цифре номера студенческого билета (или зачетной книжки).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т.2.- М.: Наука, 2007.-544 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2008. – 321 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2007. – 251 с.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7.

1. Теория соединений

Теория соединений или комбинаторика рассматривает различные наборы элементов, выбранных из некоторого исходного множества этих элементов. Эти наборы составляются по определенным правилам и называются **соединениями**. Природа элементов, входящих во множество может быть любой, например, какие-то предметы, или люди, или числа и т.п. Нас, прежде всего, будет интересовать вопрос: сколько различных соединений можно составить? Рассмотрим самое простое соединение. Пусть исходное множество элементов разбито на k групп (наборов), содержащих n_1 , n_2 , ... , n_k элементов, т.е. первый набор n_1 элементов, второй n_2 элементов и т.д. Чтобы составить соединение из каждого набора следует взять один элемент. Сколько различных соединений можно составить?

Очевидно, что каждый элемент первого набора может встретиться в соединении с каждым элементом второго набора и таких пар будет n_1n_2. Каждая такая пара может встретиться с каждым элементом третьего набора, т.е. разных троек уже будет $n_1n_2n_3$. Если обозначить за N число всех возможных соединений по одному элементу из каждого из k наборов, то получим

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... n_k . \qquad (1)$$

Пример 1. В некотором городе телефонные номера состоят из буквы и пяти цифр. Буква может быть только А, В или Г. Первая цифра бывает 2, 3 , 4 или 5, а остальные цифры могут быть любые. Сколько телефонов может быть установлено в этом городе?

Решение. Первый набор состоит из трех букв, т.е. $n_1 = 3$, второй - из четырех цифр, $n_2 = 4$. Следующие четыре набора содержат по 10 цифр, т.е. $n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 10$. Тогда всего различных номеров может быть $N = 3\times4\times10\times10\times10\times10 = 120\ 000$.

В частном случае, если все k наборов содержат одинаковое количество элементов, скажем по n, то

$$N = n^k \qquad (2)$$

Пример 2. Бросают две игральных кости. Сколько различных пар чисел может выпасть? (Нужно учесть, что 1 на первой кости и 2 на второй или 2 на первой и 1 на второй - это разные пары, т.е. разные соединения).

Решение. Так как у игральной кости, имеющей форму кубика, шесть граней, то n = 6, поэтому $N = 6^2 = 36$.

Отметим, что такие соединения могут получаться и в том случае, когда имеется один набор из n элементов, из которого берут элемент, записывают его характеристику и возвращают в набор, после чего выбирают следующий элемент. В этом случае один и тот же элемент как бы выбирается из нового, но такого же, как и предыдущий, набора.

Теперь представим себе, что взятый один раз элемент обратно в набор не возвращается. Тогда второй элемент выбирается уже из набора, содержащего $n - 1$ элемент, третий из набора, содержащего $n - 2$ элемента и т.д. Это уже новый вид соединения, называемый *размещением из n элементов по k элементов*. Число размещений обозначается буквой А с двумя индексами

$N = A_n^k$ и читается " *а из эн по ка*"

Каждое размещение отличается от другого или входящими элементами или их порядком. Например, из трех элементов *a, b, c* можно составить 6 размещений по 2 элемента *ab, ac, bc, ba, ca, cb*

Число различных размещений определяется формулой

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)\ , \qquad (3)$$

где $\mathrm{n}! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots\ldots \cdot \mathrm{n},\ 0! = 1,\ 1! = 1$ (n! Читается как "эн факториал").

Пример 3. В группе из 20 человек проводиться собрание. Сколькими способами можно избрать председателя, его заместителя и секретаря?

Решение. Очевидно, что важно не только кого изберут, но и на какие должности. Поэтому одно соединение от другого может отличаться или составом или порядком, т.е. это размещения, поэтому (3)

$$A_{20}^3 = 20\times 19\times 18 = 6840$$

Если составлять размещения из всех n элементов, то они будут отличаться только порядком. Такие соединения называются *перестановками из n элементов.* Число перестановок обозначается P_n ("пэ из эн") и, очевидно получается из A_n^k при $k = n$, т.е.

$$P_n = n\cdot(n - 1)\cdot(n - 2)\ \ldots\ (n - n + 1) = 1\times 2\times 3\times\ldots\times n! = n! \qquad (4)$$

Пример 4. На трех карточках написаны цифры 1, 2, 3. Сколько различных трехзначных чисел можно составить, переставляя местами эти карточки?

Решение. Очевидно, это число перестановок из трех, т. е. (4)

$P_3 = 3! = 1\times2\times3 = 6.$

Теперь рассмотрим соединения, которые называются *сочетаниями из n элементов по k элементов.* Это такие соединения, содержащие k элементов, взятых из данного множества из n элементов, которые отличаются только самими элементами (порядок роли не играет). Например, есть три элемента a, b, c , т. е. $n = 3$, выбираем по два элемента, т. е. $k = 2$ тогда можно составить три сочетания ab, ac, bc. (ab и ba - это разные размещения, но одно и то же сочетание). Число сочетаний обозначается буквой С. Очевидно, что для того чтобы составить все размещения нужно составить все возможные сочетания и в каждом произвести все возможные перестановки:

$$A_n^k = C_n^k P_k ,$$

где C_n^k - число сочетаний из n элементов по k элементов (“цэ из эн по ка”). Тогда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot k} , \tag{5}$$

$$C_n^o = C_n^n = 1,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n,\ C_n^k = C_n^{n-k} .$$

Пример 5. На том же собрании 20 человек, где избирали председателя, заместителя и секретаря, нужно выбрать делегацию на конференцию в составе трех человек.

Решение. В этом случае порядок роли не играет, поэтому это не размещения, а сочетания и мы имеем (5)

$$C_{20}^3 = \frac{20\cdot19\cdot18}{1\cdot2\cdot3} = 1140 .$$

Приведенные формулы числа размещений и числа сочетаний удобны для решения задач с конкретными числами n и k. Если задача решается в общем виде, то лучше пользоваться более компактными записями через факториалы.

2. Событие и вероятность

[Гмурман. Введение, ч.1, гл.1, § 1 – 6].

Пример 1. В ящике 5 белых и 4 черных шара. Наудачу вынимают три. Какова вероятность, что среди них два белых и один черный шар?

Решение. Число всех возможных исходов - это число вариантов выбрать три шара из девяти шаров. Число наборов определяется числом сочетаний, так как порядок шаров в наборе не важен, следовательно, n это число сочетаний из 9 по 3 (5). Поэтому

$$n = C_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84.$$

Но нам нужны только то наборы, которые содержат два белых и один черный шар. Число вариантов выбора 2 белых из 4 белых - это число сочетаний из 4 по 2, то есть (5)

$$C_4^2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6,$$

и так как каждая пара может выпасть с любым из 4 черных шаров, то число благоприятных исходов равно произведению (1)

$m = 6 \cdot 4 = 24.$

Тогда вероятность события “из ящика взяли 2 белых и 1 черный шар”

$$P = \frac{m}{n} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}.$$

Пример 2. На 10 карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Наудачу выбирают три карточки и раскладывают их в порядке появления. Какова вероятность, что получится число 123?

Решение. Поскольку в этом примере важен порядок цифр, то число всех возможных исходов (4)

$$n = A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504.$$

Благоприятный исход только один, $m = 1$, поэтому искомая вероятность

$$p = \frac{m}{n} = \frac{1}{504}.$$

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей и следствия из них

[Гмурман. Ч.1, гл.2 - 4 полностью, гл.5, § 1].

Пример 1. Два охотника стреляют по одной мишени и имеют вероятности попадания 0,7 и 0,8 соответственно. Оба сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что

а) в мишени ровно две пробоины,

б) в мишени хотя бы одна пробоина,

в) в мишени ровно одна пробоина?

Решение. Введем обозначения: событие A - попал первый охотник, $\overline{A}$ - первый охотник промахнулся, B - попал второй охотник, $\overline{B}$ - второй охотник промахнулся, C - в мишени ровно две пробоины, D - в мишени хотя бы одна пробоина, Е - в мишени ровно одна пробоина.

Событие С состоит в том, что произошло и А, и В одновременно, то есть это произведение событий АВ, С = АВ. Событие D состоит в том, что произошло хотя бы одно из событий А или В, или оба вместе, то есть сумма событий А + В , D = А + В, и, наконец, событие Е состоит в том, что А произошло а В нет или В произошло а А нет, Е = А$\overline{B}$ + $\overline{A}$В. Учитывая, что А и В независимые события (вероятность попадания одного из охотников не зависит от того попал другой или нет)

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}3$ и $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}2$.

Следовательно

$P(C) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$,

$P(D) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}94$,

$P(E) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}38$.

Пример 2. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%, а вторая – 35 %, третья – 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?

в) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой машиной?

Решение. а) Обозначим за H_1 событие – болт сделан на первой машине, за H_2 событие – болт сделан на второй машине, за H_3 событие – болт сделан на третьей машине. Тогда: $P(H_1) = 0{,}25$ – вероятность того, что болт сделан на первой машине. Соответственно $P(H_2) = 0{,}35$ и $P(H_3) = 0{,}40$.

Пусть событие А – болт бракован, тогда $P(A|H_1) = 0{,}05$ – вероятность, что брак выпущен первой машиной (проценты разделить на сто), соответственно $P(A|H_2) = 0{,}04$, а $P(A|H_3) = 0{,}02$.

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = 0{,}25 \times 0{,}05 + 0{,}35 \times 0{,}04 + 0{,}40 \times 0{,}02 = 0{,}0125 + 0{,}014 + 0{,}008 = 0{,}0345$.

Б) $P(H_1|A)$ – вероятность того, что дефектный болт произведен первой машиной

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}0125}{0{,}0345} = 0{,}3624 .$$

Пример 3. Что вероятнее выиграть у равносильного противника: а) три партии из четырех или пять из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми, если ничьих не бывает?

Решение. Для равносильных противников вероятность выигрыша (проигрыша) одинакова, то есть $p = q = \frac{1}{2}$.

а) Вероятность выигрыша *m* партий из *n* $P_n(m)$ задается формулой Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (6)$$

В первом случае $n = 4$, $m = 3$. Следовательно, вероятность выиграть три партии из четырех

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Когда $n = 8$, а $m = 5$, то

$$P_8(5) = C_8^5 p^5 q^{8-5} = \frac{8!}{5!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}.$$

Следовательно, $P_4(3) > P_8(5)$.

