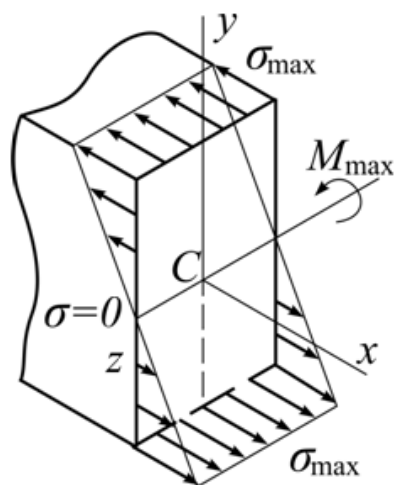


Прикладная механика

Учебное пособие



 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2015

Министерство образования и науки Российской Федерации

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Прикладная механика

Учебное пособие

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2015

Прикладная механика / А. С. Алышев, А. Г. Кривошеев, К. С. Малых, В. Г. Мельников, Г. И. Мельников – СПб: Университет ИТМО, 2015. – 66 с.

Рассмотрены основные виды анализа элементарного напряженно деформированного состояния тела. Излагаются приемы и методы определения напряжения в окрестности точки тела при заданных внешних нагрузках и геометрии конструкции. Представлен анализ одноосного напряженного состояния по допускаемым напряжениям, а так же изложена методология анализа сложного напряженного состояния в точке по четырем гипотезам прочности. Рассмотрены типовые задачи растяжения – сжатия бруса, кручение вала, плосконапряженного состояния в точке тела и плоского изгиба балки.

Пособие предназначено для бакалавров и магистров, обучающихся по направлениям 14070002, 20010001, 20010002, 20010003, 20050001, 20050001, 20050001, 22320005, 22320009, 22320010, 22320011, 22320015, 24100002, 12.04.01.

Рекомендовано к печати Ученым советом Естественного факультета



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2015

© А. С. Алышев, А. Г. Кривошеев, К. С. Малых, В. Г. Мельников, Г. И. Мельников, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ БРУСА	5
Обозначения и расчетные формулы	5
Пример выполнения РГР	7
Исходные данные для выполнения РГР.....	11
Контрольные вопросы для самопроверки	12
КРУЧЕНИЕ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ.....	13
Обозначения и расчетные формулы	13
Пример выполнения РГР	15
Исходные данные для выполнения РГР.....	19
Контрольные вопросы для самопроверки	19
ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ.....	20
Обозначения и расчетные формулы	20
Пример выполнения задания.....	22
Исходные данные для самостоятельной работы.....	24
ПЛОСКИЙ ИЗГИБ БАЛКИ.....	27
Определения и расчетные формулы.....	27
Примеры выполнения задания.....	34
Исходные данные для самостоятельной работы.....	43
Контрольные вопросы для самопроверки	50
Приложение А Варианты заданий.....	51
Приложение В Правила знаков.....	58
Приложение С Свойства эпюр.....	60
Приложение D Механические свойства материалов.....	61
ЛИТЕРАТУРА	62

Прикладная механика является одной из основных учебных дисциплин инженерно-технических вузов. Она широко используется в инженерной практике на стадии проектирования приборов, машин и инженерных конструкций.

Составной частью курса прикладной механики традиционно является сопротивление материалов - раздел механики деформируемого твердого тела, в котором рассматриваются упрощенные расчетные модели и изучаются общие методы расчета. Такие методы позволяют использовать простые и ясные подходы в оценке прочностных возможностей различных конструктивных элементов при внешних воздействиях.

Разделы 1-4 предназначены для поддержки следующих общепрофессиональных компетенций выпускника: умение формировать математические модели – расчетные схемы объектов простейших элементов конструкций, а также оценивать прочность этих конструкций по заданным внешним нагрузкам и данным материала.

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ БРУСА

Обозначения и расчетные формулы

Растяжением – сжатием называется такой вид деформации бруса, при котором во всех его поперечных сечениях действует только одно внутреннее усилие – *продольная сила*. Продольную силу принято обозначать N . Продольная сила приложена к центру тяжести C поперечного сечения бруса и направлена перпендикулярно плоскости сечения (по оси бруса). Деформация растяжения и сжатия возникает в брус под действием внешних сил, направленных по оси бруса.

Внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержня, меняются вдоль его продольной оси. Для наглядного представления характера этого изменения внутренних усилий строят их графики, которые называются *эпюрами*. При построении эпюр сначала устанавливают границы *участков нагружения*, в пределах которых внутренние усилия изменяются по одной закономерности.

Для определения внутренних усилий в заданном поперечном сечении стержня применяется метод сечений. В этом методе используются уравнения равновесия для отсеченной части стержня, то есть для части стержня, расположенной по одну сторону от заданного сечения.

Для определения продольной силы методом сечений используется уравнение равновесия проекций сил на продольную ось стержня.

При растяжении и сжатии бруса в его поперечных сечениях действует только нормальное напряжение σ . При практических расчётах обычно считается, что *нормальное напряжение в поперечном сечении бруса при растяжении и сжатии распределено равномерно* (гипотеза Сен-Венана) (рисунок 1.1), то есть эти напряжения одинаковы во всех точках поперечного сечения.

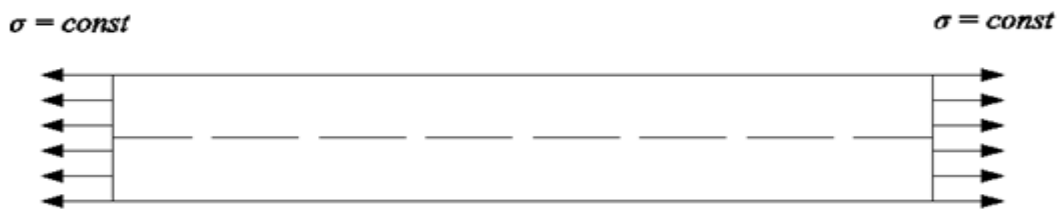


Рисунок 1.1 – Равномерное распределение нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса при растяжении

Обозначения характерных параметров (констант):

σ_n (МПа) – нормальное к площадке напряжение

E (МПа) – модуль Юнга (модуль упругости материала)

ε_x (безразмерн.) – относительная продольная деформация

Нормальное напряжение σ в поперечном сечении с площадью S , в котором действует продольная сила N , определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{S} \left(\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} \equiv \text{МПа} \right) \quad (1.1)$$

Нормальное напряжение обычно измеряется в *Мегапаскалях* $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2$.

Пусть брус (или участок бруса) с первоначальной длиной l и постоянной площадью поперечного сечения S испытывает деформацию растяжения или сжатия, при этом во всех его поперечных сечениях действует постоянная продольная сила N . В результате его первоначальная длина l изменяется на величину Δl , которая называется *абсолютной продольной деформацией*. Отношение абсолютной продольной деформации Δl к первоначальной длине l называется *относительной продольной деформацией*:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.2)$$

Согласно *закону Гука при растяжении и сжатии* относительная продольная деформация пропорциональна нормальному напряжению:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma, \quad (1.1)$$

где E – модуль нормальной упругости (модуль Юнга). Модуль нормальной упругости является важнейшей характеристикой механических свойств материала. Она характеризует жесткость материала, то есть его способность сопротивляться деформированию, и является важнейшей характеристикой механических свойств материала. Отметим, что закон Гука выполняется при нормальных напряжениях, не превышающих предела пропорциональности для данного материала.

На основании формул (1.1), (1.2), (1.3) абсолютная продольная деформация бруса определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{Nl}{ES} \quad (1.2)$$

Произведение ES называют *жесткостью сечения стержня при растяжении (сжатии)*.

Если брус состоит из нескольких участков с первоначальными длинами l_i , постоянными площадями поперечных сечений S_i и постоянными продольными силами N_i , то абсолютная продольная деформация всего бруса равна сумме деформаций всех его участков:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \frac{N_i l_i}{E S_i} \quad (1.5)$$

Условие жесткости бруса:

$$\Delta l_{\max} \leq [\Delta l], \quad (1.6)$$

где Δl_{\max} – максимальное удлинение или укорочение рассчитываемого бруса, м; $[\Delta l]$ – заданное допустимое удлинение или укорочение бруса, м.

Прочность бруса, работающего на растяжение или сжатие, оценивается по *методу допускаемых напряжений*, согласно которому: максимальное по модулю нормальное напряжение не должно превышать заданного *допускаемого нормального напряжения* $[\sigma]$:

$$\max|\sigma_x| \leq [\sigma], \quad (1.7)$$

где $\max|\sigma_x|$ - наибольшее по модулю нормальное напряжение среди всех поперечных сечений стержня (определяется в результате расчетов), $[\sigma]$ – допустимое напряжение на растяжение $[\sigma]_p$ или допустимое напряжение на сжатие $[\sigma]_c$. Для пластичных материалов допустимые напряжения $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_c$ являются примерно одинаковыми, а для хрупких материалов – существенно различными.

Понятие допустимого напряжения определяется как отношение опасного (предельного) для данного материала напряжения $\sigma_{оп}$, определяемого экспериментально, на нормативный коэффициент запаса прочности $[n]$:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{оп}}{[n]}, n = 3 \dots 5 \quad (1.8)$$

Для пластичных материалов в качестве опасного напряжения принимается предел текучести σ_T , а для хрупких – временное сопротивление (предел прочности σ_B).

Пример выполнения РГР

«Расчёт бруса на прочность и жёсткость при растяжении – сжатии»

Стальной ступенчатый брус (рисунок 1.2) состоит из двух частей одинаковой длины $l = 100$ мм с поперечными сечениями площадью $S_1 = S_2 = 10 \text{ мм}^2$ и $S_3 = S_4 = 20 \text{ мм}^2$. Брус испытывает деформацию растяжения - сжатия под действием внешней нагрузки $F_1 = 400$ Н, $F_2 = 0$ Н, $F_3 = 800$ Н, $F_4 = 0$ Н. Модуль нормальной упругости материала бруса $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; допустимое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Требуется построить эпюры продольной силы N (Н), нормального напряжения σ (МПа) и перемещений поперечных сечений U (мм); проверить брус на условие прочности.

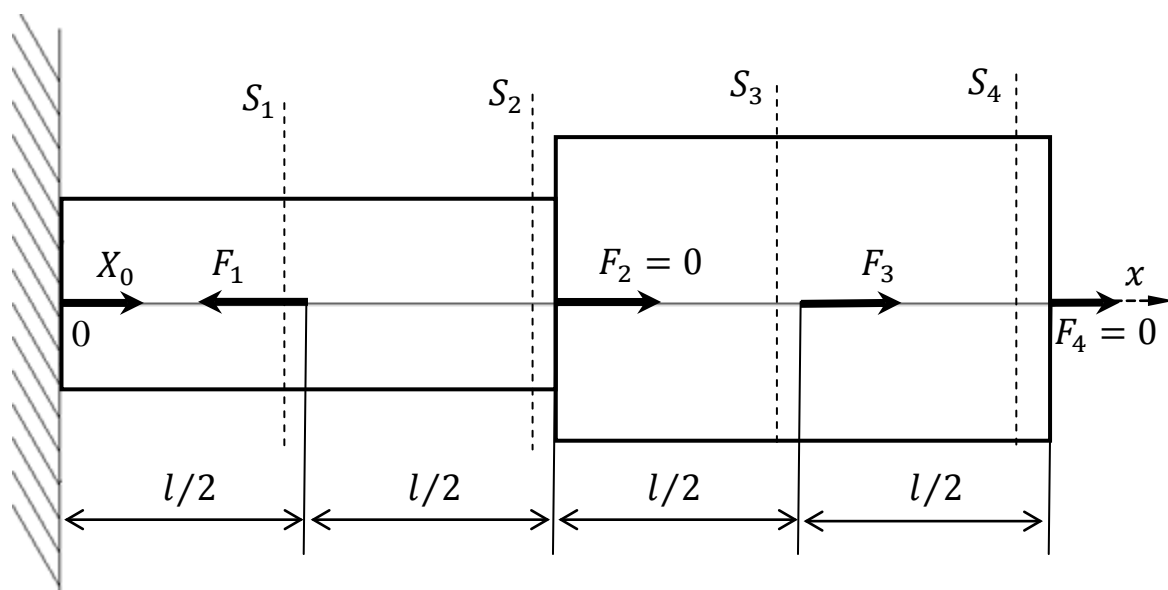


Рисунок 1.2 – Исходная схема бруса

Решение

Брус необходимо разбить на *участки нагружения*. В данной задаче границами участков нагружения являются сечения бруса, в которых происходит скачкообразное изменение площади поперечного сечения, а также сечения, к которым приложены внешние силы F_1 и F_2 .

Получаем четыре участка нагружения длиной $l/2$ каждый. Пронумеруем участки слева направо в положительном направлении оси бруса Ox (рисунок 1.3а). На участках нагружения продольные силы постоянны.

Из уравнения равновесия для проекций на ось Ox сил приложенных к системе найдем реакцию опоры X_0 :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_0 - F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0$$

отсюда:

$$X_0 = F_1 - F_2 - F_3 - F_4 = 400 - 0 - 800 - 0 = -400 \text{ Н}$$

Знак минус найденной реакции X_0 означает, что она имеет отрицательную проекцию на ось Ox и в действительности направлена противоположно оси Ox . Применим метод сечений. Мысленно рассечем брус на 4 участка нагружения и рассмотрим левую отсечённую часть бруса (рисунок 1.3а). Неизвестную продольную силу N_4 будем всегда направлять вправо, сонаправлено с осью Ox . Из уравнения равновесия левой отсечённой части бруса имеем:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_0 - F_1 + F_2 + F_3 + N_4 = 0$$

Отсюда находим продольную силу N_4 на четвертом участке нагружения:

$$N_4 = -X_0 + F_1 - F_2 - F_3 = -(-400) + 400 - 0 - 800 = 0$$

Аналогичным образом определяем продольную силу на остальных участках.

Участок 3: $(l, 3l/2)$ (рисунок 1.3б).

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_0 - F_1 + F_2 + N_3 = 0$$

$$N_3 = -X_0 + F_1 - F_2 = -(-400) + 400 - 0 = 800 \text{ Н}$$

Участок 2: $(l/2, l)$ (рисунок 1.3в)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_0 - F_1 + N_2 = 0$$

$$N_2 = -X_0 + F_1 = -(-400) + 400 = 800 \text{ Н}$$

Участок 1: $(0, l/2)$ (рисунок 1.3г).

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_0 + N_1 = 0$$

$$N_1 = -X_0 = -(-400) = 400 \text{ Н}$$

На первом, втором и третьем участках имеет место деформация растяжения ($N_1 > 0$, $N_2 > 0$, $N_3 > 0$), на четвёртом участке деформации нет ($N_4 = 0$).

График изменения (эпюра) продольной силы N показан на рисунке 1.4а.

