МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Методические указания
к выполнению курсовой работы

Исследование процессов в электрической цепи

Санкт-Петербург

2015

Составители: Атанов В.А., Бритов Г.С. (кафедра информационных систем), Голубков В.А.

Рецензент: доцент кафедры 32 Волохов М.А.

Содержатся методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплинам ТОЭ, ОТЦ, электротехника и общая электротехника для студентов специалитета, общего и прикладного бакалавриата по всем техническим специальностям.

Методические указания содержат достаточное число вариантов заданий. Все разделы курсовой работы сопровождаются решением соответствующих задач. Указания могут быть использованы для практических занятий, лабораторных работ, а также при самостоятельной работе студентов.

Подготовлены кафедрой управления и информатики в технических системах и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

Введение

Курсовая работа представляет заключительный этап в обучении студентов специалитета, общего и прикладного бакалавриата технических специальностей по предметам электротехнической направленности (ТОЭ, ОТЦ, электротехника, общая электротехника и др.).

Курсовая работа охватывает основные разделы анализа линейных и нелинейных электрических цепей.

В процессе выполнения курсовой работы студенты углубляют и закрепляют навыки самостоятельной работы по анализу линейных и нелинейных электрических цепей в стационарных и нестационарных режимах, в том числе навыки компьютерного моделирования процессов в электрических цепях.

Техническое задание на курсовую работу.

Изучить заданный вариант электрической цепи (ЭЦ): состав, действие ключей S_1 и S_2, режимы работы ЭЦ.

1. Исследовать линейную ЭЦ до коммутации ключа S_1 (режим 1).

1.1 Рассчитать ЭЦ с постоянным источником электрической энергии (ИЭЭ):

- обосновать выбор метода расчета;

- определить токи и напряжения ветвей;

- выполнить проверку по балансу мощностей.

1.2 Рассчитать ЭЦ с гармоническим ИЭЭ:

- обосновать выбор метода расчета;

- определить токи и напряжения ветвей;

- выполнить проверку по векторным диаграммам токов и напряжений.

1.3 Рассчитать результирующие токи и напряжения ветвей при одновременном действии постоянного ИЭЭ и гармонического ИЭЭ.

2 Исследовать линейную ЭЦ после коммутации ключа S_1 (режим 2).

Выбрать или принять как заданный классический или операционный метод расчета переходного процесса.

2.1. В классическом методе расчёта определить на ёмкости C и индуктивности L:

- начальные условия $U_C^+,\ I_C^+,\ U_L^+,\ I_L^+$.

- начальные условия свободных составляющих $U_{\text{С св}}^+,\ I_{\text{С св}}^+,\ U_{L\,\text{св}}^+,\ I_{L\,\text{св}}^+$.

-установившиеся значения $U_{\text{С уст}},\ I_{\text{С уст}},\ U_{L\,\text{уст}},\ I_{L\,\text{уст}}$.

Определить корни α_1, α_2 характеристического уравнения

Определить нули p_1, p_2 операционного сопротивления $Z_{\text{вх}}(p)$.

Построить зависимости $u_{\text{С}}(t)$ и $i_L(t)$.

2.2. В операционном методе расчета определить:

-начальные условия $U_C^+,\ I_L^+$;

-построить операционную схему замещения;

-определить изображения $U_C(p),\ I_L(p)$;

-определить оригиналы $u_{\text{С}}(t), i_L(t)$ с использованием формулы разложения.

2.3. Построить систему уравнений переменных состояния линейной ЭЦ.

3. Исследовать процессы в ЭЦ с нелинейным элементом (режим 3):

-составить систему уравнений переменных состояния $u_{\text{С}}(t), i_L(t)$ нелинейной ЭЦ – УИРС (учебно-исследовательская работа студентов);

-определить в установившемся режиме значения, величин $U_{нэ}$, $I_{нэ}$, U_{C7}, ψ_{L7} ветви с нелинейным элементом НЭ.

4. Выполнить компьютерное моделирование процессов в линейной ЭЦ:

-построить графики зависимостей $u_C(t)$, $i_L(t)$ в пакете Matcad (корни α_1 и α_2 – комплексно- сопряженные);

-сформировать матрицу системы уравнений состояния;

-построить в пакете программ Matlab графики зависимостей $u_C(t), i_L(t)$ (корни α_1 и α_2 – вещественные).

Расчеты дать в системе СИ, обозначения и графики выполнить по ГОСТу, пояснительную записку представить в виде компьютерной распечатки на формате А4.

Далее приведен пример расчета ЭЦ в режимах обозначенных выше.

В задании принято:

E_1 и J_1 – постоянные величины;

$$e_2(t) = E_{2m} \cdot \cos(\omega t + \varphi_в); \quad E_{2m} = \sqrt{2} E_2;$$
$$j_2(t) = I_{2m} \cdot \cos(\omega t + \varphi_в); \quad I_{2m} = \sqrt{2} I_{2m}.$$

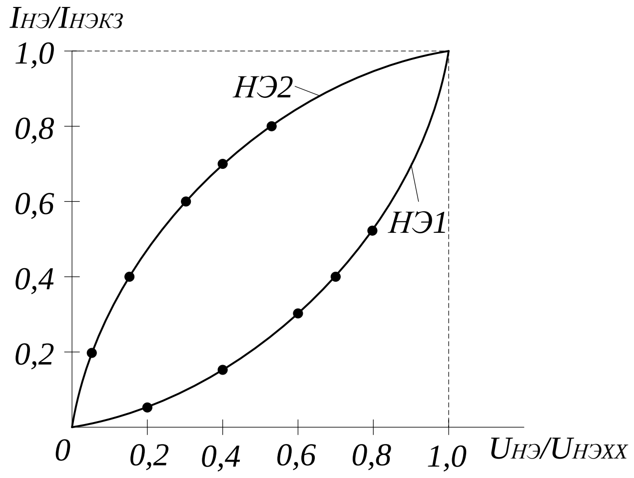
Вольтамперная характеристика (ВАХ) нелинейного элемента (НЭ)

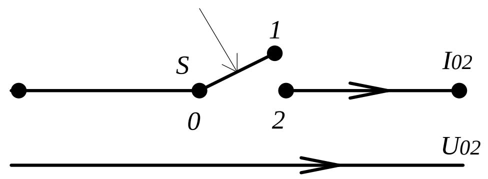
Вариант 1

I	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	1,0
$I/I_{НЭ}^{КЗ}$	0	0,05	0,12	0,28	0,38	0,52	1,0

Вариант 2

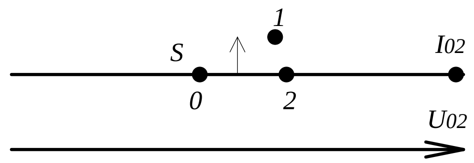
U	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	1,0
$U/U_{НЭ}^{XX}$	0	0,06	0,14	0,26	0,34	0,45	1,0





Поясним работу ключей.

Ключ S сначала разомкнут $R_{02} \to \infty$, $I_{02} = 0$; затем ключ замыкается.



Ключ S сначала замкнут $R_{02} \to 0$, $U_{02} = 0$; затем ключ размыкается.

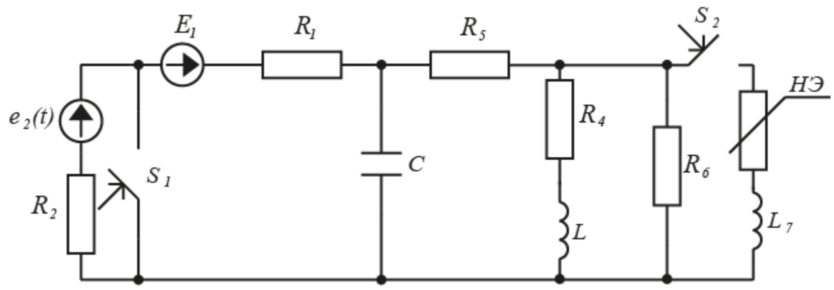
Коммутация ключей S_1 и S_2 изменяет состав и режимы работы электрической цепи.

Режим 1. Ключи S_1 и S_2 находятся в исходном по заданию положению. Электрическая цепь содержит одновременно постоянный и гармонический источники электрической энергии(ИЭЭ), в цепи действует стационарный режим с постоянной и гармонической составляющей.

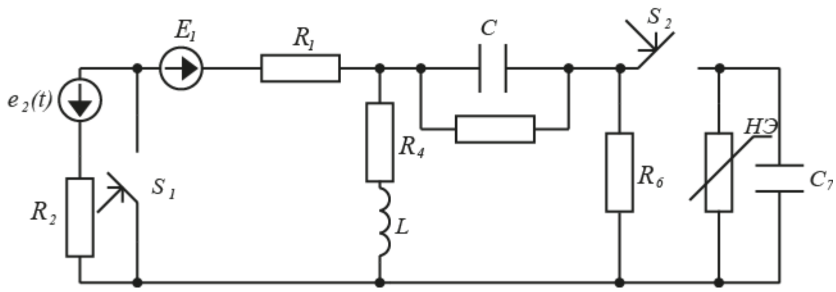
Режим 2. Ключ S_1 коммутирует и отключает ветвь с гармоническим источником, теперь цепь содержит только постоянный источник электрической энергии. Режим цепи становится нестационарным: в линейной ЭЦ возникает и со временем затухает переходный процесс.

Режим 3. Ключ S_2 коммутирует и подключает к линейной цепи ветвь с нелинейным элементом (НЭ), электрическая цепь становится нелинейной. Цепь переходит в нестационарный режим, в нелинейной цепи возникает и со временем также затухает переходный процесс.