б) Вероятность выиграть не менее трех партий есть сумма вероятностей выиграть три или четыре партии из четырех, так как эти события несовместны, то

$$P_1 = P_4(3) + P_4(4) = \frac{1}{4} + C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4} + \frac{4!}{4!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

(Напомним, что 0!=1).

Аналогично, вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми

$$P_2 = P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = \frac{7}{32} + C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{1}{2} + + C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 =$$

$$= \frac{7}{32} + \left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{8 \cdot 7}{2} + 8 + 1\right) = \frac{93}{256}.$$

$P_2 > P_1$. Следовательно, выиграть не менее пяти партий из восьми вероятнее.

4. Дискретные случайные величины

Литература: Гмурман. Часть вторая. Главы 6 - 8.

Дискретная случайная величина - это переменная величина, которая принимает дискретные (отделенные друг от друга) значения “случайным образом”, т.е. принятие каждого из допустимых значений является случайным событием.

Пусть дискретная случайная величина X принимает возможные значения x_1, x_2, x_3,... В результате опыта случайная величина принимает одно и только одно из этих значений, другими словами произойдет одно из несовместных событий, образующих полную группу: $X = x_1, X = x_2, ..., X = x_n$. Обозначим вероятность этих событий буквами *p* с соответствующими индексами: $p_1, p_2, ..., p_n$. Так как указанные события образуют полную группу, то сумма вероятностей появления возможных значений случайной величины равна 1, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (7)$$

Обычно закон распределения дискретной случайной величины X задается в виде таблицы, где в первой строчке стоят возможные значения случайной величины (x_1, x_2, x_3,...), а во второй - вероятности с которыми принимаются эти значения (p_1, p_2, p_3,...).

X	x_1	x_2	x_3	...	$x_к$	...
P	p_1	p_2	p_3	...	$p_к$	...

С помощью таблицы распределения можно найти вероятность попадания дискретной случайной величины в заданный интервал.

Существенные особенности случайных величин можно описать некоторыми числовыми параметрами, которые называются *числовыми характеристиками*, важнейшими из которых являются *математическое ожидание, дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение.*

Числовые характеристики случайной величины имеют вполне определенный смысл. Так, например, математическое ожидание *M*(X) - это теоретическое среднее значение случайной величины, дисперсия *D*(X) - мера рассеяния (разброса, колебаний, вариации) значений случайной величины около среднего значения. Если случайная величина имеет размерность, то математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ ее имеют ту же размерность, а размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение находятся по формулам:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_n p_n$$

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 \qquad (8)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 1. Написать закон распределения числа выпадений герба при 2-х подбрасываниях монеты. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа выпадений герба *X*.

Решение. При бросании одной монеты герб и не герб (реш**ка)** выпадают с вероятностями $\frac{1}{2}$**.** При двух бросаниях монеты могут быть следующие результаты: два раза герб не выпал (выпали две решки), $X = 0$, один раз выпал герб – два варианта: герб решка и решка – герб, $X = 1$ и два раза выпал герб, $X = 2$. Найдем соответствующие вероятности

$X = 0$, $p_1 = (1/2)^2$ - вероятность, что оба раза герб не выпадет,

$X = 1$, $p_2 = (1/2)^2 + (1/2)^2 = 1/2$ - вероятность, что один раз выпадет герб,

$X = 2$, $p_3 = (1/2)^2$ - вероятность, что оба раза выпадет герб.

Запишем закон распределения:

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа выпадений герба (8):

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1,$$

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} - 1^2 = \frac{1}{2},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Числовые характеристики имеют вполне определенный смысл. Так, например, математическое ожидание - это теоретическое среднее значение случайной величины, дисперсия - мера рассеяния (разброса, колебаний, вариации) значений случайной величины около среднего значения. Если случайная величина имеет размерность, то математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение ее имеют ту же размерность, а размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины.

Пример 2. Написать закон распределения числа исправных приборов *X*, если всего приборов 3, а вероятность для каждого из них быть исправным 0,9.

Решение. В этом случае $n = 3$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Используем формулу Бернулли (6), n равно 3, m принимает значения 0, 1, 2, 3.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

$$P(X = 0) = C_3^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001,$$

$$P(X = 1) = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}027,$$

$$P(X = 2) = 3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}243,$$

$$P(X = 3) = 0{,}9^3 = 0{,}729.$$

Закон распределения в виде таблицы будет иметь вид

X	0	1	2	3
P	0,001	0,027	0,243	0,729

Пример 3. Найти неизвестную вероятность P, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, заданной таблицей распределения вероятностей

X	0	1	2	3	4
P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	*p*

Построить функцию распределения.

Решение. Так как сумма всех вероятностей в таблице равна единице (7), то

0,0081+0,0756+0,2646+0,4116 + *p* =1.

Отсюда *p* = 0,2401. Теперь можно написать закон распределения

X	0	1	2	3	4
P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Находим математическое ожидание и дисперсию (8):

$$M(X) = 0\times0{,}0081 + 1\times0{,}0756 + 2\times0{,}2646 + 3\times 0{,}4116 + +4\times0{,}2401=2{,}8$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

$$M(X^2) = 0^2\times0{,}0081 + 1^2\times0{,}0756 + 2^2\times0{,}2646 + 3^2\times0{,}4116 + 4^2\times0{,}2401 = 8{,}68$$

Тогда

$$D(X) = 8{,}68 - 2{,}8^2 = 0{,}84$$

Функция распределения $F(x)$, т. е. вероятность попасть в интервал $(-\infty, x)$, $F(x) = P(X < x)$ вычисляется как сумма предыдущих вероятностей (*рис.* 1)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 0{,}0081, & \text{если } 0 \le x < 1 \\ 0{,}0837 & \text{если } 1 \le x < 2 \\ 0{,}3483 & \text{если } 2 \le x < 3 \\ 0{,}7599 & \text{если } 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{если } x \ge 4 \end{cases}$$

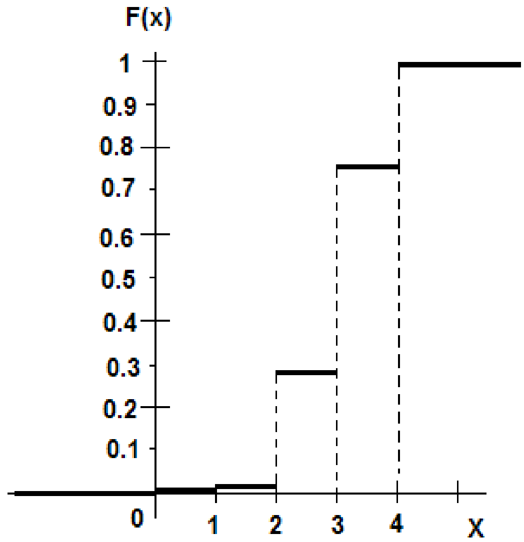


Рис. 1. График F(x).

5. Непрерывные случайные величины

Литература: Гмурман. Ч. 2. Гл. 10 - 13.

Рассмотрим теперь случайные величины, значения которых занимают сплошь некоторый интервал, т.е. такие величины, множество значений которых не составляет числовой последовательности (несчетные множества). Примерами таких величин могут быть масса тела, прочность, длина и т.п.

Определение 1. Случайная величина называется *непрерывной*, если множество ее допустимых значений занимает сплошь некоторый промежуток [a; b), функция распределения F(x) непрерывна на всей оси и дифференцируема на (a; b).

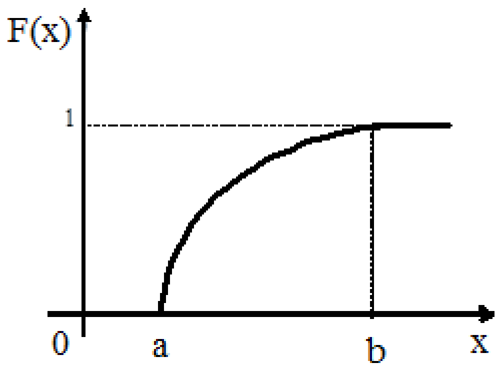
Основное свойство непрерывной величины: вероятность того, что непрерывная случайная величина приняла какое-либо конкретное из допустимых значений, равна нулю, т.е. $P(X = \text{x}) = 0$.

Замечание 1. Так как множество значений непрерывной случайной величины не является последовательностью и все соответствующие вероятности нули, то закон ее распределения не может быть задан таблицей.

Замечание 2. Так как $P(X = x) = 0$, то для непрерывных случайных величин нет разницы между строгими и нестрогими неравенствами, т. е.

$$P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

В качестве примера на *рис. 2* приведен график функции распределения непрерывной случайной величины.



Функция распределения определена на всей оси, поэтому она задается системой

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ F^*(x), & a \le x < b, \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

где $F^*(x)$ - часть функции $F(x)$ на промежутке [a, b). Так как функция распределения непрерывна, то в любой точке предел этой функции слева равен пределу справа, в том числе и в точках a и b, т.е.

$$\lim_{x \to a-0} F(x) = \lim_{x \to a+0} F(x), \ \lim_{x \to b-0} F(x) = \lim_{x \to b+0} F(x).$$

Поэтому справедлива система

$$\begin{cases} F^*(a) = 0 \\ F^*(b) = 1 \end{cases} \qquad (9)$$

Пример 1. Случайная величина X непрерывна и определена на [1; 2) и имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ Ax^2+Bx, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

Найти A и B. Построить график функции распределения.

Решение. На основании (9) имеем

$$\begin{cases}A\cdot 1^2+B\cdot 1=0\\ A\cdot 2^2+B\cdot 2=1\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}A+B=0\\ 4A+2B=1\end{cases}$$

Решая последнюю систему, получим A = 0,5 и В = -0,5. Запишем нашу функцию и построим её график (*рис.* 3). $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0{,}5x^2-0{,}5x, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

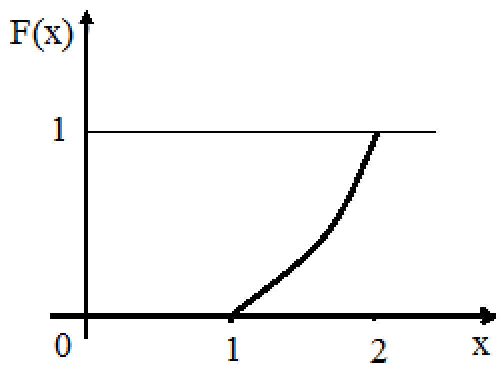


Рис. 3.