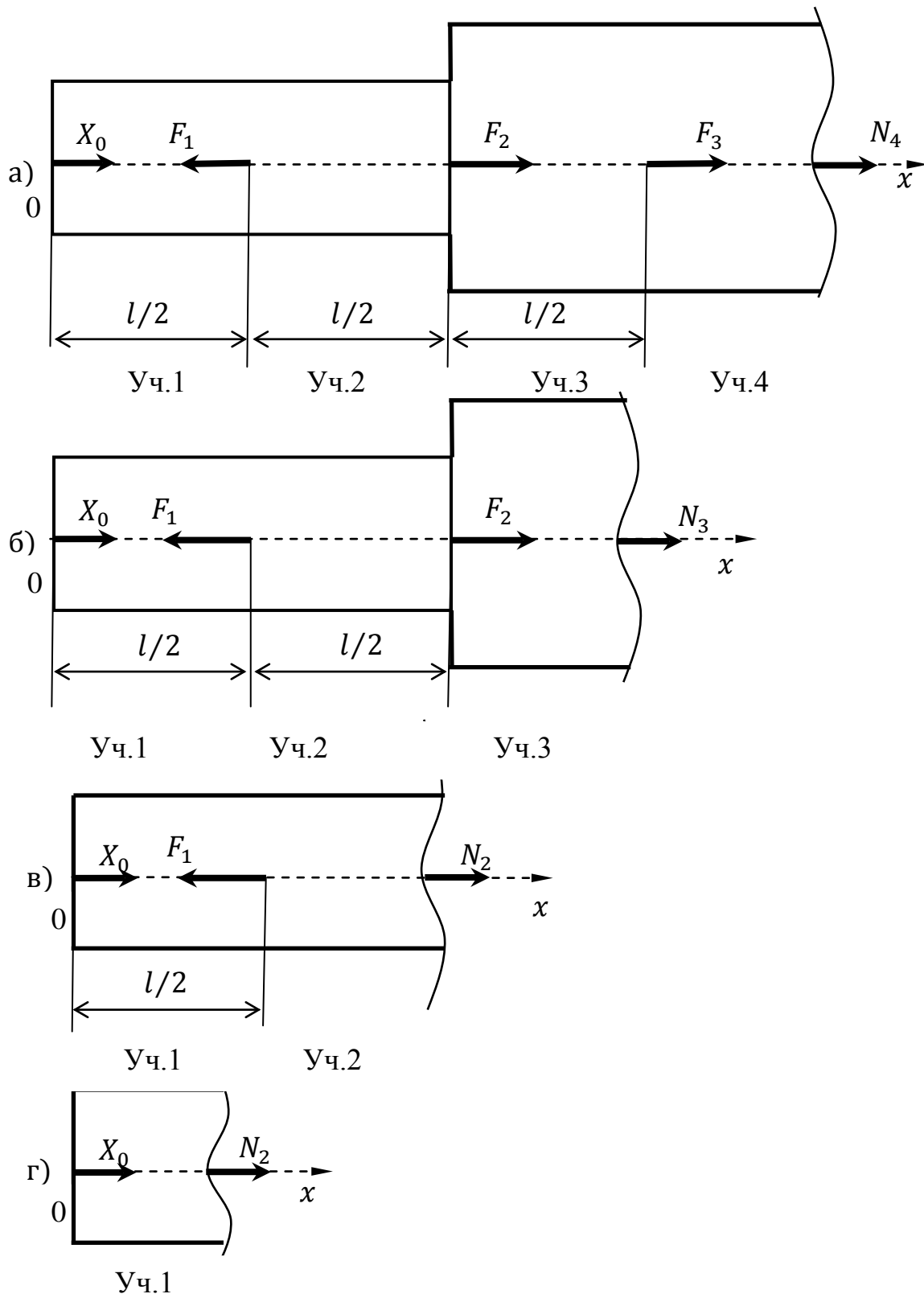


Рисунок 1.3 – Определение продольных сил N_i методом сечений

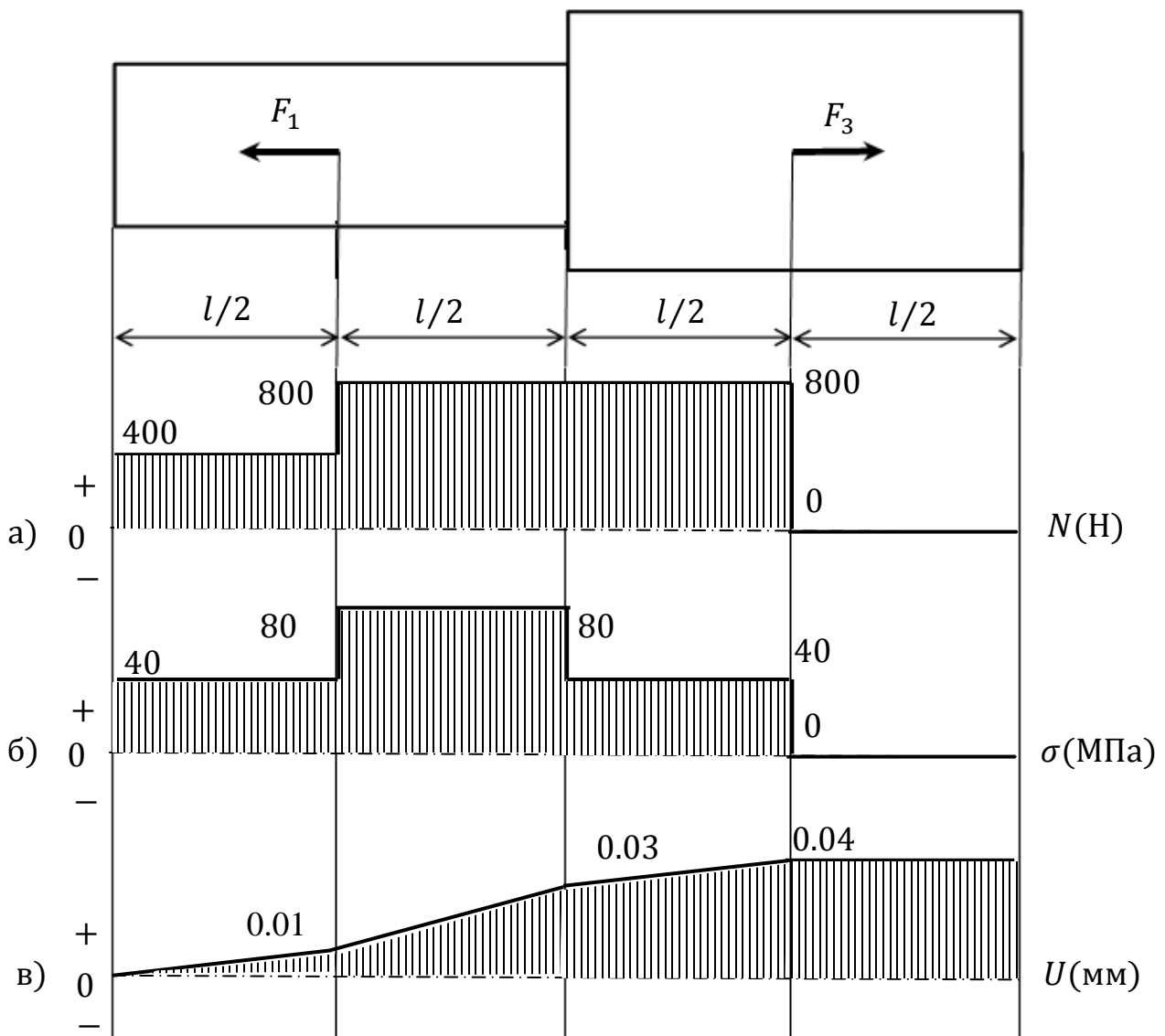


Рисунок 1.4 – Эпюры продольной силы N , нормального напряжения σ и смещений поперечных сечений U .

Нормальные напряжения на участках нагружения бруса находятся по формуле (1.1):

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{400}{10} = 40 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{800}{10} = 80 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_3} = \frac{800}{20} = 40 \text{ МПа}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{S_4} = \frac{0}{20} = 0 \text{ МПа}$$

Эпюра нормальных напряжений σ (МПа) показана на рисунке 1.4б. Значения нормальных напряжений на всех участках удовлетворяют условию прочности (1.6).

Абсолютные продольные деформации Δl_i на четырех участках нагружения бруса находим по формуле (1.4):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \frac{l}{2}}{ES_1} = \frac{400 * 50}{2 * 10^5 * 10} = 0.01 \text{ мм}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \frac{l}{2}}{ES_2} = \frac{800 * 50}{2 * 10^5 * 10} = 0.02 \text{ мм}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \frac{l}{2}}{ES_3} = \frac{800 * 50}{2 * 10^5 * 20} = 0.01 \text{ мм}$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \frac{l}{2}}{ES_4} = \frac{0 * 50}{2 * 10^5 * 10} = 0 \text{ мм}$$

Перемещение правой границы i -го участка U_i находят как сумму перемещения левой границы участка U_{i-1} с абсолютной продольной деформацией Δl_i участка:

$$U_0 = 0 \text{ мм}$$

$$U_1 = U_0 + \Delta l_1 = 0.01 \text{ мм}$$

$$U_2 = U_1 + \Delta l_2 = 0.01 + 0.02 = 0.03 \text{ мм}$$

$$U_3 = U_2 + \Delta l_3 = 0.03 + 0.01 = 0.04 \text{ мм}$$

$$U_4 = U_3 + \Delta l_4 = 0.04 + 0 = 0.04 \text{ мм}$$

Поскольку на каждом участке продольная сила постоянна, перемещение промежуточных сечений на каждом участке изменяется по линейному закону. Эпюра перемещений сечений бруса U показана на рисунке 1.4в.

Исходные данные для выполнения РГР

Стальной ступенчатый брус состоит из двух частей одинаковой длины $l = 100$ мм с постоянными площадями поперечных сечений $S_1 = 10 \text{ мм}^2$ и $S_2 = 20 \text{ мм}^2$ (рисунок А.1). Брус испытывает деформацию растяжения - сжатия под действием внешней нагрузки $F_1 = 400 \text{ Н}$; $F_2 = 800 \text{ Н}$; $F_3 = 1200 \text{ Н}$. Модуль нормальной упругости материала стержня $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; допускаемое нормальное напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Требуется построить эпюры продольной силы N (Н), нормального напряжения σ (МПа) и перемещений поперечных сечений U (мм); проверить брус на условие прочности.

Исходные схемы бруса приведены в Приложении А.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какой вид деформации бруса называется растяжением и сжатием?
2. Как называется внутреннее усилие, действующее в поперечных сечениях бруса при растяжении и сжатии? В каких единицах оно измеряется?
3. Как называется метод определения внутреннего усилия при растяжении и сжатии? Как оно определяется с использованием этого метода?
4. Как называется напряжение, действующее в поперечных сечениях бруса при растяжении и сжатии? В каких единицах оно измеряется?
5. По какой формуле вычисляется напряжение в поперечных сечениях бруса при растяжении и сжатии?
6. Что называется абсолютной продольной деформацией бруса?
7. Что называется относительной продольной деформацией бруса?
8. Как формулируется закон Гука при растяжении и сжатии? При каком условии он выполняется?
9. Как называется характеристика механических свойств материала, используемая в законе Гука? В каких единицах она измеряется?
10. По какой формуле вычисляется абсолютная продольная деформация бруса?
11. Как определяется абсолютная деформация бруса при нескольких участках нагружения?
12. Как формулируется условие прочности бруса при растяжении и сжатии?

КРУЧЕНИЕ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Обозначения и расчетные формулы

Кручением называется такой вид деформации вала, при котором во всех его поперечных сечениях действует только одно внутреннее усилие - крутящий момент. Крутящий момент принято обозначать M_k . Крутящий момент действует в плоскости поперечного сечения вала. На рисунке 2.1 показаны крутящие моменты с положительной и отрицательной проекцией на ось Ox .

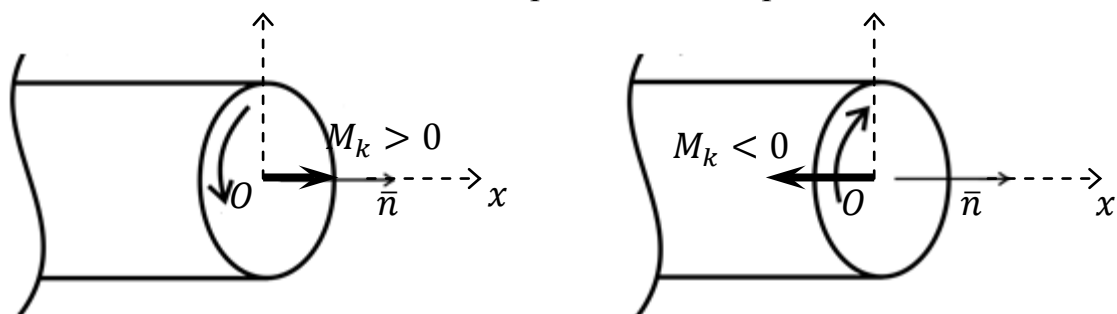


Рисунок 2.1 – Правило знаков крутящего момента M_k

При кручении вала в его поперечных сечениях действуют только касательные напряжения τ . Распределение касательных напряжений в случае, когда поперечное сечение вала является круглым с диаметром d показано на рисунке 2.2.

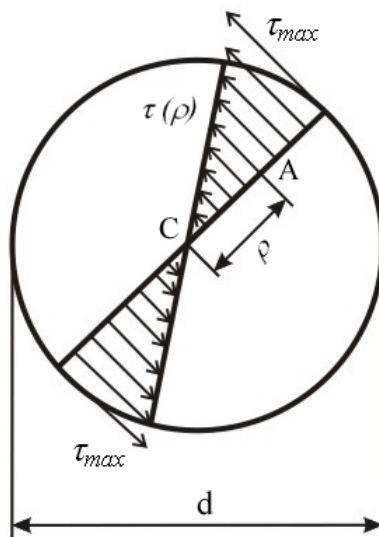


Рисунок 2.2 – Распределение касательных напряжений τ в круглом поперечном сечении вала при кручении.

Касательное напряжение в точке A круглого сечения направлено перпендикулярно диаметру, проходящему через эту точку и по величине прямо пропорционально расстоянию ρ от данной точки до центра C .

$$\tau(\rho) = \frac{|M_k|}{I_\rho} \rho, \quad 0 \leq \rho \leq r \quad (2.1)$$

здесь $I_\rho = \pi d^4/32$ – геометрическая характеристика круглого сечения, называемая *полярным моментом инерции*.

Максимальное значение касательного напряжения σ_{max} достигается в наиболее удаленных от центра C точках сечения ($\rho_{max} = r$) на внешней поверхности вала и вычисляется по формуле:

$$\tau_{max} = \frac{|M_k|}{I_\rho} \rho_{max} = \frac{|M_k|}{W_\rho}, \quad 0 \leq \rho \leq r \quad (2.2)$$

где $W_\rho = \pi d^3/16$ называется *полярным моментом сопротивления* сечения вала.

Полярный момент инерции и полярный момент сопротивления допускается вычислить по приближенным формулам:

$$I_\rho = \frac{\pi}{32} d^4 \approx 0.1 d^4, \quad W_\rho = \frac{\pi}{16} d^3 \approx 0.2 d^3 \quad (2.3)$$

Касательное напряжение определяется по модулю и его величина не зависит от направления крутящего момента. В качестве измерения касательного напряжения обычно используется *мегапаскаль* (МПа).

При кручении вала предполагается, что его длина остается неизменной и его поперечные сечения остаются плоскими (*гипотеза плоских сечений Бернулли*).

Угол закручивания **Ошибка! Закладка не определена.** $\Delta\varphi$ (рад) вала (угол поворота одного граничного сечения относительно другого граничного сечения) прямо пропорционально крутящему моменту (*закон Гука при кручении*):

$$\Delta\varphi = \frac{M_k l}{G I_\rho}, \quad (2.4)$$

где G (МПа) является характеристикой механических свойств материала и называется *модулем сдвига* или *модулем касательной упругости*.

Формула (2.4) справедлива в ограниченном диапазоне крутящего момента M_k .

Условие прочности вала при кручении: максимальное касательное напряжение не должно превышать *допускаемое касательное напряжение* $[\tau]$:

$$\max \tau = \max \frac{|M_k|}{W_\rho} \leq [\tau]. \quad (2.5)$$

Величину допускаемого напряжения $[\tau]$ можно определить по пределам текучести τ_T и прочности τ_B согласно формуле:

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{n_T} \quad (2.6)$$

здесь n_T – значение запаса по пределу текучести, принимается для пластичных материалов следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_T}{\tau_B} &\leq 0.65, \quad n_T = 1,2 \dots 1,5; \\ \frac{\tau_T}{\tau_B} &= 0.7 \dots 0.9, \quad n_T = 2 \dots 3. \end{aligned}$$

При отсутствии данных по пределу текучести значение допускаемого напряжения вычисляется по формуле:

$$[\tau] = \frac{\tau_B}{n_B}, \quad (2.7)$$

где запас прочности $n_B = 3 \dots 3,5$.

Для материалов, диаграмма деформирования которых не имеет площадки текучести, вместо физического предела текучести τ_T применяется условный (технический предел текучести) $\tau_{0,3}$, соответствующий остаточной деформации сдвига 0,3 %.

В случае, когда в справочной литературе не указаны пределы текучести τ_T и $\tau_{0,3}$, значения этих характеристик материала следует определять по гипотезе пластичности Треска-Сен-Венана: $\tau_T = 0,5\sigma_T$ или $\tau_{0,3} = 0,5\sigma_{0,2}$, $\tau_B = 0,5\sigma_B$.

Угол закручивания на единице длины бруса называется относительным углом закручивания θ (рад/м) и вычисляется по формуле:

$$\theta = \frac{M_k}{GI_p} \quad (2.8)$$

Модуль упругости материала G определяется по формуле:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad (2.9)$$

где μ – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

Условие жесткости накладывает ограничение на величину относительного угла закручивания:

$$\frac{\pi}{180} \theta_{max} \leq [\theta^0], \quad (2.10)$$

где $[\theta^0]$ – допускаемый угол закручивания в град/м.

Пример выполнения РГР

«Расчет вала на прочность и жесткость при кручении»

Стальной ступенчатый вал (рисунок 2.3) состоит из трех участков одинаковой длины $l = 80$ мм с круглыми поперечными сечениями диаметрами $d_1 = 10$ мм и $d_2 = 20$ мм. Вал испытывает деформацию кручения под действием внешних моментов $M_1 = 16 \cdot 10^3$ Н·мм, $M_2 = 4 \cdot 10^3$ Н·мм, $M_3 = 8 \cdot 10^3$ Н·мм. Модуль сдвига материала вала $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; Допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 100$ МПа.

Требуется построить эпюры крутящего момента M_k (Н·мм), максимального касательного напряжения τ_{max} и угла поворота поперечных сечений φ (рад); проверить вал на условие прочности.

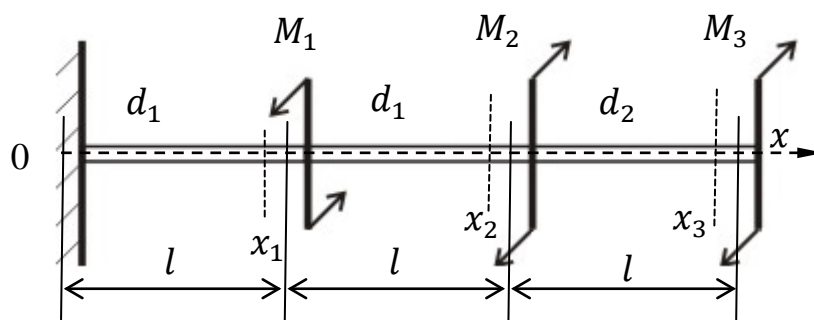


Рисунок 2.3 – Исходная схема вала

Решение

Разобьем вал на три участка *нагрузки*, границами которых являются сечения, в которых действуют закручивающие моменты M_i и изменяются диаметры поперечных сечений. Пронумеруем эти участки слева направо в положительном направлении оси вала Ox (рисунок 2.4а). На участках нагружения крутящие моменты постоянны.

Из уравнения равновесия моментов относительно оси Ox (за положительное направление принимаем закручивание против хода часовой стрелки, глядя с положительного направления оси Ox) имеем:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_0 + M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

Найдем реакцию M_0 в заделке:

$$M_0 = -M_1 + M_2 + M_3 = (-16 + 4 + 8) \cdot 10^3 = -4 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

Знак минус у найденного момента M_0 означает, что вектор момента \bar{M}_0 он направлен против оси Ox (рисунок 2.4а).

На участке 3 проведем сечение с координатой x_3 ($2l < x_3 < 3l$) и рассмотрим левую отсеченную **Ошибка! Закладка не определена.** часть вала. Из уравнения равновесия для левой части (рисунок 2.4а) имеем:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_0 + M_1 - M_2 + M_{k3} = 0$$

находим:

$$M_{k3} = -M_0 - M_1 + M_2 = (4 - 16 + 4) \cdot 10^3 = -8 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

Аналогичным образом определяется крутящий момент на остальных участках.

Участок 2: ($l < x_2 < 2l$), (рисунок 2.4б)

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_0 + M_1 + M_{k2} = 0$$

находим:

$$M_{k2} = -M_0 - M_1 = (4 - 16) \cdot 10^3 = -12 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

Участок 1: ($0 < x_1 < l$), (рисунок 2.4в)

$$\sum M_x = 0 \Leftrightarrow M_0 + M_{k1} = 0$$

Находим:

$$M_{k1} = -M_0 = 4 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

По полученным результатам расчетов строим эпюру крутящего момента (рисунок 2.5а).