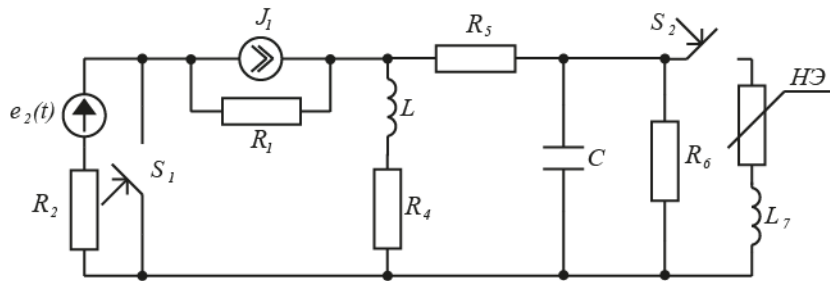
Варианты заданий



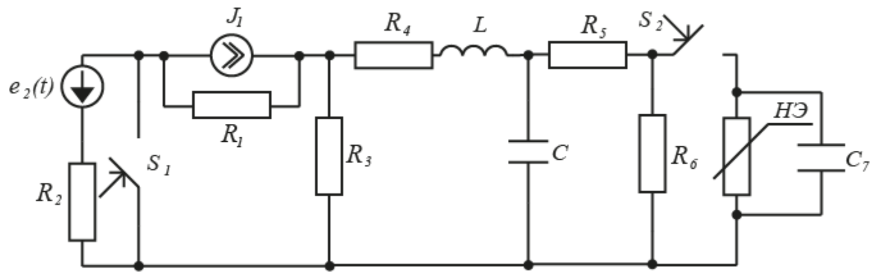
1)



2)

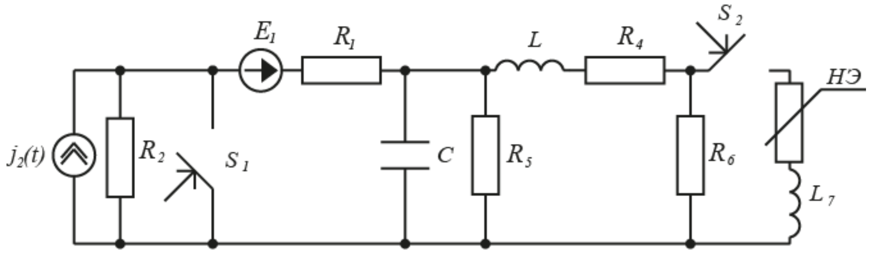


3)

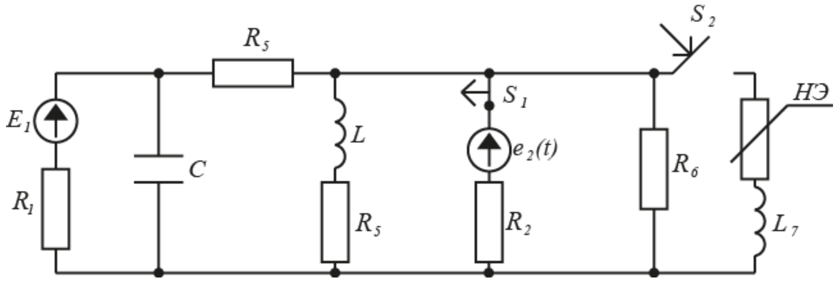


4)

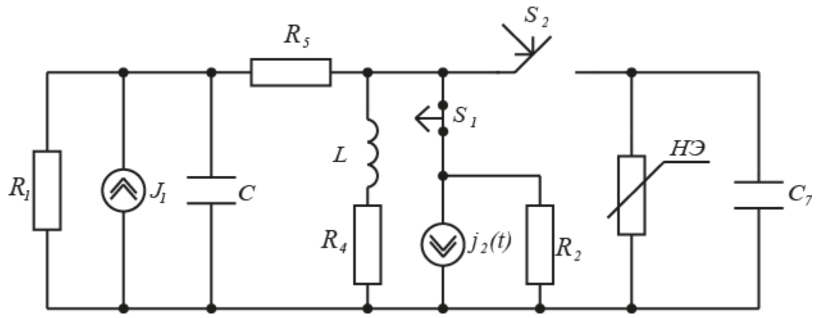
5)


E1
R1
L
R4
S2
НЭ
j2(t)
R2
S1
C
R5
R6
L7

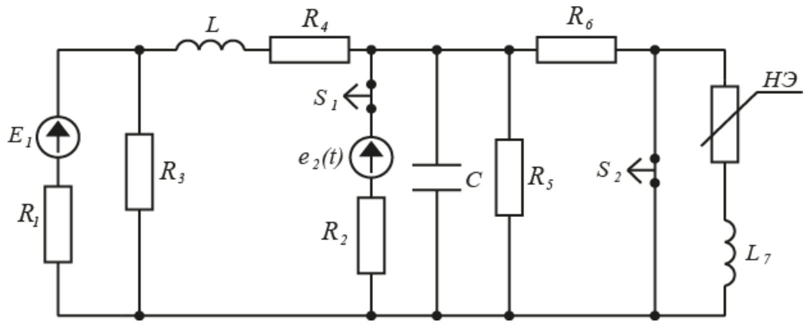
6)


R5
S2
НЭ
E1
S1
C
L
e2(t)
R6
R1
R5
R2
L7

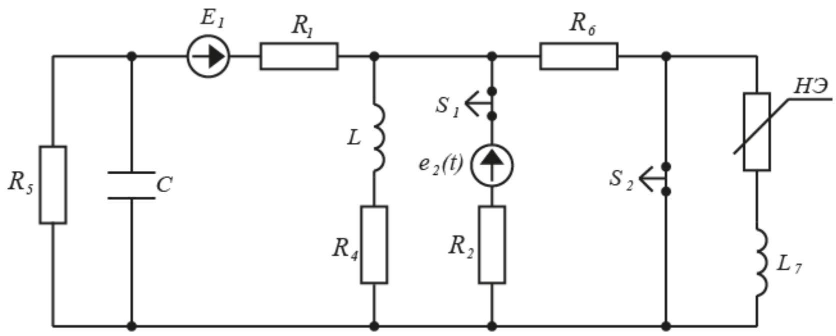
7)


R5
S2
S1
НЭ
L
R1
J1
C
C7
R4
j2(t)
R2

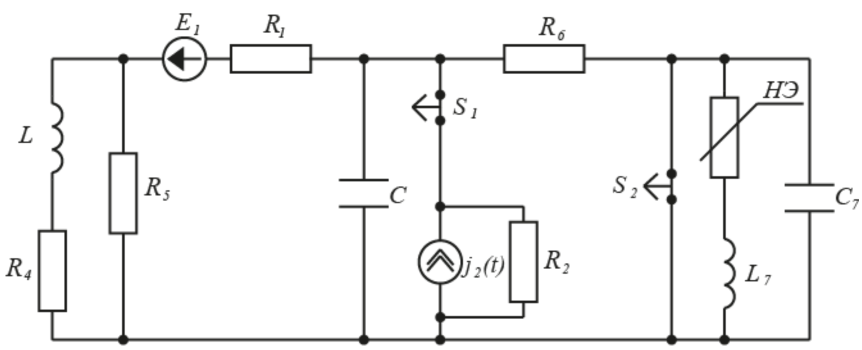
8)

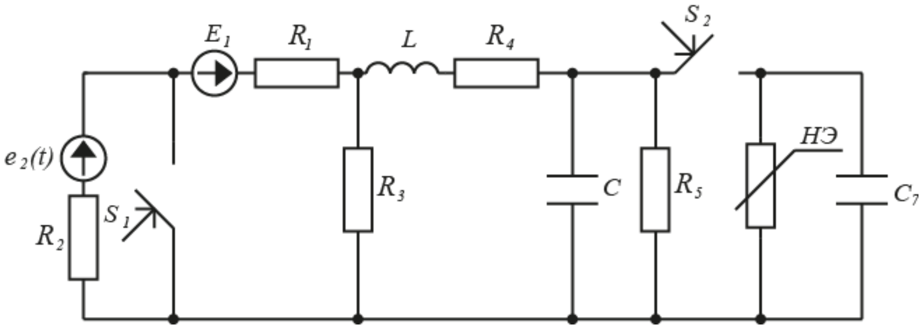

L
R4
R6
НЭ
S1
E1
R3
e2(t)
S2
C
R5
R1
R2
L7

9)

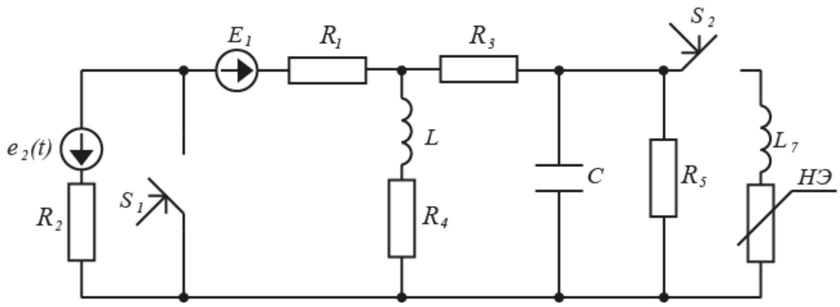

E1
R1
R6
НЭ
S1
L
e2(t)
R5
C
S2
R4
R2
L7

10)

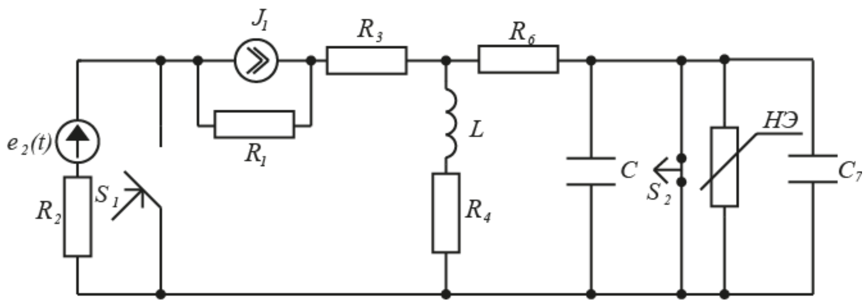

E1
R1
R6
НЭ
S1
L
R5
C
S2
C7
R4
j2(t)
R2
L7


E1
R1
L
R4
S2
e2(t)
R2
S1
R3
C
R5
НЭ
C7

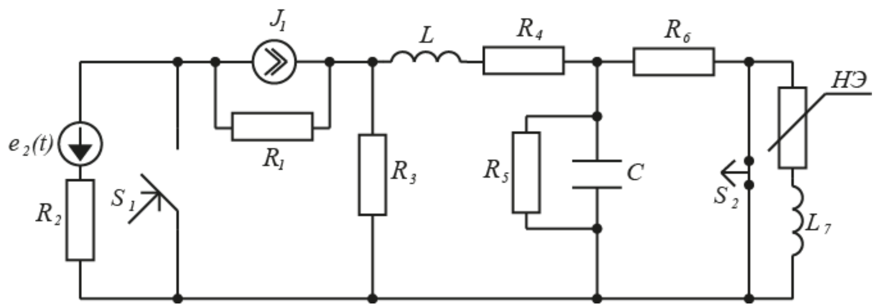
11)


E1
R1
R3
S2
e2(t)
L
L7
R2
S1
C
R5
НЭ
R4

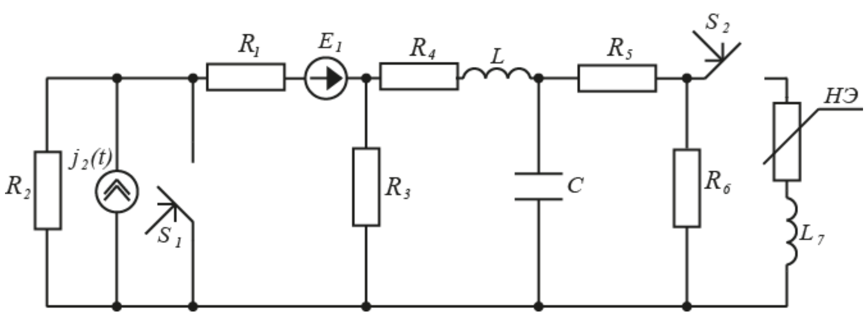
12)


J1
R3
R6
R1
L
НЭ
e2(t)
R2
S1
C
S2
C7
R4

13)