Как уже говорилось, отдельным значениям непрерывной величины соответствует нулевая вероятность, но вероятность того, что значение случайной величины лежит в некотором промежутке может быть и не равна нулю. Поэтому можно ввести (по аналогии с плотностью массы) среднюю плотность вероятности на промежутке, как отношение вероятности того, что значение случайной величины принадлежит этому промежутку, к его длине. Например, для промежутка $[x, x+\Delta x)$ средняя плотность равна

$$\frac{P(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Предел средней плотности является очень важной характеристикой закона распределения непрерывной величины.

Определение 2. Плотностью вероятности $f(x)$ (или просто *плотностью*) случайной величины в точке x называется предел средней плотности на промежутке, содержащем точку x , при условии, что длина промежутка Δx стремиться к нулю, т.е.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x},$$

$f(x)$ - плотность в точке x, называется также *дифференциальной функцией распределения* или *дифференциальным законом распределения* случайной величины X.

Перечислим некоторые важные свойства плотности:

1. $f(x) \ge 0$.
2. $\int_a^b f(x)dx = 1,$ т.е. плотность нормирована на множестве допустимых значений.
3. f(x) является производной функции распределения, т.е. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$.
4. $F(x)$ - первообразная $f(x)$, поэтому

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x f(t)dt, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases} \qquad (10)$$

Замечание 3. Вообще говоря, плотность определена на множестве значений непрерывной случайной величины (a, b). Но ее можно *доопределить* на всю числовую ось, считая, что за пределами промежутка (a, b) $f(x) = 0$, т.е.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{dF^*(x)}{dx}, & a < x < b \\ 0, & x > b \end{cases} \qquad (11)$$

В точках $x = a$ и $x = b$ функция $f(x)$ может иметь разрыв.

Пример 2. Случайная величина X имеет закон распределения, заданный функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0,5 \cdot (x^2 - x) & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$

Найти плотность.

Решение. По формуле (11) берем производную от $F(x)$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0,5\cdot(2x-1), & 1<x<2\\ 0, & x>2\end{cases} = \begin{cases}0, & x<1\\ x-0,5, & 1<x<2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

Заметим, что ответ может быть записан и так $f(x)=x-0,5 \quad \mathrm{x}\in[1,2)$.

Пример 3. Случайная величина *X* принимает значения $x\in[0,\ 3)$ и имеет плотность $f(x) = A\cdot x^2$. Найти число А, функцию распределения и $P(2\le X<5)$.

Решение. Для нахождения *A* нужно воспользоваться свойствами плотности. Во-первых, $f(x)\geq 0$. Это свойство будет выполнено при любом А > 0. Во-вторых, должно выполняться равенство $\int\limits_a^b f(x)dx=1$, в нашем случае $\int\limits_0^3 f(x)dx=1$.

$$\int\limits_0^3 Ax^2dx = A\int\limits_0^3 x^2dx = A\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = A\cdot 9=1 \quad .$$

Следовательно, $9A=1, \quad \Rightarrow A=\frac{1}{9}$ и случайная величина *X*, заданная в промежутке $x\in[0,\ 3)$ имеет плотность $f(x)=\frac{1}{9}\ x^2$. Найдем функцию распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \int\limits_0^x \frac{1}{9}\ t^2dt, & 0\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases} = \begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^3}{27}, & 0\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал можно найти по формуле

$$P(2\le X<5)=F(5)-F(2)=1-\frac{2^3}{27}=\frac{19}{27}=0,70.$$

Замечание 4. Если бы в условии примера не требовалось находить функцию распределения, то вероятность можно было бы найти с помощью плотности, доопределив ее нулем за пределы области значений случайной величины, то есть

$$\mathrm{P}(2\le \mathrm{X}<5)=\int\limits_2^5 \mathrm{f(x)dx}=\frac{1}{9}\cdot\int\limits_2^3 \mathrm{x^2dx}+\int\limits_3^5 0\cdot\mathrm{dx}=\left.\frac{\mathrm{x}^3}{27}\right|_2^3+0=1-\frac{8}{27}=0,70.$$

Отметим, что множество допустимых значений непрерывной величины может быть и бесконечным промежутком, в частном случае и $(-\infty,\ \infty)$. В этом случае должны выполнятся равенства $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. График функции распределения в этом случае имеет вид, приведенный на *рис.4*. Асимптотами графика являются слева ось абсцисс, а справа прямая $y = 1$.

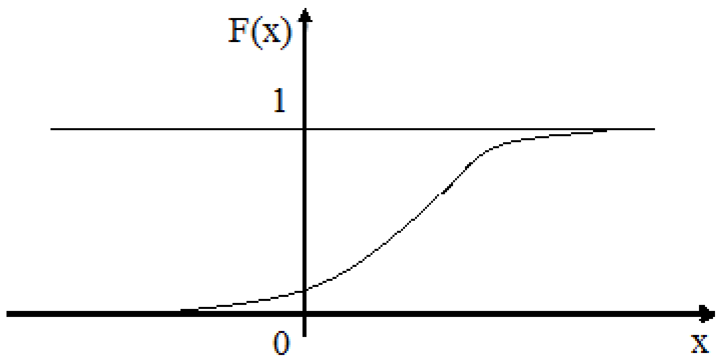


Рис.4.

При этом плотность тоже определена на всей оси, причем интеграл сходится и равен единице, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. График плотности для этого случая приведен на *рис.5*.

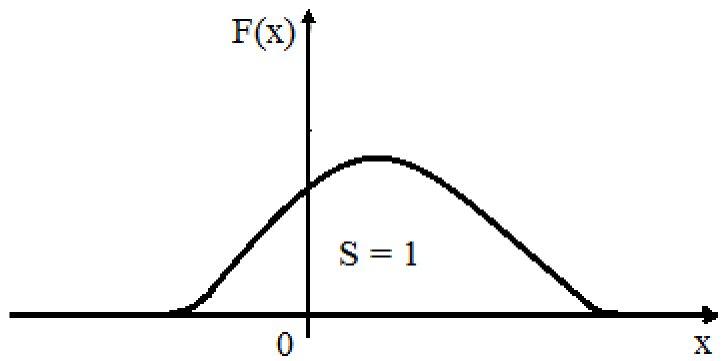


Рис.5

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Для того, чтобы найти математическое ожидание и дисперсию непрерывной величины, следует закон ее распределения задать плотностью. Пусть случайная величина $X \in [a, b)$ и имеет плотность *f(x)*. Тогда математическое ожидание определится формулой

$$M(X) = \int\limits_a^b x \cdot f(x)dx,$$

а дисперсия формулой

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2\cdot f(x)dx,$$

или

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(X))^2.$$

Пример 4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, закон распределения которой задан функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0,5\cdot(x^2-x) & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

Решение. Найдем плотность, т.е. производную функции $F^*(x) = 0,5(x^2 - x)$. Так как множество допустимых значений составляет промежуток [1, 2), то на этом промежутке плотность равна $f(x)=x-0,5$, и математическое ожидание и дисперсия в соответствии с формулами равны

$$M(X)=\int_1^2 x\cdot(x-0,5)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2=(\frac{8}{3}-\frac{4}{4})-(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=\frac{7}{3}-\frac{3}{4}=\frac{19}{12}\approx 1,58$$

$$D(X)=\int_1^2 x^2\cdot(x-0,5)dx-(M(X))^2=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_1^2-\left(\frac{19}{12}\right)^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{12}-\frac{361}{144}\approx 0,08.$$

Нормальный закон распределения.

Случайная величина X распределена по ***нормальному закону***, если она определена на всей числовой оси и имеет плотность

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}, \tag{12}$$

где m_x - математическое ожидание; σ - среднее квадратическое отклонение.

Нормальный закон является наиболее распространенным законом распределения. Ему подчиняются практически все случайные величины, значения которых получаются непосредственным измерением или какими-нибудь линейными преобразованиями измеренных величин.

График нормальной плотности называют ***нормальной кривой*** или ***кривой Гаусса*** (рис. 6).

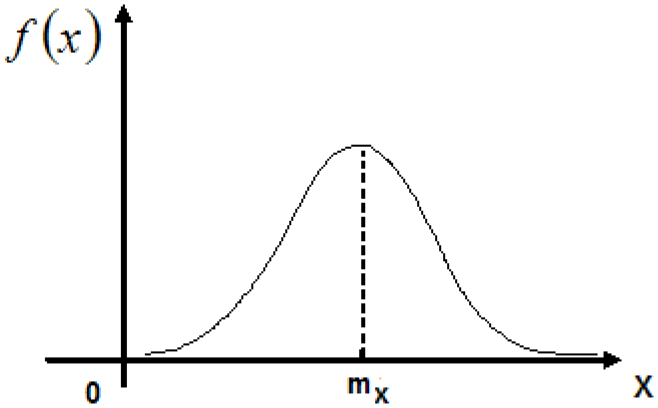


Рис. 6. Кривая Гаусса

Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал (α, β) находится по формуле.

[illegible], (13)

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа.

Значение функции Лапласа для различных значений z можно найти в учебнике или задачнике Гмурмана В.Е. или в конце методички

Пример 1. Станок-автомат сверлит отверстия в центре детали, имеющей форму прямоугольной пластины. Отклонения отверстий от центра детали распределены по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0, и средними квадратическими отклонениями по длине детали σ_x = 2 мм, по ширине детали σ_y =1 мм. Деталь считается стандартной, если отклонения отверстия от центра не превышают по длине и ширине 3 мм. Найти вероятность того, что две случайно взятые детали стандартны.

Решение. Введем обозначения:

Случайная величина X - отклонение отверстия от центра детали по длине,

Случайная величина Y - отклонение отверстия от центра детали по ширине.

Тогда

$M(X) = M(Y) = 0$; $\sigma(X) = 2$; $\sigma(Y) = 1$.

Пусть событие А – деталь по ширине стандартна, В - деталь по длине стандартна. Тогда

$P(A) = P(|X| < 3)$, $P(B) = P(|Y| < 3)$.

Так как отклонения по длине и ширине независимые случайные величины, то вероятность того, что деталь стандартна по длине и ширине

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B) = P(|X|<3) \cdot P(|Y|<3).$$

Используем формулу для вероятности отклонения нормальной случайной величины от математического ожидания *a*

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}), \qquad (13)$$

получим при $a = 0$, $\varepsilon = 3$ и $\sigma_x = 2$

$P(|X| < 3) = 2\Phi(3/2) = 2\Phi(1,5) = 2\times 0,4332 = 0,8664$,

при $a = 0$, $\varepsilon = 3$ и $\sigma_y = 1$

$P(|Y| < 3) = 2\Phi(3) = 2\times 0,4986 = 0,9972$.