Полярные моменты сопротивления круглых сечений с заданными диаметрами d_1 и d_2 вычисляются по формулам:

$$W_{\rho 1} \approx 0.2d_1^3 = 0.2 \cdot 10^3 = 200 \text{ мм}^3$$

$$W_{\rho 2} \approx 0.2d_2^3 = 0.2 \cdot 20^3 = 1600 \text{ мм}^3$$

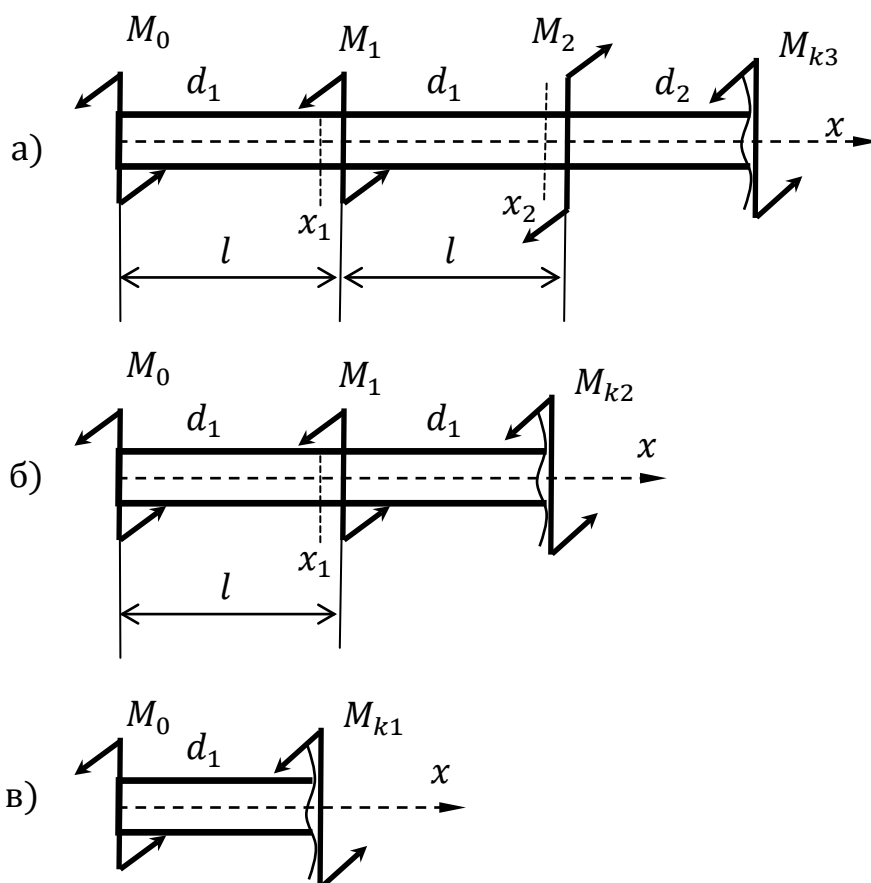


Рисунок 2.4 – Определение крутящего момента M_k методом сечений

Определяем максимальное касательное напряжение на данных участках:

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_{k1}}{W_{\rho 1}} = \frac{4 * 10^3}{200} = 20 \text{ МПа}$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{M_{k2}}{W_{\rho 1}} = \frac{-12 * 10^3}{200} = -60 \text{ МПа}$$

$$\tau_{\max 3} = \frac{M_{k3}}{W_{\rho 2}} = \frac{-8 * 10^3}{1600} = -5 \text{ МПа}$$

Эпюра максимальных касательных напряжений изображена на рисунке 2.5б.

Условие прочности (2.5) выполняется на всех трех участках. $\tau_{\max i}$

Вычисляем полярные моменты инерции круглых сечений с заданными диаметрами d_1 и d_2 по формулам (2.3):

$$I_{\rho 1} = 0.1d_1^4 = 0.1 * 10^4 = 10^3 \text{ мм}^4$$

$$I_{\rho 2} = 0.1d_2^4 = 0.1 * 20^4 = 16 * 10^3 \text{ мм}^4$$

Углы закручивания участков вала определяем по формуле (2.4):

$$\Delta\varphi_1 = \frac{M_{k1}l}{GI_{\rho 1}} = \frac{4 * 10^3 * 80}{8 * 10^4 * 10^3} = 0.004 \text{ рад}$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{M_{k2}l}{GI_{\rho_1}} = \frac{-12 * 10^3 * 80}{8 * 10^4 * 10^3} = -0.012 \text{ рад}$$

$$\Delta\varphi_3 = \frac{M_{k3}l}{GI_{\rho_2}} = \frac{-8 * 10^3 * 80}{8 * 10^4 * 16 * 10^3} = -0.0005 \text{ рад}$$

Суммируя, получаем углы закручивания граничных сечений вала

$$\varphi_0 = 0 \text{ рад}$$

$$\varphi_1 = \Delta\varphi_1 = 0.004 \text{ рад}$$

$$\varphi_2 = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = (0.004 - 0.012) \text{ рад} = -0.008 \text{ рад}$$

$$\varphi_3 = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 = (0.004 - 0.012 - 0.0005) \text{ рад} = -0.0085 \text{ рад}$$

Эпюра углов закручивания всех поперечных сечений вала изображена на рисунке 2.5в.

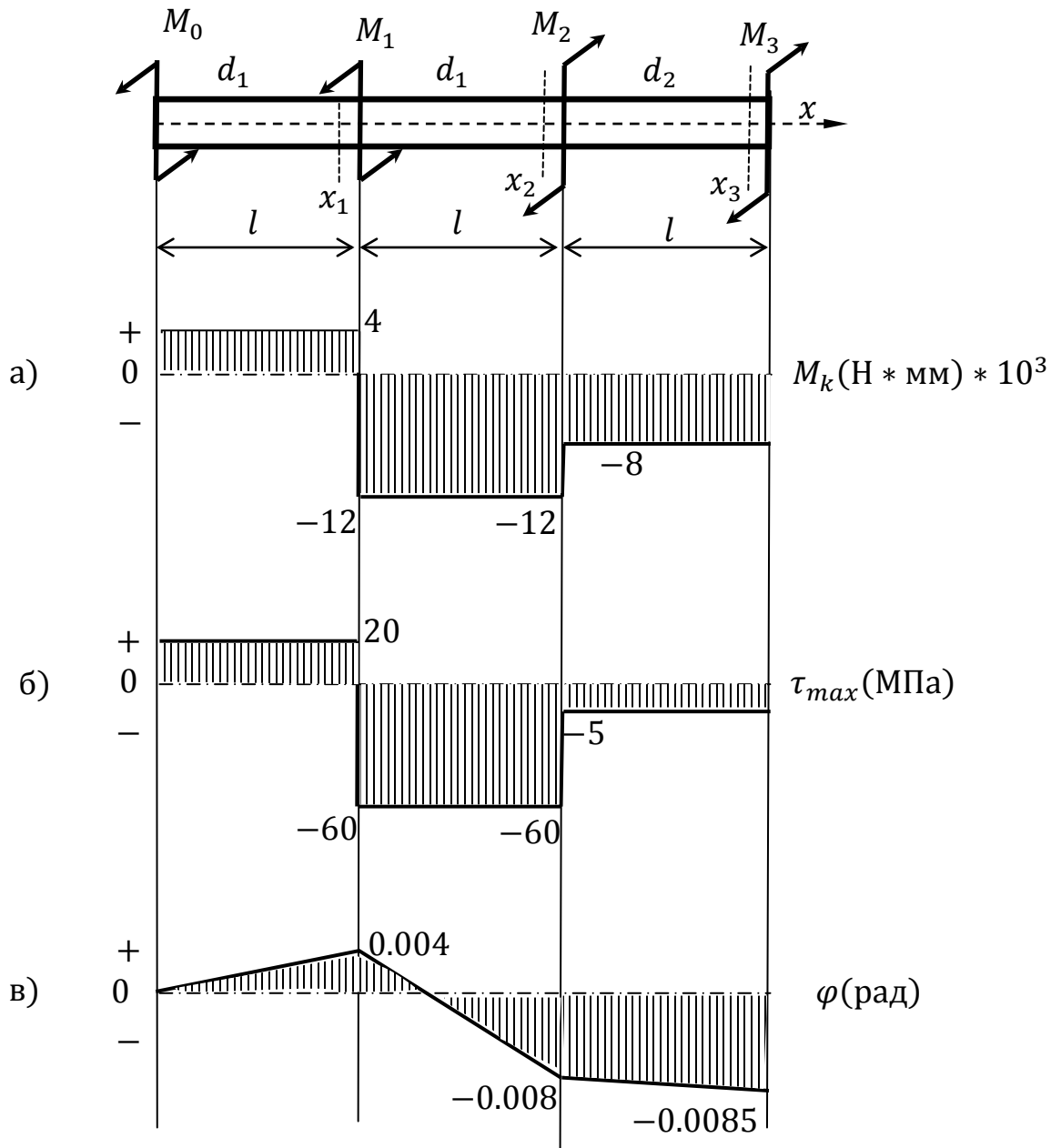


Рисунок 2.5 – Эпюры крутящего момента M_k , максимального касательного напряжения τ_{max} и угла поворота поперечных сечений φ

Исходные данные для выполнения РГР

Постановка задачи полностью соответствует той, которая сформулирована в представленном примере.

Исходные данные приведены в Приложении В.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какой вид деформации вала называется кручением?
2. Как называется внутреннее усилие, действующее в поперечных сечениях вала при кручении? В каких единицах оно измеряется?
3. Как называется метод определения внутреннего усилия при кручении?
4. Как называются напряжения, действующие в поперечных сечениях вала при кручении? В каких единицах они измеряются?
5. Как распределены напряжения в круглом поперечном сечении вала при кручении? По какой формуле они вычисляются в заданной точке сечения?
6. Что называется углом закручивания вала? В каких единицах он измеряется?
7. Как формулируется условие прочности вала при кручении?

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

Обозначения и расчетные формулы

Ранее было рассмотрено напряженное состояние в точке при простых напряженных состояниях, в которых возникает либо нормальное напряжение в одном направлении (растяжение), либо касательное напряжение в одной плоскости (кручение). Но в реальных конструкциях зачастую возникают сразу несколько видов напряжений в элементарном объеме. Такое напряженное состояние называется *сложным*.

Главные площадки – это площадки, проходящие через исследуемую точку, на которых *касательные напряжения* отсутствуют.

Главные напряжения – это возникающие на главных площадках нормальные напряжения.

В общем случае нагружения (при объемном напряженном состоянии) среди множества площадок, проходящих через некоторую точку тела, всегда можно найти три взаимно перпендикулярные главные площадки. В окрестности любой точки деформированного твердого тела всегда можно выделить элементарный параллелепипед, ориентированный в пространстве таким образом, что по его граням будут возникать только нормальные напряжения.

Рассмотрим частный случай сложного напряженного состояния – плоское напряженное состояние.

При плоском напряженном состоянии сумма нормальных напряжений, возникающих на любых двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через некоторую точку тела, остается постоянной.

Главные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_1 = \left(\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right) / 2 \quad (3.1)$$

$$\sigma_2 = \left(\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right) / 2 \quad (3.2)$$

Положение главных площадок определяется углом поворота, угол поворота связан зависимостью:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \theta_p = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.3)$$

Главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 приводят к линейной деформации (типа растяжение-сжатие) соответствующих главных площадок куба. В соответствии с общим законом Гука для плоского напряженного состояния главные относительные деформации ε_1 , ε_2 и относительная деформация ε_z (вдоль оси Oz) равны соответственно:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_2), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu\sigma_1), \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} (-\mu(\sigma_1 + \sigma_2)), \quad (3.4)$$

где E – модуль нормальной упругости (модуль Юнга), μ – коэффициент Пуассона.

По значениям главных напряжений дается оценка прочности материала в исследуемой точке деформированного твердого тела.

Существует ряд теорий прочности; в каждом отдельном случае пользуются той из них, которая в наибольшей степени отвечает характеру нагружения и разрушения материала.

В каждой теории прочности используется определенная гипотеза прочности, которая представляет собой предположения о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора.

Гипотезы прочности:

А. I теория прочности (критерий наибольших нормальных напряжений).

Согласно первой теории прочности предельное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает, когда наибольшее нормальное напряжение достигает значения предельного напряжения при одноосном напряженном состоянии, т.е.

$$\sigma_1 < [\sigma], |\sigma_3| < [\sigma], \text{ при } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad (3.5)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

В. II Теория прочности (критерий наибольших линейных деформаций).

Экспериментальная проверка *II теории прочности* выявила ряд недостатков, поэтому она почти не применяется для расчетов.

С. III теория прочности (критерий наибольших касательных напряжений).

Согласно третьей теории прочности предельное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает, когда наибольшее касательное напряжение достигает значения предельного касательного напряжения при одноосном напряженном состоянии, т.е.

$$\tau_{max} \leq [\tau] \quad (3.1)$$

Максимальное касательное напряжение связано с максимальным σ_1 и минимальным σ_3 главными напряжениями ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$):

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.7)$$

а также допустимое касательное связано с допустимым нормальным напряжением $[\tau] = [\sigma]/2$. В результате условие (3.6) можно окончательно записать как:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (3.8)$$

D. IV теория прочности (энергетический критерий, критерий Мизеса)

Согласно четвертой теории прочности прочность материала при сложном напряженном состоянии обеспечивается, если удельная потенциальная энергия деформации не превосходит допускаемой для одноосного напряженного состояния.

$$u_{max} \leq [u] \quad (3.9)$$

Для плоского напряженного состояния энергетический критерий имеет вид:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma] \text{ или } \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \leq [\sigma]^2 \quad (3.10)$$

Пример выполнения задания

«Расчет напряжения в точке при плоском напряженном состоянии»

Для заданного плоского напряженного состояния (рисунок 3.1) в точке определить:

- главные напряжения σ_{max} и σ_{min} ;
- положение главных площадок;
- главные деформации ε_1 , ε_2 , ε_3 ;
- проверить выполнение условий прочности в точке тела по I, III и IV теориям прочности, если предельно допустимое напряжение для данного материала равно $[\sigma]$.

Исходные данные:

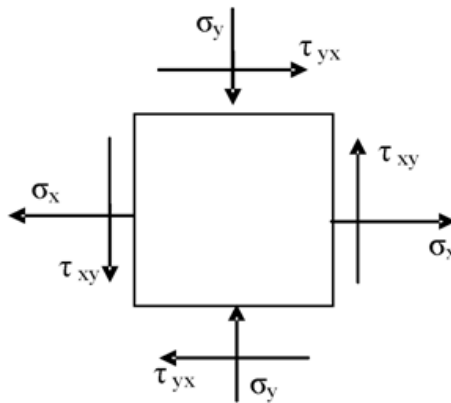


Рисунок 3.1 – Условие задачи

$$|\sigma_x| = 10 \text{ МПа}, \quad |\sigma_y| = 30 \text{ МПа}, \quad |\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| = 20 \text{ МПа},$$

$$E = 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu = 0.3, \quad [\sigma] = 100 \text{ МПа}$$

1) Определение знаков нормальных и касательных напряжений

Правило знаков для нормальных напряжений: нормальное растягивающее напряжение считается положительным, сжимающее – отрицательным. Следовательно, для данного рисунка нормальное напряжение по оси Ox будет положительным, а по оси Oy – отрицательным:

$$\sigma_x = 10 \text{ МПа}, \quad \sigma_y = -30 \text{ МПа}$$

Касательные напряжения на правой и верхней гранях куба считаются положительными, если они совпадают по направлению с координатными осями, соответствующим вторым символам в их обозначениях. Например, в данном случае вектор τ_{xy} сонаправлен с осью Oy и считается положительным.

По правилу *парности касательных напряжений* для плоского напряженного состояния касательные напряжения на смежных гранях равны $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Таким образом, получаем:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 20 \text{ МПа}$$

2) Главные площадки и главные напряжения

Главные напряжения определяем по формуле (3.1) и (3.2):

$$\sigma_1 = \left(10 - 30 + \sqrt{(10 - (-30))^2 + 4 * 20^2} \right) / 2 = (-20 + 56) / 2 = 18 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \left(10 - 30 - \sqrt{(10 - (-30))^2 + 4 * 20^2} \right) / 2 = (-20 - 56) / 2 = -38 \text{ МПа}$$

Положение главных площадок определяется углом поворота θ_p куба вокруг оси Oz от исходного положения. Угол θ_p находится из формулы (3.3)

В данном случае $\theta_p = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 * 20}{10 - (-30)} = 22.5^\circ$. Положительное направление отсчета угла поворота θ_p считается против часовой стрелки. Положение исходных и главных площадок с приложенными к ним напряжениями необходимо показать на рисунке (рисунок 3.2).

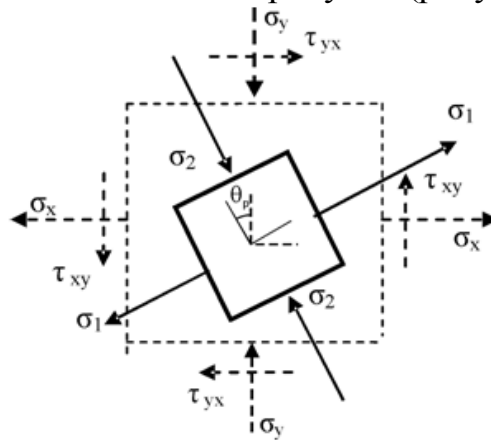


Рисунок 3.2 – Положения исходных и главных площадок

3) Главные деформации

Главные относительные деформации ε_1 , ε_2 и относительная деформация ε_z определяются из формулы (3.4).

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{10^5} (18 - 0.3 * (-38)) = 29 * 10^{-5},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{10^5} (-38 - 0.3 * 18) = -43 * 10^{-5},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{10^5} (-0.3(18 - 38)) = 6 * 10^{-5}.$$

4) Проверка прочности тела в точке по критериям I, III и IV теориям прочности

Введем новые обозначения главных напряжений: в дополнение к двум полученным ранее главным напряжениям, добавляем третье (нулевое для плоского напряженного состояния) главное напряжение $\sigma_z = 0$, действующее на площадку с нормалью Oz . Перенумеруем три главных напряжения в порядке убывания их числовых значений (с учетом знаков) $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. В результате получаем:

$$\sigma_1 = 18 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = -38 \text{ МПа}$$

Проверка условия прочности по I гипотезе.

В данной задаче имеет место случай равных допускаемых напряжений при сжатии и растяжении $[\sigma]^t = [\sigma]^c = [\sigma] = 100 \text{ МПа}$, характерный для пластичных материалов. Критерий (3.5) имеет вид:

$$\sigma_1 < [\sigma], \quad |\sigma_3| < [\sigma],$$

Очевидно, что в данной задаче этот критерий выполнен, т.к. $\sigma_1 = 18 < 100$ и $|\sigma_3| = 38 < 100$

Проверка условия прочности по III гипотезе.

Для данной задачи этот критерий (3.8) выполнен, т.к.

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 18 - (-38) = 56 \leq 100$$

Проверка условия прочности по IV гипотезе (Мизеса).