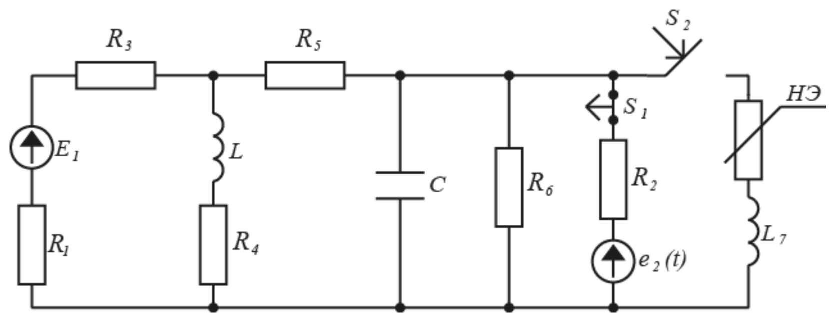

J1
L
R4
R6
НЭ
e2(t)
R1
R3
R5
C
S1
S2
R2
L7

14)

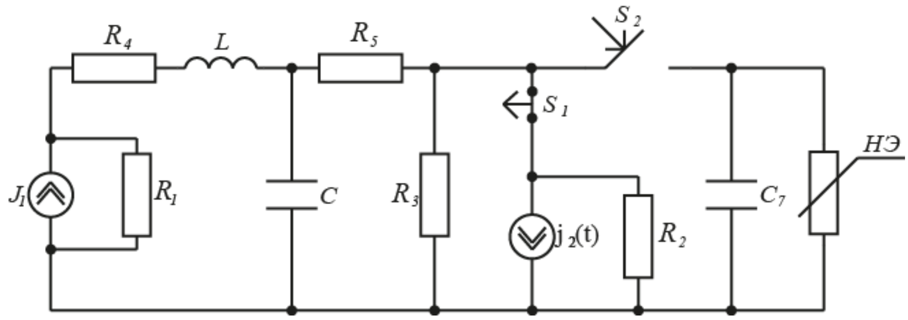

R1
E1
R4
L
R5
S2
НЭ
j2(t)
R2
R3
C
R6
S1
L7

15)

16)


R3
R5
S2
S1
НЭ
E1
L
C
R6
R2
R1
R4
L7
e2(t)

17)


R4
L
R5
S2
S1
НЭ
J1
R1
C
R3
j2(t)
R2
C7

18)

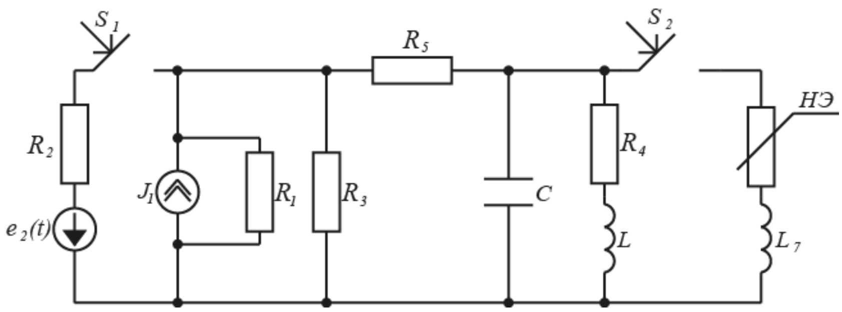

S1
R5
S2
НЭ
R2
R4
J1
R1
R3
C
e2(t)
L
L7

Таблица 1

Вариант задания	Номер схемы	Данные электрических схем														
		E_1, В	J_1, А	R_1, Ом	E_2, В	J_2, А	R_2, Ом	L, мГн	C мкФ	R_3, Ом	R_4, Ом	R_5, Ом	R_6, Ом	C_7, мкФ	L_7, мГн	φ, град
1	1	100	-	30	80	-	20	50	10	40	60	70	90	-	20	0
2	2	40	-	20	50	-	10	8,0	5,0	50	70	65	80	50	-	+15
3	3	-	8,0	15	80	-	7	80	20	35	40	50	70	-	5	-30
4	4	-	5,0	10	30	-	10	20	5,0	60	50	70	80	60	-	+50
5	5	80	-	15	-	9,0	9	55	30	30	45	60	65	-	20	-60
6	6	100	-	20	60	-	12	30	5,0	40	60	70	80	-	35	-45
7	7	-	8,0	15	-	4,0	20	75	35	55	75	80	90	30	-	+20
8	8	70	-	12	50	-	4	20	6,0	35	35	70	80	-	15	0
9	9	40	-	18	60	-	6	20	10	25	45	60	65	-	40	+90
10	10	90	-	25	-	4,0	15	6,0	4,0	20	60	75	85	60	60	-70
11	11	80	-	20	110	-	20	45	18	30	70	65	80	75	-	-30
12	12	110	-	35	150	-	25	20	5,0	40	35	40	70	-	35	-45
13	13	-	3,0	20	90	-	15	80	10	50	40	65	45	80	-	+45
14	14	-	3,5	20	80	-	10	25	5,0	30	50	70	80	-	80	-45
15	15	70	-	15	-	5,0	10	45	12	40	60	75	65	-	15	0
16	16	30	-	30	50	-	14	40	4,0	30	30	40	80	-	25	+60
17	17	-	2,0	35	-	5,0	20	100	12	35	60	75	95	90	-	-30
18	18	-	2,5	20	70	-	18	8,0	10	55	70	100	60	-	10	0
19	1	55	-	18	40	-	9	70	15	25	40	50	70	-	12	-30
20	2	35	-	15	60	-	20	40	5,0	20	40	70	75	40	-	-45
21	3	-	2,5	20	60	-	5	110	25	30	45	55	60	-	100	30
22	4	-	4,0	22	60	-	15	20	10	45	55	70	80	90	-	+45
23	5	100	-	30	-	7,0	20	90	20	55	60	70	90	-	60	0
24	6	120	-	10	80	-	15	30	8,0	30	45	60	80	-	100	-45
25	7	-	6,0	15	-	4,0	13	50	10	25	40	55	60	120	-	-30
26	8	80	-	20	50	-	10	30	6,0	50	60	55	75	-	60	-25
27	9	40	-	18	25	-	12	60	20	60	70	80	85	-	10	+25
28	10	60	-	15	-	8,0	10	25	5,0	30	55	90	120	25	80	+60
29	11	75	-	20	55	-	15	60	20	20	75	90	100	40	-	-30

30	12	95	-	25	50	-	20	10	6,0	35	45	55	70	-	120	+45

В качестве примера исследуем ЭЦ, схема которой приведена на рис.1.

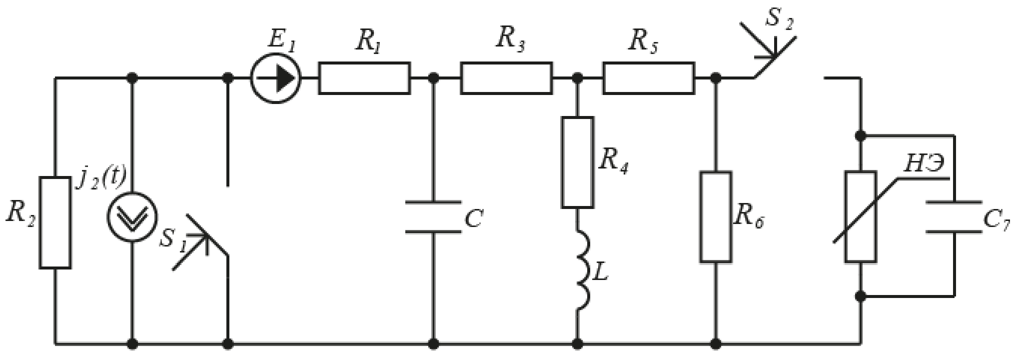


Рис.1

Принято: $R_1 = 20\,Ом;\ J_2 = 10\,A;\ \omega = 1000\ c^{-1},\ \varphi_{j2} = 30^\circ,\ R_2 = 20\ Ом;$

$L = 50мГн,\ C = 10мкФ,\ R_3 = 30\,Ом;\ R_4 = 60\,Ом;\ R_5 = 90\,Ом;\ R_6 = 70\,Ом;\ C_7 = 120мкФ,$

$j_2(t) = \sqrt{2}J_2\cos(\omega t + \varphi_{j2}) = 14{,}1\cos(1000t + 30)A;$ *НЭ ВАХ* вариант 1.

На каждом этапе ЭЦ может быть решена разными методами. Из них следует выбрать рациональный метод, т.е. в вычислительном отношении наименее трудоемкий. Ниже приводятся примеры решения конкретных задач разными методами.

Перечень и объем решаемых вопросов определяет преподаватель.

1. Исследование линейной ЭЦ с постоянным и гармоническим ИЭЭ (стационарный режим).

1.1. Обоснование выбора метода расчета

В ЭЦ действуют два источника электрической энергии (ИЭЭ): источник постоянного напряжения E_1 и источник переменного тока $j_2(t)$. Поскольку ЭЦ линейная, то возможно применение принципа суперпозиции (наложения). Сначала выполняется расчет на постоянном токе, при этом источник переменного тока исключается по правилу: ветвь с $j_2(t)$ размыкается, ветвь с R_2 остается. Затем выполняется расчет на переменном токе, при этом источник постоянного напряжения принимается $E_1 = 0$ т.е закорачивается, сопротивление R_1 остается. После этого результирующие токи и напряжения получаются алгебраическим суммированием их составляющих по постоянному и переменному току [1,3,5].

1.2. Расчет ЭЦ с постоянным ИЭЭ.

Постоянный ток можно рассматривать как предельный случай переменного тока частотой $\omega \to 0$. Отсюда на постоянном токе:

сопротивление и напряжение на индуктивности

$$X_L = \omega L = 0,\ U_L = I\omega L = 0;$$

сопротивление и ток ёмкости

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \to \infty(\textit{разрыв}),\quad I_C = U\omega C = 0$$

Ниже приводятся примеры расчета ЭЦ (рис. 1) методом эквивалентных преобразований и методом узловых напряжений.

1.2.1 Расчет ЭЦ методом эквивалентных преобразований

Последовательность преобразований показана на рис. 2.