(Значения функции Лапласа Ф(x) приведены в конце методички)

$P(A\cdot B) = 0,8664 \times 0,9972 = 0,8839$.

Так как по условию нужно найти вероятность того, что две детали стандартны, а стандартность каждой детали событие независимое, то искомая вероятность P

$$P = P^2(AB) = 0,8839^2 = 0,7813 = 0,78.$$

Контрольная работа № 7.

1. **Классическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей.**

1.1. Из слова «наугад» выбирается случайно одна буква. Какова вероятность, что эта буква «а»? Какова вероятность того, что это гласная?

1.2. Брошены 3 монеты. Найти вероятность того, что выпадут два герба?

1.3. Брошены два игральных кубика. Какова вероятность, что в сумме выпадет 6 очков?

1.4. Человек забыл последнюю цифру почтового индекса. Какова вероятность того, что, написав ее наугад, он получит верный индекс?

1.5. Вероятность выигрыша на один билет 0,13. Какова вероятность хотя бы одного выигрыша для владельца пяти билетов?

1.6. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно?

1.7. Одновременно подбрасывают монету и игральную кость. Если на монете выпал герб, то выигрыш составляет 0 очков, а если решка - 2 очка. Эти очки суммируются с очками на кубике. Найти вероятность того, что суммарный выигрыш на кости и монете составит четыре очка.

1.8. Вероятность того, что можно выбить 10 очков на данной дистанции для данного стрелка при одном выстреле, равна 0,1, девять очков – 0,3. Какова вероятность того, что при трех выстрелах будет выбито более 27 очков?

1.9. Вероятность того, что деталь изготовленная на первом станке будет первосортной равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, а на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

1.10. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность выхода из строя за смену для них, соответственно, равна 0,75; 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что за смену выйдут из строя точно два станка.

2. **Формула полной вероятности. Формула Байеса.**

2.1. В студенческом стройотряде 2 бригады первокурсников и одна – второкурсников. В каждой бригаде первокурсников 5 юношей и 3 девушки, а в бригаде второкурсников 4 юношей и 4 девушки. По жеребьевке из отряда выбрали одну из бригад и из нее одного человека для поездки в город. Какова вероятность того, что выбран юноша?

2.2. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по шоссе, как 3 : 2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

2.3. На 3 дочерей – Алису, Марину и Елену – в семье возложены обязанность мыть посуду. Поскольку Алиса старшая, ей приходится выполнять 40% всей работы. Остальные 60% работы Марина и Елена делят поровну. Когда Алиса моет посуду, вероятность для нее разбить, по крайней мере, одну тарелку равна 0,02. Для Марины и Елены эта вероятность равна соответственно 0,03 и 0,04. Родители не знают, кто мыл посуду вечером, но они слышали звон разбитой тарелки. Какова вероятность того, что посуду мыла Алиса?

2.4. Известно, что 96% выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную с вероятностью 0,05. Определите вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.
2.5. Из 5 стрелков 2 попадают в цель с вероятностью 0,6 и 3 – с вероятностью 0,4. Наудачу выбранный стрелок попал в цель. Что вероятнее: принадлежит он к первым двум или к трем последним?
2.6. На склад поступает 60% продукции с первого участка и 40% со второго, причем с первого – 80% изделий первого сорта, а со второго – 75%. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие изготовлено на втором участке, если оно первого сорта.
2.7. Для контроля продукции, состоящей из пяти партий, отобрано наудачу одно изделие. Какова вероятность обнаружить брак, если в одной из партий $2/3$ деталей браковано, а в остальных четырех все годные.
2.8.Узел состоит из двух независимо работающих деталей, исправность каждой необходима для работы узла. Первая из деталей за рассматриваемый промежуток времени остается годной с вероятностью 0,8, а вторая – 0,9. Узел вышел из строя. Какова вероятность того, что это произошло из-за неисправности лишь второй детали?
2.9. Студент сдает зачет, причем получает один вопрос из трех разделов. Первые два раздела одинаковы по объему, а третий в два раза больше первого. Студент знает ответы на 70% вопросов первого раздела, на 50% вопросов второго и на 80% вопросов третьего. Студент зачет сдал. Найти вероятность того, что ему попался вопрос из второго раздела.
2.10. Имеются 2 урны. В первой 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 3 черных. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую 2 шара, а затем из второй урны извлекают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар белый?

3. **Дискретные случайные величины**.

3.1. Производится 3 независимых опыта, причем вероятность успеха в каждом опыте равна p = 0,4. Случайная величина X – число успехов в 3 опытах. Составьте закон распределения X. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины $\boldsymbol{X}$.
3.2. Производится 4 независимых опыта, в каждом из которых успех появляется с вероятностью $p=0,8$. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу неудач в 4 опытах. Найдите M(X) и D(X).
3.3. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна $\frac{1}{7}$. Случайная величина X – число выигрышных билетов среди 4 купленных. Составить закон распределения случайной величины X. Найдите $M(X)$ и D(X).
3.4. На автобазе имеется 3 автомашины. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найдите закон распределения числа автомашин на линии. Найдите математическое ожидание и дисперсию.
3.5. 4 станка работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,8. Случайная величина X – число станков вышедших из строя. Составить закон распределения X. Найдите M(X) и D(X).
3.6. В магазин зашли 5 покупателей. Вероятность того, что им потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа покупателей, которым понадобится обувь этого размера.
3.7. Прибор состоит из 4 элементов. Вероятность отказа каждого элемента 0,85. Случайная величина X – число отказавших элементов. Составьте закон

распределения X. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины **X**.

3.8. По данным технического контроля 2% изготовленных станков нуждаются в дополнительной регулировке. Случайная величина X – число станков, нуждающихся в дополнительной регулировке. Составьте закон распределения X. Найдите M(X) и D(X), если было изготовлено 4 станка.

3.9. Вероятность получения положительного результата в каждом из независимых опытов равна 0,9. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу положительных результатов в 4 опытах. Найдите M(X) и D(X).

3.10. Рабочий обслуживает 3 станка одного типа. Вероятность того, что станок потребует внимание рабочего равна $\frac{1}{3}$. Составить закон распределения числа станков, потребующих внимания рабочего. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

4. Нормальный закон распределения

4.1.Если отклонение размера изделия от номинала менее 0.345, оно относится к высшему сорту. Систематические отклонения исключены, а случайные отклонения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 0.3 мм и математическим ожиданием равным нулю. Какова вероятность того, что изделие относится к высшему сорту?

4.2. Рост взрослых женщин в одной группе является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием 164см и дисперсией 30,25см^2. Найти вероятность того, что случайно выбранная женщина имеет рост не ниже 160см.

4.3. Определить среднее квадратическое отклонение случайной ошибки прибора, если ошибка подчиняется нормальному закону распределения с математическим отклонением, равным нулю, и вероятность того, что ошибка лежит в пределах ± 20м равна 0,8. (Указание. $0{,}8 = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$. Зная Ф, по таблице найти ε/σ).

4.4. Номинальные размеры детали 20х30мм. Фактические размеры отклоняются от номинальных, причем отклонения по ширине и длине детали – нормальные независимые случайные величины со средними квадратическими отклонениями 1 мм и 2 мм. Деталь стандартна, если ширина лежит в пределах от 18 до 21мм, а длина в пределах от 27 до 34мм. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь стандартна.

4.5. Время, необходимое на ремонт прибора, подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 3 ч. и средним квадратическим отклонением 0,5 ч. Какова вероятность того, что на ремонт прибора потребуется не более четырех часов?

4.6. Длина заготовки подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием 10 см и дисперсией 0,25 см^2. Из заготовки можно изготовить деталь, если ее длина не меньше 8,5 см. Какова вероятность того, что из заготовки можно изготовить деталь?

4.7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 13,5 и средним квадратическим отклонением 1. Найти вероятность того, что в результате испытания значение X отклониться от математического ожидания менее чем на 0,5.

4.8. Случайная ошибка прибора имеет нормальный закон распределения со средним значением, равным нулю, и средним квадратическим отклонением, равным 1. Найти вероятность того, что ошибка измерения будет находиться в пределах (-1,5; +2).

4.9. Время, необходимое для ремонта прибора, – случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с математически ожиданием 3 ч. и дисперсией 0,25 ч^2. Какова вероятность того, что за 8-и часовую смену прибор удастся отремонтировать.

4.10. Прочность пряжи распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 60 и средним квадратическим отклонением 5,8. Пряжа стандартна по прочности, если прочность не меньше 43. Найти вероятность того, что данная партия стандартна.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8.

1. Выборочный метод. Статистические оценки параметров распределения

Литература. Гмурман. Ч. 3. Гл. 15 и 16.

При изучении этой темы Вам следует обратить особое внимание на появление термина *генеральная совокупность.* Не следует относиться к этому, как к абсолютно новому понятию - генеральная совокупность представляет собой или случайную величину, исследуемую практически, или случайные события. Так, например, генеральная средняя - это фактически математическое ожидание исследуемой случайной величины, а генеральная дисперсия - ее дисперсия.

Выборка может выступать в двух видах: она представляет собой вариационный ряд, т.е. последовательность чисел, полученных в результате исследования (измерения) случайной величины (генеральной совокупности), с одной стороны, и теоретически представляет собой последовательность случайных величин с другой. Действительно, до того как испытание произведено, элемент выборки может принять любое из значений случайной величины с той вероятностью, которая этому значению соответствует, т.е. этот элемент сам является случайной величиной, а в результате испытания он принимает определенное значение, т.е. элемент выборки становится числом.

Оценка параметра распределения - это приближенное значение этого параметра, найденное с помощью выборки. Как приближенное значение оценка имеет ошибку (точность оценки), но не следует путать точность оценки с абсолютной погрешностью приближенного значения: точность оценки - это случайная ошибка, значение которой имеет определенную вероятность (надежность оценки). Чем более высокую точность при данном объеме выборки Вы хотите получить (меньшую по величине случайную ошибку), тем меньше ее надежность.