Для данной задачи энергетический критерий (3.9) выполнен, поскольку

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = 18^2 + (-38)^2 - 18 * (-38) = 324 + 1444 + 684 = 2452 < 100^2$$

Таким образом, прочность в данной точке обеспечена по всем трем теориям прочности.

Исходные данные для самостоятельной работы

Для заданного плоского напряженного состояния (таблица 2) в точке определить: главные напряжения σ_1 и σ_2 , положение главных площадок, главные деформации ε_1 , ε_2 , ε_3 , проверить выполнение условий прочности в точке тела по I, III и IV теориям прочности, если предельно допустимое напряжение для данного материала равно $[\sigma]$.

Значения нормальных и касательных напряжений и номер схемы представлены в таблице 1, при этом направление нормальных и касательных напряжений показаны в Таблице 2. Для всех вариантов модуль Юнга E , коэффициент Пуассона μ и допустимое напряжение $[\sigma]$ равны соответственно:

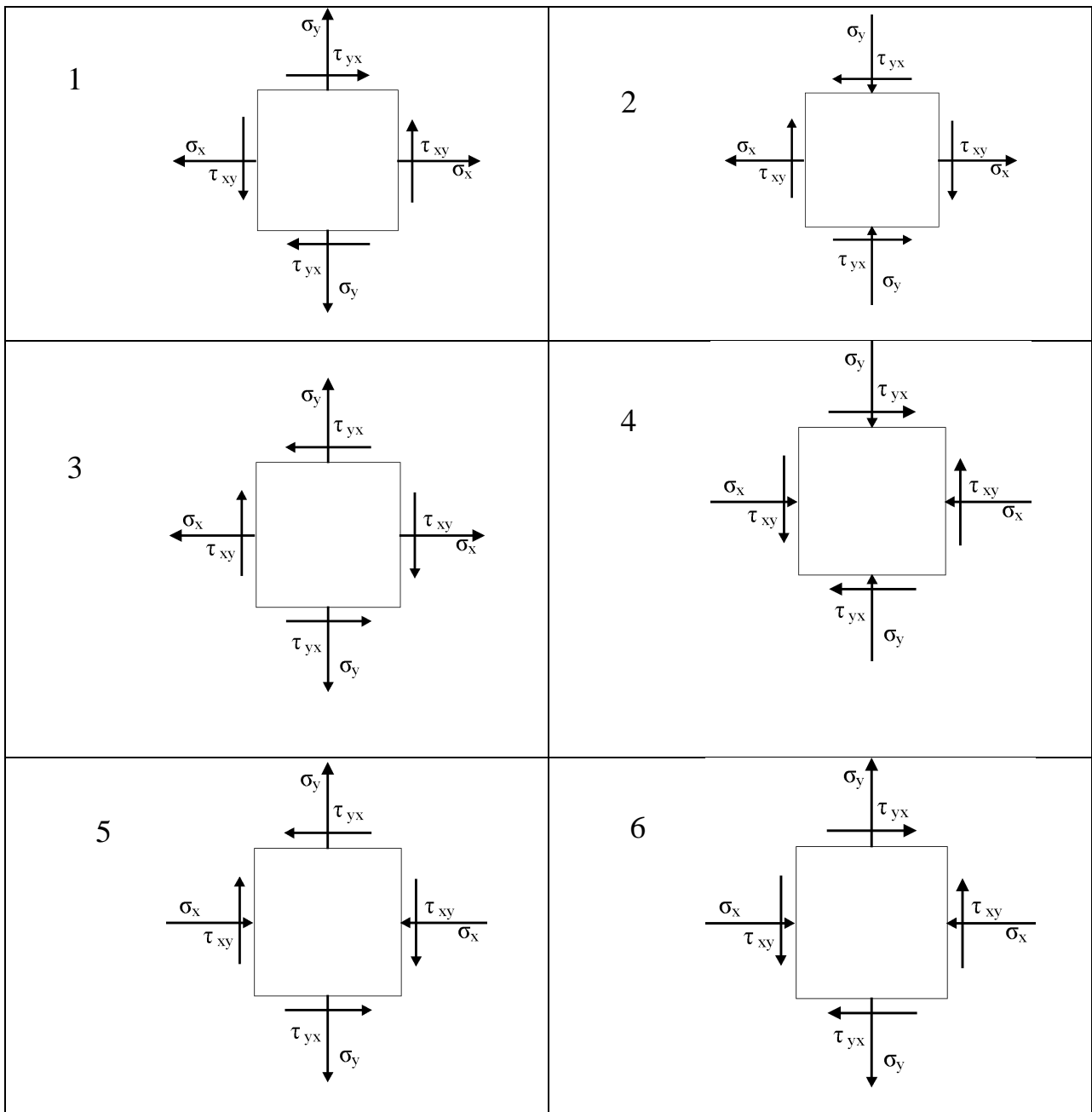
$$E = 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu = 0.3, \quad [\sigma] = 60 \text{ МПа}.$$

Таблица 1 – Исходные данные к заданию

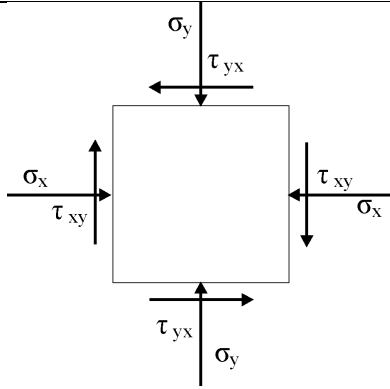
№	Схема №	Напряжения, МПа			№	Схема №	Напряжения, МПа		
		$ \sigma_x $	$ \sigma_y $	$ \tau_{xy} $			$ \sigma_x $	$ \sigma_y $	$ \tau_{xy} $
1	1	10	10	10	16	6	40	40	40
2	2	20	20	20	17	5	10	10	10
3	1	30	30	30	18	6	20	20	20
4	3	40	40	40	19	5	30	30	30
5	2	10	10	10	20	7	40	40	40
6	3	20	20	20	21	6	10	10	10
7	2	30	30	30	22	7	20	20	20

8	4	40	40	40	23	6	30	30	30
9	3	10	10	10	24	8	40	40	40
10	4	20	20	20	25	7	10	10	10
11	3	30	30	30	26	8	20	20	20
12	5	40	40	40	27	7	30	30	30
13	4	10	10	10	28	8	10	10	10
14	5	20	20	20	29	7	30	30	30
15	4	30	30	30	30	1	40	40	40

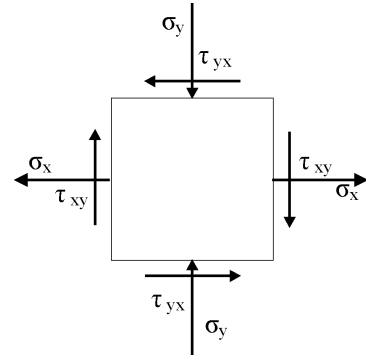
Таблица 2 – Схемы к заданию



7



8



ПЛОСКИЙ ИЗГИБ БАЛКИ

Определения и расчетные формулы

Плоским (прямым) изгибом называется такой вид деформации балки, при котором в его поперечных сечениях действуют два внутренних усилия: *поперечная сила* и *изгибающий момент*. Такая деформация балки возникает под действием внешней нагрузки, приложенной в *силовой плоскости* Oxy , проходящей через продольную ось балки Ox и главную центральную ось его поперечного сечения Oy (рисунок 4.1). На рисунке показаны следующие виды внешней нагрузки: *сосредоточенная сила* F , *равномерно распределенная нагрузка* с интенсивностью q , действующие перпендикулярно оси Ox , *сосредоточенный момент* (момент пары сил) M .

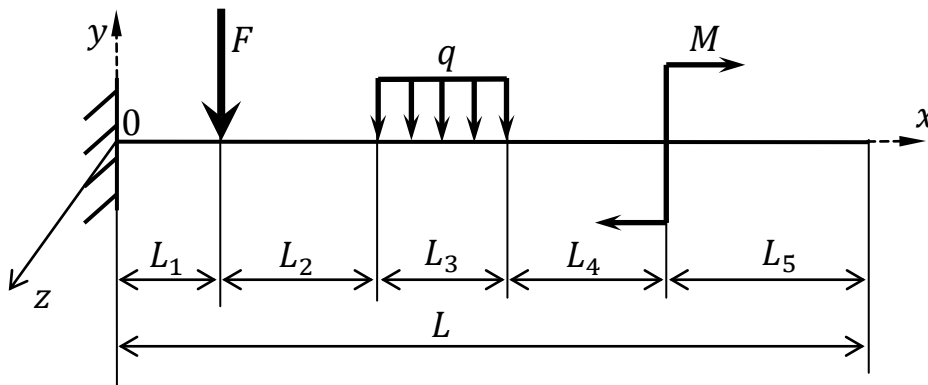


Рисунок 4.1 – Виды внешней нагрузки

В поперечных сечениях балки действуют поперечная сила Q_y , приложенная к центру тяжести поперечного сечения балки и направленная вдоль оси Oy , и изгибающий момент M_z , действующий вокруг оси Oz балки, перпендикулярной плоскости рисунка.

Рассматриваемый вид изгиба называется *плоским* потому, что изогнутая под действием внешней нагрузки ось балки (*упругая линия*) остается в силовой плоскости Oxy .

Для определения поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z используется *метод сечений*. При этом используется уравнения равновесия для левой отсеченной части балки.

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_A = 0 \quad (4.1)$$

При определении внутренних усилий Q_y и M_z следует учитывать реакции опор, находящихся в отсеченной части балки.

Например, для *консольного балки*, закрепленного слева заделкой A (рисунок 4.2а), реакции заделки определяются из уравнений равновесия (4.1):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow X_A = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow Y_A - F_1 + F_2 = 0 \\ \sum M_0 = 0 &\Rightarrow -M_A - F_1 a_1 + F_2 a_2 = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, реакции в заделке A равны:

$$X_A = 0; \quad Y_A = F_1 - F_2; \quad M_A = F_1 a_1 - F_2 a_2.$$

Если балка закреплен с помощью *неподвижного шарнира* A и *подвижного шарнира* B (рисунок 4.2б), то реакции в этих шарнирах определяются из уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow X_A = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow Y_A - F_1 + F_2 + Y_B = 0 \\ \sum M_0 = 0 &\Rightarrow -F_1 a_1 + F_2 a_2 + Y_B l = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, реакции в шарнирах A и B равны:

$$X_A = 0; \quad Y_B = (F_1 a_1 - F_2 a_2)/l; \quad Y_A = F_1 - F_2 - (F_1 a_1 - F_2 a_2)/l$$

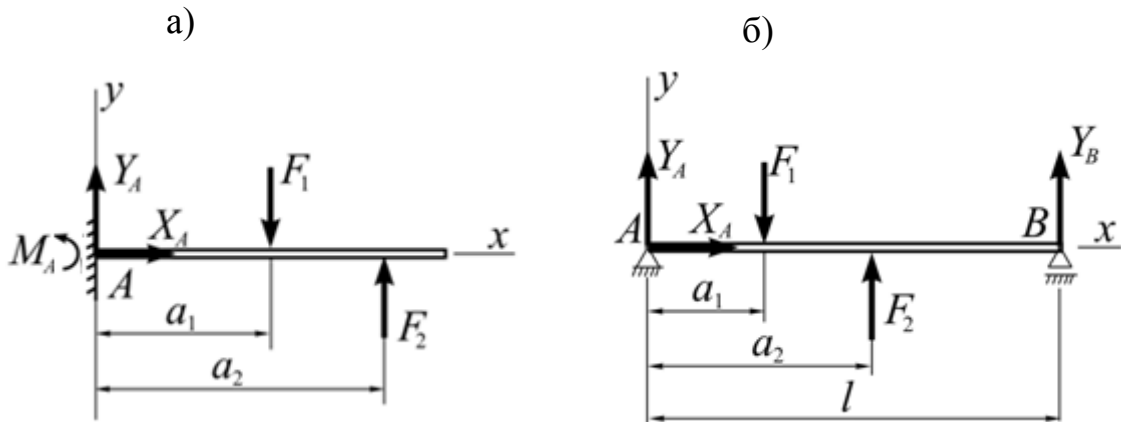


Рисунок 4.2 – Консольная и шарнирно-опертая балки

При этом рекомендуется проверить найденные реакции, например с помощью уравнения равновесия моментов относительно шарнира B :

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -Y_A l + F_1(l - a_1) - F_2(l - a_2) = 0.$$

Для определения внутренних усилий и реакций опор при действии на балку распределенных нагрузок их следует заменять *равнодействующими сосредоточенными силами*.

При равномерно распределенной нагрузке с интенсивностью q , действующей на участке балки длиной a , ее равнодействующая сила R приложена в середине этого участка и равна по величине произведению интенсивности q на длину этого участка a (рисунок 4.3а). Равнодействующие силы равномерно распределенных нагрузок могут зависеть от координаты x рассматриваемого сечения (рисунок 4.3б).

Определение поперечных сил Q_x и изгибающих моментов M_z при построении их эпюр выполняется по *участкам нагружения*. Границами таких участков являются поперечные сечения балки, в которых проложены внешние сосредоточенные силы и моменты (в том числе опорные реакции), а также в которых начинается или заканчивается действие распределенных нагрузок. Например, консольная балка (рисунок 4.3а) и балка с шарнирными опорами (рисунок 4.3б) разбиваются на пять участков нагружения.

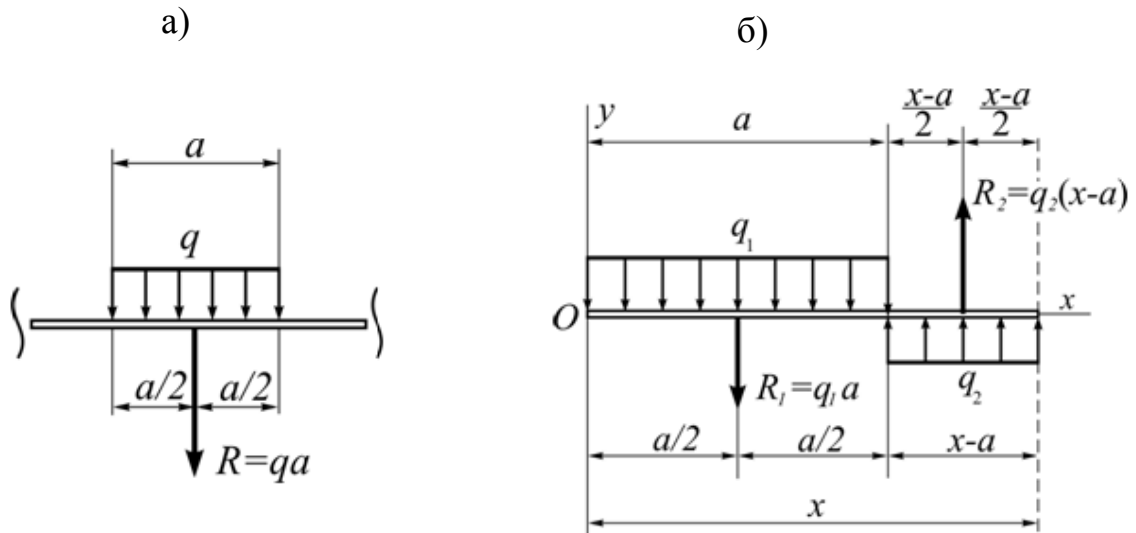


Рисунок 4.3 – Замена равномерно распределенных нагрузок равнодействующими силами

На каждом участке нагружения рассматриваются сечения балки с координатами x_i ($i = 1, 2, \dots$) *внутри* этих участков (рисунок 4.4) и определяются поперечные силы $Q_y(x_i)$ и изгибающие моменты $M_z(x_i)$.

Интенсивность распределенной нагрузки $q(x)$, поперечная сила $Q_y(x)$ и изгибающий момент $M_z(x)$ связаны следующими дифференциальными зависимостями:

$$\frac{dQ_y}{dx} = q, \quad \frac{dM_z}{dx} = -Q_y \quad (4.2)$$

Как следствие (3.1) выполняется дифференциальная зависимость:

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = -q \quad (4.3)$$

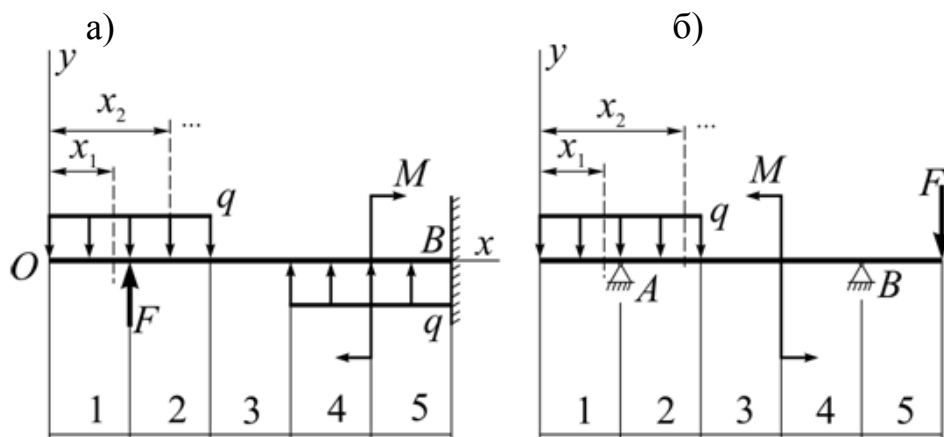


Рисунок 4.4 – Пример разбиения балки на участки нагружения

В результате построения эпюр Q_y и M_z определяются *опасные сечения*, в которых действуют максимальные по модулю поперечная сила Q_{\max} или

изгибающий момент M_{\max} . Отметим, что эти максимальные значения внутренних усилий могут достигаться в разных поперечных сечениях балки.

Изгибающий момент M_z является результатом действия в рассматриваемом поперечном сечении *нормальных напряжений*, направленных перпендикулярно плоскости сечения, а поперечная сила Q_y – результатом действия *касательных напряжений*, лежащих в плоскости сечения.

Рассмотрим пример, в котором в поперечном сечении балки действуют положительные внутренние усилия Q_y и M_z (рисунок 4.5а).

Точки, расположенные в поперечном сечении балки с одинаковой координатой y , образуют *слой сечения* (рисунок 4.5б).