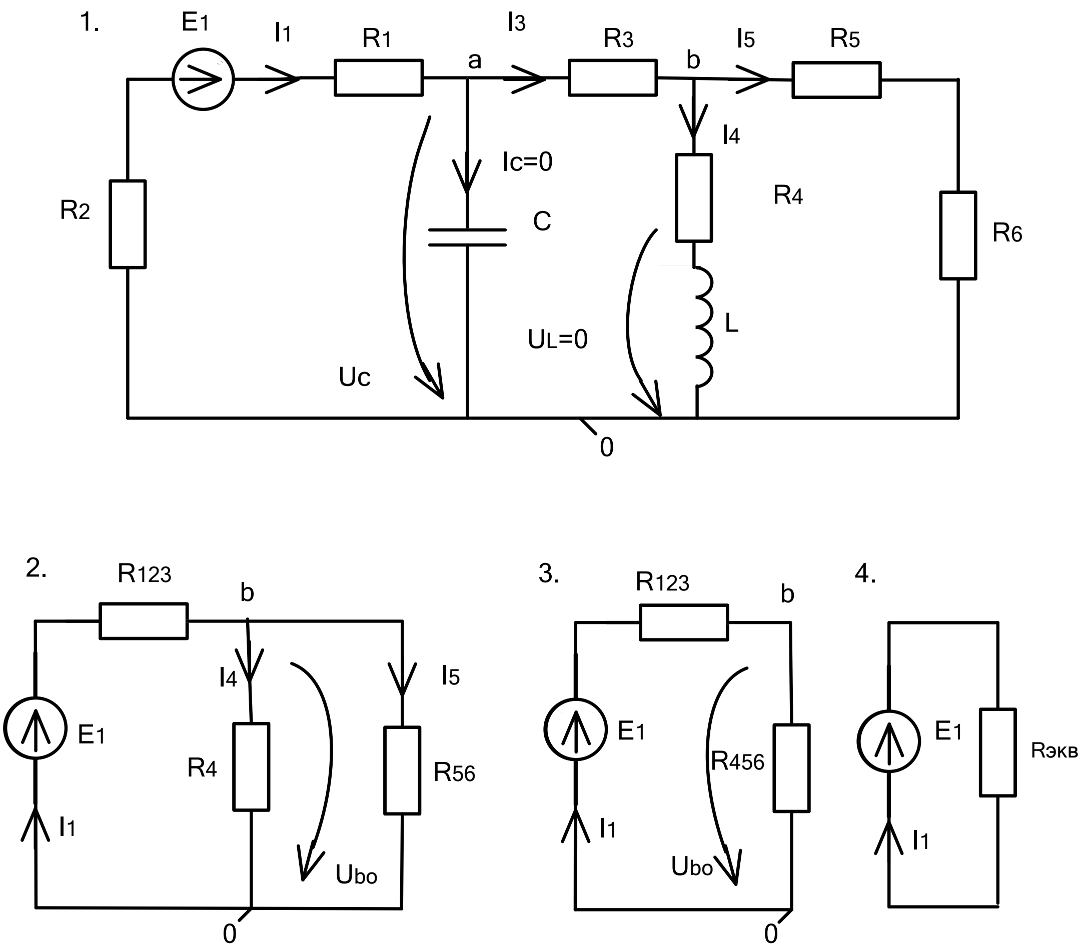


Рис.2

Здесь приняты обозначения:

$$R_{56} = R_5 + R_6 = 90 + 70 = 160\ Ом;$$
$$R_{456} = \frac{R_4 R_{56}}{R_4 + R_{56}} = \frac{60 \cdot 160}{60 + 160} = 43{,}6\ Ом;$$
$$R_{123} = R_1 + R_2 + R_3 = 20 + 20 + 30 = 70\ Ом;$$
$$R_{экв.} = R_{123} + R_{456} = 70 + 43{,}6 = 114\ Ом.$$

По закону Ома:

$$I_3 = I_1 = \frac{E_1}{R_{экв}} = \frac{100}{114} = 0{,}88\ А\ ;$$

$$U_{ab} = I_1 \cdot R_{456} = 0{,}88 \cdot 43{,}6 = 38{,}4\ В;$$

$$I_5 = \frac{U_{ab}}{R_{56}} = \frac{38{,}4}{160} = 0{,}24\ А;$$

$I_4 = \frac{U_{ab}}{R_4} = \frac{38,4}{60} = 0,64$ *А*.

Напряжение на ёмкости *C*:

$U_c = I_1(R_3 + R_{456}) = 0,88(30 + 43,6) = 64,8$ *В*.

Проверка правильности расчета по балансу мощностей ИЭЭ и потребителей, основанному на законе сохранения энергии:

$P_{E1} = E_1 \cdot I_1 = 100 \cdot 0,88 = 88$ *Вт;*

$P_{потреб.} = \sum_{i=1}^{6} i_i^2 \cdot R_i = 0,88^2(20+20+30) + 0,640^2 \cdot 60 + 0,240^2(70+90) = 88$ *Вт.*

Проверка выполняется.

1.2.2 Расчет ЭЦ методом узловых напряжений

Граф ЭЦ показан на рис. 3.

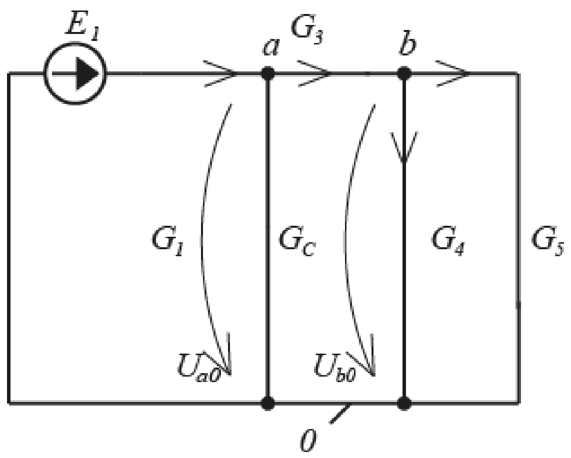


Рис.3

Проводимости ветвей:

$G_1 = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{20 + 20} = 2,5 \cdot 10^{-2}$ *См (сименс);*

$G_{ab} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{30} = 3,33 \cdot 10^{-2}$ *См;*

$G_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{60} = 1{,}67 \cdot 10^{-2}$ *См;*

$G_5 = \frac{1}{R_5 + R_6} = \frac{1}{90+70} = 0{,}625 \cdot 10^{-2}$ *См.*

Проводимость ветви с ёмкостью *C* на постоянном токе равна нулю, $G_c=0$.

Сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узел a,

$G_a = G_1 + G_c + G_{ab} = (2{,}50+0+3{,}33) \cdot 10^{-2} = 5{,}83 \cdot 10^{-2}$ *См.*

Сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узел b,

$G_b = G_{ab} + G_4 + G_5 = (3{,}33+1{,}67+0{,}625) \cdot 10^{-2} = 5{,}63 \cdot 10^{-2}$ *См.*

Уравнения узловых напряжений для узлов *a* и *b*

$$\begin{cases} U_{a0} \cdot G_a - U_{b0} \cdot G_{ab} = E_1 \cdot G_1 \\ U_{b0} \cdot G_b - U_{a0} \cdot G_{ab} = 0 \end{cases}$$

Решаем систему уравнений методом подстановок:

$$U_{bo} = U_a \cdot \frac{G_{ab}}{G_b};$$

$$U_{a0}(G_a \cdot G_b - G_{ab} \cdot G_{ab}) = E_1 G_1 \cdot G_b;$$

$$U_{a0=} = U_c = \frac{E_1 \cdot G_1 \cdot G_b}{G_a \cdot G_b - G_{ab} \cdot G_{ab}} = \frac{100 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 5{,}63 \cdot 10^{-2}}{5{,}83 \cdot 10^{-2} \cdot 5{,}63 \cdot 10^{-2} - 3{,}33 \cdot 3{,}33 \cdot 10^{-4}} = 64{,}8B;$$

$$U_{bo} = \frac{64{,}8 \cdot 3{,}33 \cdot 10^{-2}}{5{,}63 \cdot 10^{-2}} = 38{,}4B.$$

Токи ветвей:

$$I_1 = I_3 = (E_1 - U_{a0}) \cdot G_1 = (100 - 64{,}8) \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} = 0{,}88\ A;$$

$$I_L = \frac{U_{b0}}{R_4} = U_{bo} \cdot G_4 = 38{,}4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-2} = 0{,}64\ A;$$

$$I_5 = U_{b0} \cdot G_5 = 38{,}4 \cdot 0{,}625 \cdot 10^{-2} = 0{,}24\ A;$$

$I_c = 0$, а также $U_L = 0$.

Результаты расчета по обоим методам идентичны.

Возможен также расчет данной ЭЦ по законам Кирхгофа, но он заведомо менее эффективен, т.к. составляется более сложная в решении система из пяти уравнений (по числу ветвей, включая ветвь с ёмкостью), поэтому здесь не рассматривается.

1.3 Расчет ЭЦ с гармоническим ИЭЭ

Расчетная ЭЦ на переменном токе дана на рис.4, где ЭДС источника постоянного напряжения E_1 исключена по правилу (закорочена).

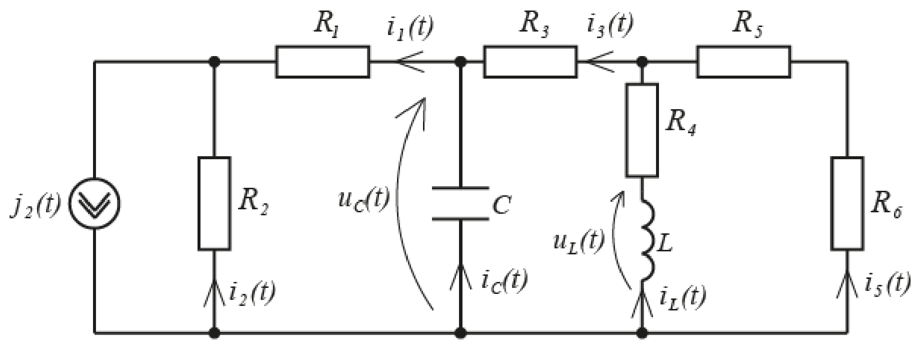


Рис.4

Источник переменного тока $j_2(t)$ с сопротивлением утечки R_2 может быть заменен на источник переменного напряжения с ЭДС $e_2(t) = j_2(t) \cdot R_2$ и внутренним сопротивлением R_2. Это уменьшает число ветвей и узлов ЭЦ и упрощает её расчет.

1.3.1 Расчет ЭЦ в комплексной форме методом узловых напряжений

По заданию ток источника $j_2(t)$ изменяется по гармоническому закону

$$j_2(t) = J_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_{j2}),$$

поэтому расчет ЭЦ выполняем в комплексных величинах.

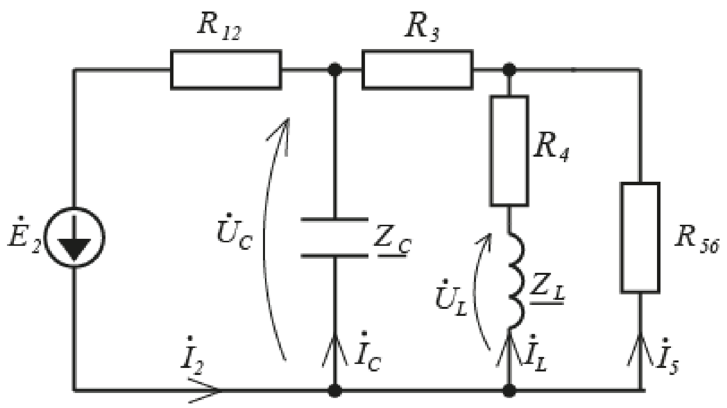


Рис.5

Схема замещения рассматриваемой ЭЦ в комплексной форме дана на рис.5.