Пример 1. Случайная величина имеет нормальный закон распределения со средним квадратичным отклонением σ =1. Известна выборочная средняя $\bar{x} = 10{,}01$ и объем выборки n = 10. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с заданной надежностью $\gamma = 0{,}85$.

Решение. Вероятность попадания неизвестного математического ожидания в интервал $\left(\bar{x} - (t\sigma)/\sqrt{n};\, \bar{x} + (t\sigma)/\sqrt{n}\right)$ определяется формулой

$$P(\bar{x} - (t\sigma)/\sqrt{n} < a < \bar{x} + (t\sigma)/\sqrt{n}) = 2\phi(t) = \gamma,$$

где $\phi(t)$ - табулированная функция Лапласа (Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ приведены в приложении к учебнику Гмурмана и в конце методических указаний). Зная $2\phi(t) = \gamma = 0{,}85,$ т.е. $\phi(t) = 0{,}425$, найдем по таблице t = 1,44. Отсюда

$\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,44 \cdot 1}{\sqrt{10}} = 0,46$. Следовательно, доверительный интервал 9,55 < *a* < 10,47.

Пример 2. Найти по заданному вариационному ряду выборки выборочное среднее $\overline{x}$, выборочную дисперсию σ^2 и исправленную выборочную дисперсию S^2. Построить полигон относительных частот.

Решение.

x_i	5	10	15	20	25
n_i	1	5	20	14	10

Относительные частоты определяются по формуле $p_i = \frac{n_i}{n}$, где *n* объем выборки.

В нашем случае n = 1 + 5 + 20 + 14 + 10 = 50. Добавим строчку с относительными частотами в таблицу исходных данных. По первой и последней строчке таблицы рисуем график, который называется полигоном относительных частот (*рис.* 1)

.

x_i	5	10	15	20	25
n_i	1	5	20	14	10
p_i	0,02	0,10	0,40	0,28	0,20

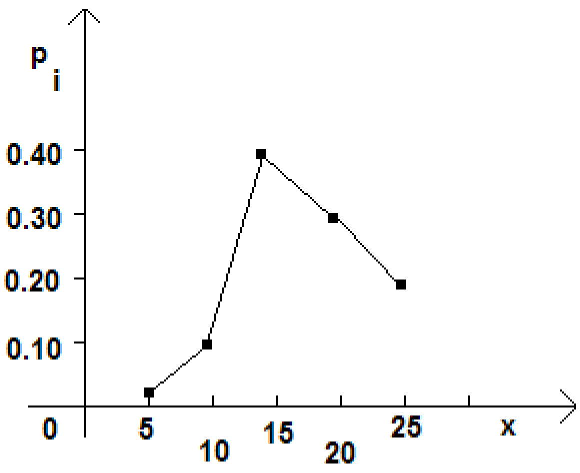


Рис. 1. Полигон относительных частот

Так как выборочное среднее вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \qquad (1)$$

то

$$\bar{x} = \frac{5\cdot 1 + 5\cdot 10 + 20\cdot 15 + 14\cdot 20 + 10\cdot 25}{50} = \frac{885}{50} = 17{,}7 .$$

Аналогично $\sigma^2 = \dfrac{\sum n_i \left(x_i - \bar{x}_b\right)^2}{n}$, $\qquad (2)$

$$\sigma^2 = \frac{1\cdot\left(5-17{,}7\right)^2 + 5\cdot\left(10-17{,}7\right)^2 + 20\cdot\left(15-17{,}7\right)^2}{50} + \frac{14\cdot\left(20-17{,}7\right)^2 + 10\cdot\left(25-17{,}7\right)^2}{50} = \frac{1210{,}5}{50} - 24{,}21 .$$

Исправленная дисперсия вычисляется по формуле

$$S^2 = \frac{\sum n_i \left(x_i - \bar{x}_b\right)^2}{n-1} = \frac{1210{,}5}{49} = 24{,}70 .$$

2. Системы случайных величин

Литература: Гмурман. Ч. 2. Гл. 14. § 1 - 19.

При изучении этой темы следует обратить особое внимание на зависимость и независимость случайных величин. При изучении математического анализа переменные величины разделяли на независимые и зависимые, подразумевая под зависимыми величинами те, которые связаны функциональной зависимостью, при которой каждому допустимому значению одной величины ставилось в соответствие определенное значение другой. Однако зависимость между величинами может быть и нефункциональной. Например, Вы знаете, что существует зависимость между влажностью воздуха и количеством выпавших осадков. Однако Вы не сможете ответить на вопрос: какова влажность, если выпало 3 мм осадков (даже если осадки выпали в виде дождя). Все дело в том, что здесь мы встречаемся не с функциональной, а со *статистической зависимостью*, когда каждому значению одной величины ставится в соответствие свой *закон распределения* другой. Таким образом, между независимостью и функциональной зависимостью имеется промежуточные виды зависимости. В этом разделе тесноту зависимости между величинами измеряют *значением коэффициента корреляции.* Коэффициент корреляции характеризует тесноту только линейной связи между двумя нормально распределенными величинами. Поясним это на примерах. Рассмотрим две случайных величины X и Y. Пусть они связаны функциональной зависимостью $Y = f(X)$ и эта функция раскладывается в степенной ряд

$$Y = f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n + \ldots$$

или

$$Y = f(X) = a_0 + a_1X + R(X),$$

где $R(X)$ - остаток ряда.

Чем меньше по модулю остаток ряда $R(X)$, тем ближе по модулю коэффициент корреляции r к 1. Если остаток равен нулю, т.е. $f(X) = a_0+a_1X$, то $|r| = 1$. Если же линейная часть ряда отсутствует, например, $Y = X^2$, то можно показать, что $r = 0$. В общем случае можно написать

$$Y = a_0 + a_1X + \delta,$$

где δ - случайная составляющая, зависящая от различных случайных факторов, которые, может быть и не связаны со случайной величиной X. Чем больше влияние δ на Y или чем меньше по модулю a_0 и a_1 , тем меньше $|r|$.

Таким образом, *коррелированность* - это наличие линейной составляющей в связи между двумя величинами, а *некоррелированность* - отсутствие линейной связи между ними.

Пример. Найти выборочное уравнение прямой регрессии Y на X

$$\mathrm{Y} - \bar{\mathrm{y}} = \mathrm{r}\frac{\sigma_{\mathrm{y}}}{\sigma_{\mathrm{x}}}(\mathrm{X} - \bar{\mathrm{x}})$$

по данной корреляционной таблице .

X / Y	0	10	20	30	40	50	n_y
20	2	2	-	-	-	-	4
30	2	5	3	-	-	-	10
40	-	-	5	40	5	-	50
50	-	-	2	8	7	3	20
60	-	-	-	2	8	6	16
n_x	4	7	10	50	20	9	n=100

Решение. Объем выборки n = 100.

Для того, чтобы написать уравнение прямой регрессии нам надо найти средние выборочные для X и Y, дисперсии и коэффициент корреляции r.

Сначала найдем безусловные распределения величин X и Y. Для этого составим отдельные таблицы для каждой случайной величины

X	0	10	20	30	40	50
n_x	4	7	10	50	20	9

Находим среднее выборочное по формуле $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = M(X)$

В нашем случае $\bar{x} = \dfrac{0 \cdot 4 + 10 \cdot 7 + 20 \cdot 10 + 30 \cdot 50 + 40 \cdot 20 + 50 \cdot 9}{100} = 30.2$

Находим дисперсию по формуле $D = M(X^2) - M^2(X) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} \right)^2$

В нашем случае

$$M(X^2) = \frac{0^2 \cdot 4 + 10^2 \cdot 7 + 20^2 \cdot 10 + 30^2 \cdot 50 + 40^2 \cdot 20 + 50^2 \cdot 9}{100} =$$
$$= \frac{700 + 4000 + 45000 + 32000 + 22500}{100} = 1042$$

$D(X) = 1042 - (30.2)^2 = 1042 - 912.04 = 129.96$

Следовательно $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{129.96} = 11.4$

Аналогично, для случайной величины Y

Y	20	30	40	50	60
n_y	4	10	50	20	16

Находим среднее выборочное по формуле $\bar{y} = \dfrac{\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot n_j}{\sum_{j=1}^{m} nj} = M(Y)$

В нашем случае $\bar{y} = \dfrac{20 \cdot 4 + 30 \cdot 10 + 40 \cdot 50 + 50 \cdot 20 + 60 \cdot 16}{100} = 43.4$

Находим дисперсию по формуле $D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{m} y_j^2 \cdot n_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} n_j} - \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} y_j \cdot n_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} n_j} \right)^2$

В нашем случае

$$M(Y^2) = \frac{20^2 \cdot 4 + 30^2 \cdot 10 + 40^2 \cdot 50 + 50^2 \cdot 20 + 60^2 \cdot 16}{100} =$$
$$= \frac{1600 + 9000 + 80000 + 50000 + 57600}{100} = 1982$$

$$D(Y) = 1982 - (43.4)^2 = 1982 - 1883.56 = 98.44$$

Следовательно $\sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{98.44} = 9.92$.

Коэффициент корреляции находим по формуле

$r = \dfrac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$, где $M(XY) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_i y_j n_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} n_{ij}}$, n_{ij} - частоты.

Найдем M(X Y)

$$M(XY) = \frac{0 \cdot 20 \cdot 2 + 20 \cdot 10 \cdot 2 + 0 \cdot 30 \cdot 2 + 30 \cdot 10 \cdot 5 + 30 \cdot 20 \cdot 3 + 40 \cdot 20 \cdot 5 + 40 \cdot 30 \cdot 40 + 40 \cdot 40 \cdot 5 + 50 \cdot 20 \cdot 2 + 50 \cdot 8 \cdot 30 + 50 \cdot 40 \cdot 7 + 50 \cdot 50 \cdot 3 + 60 \cdot 30 \cdot 2 + 60 \cdot 40 \cdot 8 + 60 \cdot 50 \cdot 6}{100} =$$

=1400

$$r = \frac{1400 - 30.2 \cdot 43.4}{11.4 \cdot 9.92} = \frac{1400 - 1310.68}{113.09} = \frac{89.32}{113.09} = 0.79$$

Так как коэффициент корреляции больше нуля, то между величинами X и Y существует прямая корреляционная зависимость (обратная, если коэффициент меньше нуля). Подставим найденные значения в уравнение регрессии

$$Y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \bar{x})$$

$$Y - 43.4 = 0.79\frac{9.92}{11.4}(X - 30.2).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены

$$Y = 0.69X + 22.64$$

3. Методы расчета сводных характеристик выборки

Литература. Гмурман. Ч. 3. Гл.18, 19, §§ 8,9.