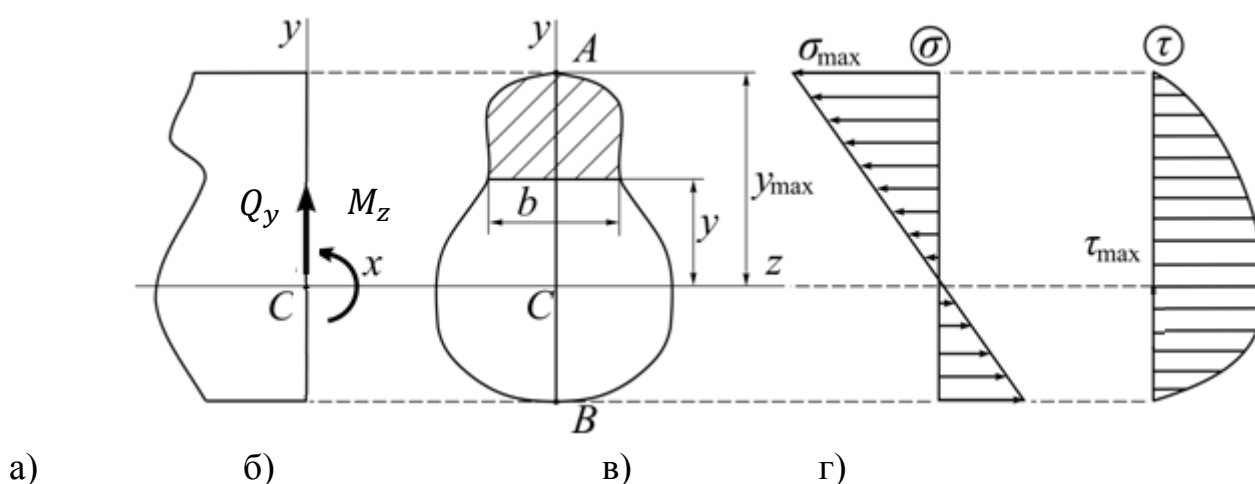


Рисунок 4.5 – Поперечное сечение и эпюры нормальных и касательных напряжений

Нормальные напряжения одинаковы во всех точках слоя и распределены по линейной зависимости от координаты y :

$$\sigma(y) = \frac{M_z}{I_z} y, \quad y_B \leq y \leq y_A \quad (4.4)$$

где I_z – момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси Cz ; координата y изменяется между координатами y_B и y_A нижней точки B и верхней точки A .

При положительной величине изгибающего момента M_z продольные слои балки с положительной координатой y испытывают деформацию сжатия ($\sigma(y) < 0$), а с отрицательной координатой y – растяжение ($\sigma(y) > 0$). В слое балки с координатой $y = 0$ нормальные напряжения $\sigma = 0$, поэтому этот слой называется *нейтральным слоем*.

Максимальное по модулю нормальное напряжение σ_{\max} действует в наиболее удаленной от нейтрального слоя точке сечения и вычисляется по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z}, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad (4.5)$$

где W_z – *момент сопротивления сечения* относительно оси Cz ; y_{\max} – расстояние до наиболее удаленной точки сечения от оси Cz (в данном примере $y_{\max} = y_A$).

Эпюра нормальных напряжений показана на рисунке 4.5в.

Касательные напряжения также одинаковы во всех точках слоя сечения, распределены по *нелинейному закону* и вычисляются по *формуле Журавского*:

$$\tau(y) = \frac{Q S_z^{\text{отс}}}{I_z b}, \quad (4.6)$$

где Q – поперечная сила, действующая в рассматриваемом сечении; $S_z^{\text{отс}}(y)$ – статический момент части сечения, отделенной слоем сечения с координатой y (рисунок 4.5б) эта часть сечения балки показана с наклонной штриховкой); I_z – момент инерции сечения относительно оси Cz ; $b(y)$ – ширина слоя сечения с координатой y .

Максимальная величина касательных напряжений τ_{\max} достигается в нейтральном слое, а минимальные касательные напряжения, равные нулю, соответствуют наиболее удаленным точкам сечения от оси Cz (в данном примере точкам A и B).

Эпюра касательных напряжений показана на рисунке 4.5(г).

Характерно, что при плоском изгибе балки максимальные значения нормальных и касательных напряжений оказываются в разных точках сечения. В точках, где нормальные напряжения σ максимальны (наружные волокна балки), касательные напряжения $\tau=0$. Наоборот, там, где касательные напряжения τ максимальны (нейтральный слой), нормальные напряжения $\sigma = 0$.

Для оценки прочности балки с постоянным поперечным сечением при плоском изгибе используются следующие условия.

Условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (4.7)$$

где M_{\max} – максимальный по модулю изгибающий момент; W_z – момент сопротивления сечения относительно оси Cz ; $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{I_z b_0} \leq [\tau], \quad (4.8)$$

где Q_{\max} – максимальная по модулю поперечная сила; S_{\max} – максимальный статический момент *полусечения*, расположенного выше нейтрального слоя; I_z – момент инерции сечения относительно оси Cz ; b_0 – ширина нейтрального слоя; $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

Из условия прочности по нормальным напряжениям (4.7) определяются размеры поперечного сечения балки принятой формы согласно формуле:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (4.9)$$

Далее приводятся конкретные расчетные формулы для прямоугольного и круглого поперечного сечений балки (рисунок 4.6).

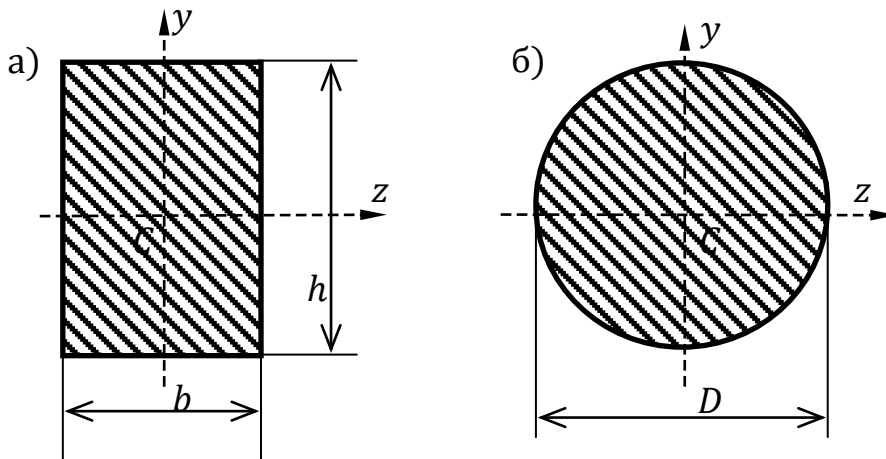


Рисунок 4.6 – Прямоугольное и круглое сечение

Для прямоугольного сечения (рисунок 4.6a) с размерами h и b используются следующие расчетные формулы:

$$A = hb, \quad I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad W_z = \frac{bh^2}{6} \left(y_{max} = \frac{h}{2} \right),$$

где A – площадь поперечного сечения, I_z – осевой момент инерции сечения, W_z – осевой момент сопротивления сечения.

Нормальные напряжения в слое балки с координатой y :

$$\sigma(y) = \frac{M_z}{I_z} y, \quad y_B \leq y \leq y_A$$

Максимальное нормальное напряжение в опасном сечении с изгибающим моментом M_{max} :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \quad (4.10)$$

Касательные напряжения в слоях балки с координатой y :

$$\tau(y) = \frac{3Q}{2A} \left(1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right), \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$$

Максимальное касательное напряжение:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{max}}{A}$$

При заданном соотношении сторон прямоугольного сечения $\beta = h/b$ из условия прочности по нормальным напряжениям (4.7) минимальные значения размеров сечения h и b определяются по формулам:

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\beta M_{max}}{[\sigma]}}; \quad b = \frac{h}{\beta} \quad (4.12)$$

Полученные значения округляются до ближайших величин из нормального ряда чисел, приведенных в таблице 3, и выполняется проверка на выполнение условия прочности (4.8) по касательным напряжениям.

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{max}}{A} \leq [\tau]$$

Таблица 3 - Нормальные линейные размеры

Нормальные линейные размеры, мм (ГОСТ 6636-69)					
3.2	5.6	10.0	18.0	32.0	56.0
3.4	6.0	10.5	19.0	34.0	60.0
3.6	6.3	11.0	20.0	36.0	63.0
3.8	6.7	11.5	21.0	38.0	67.0
4.0	7.1	12.0	22.0	40.0	71.0
4.2	7.5	13.0	24.0	42.0	75.0
4.5	8.0	14.0	25.0	45.0	80.0
4.8	8.5	15.0	26.0	48.0	85.0
5.0	9.0	16.0	28.0	50.0	90.0
5.3	9.5	17.0	30.0	53.0	95.0
					100.0

Распределение нормальных и касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении балки, при максимальных значениях изгибающего момента M_{\max} и поперечной силы Q_{\max} , показаны на рисунке 4.7.

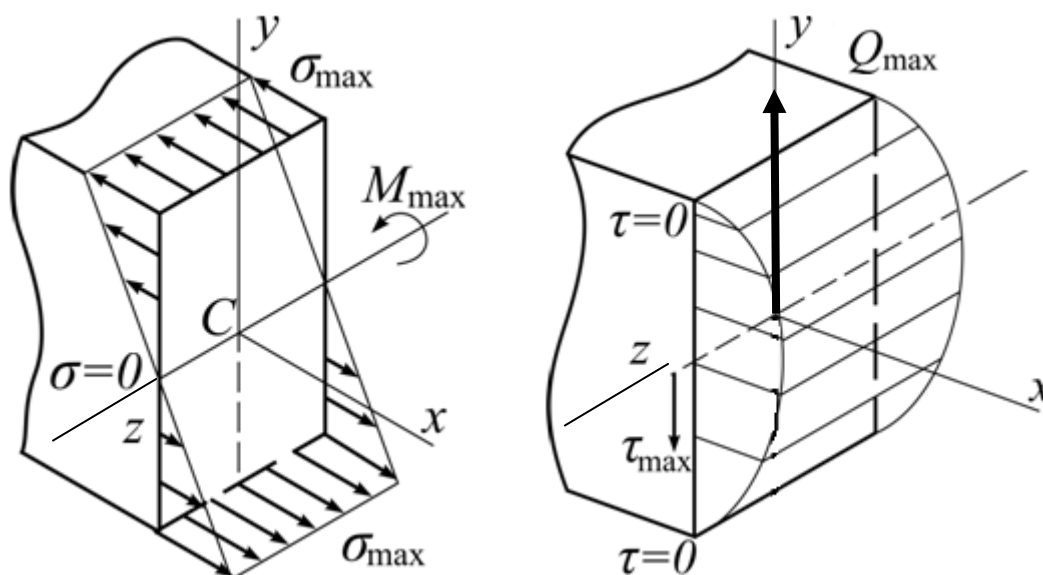


Рисунок 4.7 – Распределение нормальных и касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении балки

Для круглого поперечного сечения (рисунок 4.6б) используются следующие расчетные формулы:

$$A = \frac{\pi D^2}{4}, \quad I_z = \frac{\pi D^4}{64}, \quad W_z = \frac{\pi D^3}{32} \left(y_{\max} = \frac{D}{2} \right),$$

где A – площадь поперечного сечения, I_z – осевой момент инерции сечения, W_z – осевой момент сопротивления сечения.

Максимальное нормальное напряжение в опасном сечении с изгибающим моментом M_{\max} :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \quad (4.13)$$

Максимальное касательное напряжение для круглого сечения:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{Q_{max}}{A} \quad (4.14)$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям (4.7) минимальное значение диаметра определяется по формуле:

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 M_{max}}{\pi [\sigma]}} \quad (4.15)$$

Полученные значения округляются до ближайших величин из нормального ряда чисел, приведенных в таблице 3.

В заключении выполняется проверка на выполнение условия прочности (4.8) по касательным напряжениям.

$$\tau_{max} = 2 \frac{Q_{max}}{A} \leq [\tau]$$

Примеры выполнения задания

«Расчет балки на прочность при плоском изгибе»

Пример 1

Консольно закрепленная стальная балка (рисунок 4.8) круглого поперечного сечения диаметра D испытывает деформацию плоского изгиба. Заданы следующие параметры: $l = 100$ мм, $q = 2$ Н/мм, $M = ql^2$, $F = 0.5 ql$, $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа.

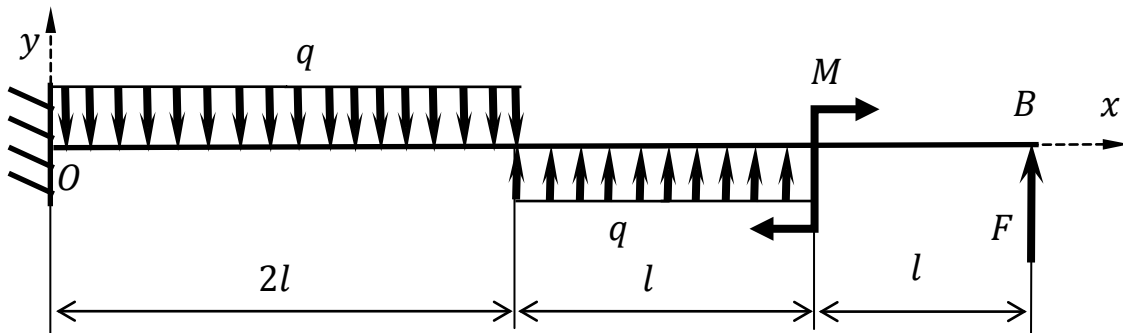


Рисунок 4.8 – Расчетная схема

Требуется построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z ; подобрать диаметр D балки из условия прочности по нормальным напряжениям; проверить условие прочности по касательным напряжениям.

Решение

Заменим опору действием создаваемых ею реакций: горизонтальной составляющей реакции R_{Ax} , вертикальной составляющей реакции R_{Ay} и реактивным моментом M_A .

В рассматриваемом примере у балки имеется три участка нагружения. Найдем функции $Q_y(x_i)$ и $M_z(x_i)$ на каждом из этих участков, вычислим значения этих функций в *характерных точках*, то есть в граничных сечениях, а также в сечениях, где достигаются экстремальные значения изгибающего момента M_z .

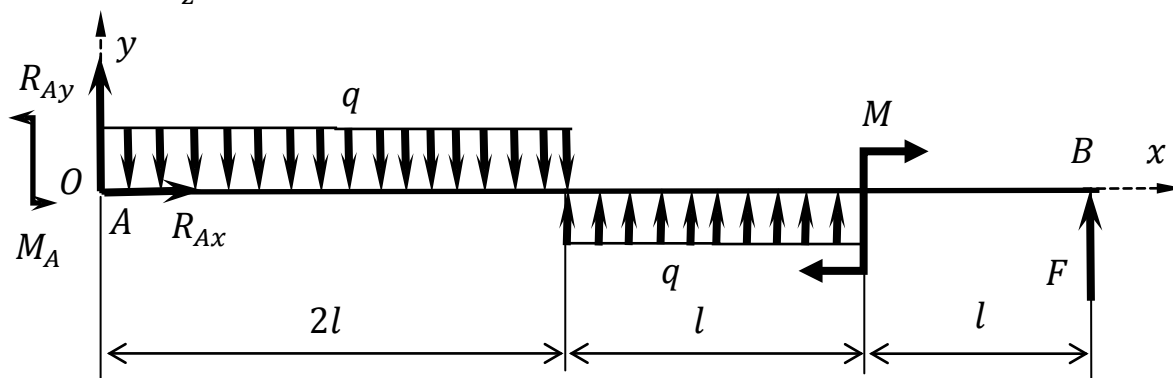


Рисунок 4.9 – Расчетная схема с реакциями заделки

Найдем реакции в жесткой заделке (рисунок 4.9), для этого воспользуемся тремя уравнениями равновесия (4.1):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_{Ax} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_{Ay} - 2ql + ql + F = 0 \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow M_A - 2ql^2 + 2.5ql^2 - M + F \cdot 4l = 0 \end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned} R_{Ax} = 0, \quad R_{Ay} &= 2ql - ql - 0.5ql = 0.5ql, \\ M_A &= 2ql^2 - 2.5ql^2 + ql^2 - 2ql^2 = -1.5ql^2 \end{aligned}$$

Здесь и далее изгибающий момент M_z и поперечную силу Q_y будем обозначать номером рассматриваемого участка ($Q_I, Q_{II}, \dots, M_I, M_{II} \dots$).

Участок 1: $0 \leq x \leq 2l$ (рисунок 4.10б).

На участке 1 приложена распределенная нагрузка, следовательно, график Q_I изменяется по линейному закону, а M_I изменяется по квадратичному закону.

Поперечная сила Q_I :

$$\begin{aligned} R_{Ay} - Q_1(x) + Q_I &= 0 \Rightarrow Q_I = Q_1(x) - R_{Ay} \\ Q_1(x) &= qx \\ Q_I &= qx - 0.5ql \end{aligned}$$

Значения Q_I на краях участка:

$$\begin{aligned} Q_I(0) &= q \cdot 0 - 0.5ql = -0.5ql \\ Q_I(2l) &= q \cdot 2l - 0.5ql = 1.5ql \end{aligned}$$

$Q_I(0)$ и $Q_I(2l)$ имеют разные знаки, следовательно, необходимо определить координату x^* , в которой $Q_I(x^*) = 0$.

$$Q_I(x^*) = qx^* - 0.5ql = 0 \Rightarrow x^* = \frac{0.5ql}{q} = 0.5l.$$

Отметим, что в точке x^* график момента M_I достигает экстремума в виду дифференциальной зависимости между Q_I и M_I .

Изгибающий момент на рассматриваемом участке вычисляется относительно рассматриваемого сечения:

$$M_A - R_{Ay}x + Q_1(x) \frac{x}{2} + M_I = 0 \Rightarrow M_I = R_{Ay}x - Q_1(x) \frac{x}{2} - M_A$$

$$M_I = 0.5qlx - q \frac{x^2}{2} + 1.5ql^2$$

Значения M_I на краях участка:

$$M_I(0) = 0.5ql \cdot 0 - q \frac{0^2}{2} + 1.5ql^2 = 1.5ql^2$$

$$M_I(2l) = 0.5ql \cdot 2l - q \cdot \frac{(2l)^2}{2} + 1.5ql^2 = 0.5ql^2$$

Локальный экстремум в точке $x^* = 0.5l$:

$$M_I(0.5l) = 0.5ql \cdot 0.5l - q \cdot \frac{(0.5l)^2}{2} + 1.5ql^2 = 1.625ql^2$$

На первом участке Q_I возрастает по линейному закону, а M_I изменяется по параболе с выпуклостью вверх и с вершиной в сечении с координатой $x^* = 0.5l$.