Источник тока в показательной форме комплексной величины

$$j = J \cdot e_{j2}^{j\varphi} = 10 \cdot e^{j30^{\circ}} A,$$

он же в алгебраической форме комплексной величины

$$j_2 = J_2 \cos\varphi_{j2} + j \cdot J_2 \sin\varphi_{j2} = 10 \cdot 0{,}87 + j10 \cdot 0{,}5 = 8{,}7 + j5{,}0\ A,$$

Источник напряжения, преобразованный из источника тока,

$$\dot{E}_2 = j_2 \cdot R_2 = 10 \cdot 20 \cdot e^{j30^0} = 200 \cdot e^{j30^0}\ B,$$

$$\dot{E}_2 = 200 \cdot \cos 30^{\circ} + j200 \cdot \sin 30^{\circ} = 173 + j100B.^{\cdot}$$

Емкостное сопротивление

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{j\varphi_G} - \frac{1}{1000 \cdot 10^{-5}} \cdot e^{-j90} = 100 \cdot e^{-j90} Ом,$$

$$\underline{Z}_c = 100 \cdot \cos(-90^{\circ}) + j100 \cdot \sin(-90^{\circ}) = -j100Ом.$$

Индуктивное сопротивление

$$\underline{Z}_L = \omega L e^{j\varphi_L} = 1000 \cdot 0{,}05 \cdot e^{j90^{\circ}} = 50 \cdot e^{i90^{\circ}} Ом,$$

$$\underline{Z}_L = 50 \cdot \cos 90^{\circ} + j50 \cdot \sin 90^{\circ} = j50Ом.$$

Сопротивления ветвей:

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 20 + 20 = 40 Ом,$$

$$R_{56} = R_5 + R_6 = 90 + 70 = 160 Ом.$$

ЭЦ на рис.5 содержит пять ветвей и три узла. Расчет линейной ЭЦ переменного тока выполняем методом узловых напряжений, как более рациональным.

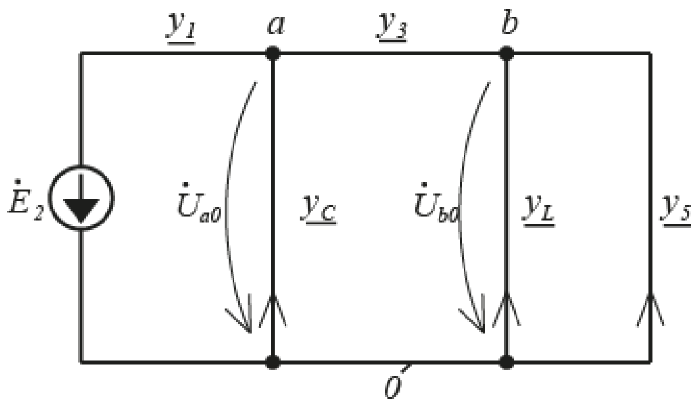


Рис.6

.Граф ЭЦ показан на рис.6, где принято следующее.

Проводимость ветви *12*

$$\underline{Y}_{12} = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{20 + 20} = 0.025 См.$$

Проводимость ветви *a0*

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = j\omega C = \omega C e^{-j\varphi_C} = j0.01 = 0.01 e^{j90^\circ} См.$$

Проводимость ветви *ab*

$$\underline{Y}_{ab} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{30} = 0.033 См.$$

Проводимость ветви *b0:*

$$\underline{Y}_4 = \frac{1}{R_4 + j\omega L} \cdot \frac{R_4 - j\omega L}{R_4 - j\omega L} = \frac{R_4 - j\omega L}{R_4^2 + (\omega L)^2};$$

в алгебраической форме

$$\underline{Y}_4 = \frac{60 - j50}{60^2 + 50^2} = (0.98 - j0.82) \cdot 10^{-2}\, См;$$

в показательной форме

$$\underline{Y}_4 = Y_4 \cdot e^{j\varphi_{y4}} = 1.28 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-j40^\circ}\, См,$$

где $$Y_4 = \sqrt{0.98^2 + 0.82^2} \cdot 10^{-2} = 1.28 \cdot 10^{-2}\, См.$$

$$\varphi_{Y_4} = arctg\frac{-0.82}{0.98} = -40^\circ.$$

Проводимость ветви *5*

$$\underline{Y}_5 = \frac{1}{R_5 + R_6} = \frac{1}{90 + 70} = 0{,}625 \cdot 10^{-2}\ См.$$

Сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узел *a*,

$$\underline{Y}_a = \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_c + \underline{Y}_{ab} = 0{,}025 + j0{,}01 + 0{,}033 = 0{,}058 + j0{,}01 = 0{,}06 \cdot \mathrm{e}^{j10^\circ}\ См.$$

Сумма проводимости ветвей, сходящихся в узел *b*,

$$\underline{Y}_b = \underline{Y}_{ab} + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 = 3.3 \cdot 10^{-2} + (0.98 - j0.82) \cdot 10^{-2} + 0.625 \cdot 10^{-2}$$
$$= 4.9 \cdot 10^{-2} - j0.82 \cdot 10^{-2} = 5.0 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-j9{,}5^\circ}\, См.$$

Уравнения напряжений между узлами *a,0* и *b,0*

$$\begin{cases} \dot{U}_{a0} \cdot \underline{Y}_a - \dot{U}_{b0} \cdot \underline{Y}_{ab} = -\dot{E}_2 \cdot \underline{Y}_{12} & (1) \\ \dot{U}_{b0} \cdot \underline{Y}_b - \dot{U}_{a0} \cdot \underline{Y}_{ab} = 0 & (2) \end{cases}$$

Из (2) находим:

$$\dot{U}_{b0} = \frac{\dot{U}_{a0} \cdot \underline{Y}_{ab}}{\underline{Y}_b} \qquad (3)$$

Подставляем (3) в (1) и относительно $\dot{U}_{a0}$ получаем

$$\dot{U}_{a0} = \frac{-\dot{E}_2 \underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_b}{\underline{Y}_a \cdot \underline{Y}_b - \underline{Y}_{ab} \cdot \underline{Y}_{ab}},$$

где числитель

$$-\dot{E}_2\underline{Y}_{12}\cdot\underline{Y}_b=-200\cdot e^{j30^\circ}\cdot 0.025\cdot 5{,}0\cdot 10^{-2}\cdot e^{-9.5^\circ}=-0.25\cdot e^{j20.5^\circ},$$

знаменатель

$$\underline{Y}_a\cdot\underline{Y}_b-\underline{Y}_{ab}\cdot\underline{Y}_{ab}=0.06\cdot e^{j10^\circ}\cdot 0.05\cdot e^{-j9.5^\circ}-0.033\cdot 0.033=(18.4+j0.15)\cdot 10^{-4}=18.6\cdot 10^{-4}\cdot e^{j0.5^\circ}$$

Узловое напряжение $\dot{U}_{a0}$

$$\dot{U}_{a0}=-\dot{U}_C=\frac{-0.25\cdot e^{j20.5^\circ}}{18.6\cdot 10^{-4}\cdot e^{j0.5^\circ}}=-135\cdot e^{j20^\circ}=-127-j46.2\ B$$

Напряжение ветви $\dot{U}_{ab}$

$$\dot{U}_{ab}=-\dot{I}_3\cdot R_3=-1{,}62\cdot e^{i2{,}5^\circ}\cdot 30=-48{,}6\cdot e^{i2{,}5^\circ}\ B$$

Узловое напряжение $\dot{U}_{b0}$

$$\dot{U}_{b0}=\frac{\dot{U}_{a0}\cdot\underline{Y}_{ab}}{\underline{Y}_b}=\frac{-135\cdot e^{j20^\circ}\cdot 3.3\cdot 10^{-2}}{5{,}0\cdot 10^{-2}\cdot e^{-j9.5^\circ}}=-89.5\cdot e^{j29.5^\circ}=-77.9-j44.1\ B$$

Находим токи ветвей. Ток ветви *a0*

$$\dot{I}_C=-\dot{U}_{a0}\cdot\underline{Y}_C=135\cdot e^{j20^\circ}\cdot 0.01\cdot e^{j90^\circ}=1.35\cdot e^{j110^\circ}=-0.46+j1.27\,A$$

Ток ветви *b0*

$$\dot{I}_L=-\dot{U}_{bo}\cdot\underline{Y}_4=89.5\cdot e^{j29.5^\circ}\cdot 1.28\cdot 10^{-2}\cdot e^{-j40^\circ}=1.15\cdot e^{-j10.5^\circ}=1.13-j0.20\ A$$

Ток ветви с проводимостью $\underline{Y}_5$

$$\dot{I}_5=-\dot{U}_{bo}\cdot\underline{Y}_5=89.5\cdot e^{j29.5^\circ}\cdot 0.625\cdot 10^{-2}=0.56\cdot e^{j29.5^\circ}=0.49+j0.28\,A$$

Ток ветви с проводимостью $\underline{Y}_{ab}$

$$\dot{I}_3=(-\dot{U}_{a0}+U_{b0})\cdot\underline{Y}_{ab}=(127+j46.2-77.9-j44.1)\cdot 0.033=1.60+j0.069=1.61\cdot e^{j2.5^\circ}\,A.$$

Ток ветви с проводимостью $\underline{Y}_{12}$

$$\dot{I}_2R_{12}-\dot{U}_{a0}=\dot{E}_2$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = (\dot{E}_2 + \dot{U}_{a0}) \cdot \underline{Y}_{12} = (173 + j100 - 127 - j46.2) \cdot 0.025 = 1.16 + j1.35 = 1.77 \cdot e^{j49.5^\circ} A.$$

Напряжение на индуктивности L

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_L \cdot \underline{Z}_L = 1.15 \cdot e^{-j10.5^\circ} \cdot 50 \cdot e^{j90^\circ} = 57.5 \cdot e^{j79.5^\circ} = 10.3 + j56.5B.$$

1.3.2. Построение векторных диаграмм токов и напряжений на комплексной плоскости

Векторная диаграмма токов дана на рис.7, откуда следует:

$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3,$
$\dot{I}_3 = \dot{I}_L + \dot{I}_5$

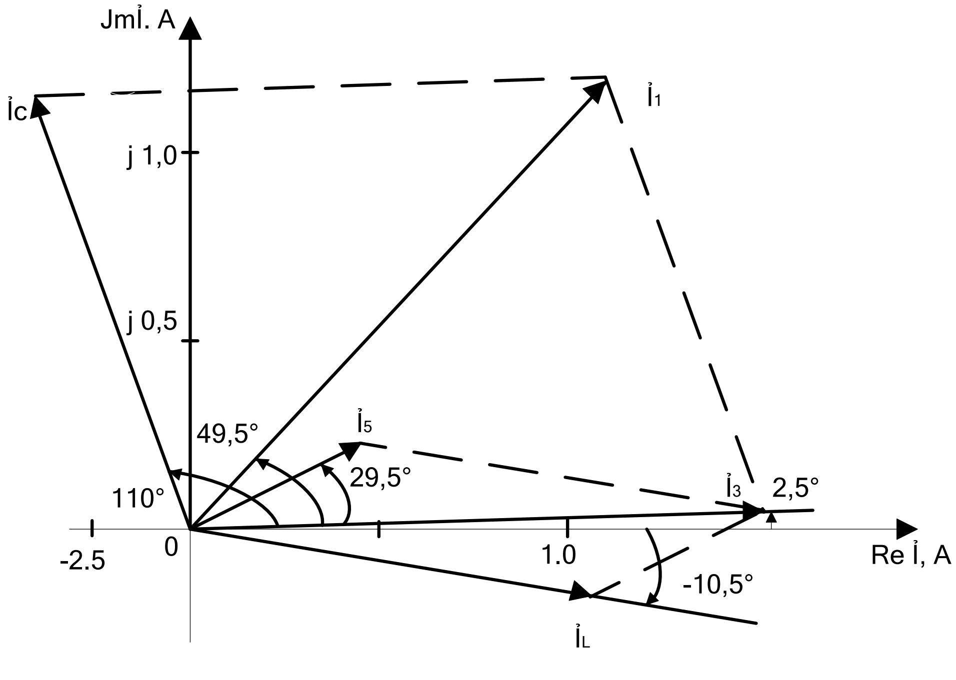


Рис.7

Векторная диаграмма напряжений дана на рис.8, откуда следует:

$\dot{E}_2 = \dot{U}_{12} - \dot{U}_{a0},$
$\dot{U}_{a0} = \dot{U}_{b0} - \dot{U}_{ab}$

Проверка по законам Кирхгофа выполняется.