Пример. Исследовать статистически случайную величину X – прочность (разрывная нагрузка), мН, пряжи линейной плотности 18,5 текс. Для этого получена выборка объема n = 40. Результаты испытаний приведены в таблице

144,	149,	199,	174,	176,	183,	239,	208,
120,	150,	203,	160,	180,	207,	221,	220,
117,	158,	170,	282,	177,	218,	210,	190,
225,	149,	250,	101,	179,	236,	198,	193,
230,	240,	163,	238,	178,	183,	213,	211.

Так как объём статистической совокупности *n* = 40, то все множество значений выборки разбивается на классы. Число классов *k* определяется по объему выборки *n* с помощью таблицы.

Объём выборки *n*	40 – 60	60 – 100	100 – 200	200 – 500
Число классов *k*	6 – 7	7 – 10	10 – 14	14 – 17

Выбираем k = 6. Найдем длину классового промежутка Δ по формуле

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}\ . \qquad (3)$$

Здесь x_{max} наибольшее и x_{min} наименьшее значения. По таблице находим x_{min} = 101; x_{max} = 282. Тогда длина классового промежутка

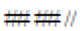
$$\Delta = \frac{282-101}{6} = \frac{181}{6} \approx 30.$$

Значение Δ берется приближенно с той же точностью, с которой определены значения элементов выборки. Определяем границы классовых промежутков.

Левая граница первого промежутка принимается равной $x_{min} - \frac{\Delta}{2}$. Левая граница каждого следующего промежутка получается прибавлением Δ к левой границе предыдущего промежутка. Правый конец каждого промежутка меньше левого конца следующего промежутка на единицу последнего десятичного разряда значений в таблице исходных данных. Этим обеспечивается то, что каждое значение выборки попадает только в один интервал.

Все элементы выборки должны относиться к тому или иному классовому промежутку. При этом все элементы, попавшие в один и тот же промежуток, считаются равными между собой и равными среднему арифметическому границ промежутка. Отметим, что достаточно найти середину только одного из классовых промежутков, так как середины соседних промежутков отличаются друг от друга на Δ. Теперь, вместо исходной выборки, изучается ее приближение, выборочный ряд середин промежутков $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k$.

Создаем расчетную таблицу 1.

Границы проме-жутков. от и до	Середины проме-жутков $\tilde{x}_i$	Штрихо-вание	Частоты Z	Условные значения α	αZ	$\alpha^2 Z$	$\alpha^3 Z$	$\alpha^4 Z$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
								
Сумма								

Левая граница 1-го интервала $101 - \frac{30}{2} = 86$. Далее 86 + 30 = 116; 116 + 30 = 140 и т. д. Правая граница первого интервала 116 - 1=115, следующая – 115 + 30 = 145 и т.д.

Затем заполняем второй столбец $\tilde{x}_1 = \frac{86+115}{2} = 100{,}5$, $\tilde{x}_2 = 100{,}5 + 30 = 130{,}5$ и т.д. Всего получится *k* + 1промежуток, в нашем случае 6 + 1 = 7. x_{max} лежит внутри последнего промежутка.

Т а б л и ц а 1.

x_i	$\tilde{x}_i$		Z_i	α_i	$\alpha_i Z_i$	$\alpha_i^2 Z_i$	$\alpha_i^3 Z_i$	$\alpha_i^4 Z_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
86 – 115	100,5	/	1	-3	-3	9	-27	81
116 – 145	130,5	///	3	-2	-6	12	-24	48
146 – 175	160,5	## ///	8	-1	-8	8	-8	8
176 – 205	190,5	## ## //	12	0	0	0	0	0
206 – 235	220,5	## ##	10	1	10	10	10	10
236 – 265	250,5	##	5	2	10	20	40	80
266 – 295	280,5	/	1	3	3	9	27	81
Сумма			40		6	68	18	299

После того как заполнены столбцы 1 и 2 , переходим к столбцу 3. Для каждого элемента выборки находят классовый промежуток, которому принадлежит этот элемент, и в строке этого промежутка в столб. 3 ставят штрих. Рекомендуется четыре штриха ставить вертикально, а пятый – горизонтально, перечеркивая им четыре предыдущих. Сумма штрихов в ячейке равна частоте соответствующего значения и записывается рядом (в столб. 4). Частоты обозначаются Z_i и их сумма ставится в последней строке. При этом должно выполнятся условие $\sum Z_i = n$.

Выбираем условный нуль А, совпадающий с тем значением $\tilde{x}_i$, которое соответствует среднему классовому промежутку, а если таковых два, то тому из них, который имеет большую частоту Z_i.

Строке табл. 1, соответствующей условному нулю А (у нас это строка 4, $Z_4 = 12$, $A = \tilde{x}_4 = 190{,}5$), соответствует α $_i$ = 0, строки над этой имеют соответственно α $_{i-1}$ = - 1, α $_{i-2}$ = - 2, и т. д., а строки под i-й - α $_{i+1}$ = 1, α $_{i+2}$ = 2, α $_{i+3}$ = 3 и т. д. После этого заполняются столбцы 6 - 9, а затем последняя строка – «Сумма» – для этих столбцов.

Для нахождения оценок параметров распределения случайной величины Х сначала определяются начальные условные моменты m_r.

$$m_r = \frac{\Sigma\alpha_i^r Z_i}{n}, \quad r = 1; 2; 3; 4. \qquad (4)$$

Числители для каждого момента уже получены в строке «сумма» таблицы 1. Оценка математического ожидания величины Х – среднее арифметическое выборки – выражается через начальный условный момент первого порядка

$$\overline{x_B} = A + m_1 \cdot \Delta. \qquad (5)$$

Центральные условные моменты определяются по формулам:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2; \qquad (6)$$

$$\mu_3 = m_3 - m_1(2\mu_2 + m_2); \qquad (7)$$

$$\mu_4 = m_4 - 2m_1(\mu_3 + m_3) + m_1^4. \qquad (8)$$

Оценки остальных числовых характеристик случайной величины Х выражаются через эти моменты:

оценка среднего квадратичного отклонения

$$S_B = \Delta \cdot \sqrt{\mu_2}; \qquad (9)$$

оценка коэффициента вариации

$$C_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} \cdot 100\,\%; \qquad (10)$$

оценка коэффициента асимметрии

$$As = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}; \qquad (11)$$

оценка коэффициента эксцесса

$$Ex = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3. \qquad (12)$$

Находим начальные условные моменты

$$m_1 = \frac{6}{40} = 0,15;$$

$$m_2 = \frac{68}{40} = 1,70;$$

$$m_3 = \frac{18}{40} = 0,45;$$

$$m_4 = \frac{299}{40} = 7,475.$$

Тогда центральные условные моменты по формулам будут равны:

$$\mu_2 = 1,70 - 0,15^2 = 1,6775;$$

$$\mu_3 = 0,45 - 0,15\ (2 - 1,6775 + 1,70) = -\ 0,308;$$

$$\mu_4 = 7,475 - 2 \cdot 0,15\ (-\ 0,308 + 0,45) + 0,15^4 = 7,433.$$

Теперь находим оценки параметров распределения прочности пряжи:

$$\overline{x_B} = 191,5 + 0,15 \cdot 30 = 195,0 \text{ мН};$$

$$S_B = 30 \cdot \sqrt{1,6775} = 38,85 \text{мН};$$

$$C_B = \frac{38,86}{195} \cdot 100 = 19,9;$$

$$As = \frac{-0,308}{1,6775 \cdot 1,6775} = -0,14$$

$$Ex = \frac{7,433}{1,6775^2} - 3 = 0,36$$

Для нормальной случайной величины коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю. Так как оценки параметров – это их приближённые значения, найденные по результатам обработки выборки, то они могут, даже для выборки из нормальной генеральной совокупности, несколько отличаться от нуля. Поэтому считается, что если $\begin{cases} |As| < 0,25 \\ |Ex| < 0,25 \end{cases}$, то распределение незначительно отличается от нормального. Если же $\begin{cases} |As| > 0,75 \\ |Ex| > 0,75 \end{cases}$, то отличие от нормального распределения значительное.

Если отклонение лежит в пределах от 0,25 до 0,75, то оно считается умеренным. У нас по асимметрии распределение незначительно отличается от нормального, а по эксцессу – умеренно.

Для определения теоретических частот нормального закона распределения используются таблицы функции Гаусса

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} \qquad (13)$$

(таблица значений функции Гаусса приведена в учебнике Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статическая статистика и в приложении 1 в конце методических указаний). Составим таблицу теоретических значений (табл. 2).

Первые два столбца табл. 2 соответствуют третьему и четвертому столбцам табл. 1. Для каждого x_i определяется нормированное отклонение t_i:

$$t_i = \frac{\tilde{x}_i - \overline{x}_B}{S_B}, \qquad (14)$$

Т а б л и ц а 2

$\tilde{x}_i$	Z_i	$t_i = \frac{\tilde{x}_i - \overline{x_B}}{S_B}$	$\varphi(t_i)$	Z_i'	$\frac{(Z_i - Z_i')^2}{Z_i'}$
1	2	3	4	5	6
Сумма	ΣZ_i	-	$\Sigma\varphi(t_i)$	$\Sigma Z_i'$	χ^2

которое вносится в столб. 3 табл. 2. Затем находят по указанным таблицам значения функции (13) и записывают их в столб. 4. Теоретические частоты пропорциональны плотности нормального распределения (13). Коэффициент пропорциональности λ определяется так, чтобы сумма теоретических частот равнялась объёму выборки, т. е.

$$\lambda = \frac{n}{\Sigma\varphi(t_i)}. \qquad (15)$$

Тогда теоретические частоты Z_i' определяются по формуле

$$Z_i' = \lambda \cdot \varphi(t_i). \qquad (16)$$

Для контроля вычислений следует проверить выполнение равенства $\sum_i Z_i{}' = n$.

Так как теоретические частоты определяются по формуле (14) приближенно (рекомендуется находить их с точностью 0,01), то $\sum Z_i'$ может отличаться от объема выборки на 0,01 – 0,02. В последний столбец вносят значения относительных квадратов отклонений фактических частот от теоретических и находят их сумму

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(Z_i - Z_i')^2}{Z_i{}'}, \qquad (17)$$

которая сравнивается с табличным значением χ^2_α, определяемым по уровню значимости α и числу степеней свободы $f = k - 3$ по таблицам распределения Пирсона (Гмурман В. Е.,С. 358), где k - фактическое число классовых промежутков; α - уровень значимости.