Участок 2: $2l \leq x \leq 3l$ (рисунок 4.10в)

Поперечная сила Q_{II} :

$$R_{Ay} - Q_1 + Q_2(x) + Q_{II} = 0 \Rightarrow Q_{II} = Q_1 - R_{Ay} - Q_2(x)$$

$$Q_1 = q \cdot 2l$$

$$Q_2(x) = q(x - 2l)$$

$$Q_{II} = 2ql - 0.5ql - q(x - 2l) = 3.5ql - qx$$

Значения Q_{II} на краях участка:

$$Q_{II}(2l) = 3.5ql - q \cdot 2l = 1.5ql$$

$$Q_{II}(3l) = 3.5ql - q \cdot 3l = 0.5ql$$

Изгибающий момент M_{II} :

$$M_A - R_{Ay}x + Q_1(x - l) - Q_2(x) \frac{x - 2l}{2} + M_{II} = 0$$

$$M_{II} = -M_A + R_{Ay}x - Q_1(x - l) + Q_2(x) \frac{x - 2l}{2} =$$

$$= 1.5ql^2 + 0.5qlx - 2ql(x - l) + q(x - 2l) \frac{x - 2l}{2}$$

Значения M_{II} на краях участка:

$$M_{II}(2l) = 1.5ql^2 + 0.5ql \cdot 2l - 2ql(2l - l) + q(2l - 2l) \frac{2l - 2l}{2} = 0.5ql^2$$

$$M_{II}(3l) = 1.5ql^2 + 0.5ql \cdot 3l - 2ql(3l - l) + q(3l - 2l) \frac{3l - 2l}{2} = -0.5ql^2$$

На втором участке Q_{II} возрастает по линейному закону, а M_{II} изменяется по параболе с выпуклостью вниз.

Участок 3: $3l \leq x \leq 4l$ (рисунок 4.10г)

На участке 3 не приложена распределенная нагрузка, следовательно, график Q_{III} постоянен, а M_{III} изменяется по линейному закону.

Поперечная сила Q_{III} :

$$R_{Ay} - Q_1 + Q_2 + Q_{III} = 0 \Rightarrow Q_{III} = Q_1 - R_{Ay} - Q_2$$

$$Q_1 = q \cdot 2l$$

$$Q_2 = q \cdot l$$

$$Q_{III} = 2ql - 0.5ql - ql = 0.5ql$$

Изгибающий момент M_{III} :

$$M_A - R_{Ay}x + Q_1(x - l) - Q_2(x - 2.5l) - M + M_{III} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{III} &= -M_A + R_{Ay}x - Q_1(x - l) + Q_2(x - 2.5l) + M = \\ &= 1.5ql^2 + 0.5qlx - 2ql(x - l) + ql(x - 2.5l) + ql^2 \end{aligned}$$

Значения M_{III} на краях участка:

$$M_{III}(3l) = 1.5ql^2 + 0.5ql \cdot 3l - 2ql(3l - l) + ql(3l - 2.5l) + ql^2 = 0.5ql^2$$

$$M_{III}(4l) = 1.5ql^2 + 0.5ql \cdot 4l - 2ql(4l - l) + ql(4l - 2.5l) + ql^2 = 0$$

По полученным результатам расчетов строим эпюры Q_y и M_z в масштабах ql и ql^2 соответственно (рисунок 4.11) и определяем максимальные по модулю поперечную силу Q_{\max} и изгибающий момент M_{\max} :

$$Q_{\max} = 1.5ql = 1.5 \cdot 2 \cdot 100 = 300 \text{ Н}$$

$$M_{\max} = 1.625ql^2 = 1.625 \cdot 2 \cdot 100^2 = 32,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем диаметры трубчатого сечения (4.15):

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\max}}{\pi [\sigma]}}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 32,5 \cdot 10^3}{\pi \cdot 160}} = 12,7 \text{ мм}$$

и округляем их до ближайших значений из нормального ряда чисел, приведенных в таблице 3: $D = 13$ мм. Поскольку округление диаметра D произошло к большему значению, то проверка по нормальным напряжениям не требуется.

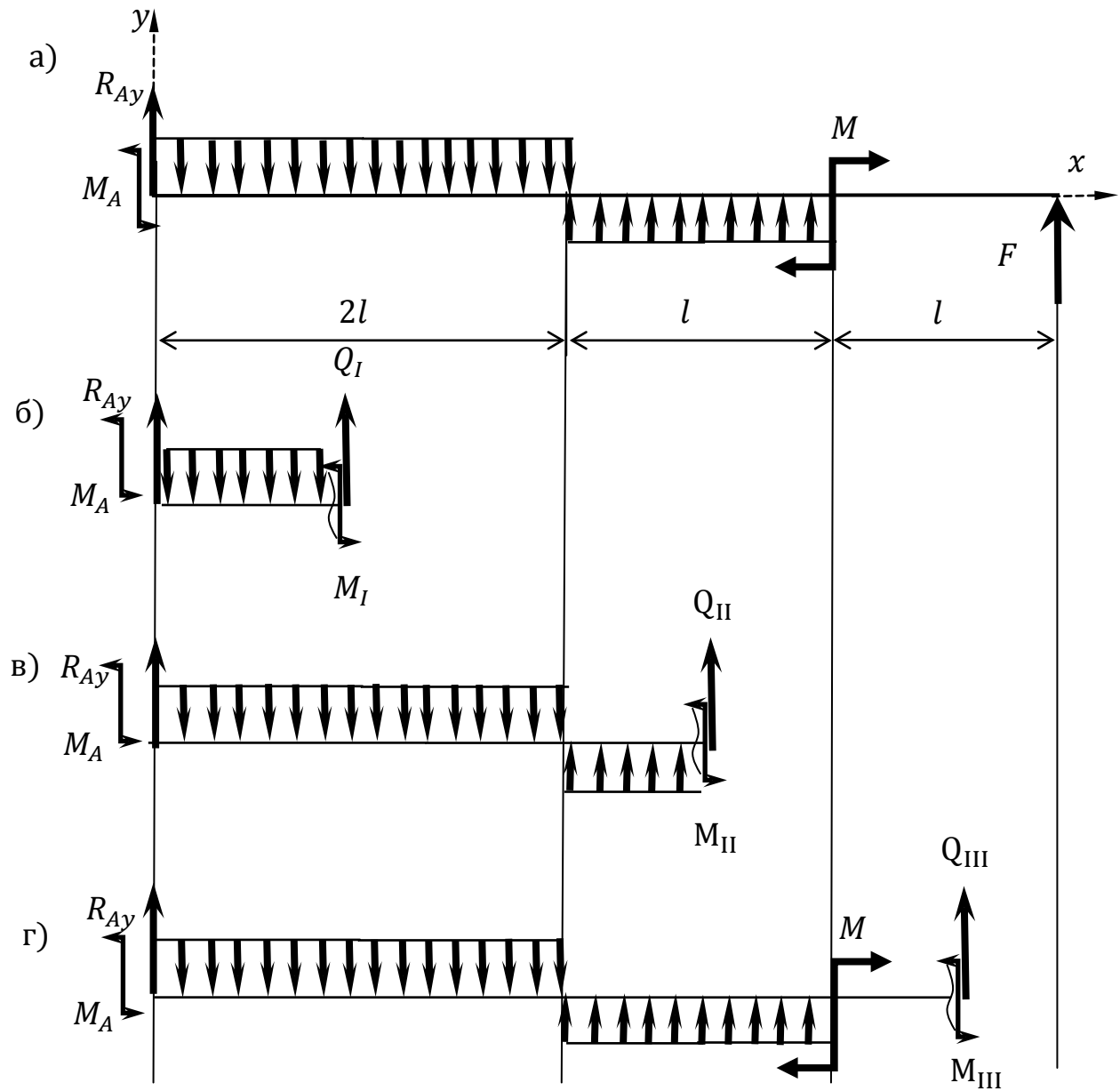


Рисунок 4.10 – Метод сечений при плоском изгибе

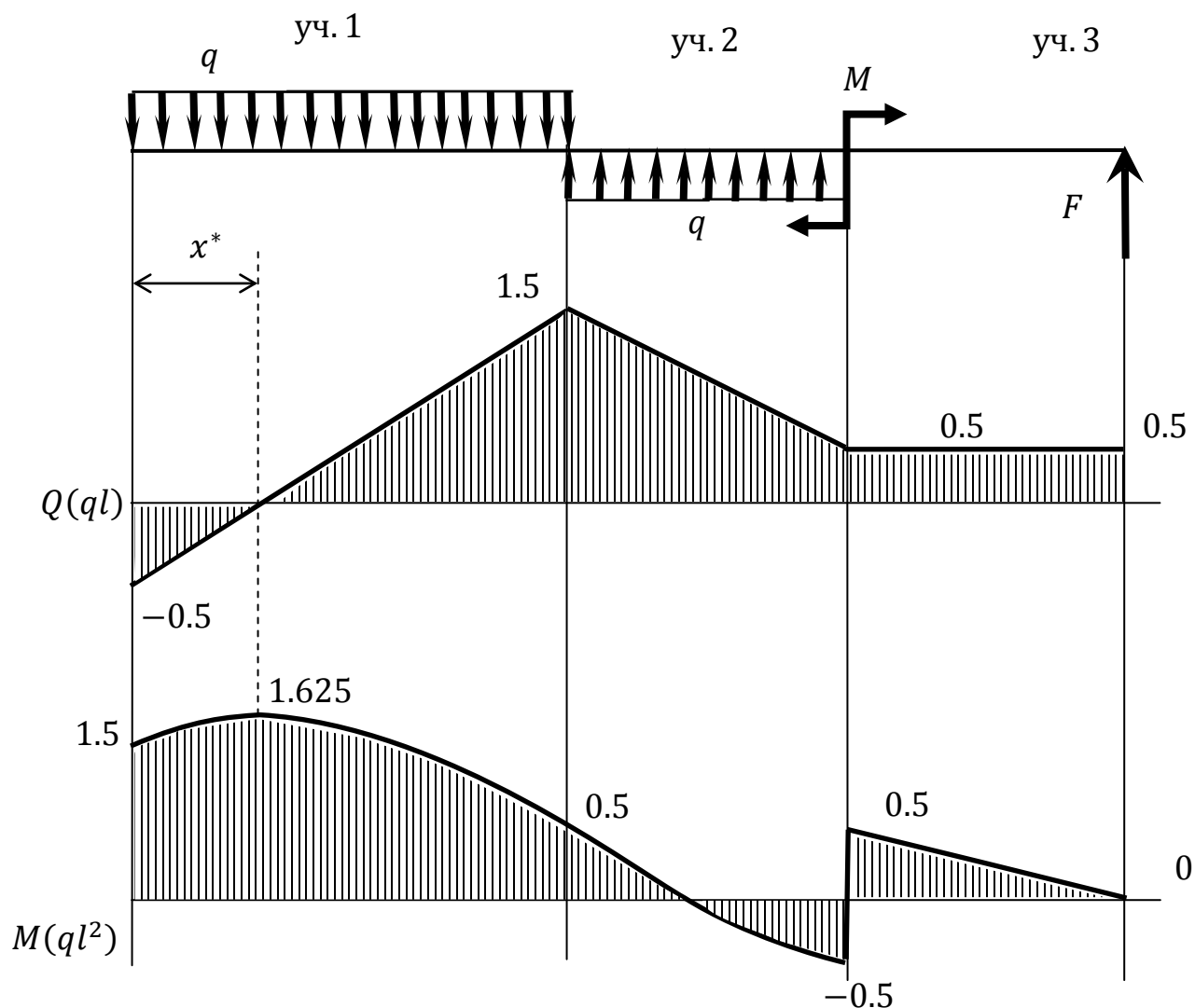


Рисунок 4.11 – Эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z в примере задания 1

По полученным округленным размерам поперечного сечения вычисляем его площадь:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3.14 * 13^2}{4} = 132.7 \text{ мм}^2$$

Находим максимальное касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{4 Q_{\max}}{3 S} = \frac{4 * 300}{3 * 132.7} = 3.0 \text{ МПа}$$

$$\tau_{\max} = 3.0 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа}$$

Из полученных результатов видно, что условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

Пример №2

Стальная балка с шарнирными опорами (рисунок 4.12) с прямоугольным поперечным сечением при заданном соотношении размеров $\beta = h/b = 2$ испытывает деформацию плоского изгиба. Заданы следующие параметры:

$$l = 100 \text{ мм}, \quad q = 2 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}, \quad F = 2ql, \quad M_1 = ql^2, \quad M_2 = 2ql^2,$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}, \quad [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

Требуется построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z ; подобрать размеры h и b поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям; проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям.

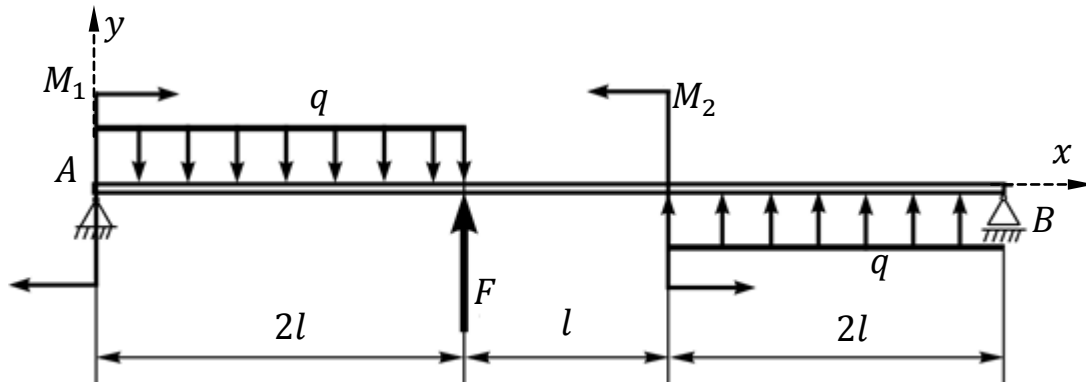


Рисунок 4.12 – Схема балки в примере задания 2

Решение

В рассматриваемом примере у балки имеются три участка нагружения. Предварительно требуется определить реакции в шарнирах A и B из следующих уравнений равновесия:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_A - 2ql + F + 2ql + Y_B = 0$$

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow -M_1 - 2ql \cdot l + F \cdot 2l + M_2 + 2ql \cdot 4l + Y_B \cdot 5l = 0$$

Из первого уравнения получаем реакцию $X_A = 0$, из третьего уравнения находим реакцию $Y_B = -2.2ql$, из второго уравнения определяем реакцию $Y_A = 0.2ql$.

Рекомендуется проверить реакцию Y_A по уравнению равновесия моментов относительно шарнира B :

$$\sum M_B : -Y_A \cdot 5l - M_1 + 2ql \cdot 4l - F \cdot 3l + M_2 - 2ql \cdot l = 0$$

При определении функций $Q_y(x_i)$ и $M_z(x_i)$ на всех участках будем рассматривать левые отсеченные части балки.

Участок 1: $0 \leq x \leq 2l$

Поперечная сила Q_I :

$$Y_{Ay} - Q_1(x) + Q_I = 0 \Rightarrow Q_I = Q_1(x) - Y_{Ay}$$

$$Q_1(x) = qx$$

$$Q_I = qx - 0.2ql$$

$$Q_I(0) = q \cdot 0 - 0.2ql = -0.2ql$$

$$Q_I(2l) = q \cdot 2l - 0.2ql = 1.8ql$$

$Q_I(0)$ и $Q_I(2l)$ имеют разные знаки, следовательно, необходимо определить координату x^* , в которой $Q_I(x^*) = 0$.

$$Q_I(x^*) = qx^* - 0.2ql = 0 \Rightarrow x^* = \frac{0.2ql}{q} = 0.2l$$

Изгибающий момент M_I :

$$-M_I - Y_{Ay}x + Q_I(x) \frac{x}{2} + M_I = 0 \Rightarrow M_I = Y_{Ay}x - Q_I(x) \frac{x}{2} + M_I$$

$$M_I = 0.2qlx - q \frac{x^2}{2} + ql^2$$

$$M_I(0) = 0.2ql \cdot 0 - q \frac{0^2}{2} + ql^2 = ql^2$$

$$M_I(2l) = 0.2ql \cdot 2l - q \cdot \frac{(2l)^2}{2} + ql^2 = -0.6ql^2$$

Локальный экстремум в точке $x^* = 0.2l$:

$$M_I(0.2l) = 0.2ql \cdot 0.2l - q \cdot \frac{(0.2l)^2}{2} + ql^2 = 1.02ql^2$$

На первом участке Q_I возрастает по линейному закону, а M_I изменяется по параболе с выпуклостью вверх и с вершиной в сечении с координатой $x_1^* = 0.2l$.

Участок 2: $2l \leq x_2 \leq 3l$

Поперечная сила Q_{II} :

$$Y_{Ay} - Q_1 + F + Q_{II} = 0 \Rightarrow Q_{II} = Q_1 - Y_{Ay} - F$$

$$Q_1 = q \cdot 2l$$

$$Q_{II} = 2ql - 0.2ql - 2ql = -0.2ql$$

Q_{II} постоянна на рассматриваемом участке.

Изгибающий момент M_{II} :

$$-M_I - Y_{Ay}x + Q_1(x-1) - F(x-2l) + M_{II} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{II} &= M_I + Y_{Ay}x - Q_1(x-1) + F(x-2l) = \\ &= ql^2 + 0.2qlx - 2ql(x-1) + 2ql(x-2l) \end{aligned}$$

Значения M_{II} на краях участка:

$$M_{II}(2l) = ql^2 + 0.2ql \cdot 2l - 2ql(2l-1) + 2ql(2l-2l) = -0.6ql^2$$

$$M_{II}(3l) = ql^2 + 0.2ql \cdot 3l - 2ql(3l-1) + 2ql(3l-2l) = -0.4ql^2$$

На втором участке Q_{II} является постоянной функцией, а M_{II} изменяется по линейному закону.