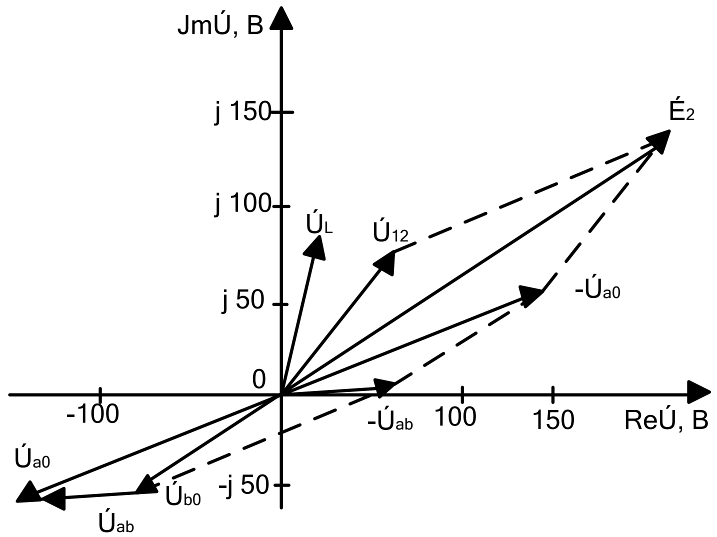


Рис.8

Полученные выражения токов и напряжений ветвей в комплексной форме (изображения) переводим в функции времени (оригиналы). Например, источник гармоничного тока:

$$\dot{I}_{am} = I_{2m} \cdot e^{j\varphi_{j2}},$$

$$j_2(t) = I_{2m} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{j2}).$$

Непосредственно перед коммутацией при t=0$^-$

$$j_2(0^-) = j_2^- = I_{2m} \cdot \cos\varphi_{j2} = 10\sqrt{2} \cdot \cos 30^0 = 12{,}2\ A$$

Аналогично, находим токи и напряжения ветвей:

$$U_C(0^-) = U_{cm} \cdot \cos\varphi_{uc} = \sqrt{2} \cdot 135 \cdot \cos 20^\circ = 180B;$$

$$i_C(0^-) = I_{cm} \cdot \cos\varphi_{ic} = \sqrt{2} \cdot 1.35 \cdot \cos 110^\circ = -0.65\ A;$$

$$U_L(0^-) = U_{Lm} \cdot \cos\varphi_{uL} = \sqrt{2} \cdot 57.5 \cdot \cos 79.7^\circ = 14.5\ B;$$

$$i_L(0^-) = I_{Lm} \cdot \cos\varphi_{iL} = \sqrt{2} \cdot 1.15 \cdot \cos(-10.3^\circ) = 1.59\ A;$$

$$i_1(0^-) = I_{1m} \cdot \cos\varphi_{i1} = \sqrt{2} \cdot 1.77 \cdot \cos 49{,}5^\circ = 1.62\ A;$$

$$i_3(0^-) = I_{3m} \cdot \cos\varphi_{i3} = \sqrt{2} \cdot 1.61 \cdot \cos 2{,}5^\circ = 2.27\ A;$$

$$i_5(0^-) = I_{5m} \cdot \cos\varphi_{i5} = \sqrt{2} \cdot 0.56 \cdot \cos 29.5^\circ = 0.68\ A.$$

Переходим к расчету результирующих токов и напряжений при t=0¯.

1.4 Расчет результирующих токов и напряжений ветвей ЭЦ (t=0¯)

Согласно принципу суперпозиции, результирующие токи и напряжения ветвей линейной ЭЦ равны алгебраической, т.е. с учетом знаков, сумме их составляющих от постоянного и гармонического ИЭЭ. За положительное направление принимаем направление токов и напряжений от постоянного ИЭЭ.

Результирующие токи и напряжения ветвей при t=0¯:

$$U^-{}_C = U_C - U_C(0^-) = 64.8 - 180 = -115\ B;$$

$$I^-{}_C = I_C - i_C(0^-) = 0 + 0.65 = 0.65\ A;$$

$$U^-{}_L = U_L - U_L(0^-) = 0 - 14.5 = -14.5\ B;$$

$$I^-{}_L = I_L - i_L(0^-) = 0.640 - 1.59 = -0.95\ A;$$

$$I^-{}_1 = I_1 - i_1(0^-) = 0.880 - 1.62 = -0.74\ A;$$

$$I^-{}_3 = I_3 - i_3(0^-) = 0.880 - 2.27 = -1.39\ A;$$

$$I^-{}_5 = I_5 - i_5(0^-) = 0.240 - 0.68 = -0.44\ A.$$

Эти величины используем при расчете переходного процесса в линейной ЭЦ.

2. Исследование переходного процесса в линейной ЭЦ классическим методом

2.1 Составление уравнений переходного процесса

В ЭЦ ключ S_1 коммутирует, в рассматриваемом примере S_1 замыкается. Образуются две раздельные цепи: одна с гармоническим $j_2(t)$ ИЭЭ, где нет реактивных элементов и переходный процесс отсутствует; другая с постоянным ИЭЭ E_1, где протекает переходный процесс, подлежащий изучению.

Целью исследования переходного процесса в ЭЦ на рис.9 является расчет и построение зависимостей $u_C(t), i_L(t)$. Расчет может быть выполнен классическим методом с решением системы дифференциальных уравнений или операционным методом с применением преобразований Лапласа, а также методом уравнений состояния с использованием компьютерного моделирования и др[2,4,6].

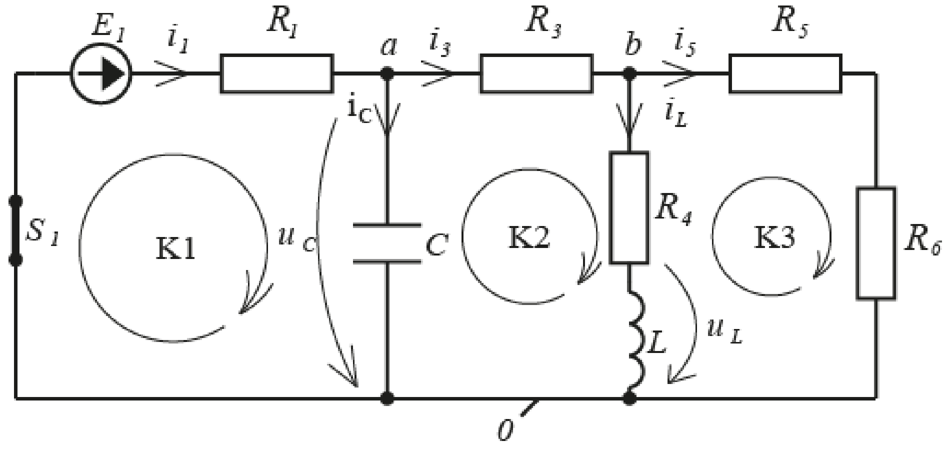


Рис.9

В классическом методе анализа переходных процессов в линейных ЭЦ с двумя реактивными элементами C и L искомые зависимости представляются в виде:

$$U_C(t) = U_{C_{УСТ}} + U_{C_{СВ}}(t) = U_{C_{УСТ}} + A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t}; \qquad (4)$$

$$i_L(t) = I_{L_{УСТ}} + i_{L_{СВ}}(t) = I_{L_{УСТ}} + B_1 e^{a_1 t} + B_2 e^{a_2 t}, \qquad (5)$$

где $U_{C_{УСТ}}, I_{L_{УСТ}}$ – установившиеся значения напряжения на емкости и тока в индуктивности;

$u_{C_{СВ}}(t), i_{L_{СВ}}(t)$ - свободные составляющие переходного процесса;

A_1, A_2, B_1, B_2 – постоянные интегрирования; α_1, α_2 – корни характеристического уравнения.

Выполняем расчеты в последовательности от простого к сложному:

при $t = 0^+$, т.е. сразу после коммутации ключа S_1;

при $t \to \infty$, т.е. в установившемся режиме после коммутации;

при $0^+ \le t < \infty$, т.е. переходный процесс.

2.2 Определение начальных значений токов и напряжений ($t = 0^+$)

Цель расчета: определение значений $U_C^+, I_C^+, U_L^+, I_L^+$, они необходимы при нахождении постоянных интегрирования переходного процесса.

По законам коммутации

$U_C^+ = U_C^- = -115\ В,$

$I_L^+ = I_L^- = -0.95\ А.$

Расчет ЭЦ по схеме на рис.10 выполняем по законам Кирхгофа: ЗТК – закону токов Кирхгофа; ЗНК – закону напряжений Кирхгофа.