Составим таблицу 2.

$\tilde{x}_i$	Z_i	$t_i = \frac{x_i - 195}{38,86}$	$\varphi(t_i)$	Z_i'	$\frac{(Z_i - Z_i')^2}{Z_i{}'}$
100,5	1	-2,432	0,02074	0,644	0,197
130,5	3	-1,660	0,10062	3,126	0,050
160,5	8	-0,888	0,26900	8,356	0,015
190,5	12	-0,116	0,39628	12,310	0,008
220,5	10	0,656	0,32167	9,993	0,000
250,5	5	1,428	0,14387	4,469	0,063
280,5	1	2,200	0,03546	1,102	0,009
Сумма	40	-	1,28764	40,000	0,342

Если $\chi^2 > \chi^2_\alpha$, то гипотеза о нормальности распределения отвергается. При этом вероятность отвергнуть верную гипотезу не превышает α.

Если $\chi^2 \le \chi^2_\alpha$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальности распределения.

Коэффициент пропорциональности для нахождения теоретических частот

$$\lambda = \frac{40}{1,28764} = 31,065,$$

что позволяет заполнить столб. 5. Расчётное значение критерия Пирсона $\chi^2 = 0,342$. Число степеней свободы f = 7 – 3 = 4. Выбираем уровень значимости α = 0,05 и по таблицам распределения Пирсона находим $\chi^2_{0,05} = 9,5$.

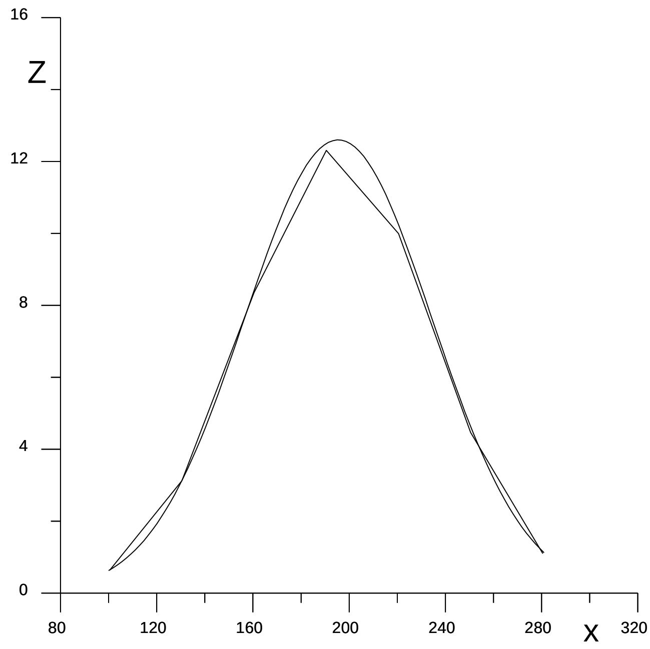


Рис. 1. Полигон частот и сглаживающая кривая нормального закона.

Так как χ^2 = 0,342 < $9,5 = \chi^2_{0,05}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальности распределения прочности пряжи Т = 18,5 текс.

По данным столб. 1 и 2 строят на графике полигон частот. Для этого на график наносят точки $(\tilde{x}_i; Z_i)$, которые соединяют ломаной линией. На том же графике строится теоретическая кривая Гаусса. Для этого наносят точки с координатами $(\tilde{x}_i; Z_i^{'})$ и дополнительную точку максимума, абсцисса которой равна $\overline{x}_B$, а ордината определяется по формуле $Z_{max} = \lambda \cdot 0.3989$. Так как для $x = \overline{x}_B$ $Z_{max} = 31.065 \cdot 0.3989 = 12.39$. Построенные точки соединяют плавной кривой (рис.1).

4. Статистическая проверка статистических гипотез

Литература. Гмурман. Ч. 3. Гл. 19.

При изучении этой темы обратите внимание на то, что проверке подлежит так называемая нулевая гипотеза (гипотеза об отсутствии различия, т.е. о нулевом отличие). Так как конкурирующая (или альтернативная) гипотеза, как правило, неизвестна, то мы можем только или отвергнуть нулевую гипотезу, или принять решение, что *нет оснований ее отвергнуть.*

Пример. Найти по заданному вариационному ряду выборки выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию σ^2, исправленную выборочную дисперсию S^2 и, при уровне значимости 0,05, проверить нулевую гипотезу H_0: математическое ожидание $a = a_0$.

x_i	5	10	15	20	25
n_i	1	5	20	14	10

Решение. Найдем объем выборки $n = \sum n_i = 1 + 5 + 20 + 14 + 10 = 50$.

Определим выборочную среднюю

$$\bar{x}_b = \frac{\sum n_i x_i}{n}$$

В нашем случае

$$\bar{x}_b = \frac{5 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 20 \cdot 15 + 14 \cdot 20 + 10 \cdot 25}{50} = \frac{885}{50} = 17{,}7.$$

Аналогично найдем выборочную дисперсию

$$\sigma^2 = \frac{\sum n_i \left(x_i - \bar{x}_b\right)^2}{n},$$

$$\sigma^2 = \frac{1 \cdot (5 - 17{,}7)^2 + 5(10 - 17{,}7)^2 + 20(15 - 17{,}7)^2}{50} +$$

$$+ \frac{14(20 - 17{,}7)^2 + 10(25 - 17{,}7)^2}{50} = \frac{1210{,}5}{50} = 24{,}21,$$

И исправленную дисперсию

$$S^2 = \frac{\sum n_I \left(x_i - \bar{x}_b\right)^2}{n - 1} = \frac{1210{,}5}{49} = 24{,}70.$$

Так как дисперсия генеральной совокупности неизвестна, то в качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину

$$T = \frac{\left(\bar{x} - a_0\right)\sqrt{n}}{S}.$$

Величина T имеет распределение Стьюдента с $\kappa = n - 1$ степенями свободы. Для того, чтобы при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 19$ о равенстве неизвестной генеральной средней нормальной совокупности с неизвестной дисперсией значению a_0, надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$T_{табл} = \frac{(17{,}7 - 19)\sqrt{50}}{\sqrt{24{,}70}} = -1{,}85.$$

Критическая область двусторонняя. По таблице приложения 6 в учебнике Гмурмана для критических точек распределения Стьюдента по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и по числу степеней свободы к = 49 находим критическую точку $t_{двуст.кр}$ (0,05;49) = =2,01. Так как

$$\left|T_{набл}\right| < t_{двуст.кр},$$

то нет основания отвергнуть нулевую гипотезу, т.е. выборочная средняя незначительная отличается от гипотетической генеральной средней $a_0 = 19$.

Контрольные задания № 8

1. Построить доверительный интервал для математического ожидания α нормально распределенной генеральной совокупности с известным среднеквадратичным отклонением σ с помощью выборки объема n с данным средним выборочным $\bar{x}$, с заданной надежностью γ=0,90

1.1. $\bar{x} = 75{,}17, \quad n = 36, \quad \sigma = 6.$

1.2. $\bar{x} = 75{,}16, \quad n = 49, \quad \sigma = 7.$

1.3. $\bar{x} = 75{,}15, \quad n = 64, \quad \sigma = 8.$

1.4. $\bar{x} = 75{,}14, \quad n = 81, \quad \sigma = 9.$

1.5. $\bar{x} = 75{,}13, \quad n = 100, \quad \sigma = 10.$

1.6. $\bar{x} = 75{,}12, \quad n = 121, \quad \sigma = 11.$

1.7. $\bar{x} = 75{,}11, \quad n = 144, \quad \sigma = 12.$

1.8. $\bar{x} = 75{,}10, \quad n = 169, \quad \sigma = 13.$

1.9. $\bar{x} = 75{,}09, \quad n = 196, \quad \sigma = 14.$

1.10. $\bar{x} = 75{,}08, \quad n = 225, \quad \sigma = 15.$

2. **Исследовать статистически случайную величину** X – прочность (разрывная нагрузка), мН, пряжи линейной плотности 18,5 текс. Для этого произведена выборка объема n = 40. Результаты испытаний приведены в таблице. Исследовать статистически случайную величину X – прочность (разрывная нагрузка), мН, пряжи линейной плотности 18,5 текс. Для этого произведена выборка объема n = 40. Результаты испытаний приведены в таблице.

2.1

214	217	205	154	183	146	196	153	201	185
175	144	186	192	161	169	212	227	179	204
203	188	173	211	189	206	175	248	143	171
206	163	151	196	225	197	188	215	194	207

2.2

141	174	235	155	181	202	185	218	283	268
253	294	276	309	281	262	272	236	257	240
278	259	283	289	234	313	307	267	248	300
238	254	317	300	318	302	265	274	297	258

2.3

244	267	249	252	275	280	288	235	272	299
199	216	229	293	238	260	271	220	254	320
268	244	213	269	236	275	259	286	263	231
234	249	292	274	213	265	272	289	257	235

2.4

212	295	323	225	298	267	263	279	284	319
201	252	268	202	269	237	287	253	245	261
241	287	257	282	271	256	276	259	237	320
231	275	313	276	260	309	297	304	278	301

2.5

264	281	211	254	296	236	280	303	264	248
274	253	242	269	249	225	305	288	294	278
287	263	295	267	253	234	260	299	235	268
265	293	254	288	309	229	302	238	247	274

2.6

161	206	212	245	263	275	231	218	269	314
208	226	189	296	284	311	318	272	240	279
174	132	147	257	247	278	260	285	222	265
179	155	188	168	251	300	298	320	282	239

2.7

132	200	225	163	149	171	160	205	163	194
184	124	119	186	152	205	180	155	199	228
147	166	157	189	177	169	197	173	240	195
201	223	183	154	225	176	195	137	208	183

2.8

171	168	182	201	146	176	152	180	173	169
208	184	178	158	194	188	203	189	206	156
172	211	197	177	186	200	138	156	168	181
145	132	217	160	130	205	154	163	178	196

2.9

164	198	138	185	201	153	219	151	187	167
192	241	183	129	175	198	218	149	186	203
242	121	177	173	144	219	151	180	197	160
134	204	160	123	181	172	183	120	149	181

2.10

211	155	189	216	199	134	157	187	180	163
208	178	131	219	151	225	183	206	157	196
193	204	145	216	169	178	197	120	189	164
200	173	166	133	161	188	148	197	309	175

3. Найти выборочное уравнение прямой $Y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \bar{x})$ **регрессии Y на X по данной корреляционной таблице.**

3.1

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
35	4	2	-	-	-	-	6
45	-	5	3	-	-	-	8
55	-	-	5	45	5	-	55
65	-	-	2	8	7	-	17
75	-	-	-	4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	n = 100

.