Участок 3: $3l \leq x_3 \leq 5l$

Поперечная сила Q_{III} :

$$Y_{Ay} - Q_1 + F + Q_2(x) + Q_{III} = 0 \Rightarrow Q_{III} = Q_1 - Y_{Ay} - Q_2(x) - F$$

$$Q_1 = q \cdot 2l$$

$$Q_2 = q \cdot (x-3l)$$

$$Q_{III} = 2ql - 0.2ql - q \cdot (x-3l) - 2ql = 2.8ql - qx$$

$$Q_I(3l) = 2.8ql - q \cdot 3l = -0.2ql$$

$$Q_I(5l) = 2.8ql - q \cdot 5l = -2.2ql$$

Изгибающий момент M_{II} :

$$-M_1 - Y_{Ay}x + Q_1(x-1) - F(x-2l) + M_2 - Q_2(x-3l) + M_{III} = 0$$

$$M_{III} = M_1 + Y_{Ay}x - Q_1(x-1) + F(x-2l) - M_2 + Q_2(x-3l) = \\ = ql^2 + 0.2qlx - 2ql(x-1) + 2ql(x-2l) - 2ql^2 + ql(x-3l)$$

Значения M_{III} на краях участка:

$$M_{III}(3l) = ql^2 + 0.2ql \cdot 3l - 2ql(3l-1) + 2ql(3l-2l) - 2ql^2 + ql(3l-3l) \\ = -2.4ql^2$$

$$M_{III}(5l) = ql^2 + 0.2ql \cdot 5l - 2ql(5l-1) + 2ql(5l-2l) - 2ql^2 + ql(5l-3l) = 0$$

По полученным результатам расчетов строим эпюры Q_y и M_z в масштабах ql и ql^2 соответственно (рисунок 4.13) и определяем максимальные по модулю поперечную силу и изгибающий момент:

$$Q_{\max} = 2.2 ql = 2.2 \cdot 2 \cdot 100 = 440 \text{ Н}$$

$$M_{\max} = 2.4 ql^2 = 2.4 \cdot 2 \cdot 100^2 = 48 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем размеры прямоугольного сечения (4.12):

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\beta M_{\max}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 * 2 * 48 * 10^3}{160}} = 15.3 \text{ мм}, \quad b = h/\beta = 7.7 \text{ мм}$$

и округляем их до ближайших значений из нормального ряда чисел, приведенных в таблице 3: $h = 16 \text{ мм}$; $b = 7.5 \text{ мм}$. Поскольку округление размера h произошло к большему значению, то проверка по нормальным напряжениям не требуется.

По полученным округленным размерам поперечного сечения вычисляем его площадь:

$$S = h \cdot b = 16 \cdot 7.5 = 120 \text{ мм}^2$$

При этом максимальное касательное напряжение (4.11):

$$\tau_{\max} = \frac{3 Q_{\max}}{2 S} = \frac{3 \cdot 440}{2 \cdot 120} = 5.5 \text{ МПа} < [\tau],$$

откуда следует, что условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

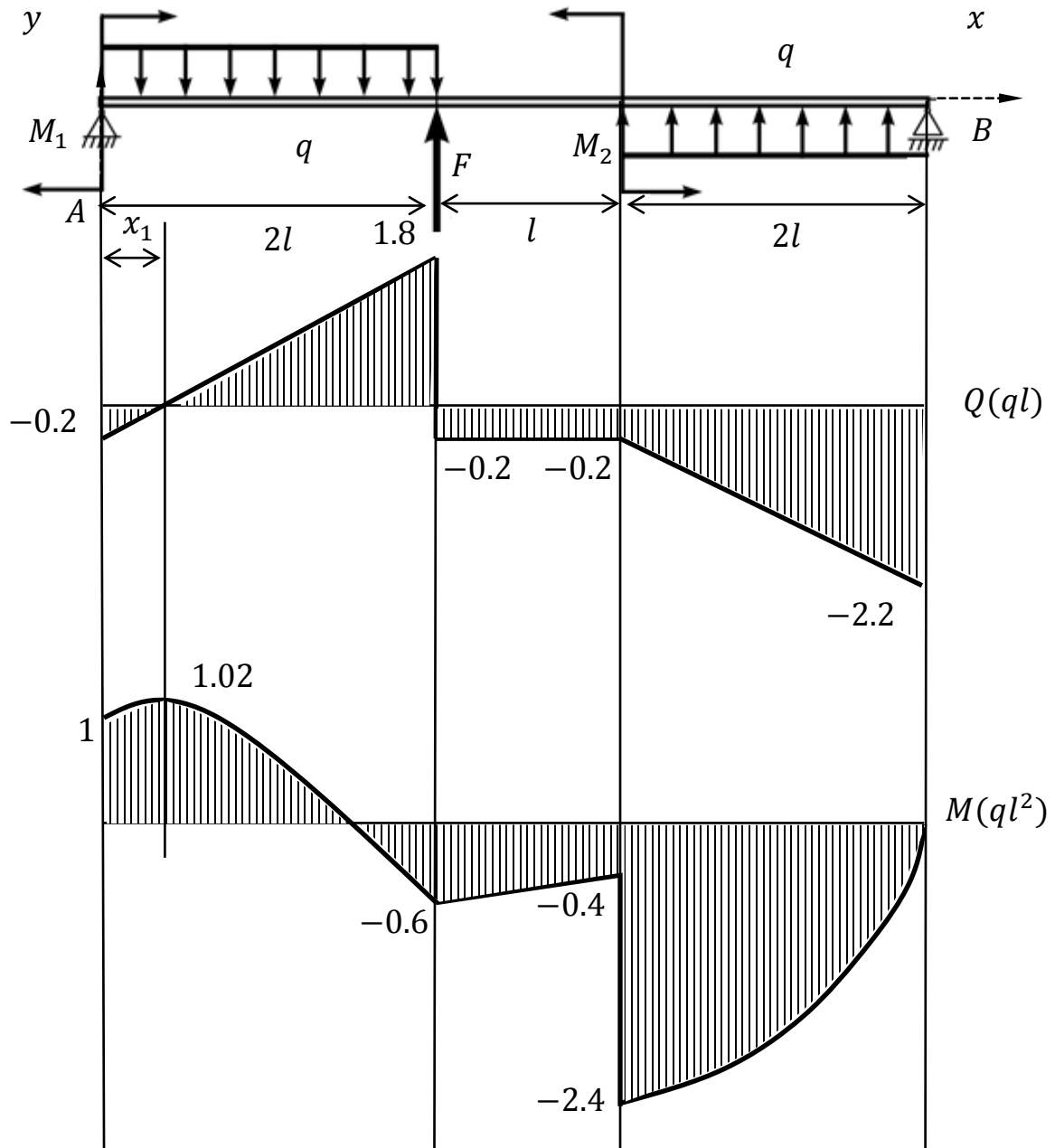


Рисунок 4.13 – Эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z в примере задания 2

Исходные данные для самостоятельной работы

Задание 1

Консольно закрепленная стальная балка с круглым поперечным сечением испытывает деформацию плоского изгиба. Заданы параметры: $l = 100$ мм; $q = 2 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$; $F_1 = ql$, $F_2 = 2ql$; $M_1 = ql^2$; $M_2 = 2ql^2$; $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа.

Требуется построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z ; подобрать диаметр D поперечного сечения из условия прочности по

нормальным напряжениям; проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям.

Исходные схемы балки приведены в таблице 4.

Задание 2

Шарнирно закрепленная стальная балка с прямоугольным поперечным сечением с заданным соотношением размеров $\beta = h/b$ испытывает деформацию плоского изгиба. Заданы параметры: $l = 100$ мм; $q = 2$ Н/мм; $F_1 = ql$; $F_2 = 2ql$; $M_1 = ql^2$; $M_2 = 2ql^2$; $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа.

Требуется построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z ; подобрать размеры h и b поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям; проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям.

Исходные схемы балки приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Исходные схемы балки

№	Исходные схемы балки	
	Задание 1	Задание 2
1		$\beta=2$
2		$\beta=2,5$
3		$\beta=3$
4		$\beta=1,5$

Продолжение таблицы 4

№	Исходные схемы балки	
	Задание 1	Задание 2
5		
6		
7		
8		

Продолжение таблицы 4

№	Исходные схемы балки	
	Задание 1	Задание 2
9		
10		
11		
12		

Продолжение таблицы 4

№	Исходные схемы балки	
	Задание 1	Задание 2
13		
14		
15		
16		

Продолжение таблицы 4

№	Исходные схемы балки	
	Задание 1	Задание 2
17	<p>$\alpha=0,6$</p>	<p>$\beta=1,5$</p>
18		<p>$\beta=2$</p>
19		<p>$\beta=3$</p>
20		<p>$\beta=2,5$</p>

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какой вид деформации балки называется плоским изгибом?
2. При каком действии внешней нагрузки балка испытывает деформацию плоского изгиба?
3. Как определяются эти внутренние усилия с использованием метода сечений?
4. Какими свойствами обладают эпюры поперечной силы?
5. Какими свойствами обладают эпюры изгибающего момента?
6. Как распределены нормальные напряжения в поперечном сечении балки? По какой формуле они вычисляются в заданной точке сечения?
7. В каких точках поперечного сечения действуют максимальные и минимальные по величине нормальные напряжения?
8. Как распределены касательные напряжения в поперечном сечении балки? По какой формуле они вычисляются в заданной точке сечения?
9. В каких точках поперечного сечения действуют максимальные и минимальные по величине касательные напряжения?
10. Как формулируется условие прочности по нормальным напряжениям при плоском изгибе?
11. Как формулируется условие прочности по касательным напряжениям при плоском изгибе?

Приложение А Варианты заданий**Варианты по теме растяжение и сжатие бруса**

Исходные данные для самостоятельного выполнения этого задания приведены в таблице А.1. Например, варианту №1 соответствует исходная схема бруса, показанная на рисунке А.1.

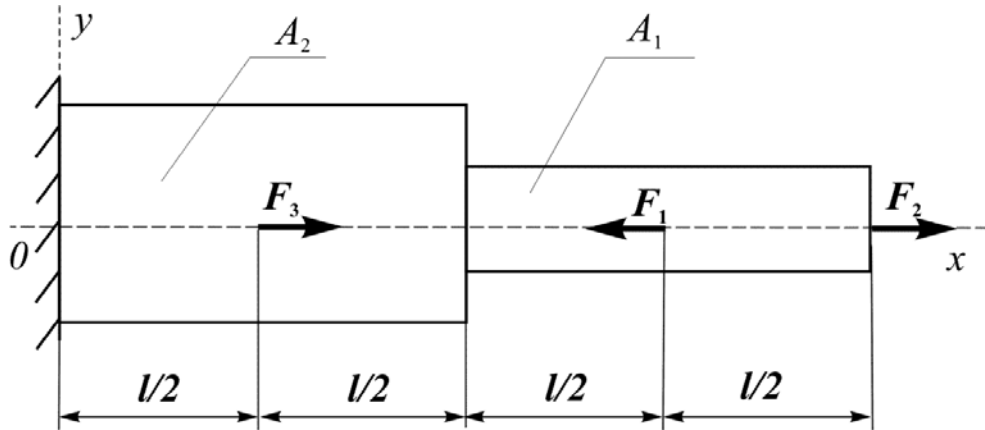


Рисунок А.1 – Исходная схема бруса для задачи растяжение - сжатие

Таблица А.1 – Исходные данные к заданию 1

№	Площадь поперечного сечения		Проекция внешних сил F_{ix} ($i = 1, 2, 3$)			
	$0 \leq x \leq l$	$l \leq x \leq 2l$	$x = l/2$	$x = l$	$x = 3l/2$	$x = 2l$
1	A_2	A_1	F_3	-	$-F_1$	F_2
2	A_1	A_2	$-F_1$	F_3	-	F_2
3	A_2	A_1	$-F_1$	-	F_2	$-F_3$
4	A_2	A_1	$-F_3$	-	F_2	F_1
5	A_1	A_2	F_1	-	F_2	$-F_3$
6	A_1	A_2	F_1	F_3	-	$-F_2$
7	A_2	A_1	F_2	-	$-F_1$	F_3
8	A_1	A_2	F_3	-	F_1	$-F_2$
9	A_2	A_1	F_3	-	$-F_2$	$-F_1$
10	A_1	A_2	$-F_1$	-	$-F_2$	F_3
11	A_1	A_2	$-F_2$	$-F_1$	-	F_3
12	A_2	A_1	-	$-F_1$	$-F_3$	F_2
13	A_1	A_2	$-F_1$	F_3	-	$-F_2$
14	A_2	A_1	$-F_1$	F_2	-	F_3
15	A_1	A_2	-	F_1	$-F_3$	F_2
16	A_2	A_1	-	$-F_1$	F_2	F_3
17	A_1	A_2	F_3	-	$-F_2$	F_1
18	A_2	A_1	F_1	-	F_2	$-F_3$
19	A_1	A_2	F_1	F_2	-	$-F_3$
20	A_2	A_1	-	$-F_2$	F_1	$-F_3$
21	A_2	A_1	F_3	$-F_1$	-	$-F_2$
22	A_2	A_1	F_1	$-F_2$	-	F_3
23	A_2	A_1	$-F_2$	F_1	-	F_3
24	A_2	A_1	$-F_2$	F_3	-	F_1
25	A_1	A_2	-	$-F_2$	F_1	F_3
26	A_2	A_1	F_3	F_2	-	$-F_1$
27	A_1	A_2	$-F_3$	-	F_1	$-F_2$
28	A_2	A_1	F_2	-	F_1	$-F_3$
29	A_1	A_2	F_2	-	$-F_1$	$-F_3$
30	A_2	A_1	$-F_3$	$-F_1$	-	F_2

Дополнительные варианты по теме растяжение и сжатие бруса

На составной ступенчатый брус, круглого поперечного сечения, схема которого представлена на рисунке А.2, действует система сил. Ступени бруса изготовлены из различных материалов Ma_1 и Ma_2 .

Требуется:

1. построить эпюры продольных сил,
2. подобрать поперечные сечения всех участков бруса,
3. определить нормальные напряжения и осевые перемещения.
4. построить эпюры нормальных напряжений и осевых перемещений.

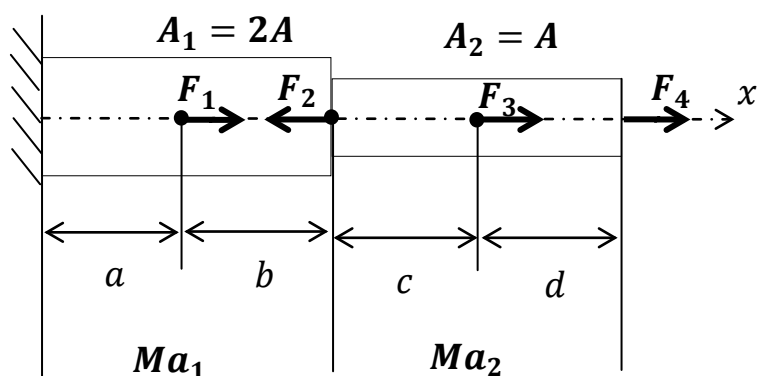


Рисунок А.2 - Схема ступенчатого бруса

Таблица А.2 – Исходные данные к заданию 2

№ варианта	Длина участков				Материал участков		№ варианта	Силы, кН			
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	Ma_1	Ma_2		1	2	3	4
	<i>m</i>							40	60	80	30
1	0,3	0,5	0,6	0,6	ст. 35	бронза	1	-	+	+	+
2	0,3	0,5	0,5	0,3	чугун	бронза	2	+	+	+	-
3	0,4	0,6	0,4	0,6	медь	алюм.	3	+	-	+	+
4	0,4	0,6	0,6	0,4	алюм.	ст. 35	4	-	+	+	-
5	0,5	0,4	0,3	0,4	алюм.	бронза	5	+	-	-	+
6	0,5	0,4	0,4	0,5	ст. 35	чугун	6	-	+	-	+
7	0,3	0,2	0,5	0,2	алюм.	медь	7	+	-	+	-
8	0,4	0,3	0,6	0,6	бронза	латунь	8	-	-	+	+
9	0,2	0,4	0,4	0,2	чугун	ст. 35	9	+	+	-	-
0	0,5	0,5	0,3	0,3	бронза	медь	0	-	-	+	-

Варианты задания по теме кручение вала

Вал из пластичной стали (рисунок А.3) состоит из трех участков одинаковой длины $l = 80$ мм и с круглыми сечениями диаметрами $d_1 = 10$ мм и $d_2 = 20$ мм. В граничных сечениях участков приложены внешние крутящие моменты $M_1 = 4 \cdot 10^3$ Н·мм, $M_2 = 8 \cdot 10^3$ Н·мм, $M_3 = 16 \cdot 10^3$ Н·мм. Модуль сдвига материала $G = 8 \cdot 10^4$ МПа и его допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 100$ МПа.

Построить эпюры крутящего момента M_K (Н·мм), максимального касательного напряжения τ_{\max} (МПа) и угла поворота поперечных сечений φ (рад); проверить Вал на выполнение условия прочности.

Исходные схемы приведены в таблице А.3. Направления скручивающих моментов T_i задаются со знаком «плюс» в направлении против хода часовой стрелки со стороны положительного направления продольной оси вала Ox . Например, варианту №1 соответствует исходная схема вала, показанная на рисунке А.3.