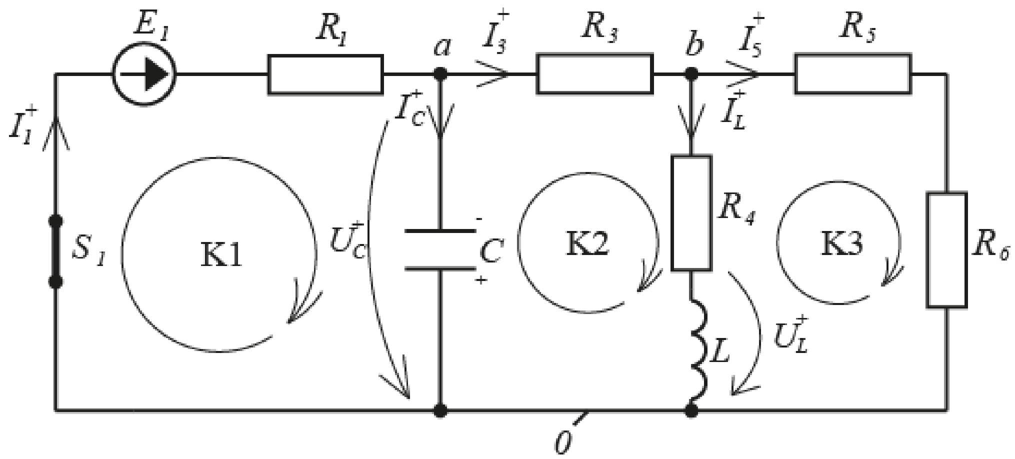


Рис.10

$$\left.\begin{array}{lr}
ЗТК\ узла\ a: \quad -I_1^+ + I_3^+ + I_C^+ = 0 & (6) \\
ЗТК\ узла\ b: \quad -I_3^+ + I_L^+ + I_5^+ = 0 & (7) \\
ЗНК\ контура\ K_1: \quad I_1^+ R_1 + U_C^+ = E_1 & (8) \\
ЗНК\ контура\ K_2: \quad -U_C^+ + I_3^+ R_3 + I_L^+ R_4 + U_L^+ = 0 & (9) \\
ЗНК\ контура\ K_3: \quad -U_L^+ - I_L^+ R_4 + I_5^+ R_{56} = 0 & (10)
\end{array}\right\}$$

Решаем систему уравнений методом подстановок. Выполняем следующие действия:

из(10): $$I_5^+ = \frac{U_L^+ + I_L^+ R_4}{R_{56}}, \qquad (11)$$

из (8): $$I_1^+ = \frac{E_1 - U_C^+}{R_1} = \frac{100 + 115}{20} = 10.75\,A. \qquad (12)$$

Подстановка (11) в (7) дает:

$$I_3^+ = I_L^+(1 + \frac{R_4}{R_{56}}) + \frac{U_L^+}{R_{56}} \qquad (13)$$

Подстановка (12) и (13) в (6) дает

$$\begin{aligned}&\frac{-E_1 + U_C^+}{R_1} + I_L^+(1 + \frac{R_4}{R_{56}}) + \frac{U_L^+}{R_{56}} + I_C^+ = \frac{-100 - 115}{20} - 0{,}95(1 + \frac{60}{160}) + \frac{U_L^+}{160} + I_C^+ = \\ &= -12{,}0 + 6{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot U_L^+ + I_C^+ = 0.\end{aligned} \qquad (14)$$

Подстановка (13) в (9) дает:

$$\begin{aligned}&-U_C^+ + I_L^+(R_3 + R_4 + \frac{R_3 R_4}{R_{56}}) + U_L^+(1 + \frac{R_3}{R_{56}}) = 115 - 0{,}95(30 + 60 + \frac{30 \cdot 60}{160}) + U_L^+(1 + \frac{30}{160}) = \\ &= 18{,}8 + 1{,}19 U_L = 0\end{aligned}$$

Отсюда: $U_L^+ = -16\,B$

Из (14) $$I_C^+ = 12{,}5 - 6.25 \cdot 10^{-3} \cdot U_L^+ = 12{,}5 - 6.25 \cdot 10^{-3} \cdot 16 = 12.2\ A.$$

Итого получаем:

$$U_C^+ = -115\ B; \qquad I_L^+ = -0{,}95\ A; \qquad I_C^+ = 12.2\ A; \qquad U_L^+ = -16\ B. \qquad (15)$$

2.3 Определение установившихся значений токов и напряжений ($t \to \infty$)

Цель работы: определение значений $U_{C\,уст}, I_{C\,уст}, U_{L\,уст}, I_{L\,уст}$, которые необходимы при нахождении постоянных интегрирования.

Расчетная схема дана на рис.11. Расчёт выполняем методом эквивалентных преобразований

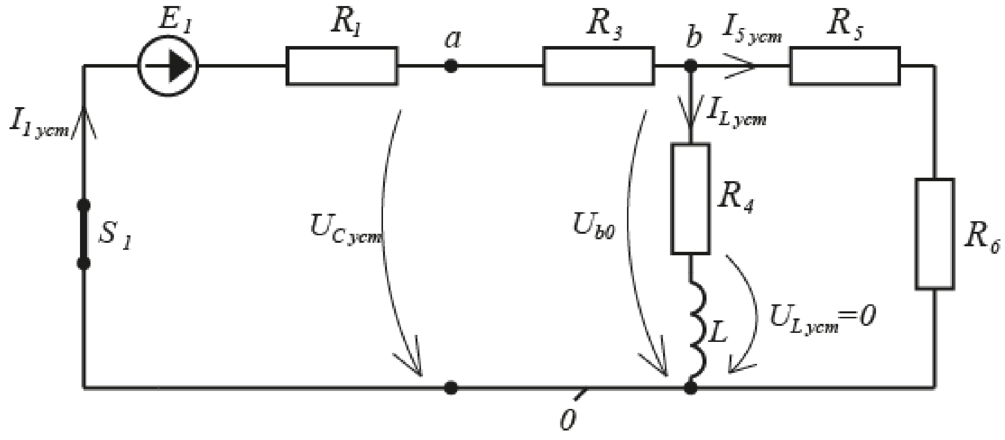


Рис.11

Эквивалентное сопротивление цепи относительно источника E_1

$$R_{экв} = R_1 + R_3 + R_{456} = 20 + 30 + 43{,}6 = 93{,}6\ Ом,$$

где, $R_{456} = \dfrac{R_4(R_5 + R_6)}{R_4 + R_5 + R_6} = \dfrac{60 \cdot (90 + 70)}{60 + 90 + 70} = 43{,}6\ Ом.$

Ток источника E_1

$$I_{1\,уст} = \frac{E_1}{R_{экв}} = \frac{100}{93{,}6} = 1{,}07\ А.$$

Напряжения и токи ветвей:

$$U_{B0\,уст} = I_{1уст} \cdot R_{456} = 1{,}07 \cdot 43{,}6 = 46{,}7\ В;$$

$$I_{L\,уст} = \frac{U_{B0\,уст}}{R_4} = \frac{46{,}7}{60} = 0{,}78\,А;$$

$$I_{5\,уст} = \frac{U_{B0\,уст}}{R_5 + R_6} = \frac{46{,}7}{90 + 70} = 0{,}29\,А;$$

$$U_{Сует} = U_{a0\,уст} = I_{1уст} \cdot R_3 + U_{B0\,уст} = 1{,}07 \cdot 30 + 46{,}7 = 78{,}8\ В.$$

Итого, получаем:

$$U_{L\,уст} = 0, \quad I_{L\,уст} = 0{,}78\ А. \qquad U_{C\,уст} = 78{,}8\ В, \quad I_{C\,уст} = 0\,, \tag{16}$$

2.4 Формирование системы дифференциальных уравнений

Составляем систему алгебраических уравнений по законам Кирхгофа для узлов *a, b* и контуров K_1, K_2, K_3 схемы на рис.12.

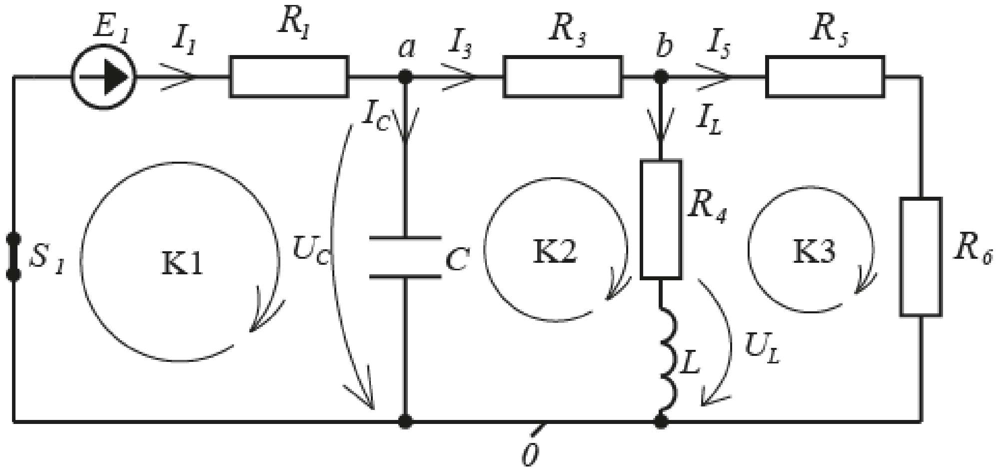


Рис. 12

$$\left.\begin{array}{ll} -i_1 + i_3 + i_C = 0 & (17) \\ -i_C + i_L + i_5 = 0 & (18) \\ i_1 R_1 + u_c = E_1 & (19) \\ -u_C + i_3 R_3 + i_L R_4 + u_L = 0 & (20) \\ -u_L - i_L R_4 + i_5 R_{56} = 0 & (21) \end{array}\right\}$$

Преобразуем систему уравнений:

из (17) $\quad i_1 = i_C + i_3 \qquad (22)$

из (18) $\quad i_5 = i_3 - i_L \qquad (23)$

Подставляем (22) и (23) в (19), (20), (21), получаем

$$\left.\begin{aligned} &U_C + i_C R_1 + i_3 R_1 = E \\ &-U_C + i_3 R_3 + i_L R_4 + U_L = 0 \\ &i_3 R_{56} - i_L (R_4 + R_{56}) - U_L = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

В (24) проводим замену переменных

$$i_C = C\frac{dU_C}{dt} \text{ и } U_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Получаем искомую систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\left.\begin{aligned} &U_C + C\frac{dU_C}{dt} R_1 + i_3 R_1 = E \\ &-U_C + i_3 R_3 + i_L R_4 + L\frac{di_L}{dt} = 0 \\ &i_3 R_{56} - i_L (R_4 + R_{56}) - L\frac{di_L}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

2.5 Определение корней α_1 и α_2 характеристического уравнения

В общем случае решение системы уравнений (25) имеет вид (4) и (5). Однако, следует отметить, что входящие в них установившиеся значения величин $U_{C\,уст}, I_{L\,уст}$ уже определены (16). Остаются неизвестными только свободные составляющие $u_{C\,CB}(t)$ и $i_{L\,СВ}(t)$, значения которых не зависят от величины E_1. Они определяются энергией, накопленной в электрическом поле емкости *C* и в магнитном поле индуктивности *L*. Отсюда, система уравнений (25) для свободных составляющих принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} &u_{C\,CB} + C\frac{du_{C\,CB}}{dt} R_1 + i_{3\,CB} R_1 = 0 \\ &-u_{C\,CB} + i_{3\,CB} R_3 + i_{L\,CB} R_4 + L\frac{di_{L\,CB}}{dt} = 0 \\ &i_{3\,CB} R_{56} - i_{L\,CB} (R_4 + R_{56}) - L\frac{di_{4\,CB}}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