3.2.

X / Y	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3	-	-	-	-	6
40	-	5	4	-	-	-	9
50	-	-	40	2	8	-	50
60	-	-	5	10	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	n = 100

3.3.

X / Y	12	17	22	27	32	37	n_y
25	2	4	-	-	-	-	6
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	45	4	-	55
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	n = 100

3.4.

X / Y	2	7	12	17	22	27	n_y
110	2	4	-	-	-	-	6
120	-	6	2	-	-	-	8
130	-	-	3	50	2	-	55
140	-	-	1	10	6	-	17
150	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	n = 100

3.5.

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
20	2	4	-	-	-	-	6
30	-	3	7	-	-	-	10
40	-	-	5	30	10	-	45
50	-	-	7	10	8	-	25
60	-	-	-	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	n = 100

3.6.

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
35	5	1	-	-	-	-	6
45	-	6	2	-	-	-	8
55	-	-	5	40	5	-	50
65	-	-	2	8	7	-	17
75	-	-	-	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	n=100

3.7.

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
30	1	5	-	-	-	-	6
40	-	5	3	-	-	-	8
50	-	-	9	40	2	-	51
60	-	-	4	11	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	1	10	16	55	15	3	n=100

3.8.

X / Y	15	20	25	30	35	45	n_y
25	4	2	-	-	-	-	6
35	-	6	4	-	-	-	10
45	-	-	6	45	2	-	53
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	n=100

3.9.

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
20	3	5	-	-	-	-	8
30	-	4	4	-	-	-	8
40	-	-	7	35	8	-	50
50	-	-	2	10	8	-	20
60	-	-	-	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	n=100

3.10.

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	-	-	-	-	5
25	-	7	3	-	-	-	10
35	-	-	2	50	2	-	54
45	-	-	1	10	6	-	17
55	-	-	-	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n=100

4. Найти по заданному вариационному ряду выборки выборочное среднее $\overline{x}$, выборочную дисперсию $\overline{S}^2$, исправленную выборочную дисперсию $\overline{s}^2$.

4.1.	x_i	120	130	140	150	160	170	180
	n_i	5	10	30	25	15	10	5

4.2.	x_i	102	112	122	132	142	152	162
	n_i	4	6	10	40	20	12	8

4.3.	x_i	10,6	15,6	20,6	25,6	30,6	35,6	40,6
	n_i	8	10	60	12	5	3	2

4.4.	x_i	26	32	38	44	50	56	62
	n_i	5	15	40	25	8	4	3

4.5.	x_i	12,4	16,4	20,4	24,4	28,4	32,4	36,4
	n_i	5	15	40	25	8	4	3

4.6.	x_i	110	115	120	125	130	135	140
	n_i	5	10	30	25	15	10	5

4.7.	x_i	45	50	55	60	65	70	75
	n_i	4	6	10	40	20	12	8

4.8.	x_i	10,2	10,9	11,6	12,3	13	13,7	14,4
	n_i	8	10	60	12	5	3	2

4.9.	x_i	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5
	n_i	5	15	40	25	8	4	3

4.10.	x_i	104	109	114	119	124	129	134
	n_i	4	6	10	40	20	12	8

Приложение №1. Таблица значений функции Гаусса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

	сотые									
x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Приложение 2. Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	**0,50**	0,1915	**1,00**	0,3413	**1,50**	0,4332	**2,00**	0,4772	**3,00**	0,49865
0,01	0,0040	**0,51**	0,1950	**1,01**	0,3438	**1,51**	0,4345	**2,02**	0,4783	**3,20**	0,49931
0,02	0,0080	**0,52**	0,1985	**1,02**	0,3461	**1,52**	0,4357	**2,04**	0,4793	**3,40**	0,49966
0,03	0,0120	**0,53**	0,2019	**1,03**	0,3485	**1,53**	0,4370	**2,06**	0,4803	**3,60**	0,499841
0,04	0,0160	**0,54**	0,2054	**1,04**	0,3508	**1,54**	0,4382	**2,08**	0,4812	**3,80**	0,499928
0,05	0,0199	**0,55**	0,2088	**1,05**	0,3531	**1,55**	0,4394	**2,10**	0,4821	**4,00**	0,499968
0,06	0,0239	**0,56**	0,2123	**1,06**	0,3554	**1,56**	0,4406	**2,12**	0,4830	**4,50**	0,499997
0,07	0,0279	**0,57**	0,2157	**1,07**	0,3577	**1,57**	0,4418	**2,14**	0,4838	**5,00**	0,499997
0,08	0,0319	**0,58**	0,2190	**1,08**	0,3599	**1,58**	0,4429	**2,16**	0,4846		
0,09	0,0359	**0,59**	0,2224	**1,09**	0,3621	**1,59**	0,4441	**2,18**	0,4854		
0,10	0,0398	**0,60**	0,2257	**1,10**	0,3643	**1,60**	0,4452	**2,20**	0,4861		
0,11	0,0438	**0,61**	0,2291	**1,11**	0,3665	**1,61**	0,4463	**2,22**	0,4868		
0,12	0,0478	**0,62**	0,2324	**1,12**	0,3686	**1,62**	0,4474	**2,24**	0,4875		
0,13	0,0517	**0,63**	0,2357	**1,13**	0,3708	**1,63**	0,4484	**2,26**	0,4881		
0,14	0,0557	**0,64**	0,2389	**1,14**	0,3729	**1,64**	0,4495	**2,28**	0,4887		
0,15	0,0596	**0,65**	0,2422	**1,15**	0,3749	**1,65**	0,4505	**2,30**	0,4893		
0,16	0,0636	**0,66**	0,2454	**1,16**	0,3770	**1,66**	0,4515	**2,32**	0,4898		
0,17	0,0675	**0,67**	0,2486	**1,17**	0,3790	**1,67**	0,4525	**2,34**	0,4904		
0,18	0,0714	**0,68**	0,2517	**1,18**	0,3810	**1,68**	0,4535	**2,36**	0,4909		
0,19	0,0753	**0,69**	0,2549	**1,19**	0,3830	**1,69**	0,4545	**2,38**	0,4913		
0,20	0,0793	**0,70**	0,2580	**1,20**	0,3849	**1,70**	0,4554	**2,40**	0,4918		
0,21	0,0832	**0,71**	0,2611	**1,21**	0,3869	**1,71**	0,4564	**2,42**	0,4922		
0,22	0,0871	**0,72**	0,2642	**1,22**	0,3883	**1,72**	0,4573	**2,44**	0,4927		
0,23	0,0910	**0,73**	0,2673	**1,23**	0,3907	**1,73**	0,4582	**2,46**	0,4931		
0,24	0,0948	**0,74**	0,2703	**1,24**	0,3925	**1,74**	0,4591	**2,48**	0,4934		
0,25	0,0987	**0,75**	0,2734	**1,25**	0,3944	**1,75**	0,4599	**2,50**	0,4938		
0,26	0,1026	**0,76**	0,2764	**1,26**	0,3962	**1,76**	0,4608	**2,52**	0,4941		
0,27	0,1064	**0,77**	0,2794	**1,27**	0,3980	**1,77**	0,4616	**2,54**	0,4945		
0,28	0,1103	**0,78**	0,2823	**1,28**	0,3997	**1,78**	0,4625	**2,56**	0,4948		
0,29	0,1141	**0,79**	0,2852	**1,29**	0,4015	**1,79**	0,4633	**2,58**	0,4951		
0,30	0,1179	**0,80**	0,2881	**1,30**	0,4032	**1,80**	0,4641	**2,60**	0,4953		
0,31	0,1217	**0,81**	0,2910	**1,31**	0,4049	**1,81**	0,4649	**2,62**	0,4956		
0,32	0,1255	**0,82**	0,2939	**1,32**	0,4066	**1,82**	0,4656	**2,64**	0,4959		
0,33	0,1293	**0,83**	0,2967	**1,33**	0,4082	**1,83**	0,4664	**2,66**	0,4961		
0,34	0,1331	**0,84**	0,2995	**1,34**	0,4099	**1,84**	0,4671	**2,68**	0,4963		
0,35	0,1368	**0,85**	0,3023	**1,35**	0,4115	**1,85**	0,4678	**2,70**	0,4965		
0,36	0,1406	**0,86**	0,3051	**1,36**	0,4131	**1,86**	0,4686	**2,72**	0,4967		
0,37	0,1443	**0,87**	0,3078	**1,37**	0,4147	**1,87**	0,4693	**2,74**	0,4969		
0,38	0,1480	**0,88**	0,3106	**1,38**	0,4162	**1,88**	0,4699	**2,76**	0,4971		
0,39	0,1517	**0,89**	0,3133	**1,39**	0,4177	**1,89**	0,4706	**2,78**	0,4973		
0,40	0,1554	**0,90**	0,3159	**1,40**	0,4192	**1,90**	0,4713	**2,80**	0,4974		
0,41	0,1591	**0,91**	0,3186	**1,41**	0,4207	**1,91**	0,4719	**2,82**	0,4976		
0,42	0,1628	**0,92**	0,3212	**1,42**	0,4222	**1,92**	0,4726	**2,84**	0,4977		

0,43	0,1664	**0,93**	0,3238	**1,43**	0,4236	**1,93**	0,4732	**2,86**	0,4979		
0,44	0,1700	**0,94**	0,3264	**1,44**	0,4251	**1,94**	0,4738	**2,88**	0,4980		
0,45	0,1736	**0,95**	0,3289	**1,45**	0,4265	**1,95**	0,4744	**2,90**	0,4981		
0,46	0,1772	**0,96**	0,3315	**1,46**	0,4279	**1,96**	0,4750	**2,92**	0,4982		
0,47	0,1808	**0,97**	0,3340	**1,47**	0,4292	**1,97**	0,4756	**2,94**	0,4984		
0,48	0,1844	**0,98**	0,3365	**1,48**	0,4306	**1,98**	0,4761	**2,96**	0,4985		
0,49	0,1879	**0,99**	0,3389	**1,49**	0,4319	**1,99**	0,4767	**2,98**	0,4986		