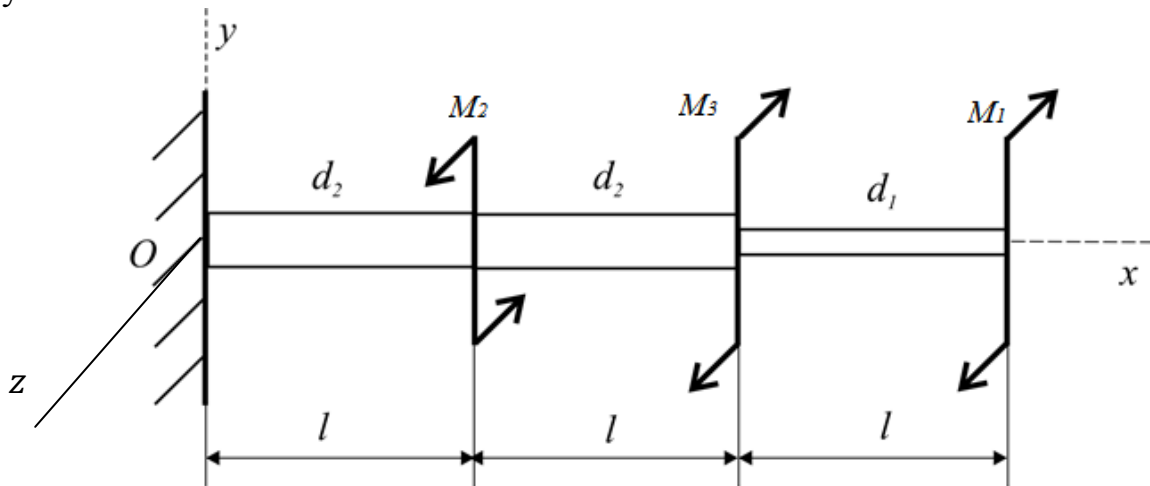


Рисунок А.3 – Исходная схема вала для задачи кручение

Таблица А.3 – Исходные данные к заданию 1

№	Диаметры поперечных сечений			Внешние крутящие моменты		
	$0 \leq x \leq l$	$l \leq x \leq 2l$	$2l \leq x \leq 3l$	$x = l$	$x = 2l$	$x = 3l$
1	d_2	d_2	d_1	M_2	$-M_3$	$-M_1$
2	d_2	d_1	d_1	M_2	M_1	$-M_3$
3	d_2	d_1	d_2	$-M_1$	M_3	$-M_2$
4	d_1	d_2	d_2	$-M_3$	M_1	M_2
5	d_1	d_2	d_1	$-M_2$	$-M_3$	M_1
6	d_2	d_1	d_2	M_1	$-M_3$	$-M_2$
7	d_2	d_2	d_1	M_3	$-M_2$	$-M_1$
8	d_1	d_2	d_1	$-M_3$	M_2	M_1
9	d_2	d_1	d_1	$-M_2$	M_1	M_3
10	d_1	d_2	d_2	$-M_3$	M_1	$-M_2$
11	d_1	d_2	d_2	$-M_2$	M_3	$-M_1$
12	d_2	d_1	d_1	M_1	$-M_3$	M_2
13	d_1	d_1	d_2	$-M_2$	$-M_1$	M_3
14	d_1	d_1	d_2	$-M_3$	M_2	$-M_1$
15	d_1	d_2	d_1	M_3	M_1	$-M_2$
16	d_1	d_2	d_2	$-M_1$	$-M_3$	M_2
17	d_2	d_1	d_1	M_2	$-M_3$	M_1
18	d_1	d_2	d_1	$-M_1$	M_3	M_2
19	d_2	d_2	d_1	$-M_2$	M_1	$-M_3$
20	d_1	d_2	d_2	$-M_3$	$-M_2$	M_1
21	d_2	d_1	d_1	M_3	$-M_1$	M_2
22	d_1	d_2	d_1	M_2	M_1	$-M_3$
23	d_1	d_1	d_2	$-M_2$	M_3	M_1
24	d_2	d_2	d_1	M_1	$-M_3$	M_2
25	d_1	d_2	d_2	$-M_2$	$-M_1$	M_3
26	d_2	d_2	d_1	$-M_1$	$-M_2$	M_3
27	d_1	d_1	d_2	M_3	$-M_1$	M_2
28	d_2	d_1	d_2	$-M_2$	M_3	$-M_1$
29	d_1	d_2	d_1	$-M_1$	M_2	M_3
30	d_1	d_2	d_2	$-M_3$	M_1	M_2

Дополнительное задание по теме кручение вала

К стальному валу кольцевого поперечного сечения с жесткой заделкой на одном конце приложены три внешних момента относительно продольной оси Ox (рисунок А.4).

Заданы: значения двух моментов, линейные размеры вала, отношение внутреннего и наружного диаметров сечения $K = \frac{d}{D} = 0.8$; задано допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 40 \text{ МПа}$; допускаемый относительный угол закручивания $[\theta]$ и модуль сдвига стали G .

Требуется:

- 1) Установить при каком значении неизвестного третьего момента исключается поворот свободного торцевого сечения;
- 2) Определить величины крутящих моментов по участкам с учетом найденного значения момента и построить их эпюры;
- 3) Подобрать размеры кольцевого сечения по условиям прочности и жесткости вала.

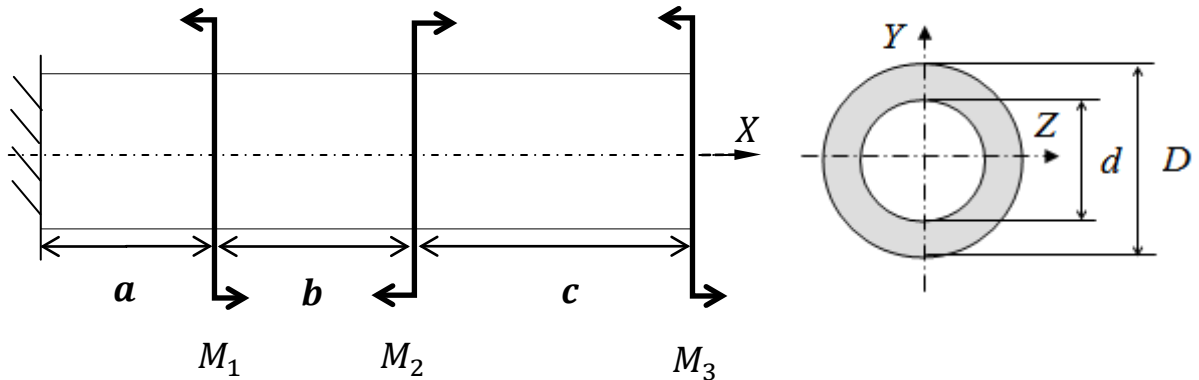


Рисунок А.4 – Схема нагружения вала

Полярный момент сопротивления для бруса кольцевого сечения:

$$W_P = \frac{\pi D^3}{16} (1 - K^4)$$

Полярный момент инерции для бруса кольцевого сечения:

$$I_P = \frac{\pi D^4}{32} (1 - K^4)$$

Таблица А.4 - Исходные данные к заданию 2

№ варианта	Момент, кН·м			[θ], град/м	Размеры, м	
	M_1	M_2	M_3		a, b	c
1	20	$M?$	30	0,8	0,5	1,1
2	-10	16	$M?$	1,2	1,0	0,6
3	26	$M?$	-22	0,6	0,7	0,4
4	-24	20	$M?$	0,8	0,8	0,9
5	22	-30	$M?$	1,1	1,1	0,8
6	-20	$M?$	28	1,4	0,6	1,1
7	18	$M?$	14	1,6	0,4	1,2
8	-16	28	$M?$	1,3	0,9	1,0
9	14	$M?$	16	0,8	0,8	0,7
10	-10	18	$M?$	1,2	1,2	0,8

Приложение В Правила знаков

Наряду с изложенными в основном тексте правилами знаков внутренних силовых факторов в ряде учебников используются другие правила, позволяющие выбирать какую из двух частей сечения удобнее и проще рассматривать для данного участка. Рассмотрению этих альтернативных правил посвящено данное приложение.

Правило знаков при плоском изгибе

Правило знаков для поперечной силы Q и изгибающего момента M при изгибе балки.

Для поперечной силы Q и изгибающего момента M используется *правило знаков*, показанное на рисунке В.1. Поперечная сила Q для левой отсеченной части балки считается положительной, если она действует в направлении, противоположном положительному направлению оси Oy (вниз), а для правой отсеченной части – в положительном направлении оси Oy (вверх). Изгибающий момент M считается положительным, если балка изгибается выпуклостью вниз: при этом продольные волокна балки, расположенные выше его оси, испытывают сжатие, а расположенные ниже его оси – растяжение.

Для определения поперечных сил и изгибающих моментов используется *метод сечений*. При этом на основании уравнений равновесия одной из отсеченных частей балки формулируются следующие правила.

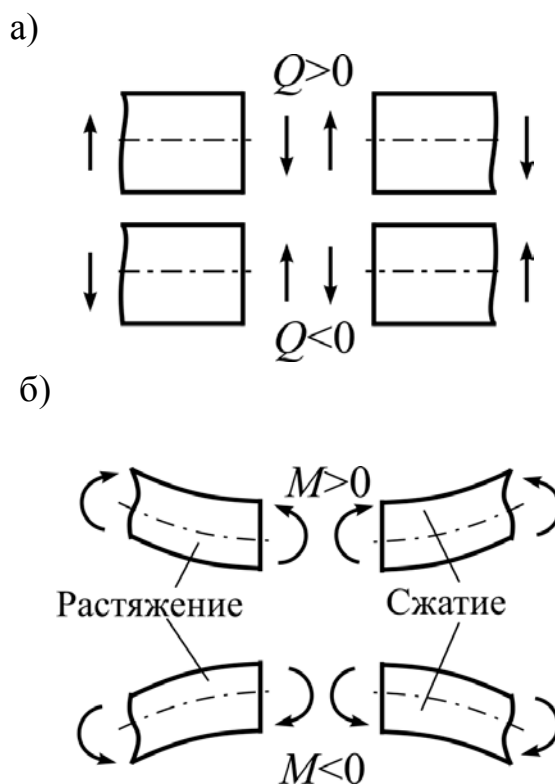


Рисунок В.1 – Правило знаков для поперечной силы Q и изгибающего момента M

Поперечная сила Q в заданном сечении равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных к одной из отсеченных частей балки и взятых со знаками, показанными на рисунке В.2а.

Изгибающий момент M в заданном сечении равен алгебраической сумме внешних моментов, действующих на одну из отсеченных частей балки, вычисленных относительно поперечной оси Cz , проходящей через центр тяжести этого сечения перпендикулярно плоскости рисунка, и взятых со знаками, показанными на рисунке В.2б.

Например, для балки, изображенного на рисунке В.3, поперечная сила и изгибающий момент согласно этим правилам определяются следующим образом:

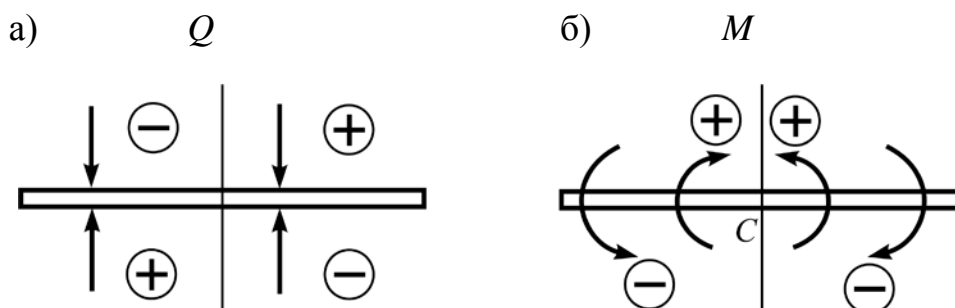


Рисунок В.2 – Правило знаков суммирования внешних нагрузок при определении поперечной силы Q и изгибающего момента M

В заданном сечении с координатой x поперечная сила $Q(x)$ с использованием левой отсеченной части балки вычисляется по формуле:

$$Q(x) = F_1 - F_2;$$

с использованием правой отсеченной части балки – по формуле:

$$Q(x) = F_3 - F_4.$$

При вычислении поперечной силы $Q(x)$ действие на отсеченные части балки моментов M_i не учитывается.

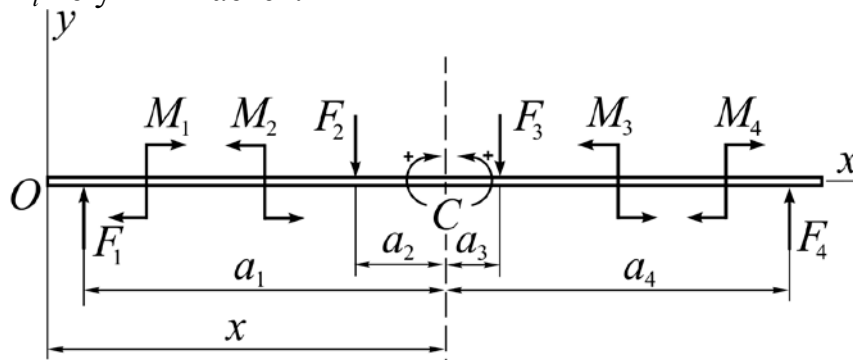


Рисунок В.3 – Пример вычисления поперечной силы и изгибающего момента в поперечном сечении балки с заданной координатой x

В заданном сечении с координатой x изгибающий момент $M(x)$ с использованием левой отсеченной части балки вычисляется по формуле:

$$M(x) = M_1 - M_2 + F_1 a_1 - F_2 a_2;$$

с использованием правой отсеченной части балки – по формуле:

$$M(x) = M_3 - M_4 - F_3 a_3 + F_4 a_4 .$$

Приложение С Свойства эпюр

Свойства эпюры поперечной силы Q

1. На участках балки без действия распределенной нагрузки ($q = 0$) $Q(x)$ является постоянной функцией ($Q(x) = \text{const}$).
2. На участках балки при действии равномерно распределенной нагрузки ($q(x) = \text{const}$) функция $Q(x)$ изменяется по *линейному закону*; при этом $Q(x)$ возрастает при $q > 0$ или убывает при $q < 0$.
3. В сечениях балки, где действуют внешние силы или силовые реакции, эпюра Q имеет разрывы (скачки) на величину этой силы и в направлении этой силы; действие на рассматриваемую отсеченную часть балки моментов влияния на эпюру Q не имеет.

Свойства эпюры изгибающего момента M

1. На участках балки без действия распределенной нагрузки ($q = 0$) $M(x)$ изменяется по *линейному закону* в зависимости от величины $Q(x) = \text{const}$; если $Q = 0$, то $M(x)$ является постоянной функцией ($M(x) = \text{const}$).
2. На участках балки при действии равномерно распределенной нагрузки ($q(x) = \text{const}$) функция $M(x)$ изменяется по *квадратичному закону*.
3. Если на рассматриваемом участке балки имеется сечение, в котором $Q = 0$, то в этом сечении $M(x)$ достигает экстремума (вершина параболы).
4. В сечениях балки, где действуют внешние моменты, эпюра M имеет разрывы (скачки) на величину этих моментов; в сечениях, где действуют внешние силы, эпюра M имеет *изломы*, то есть разрывы своей первой производной dM/dx .

Вышеизложенные свойства эпюр Q и M рекомендуется использовать при их построении, а также для их проверки.

Приложение D Механические свойства материалов

Таблица D.1 – Механические свойства материалов

<i>Характеристики материала</i>	<i>Сталь (ст.35)</i>	<i>Сталь (30ХГСА)</i>	<i>Бронза</i>	<i>Алюминий</i>	<i>Чугун</i>	<i>Дерево</i>
Модуль упругости E , МПа	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	$0,7 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^4$
Предел текучести σ_T , МПа	240	850	150	210	-	-
Предел прочности на растяжение/сжатие σ_B , МПа	360	1100	240	300	180/600	100/45
Коэффициент Пуассона μ	0,25	0,25	0,34	0,3	0,25	0,45

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин Сопротивление материалов. – М.:Высшая школа, 2003 – 560 с.
2. И.И. Еремеева, Р.И. Никулина, А.А. Поляков, Д.Е. Черногубов, В.В. Чупин Сопротивление материалов, Е.: УГТУ-УПИ, 2010 – 71 с.
3. Г.И. Беликов, В.И. Клименко Сопротивление материалов при изгибе, Волгоград.: ВолгГАСУ, 2014 – 52 с.
4. М.К. Агаханов, В.Г. Богопольский, В.В. Кузнецов Сопротивление материалов, М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2014 – 171 с.
5. В.Г. Мельников, С.Е. Иванов, Г.И. Мельников, А.Г. Кривошеев Компьютерные лабораторные работы по сопротивлению материалов СПб.: НИУ «ИТМО», 2010 – 62 с.
6. В.И. Феодосьев Сопротивление материалов, М.: Наука, 1967 – 552 с.
7. В.С. Цепелев, В.В. Завгородний, А.С. Панасюк Сопротивление материалов: Задания и методические указания по выполнению контрольной работы для студентов очной и заочной форм обучения направлений: 190600.62 - Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов. – Санкт – Петербург: СПбГУСЭ, 2012. – 78с.: ил.
8. Мельников Б. Е. Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие / Н. М. Беляев, Л. К. Паршин, Б. Е. Мельников и др. – СПб: Лань, 2011 – 431с.

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

В 1900 году Государственный Совет России принял решение о создании в Ремесленном училище цесаревича Николая механико-оптического и часового отделения. Именно из этого отделения за прошедшие 100 лет вырос Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет).

Курсы механики преподавались в Университете с самого начала его основания. В Российской национальной библиотеке Санкт-Петербурга хранится руководство по теоретической механике для учащихся IV класса Петербургского Ремесленного училища цесаревича Николая 1900 года издания.

При создании на базе механико-оптического и часового отделения сначала техникума, а затем института точной механики и оптики, уровень преподавания теоретической механики естественно повышался. В результате этого в начале 1930-х годов в институте была создана кафедра теоретической механики.

В 1940-х годах ее возглавлял профессор, доктор физико-математических наук Н.И. Идельсон. Одновременно он был также заведующим кафедрой гироскопии и гироскопических приборов ЛИТМО, что свидетельствует о широкой области его научных интересов и научных исследований на обеих кафедрах.

В 1950-х годах кафедру возглавил доцент (а затем профессор) Г.Д. Ананов (1916-1976). Он был известным специалистом в области графоаналитических методов и применял их к исследованию сложных пространственных механизмов и к решению задач астронавигации, Георгий Давидович также увлеченно занимался программированным обучением и внедрением технических средств в учебный процесс.

В 1960-х годах кафедру теоретической механики возглавлял профессор, доктор технических наук Э.И. Слив. Он внес большой вклад в активизацию научных исследований на кафедре, особенно в области бортовых систем инерциальной навигации подвижных объектов.

В 1965 году кафедра теоретической механики была объединена с кафедрой сопротивления материалов и стала называться кафедрой технической механики, а позднее кафедрой теоретической и прикладной механики.

С 1975 по 2002 год ее возглавлял заслуженный работник высшей школы, профессор, доктор физико-математических наук Г.И. Мельников, который продолжает научную и педагогическую работу.

В это время на кафедре разрабатывались численно-аналитические методы теории нелинейных колебаний и оценок устойчивости движения, компьютерные технологии, матричные нелинейные математические модели в механике, аналитические методы преобразования моделей с выделением существенных качественных параметров и методы идентификации инерционных и диссипативных параметров на программных движениях систем управления. А также выполняется большая научно-методическая работа по внедрению современных компьютерных технологий в процесс преподавания дисциплин теоретической и прикладной механики, проводятся прочностные расчеты и испытания приборных систем.

С 2002 г. кафедрой теоретической и прикладной механики руководит д.т.н., доцент Мельников В.Г. Он специализируется в области аналитических методов нелинейной механики, математического и компьютерного моделирования управляемых нелинейных управляемых механических и электромеханических систем, практического применения и развития аналитических методов А.М. Ляпунова, А. Пуанкаре, П.Л. Чебышева является автором шести патентов РФ на изобретения способов и устройств идентификации механических параметров объектов. Имеет публикации в центральных изданиях РФ и зарубежных изданиях, индексируемых Scopus и ISI.

Александр Сергеевич Алышев
Александр Геннадьевич Кривошеев
Константин Сергеевич Малых
Виталий Геннадьевич Мельников
Геннадий Иванович Мельников

Прикладная механика

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО
Зав. РИО

Н.Ф.

Гусарова

Подписано к печати
Заказ №
Тираж 100 экз.
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

ИТМО