В математике при решении дифференциальных уравнений используется прием по замене символа дифференцирования $\frac{d}{dt}$ на величину α, обладающую свойствами числа, тогда

$$\left.\begin{array}{l} U_{C\,CB} + C\cdot\alpha\cdot U_{C\,CB}\cdot R_1 + i_{3\,CB}R_1 = 0 \\ -U_{C\,CB} + i_{3CB}R_3 + i_{L\,CB}R_4 + L\cdot\alpha\cdot i_{L\,CB} = 0 \\ i_{3\,CB}R_{56} - i_{LCB}(R_4 + R_{56}) - L\cdot\alpha\cdot i_{L\,CB} = 0 \end{array}\right\} \quad (27)$$

Согласно (27) составляем и раскрываем характеристический определитель

$$\Delta = \begin{array}{ccc} U_{C\,CB} & i_{3\,CB} & i_{L\,CB} \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1+\alpha CR_1) & R_1 & 0 \\ -1 & R_3 & (R_4 + L\alpha) \\ 0 & R_{56} & -(R_4 + R_{56} + L\alpha) \\ & & \\ (1+\alpha CR_1) & R_1 & 0 \\ -1 & R_3 & (R_4 + L\alpha) \end{vmatrix} =$$

$$= 0R_3 + (1+\alpha CR_1)R_{56}(R_4 + L\alpha) + 1R_1(R_4 + R_{56} + L\alpha) -$$
$$\left[-(1+\alpha CR_1)R_3(R_4 + R_{56} + L\alpha) - 1R_{56}0 + 0R_1(R_4 + L\alpha)\right] \quad (28)$$

В (28) раскрываем скобки, приводим подобные члены, получаем характеристическое уравнение

$$\alpha^2 LCR_1(R_3 + R_{56}) + \alpha\left[L(R_1 + R_3 + R_{56}) + CR_1(R_3R_4 + R_3R_{56} + R_4R_{56})\right] + R_4(R_1 + R_3 + R_{56}) +$$
$$+ R_{56}(R_1 + R_3) = 0$$

В нормальной форме уравнение принимает вид

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0, \quad (29)$$

где,

$$2\delta = \frac{L(R_1 + R_3 + R_{56}) + CR_1(R_3R_4 + R_3R_{56} + R_4R_{56})}{LCR_1(R_3 + R_{56})} =$$
$$= \frac{5\cdot 10^{-2}(20+30+160) + 10^{-5}\cdot 20(30\cdot 60 + 30\cdot 160 + 60\cdot 160)}{5\cdot 10^{-2}\cdot 10^{5}\cdot 20(30+160)} = 7{,}23\cdot 10^{3} 1/c$$

$$\omega_0^2 = \frac{R_4(R_1+R_3+R_{56})+R_{56}(R_1+R_3)}{LCR_1(R_3+R_{56})} = \frac{60(20+30+160)+160(20+30)}{5\cdot 10^{-2}\cdot 10^5\cdot 20(30+160)} = 10{,}8\cdot 10^6\,\frac{1}{c^2}.$$

Здесь δ - коэффициент затухания переходного процесса;

ω_0 - резонансная частота. В ЭЦ на рис. 9 она наступает при замене источника Е постоянного напряжения на виртуальный источник переменного напряжения частотой ω_0.

Находим корни уравнения (29)

$$\alpha_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2-\omega_0^2} = -3{,}62\cdot 10^3 + \sqrt{(3{,}62\cdot 10^3)^2 - 10{,}8\cdot 10^6} = -2{,}1\cdot 10^3\,\frac{1}{c}$$

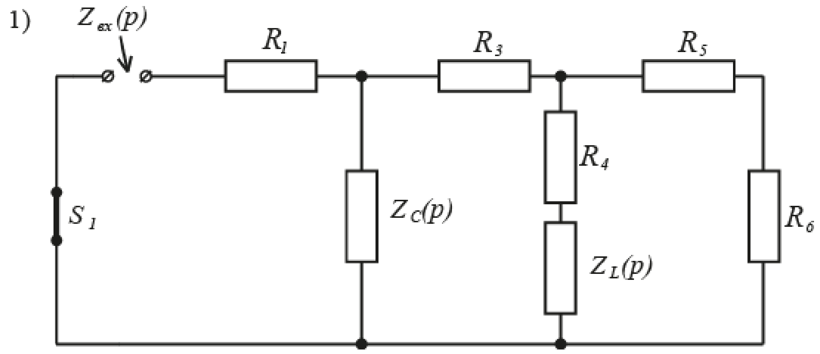
$$\alpha_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2-\omega_0^2} = -3{,}62\cdot 10^3 - \sqrt{(3{,}62\cdot 10^3)^2 - 10{,}8\cdot 10^6} = -5{,}1\cdot 10^3\,\frac{1}{c}$$

Итого: $\alpha_1 = -2{,}1\cdot 10^3\,\frac{1}{c}$; $\alpha_2 = -5{,}1\cdot 10^3\,\frac{1}{c}$. (30)

Корни α_1 и α_2 вещественные отрицательные, они соответствуют апериодическому затухающему процессу.

2.6 Определение нулей p_1 и p_2 операционного сопротивления $Z_{вх}(p)$

Расчет корней p_1, p_2 может быть использован для проверки правильности расчета корней α_1, α_2. Последовательность преобразований ЭЦ показана на рис.13



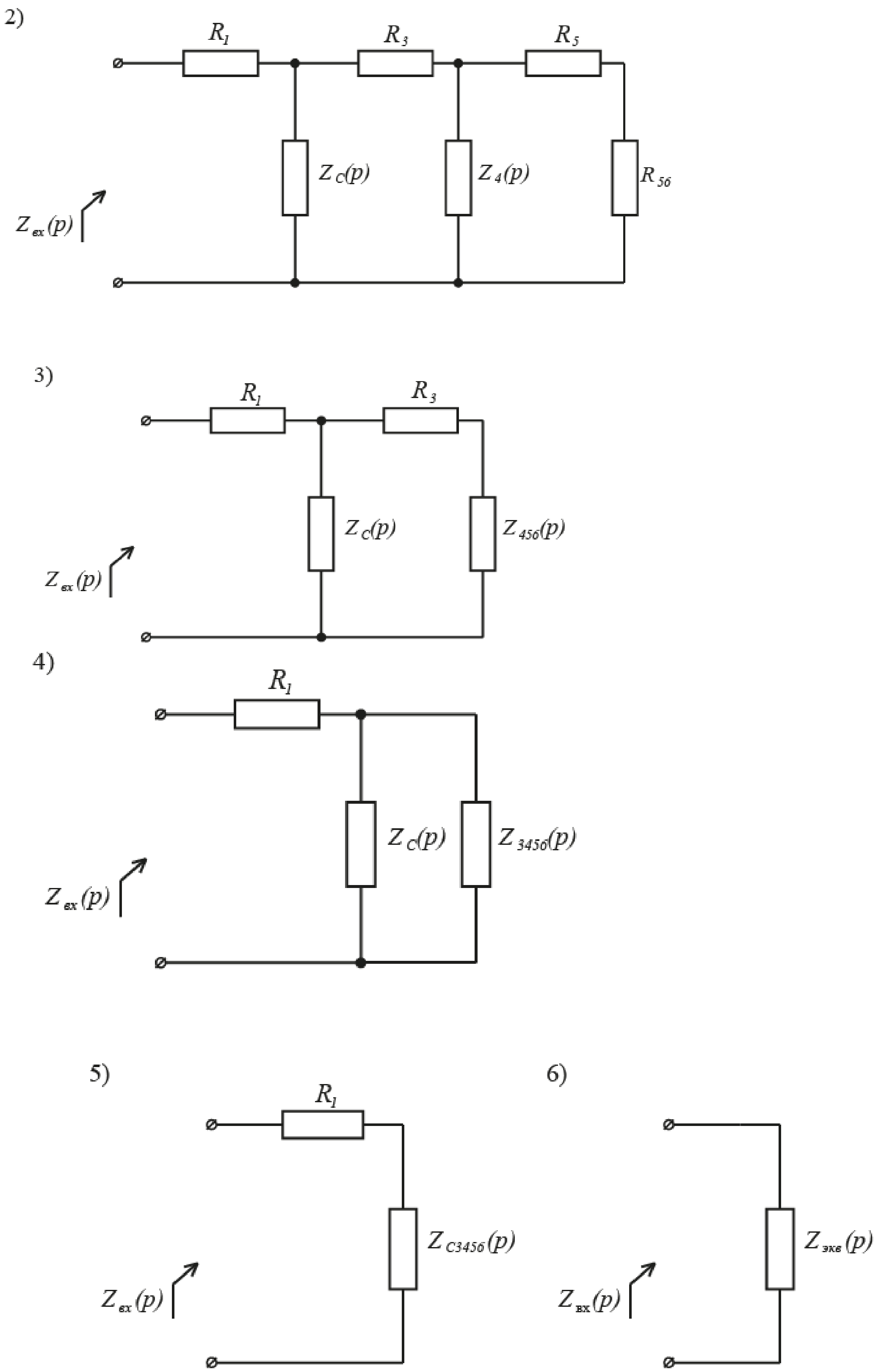


Рис.13

В расчетной схеме ключ S_1 остается в положении после коммутации, реактивные элементы представлены сопротивлениями

$$Z_C(p) = \frac{1}{pC}; \qquad Z_L(p) = pL,$$

где p - оператор Лапласа.

Проводим последовательные преобразования:

$$R_{56} = R_5 + R_6;$$

$$Z_4(p) = R_4 + pL;$$

$$Z_{456}(p) = \frac{R_{56} \cdot Z_4(p)}{R_{56} + Z_4(p)};$$

$$Z_{3456}(p) = R_3 + Z_{456}(p);$$

$$Z_{C3456}(p) = \frac{Z_C(p) \cdot Z_{3456}(p)}{Z_C(p) + Z_{3456}(p)};$$

$$Z_{BX}(p) = R_1 + Z_{C3456}(p).$$

В результате последовательных подстановок и приведения подобных членов окончательно получаем

$$Z_{BX}(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_1 p^2 + b_1 p + c_1}{a_2 p^2 + b_2 p + c_2} = \frac{1{,}9 \cdot 10^{-3} p^2 + 13{,}7 p + 20600}{a_2 p^2 + b_2 p + c_2},$$

где $$a_1 = LCR_1(R_3 + R_{56}) = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5} \cdot 20(30 + 160) = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$$

$$b_1 = CR_1R_3(R_4 + R_{56}) + CR_1R_4R_{56} + L(R_1 + R_3 + R_{56}) = 10^{-5} \cdot 20 \cdot 30(60 + 160) +$$
$$+ 10^{-5} \cdot 20 \cdot 60 \cdot 160 + 5 \cdot 10^{-2}(20 + 30 + 160) = 13{,}7$$

$$c_1 = R_{56}(R_1 + R_3 + R_4) + R_4(R_1 + R_3) = 160(20 + 30 + 60) + 60(20 + 30) = 20600$$

$$a_2 = LC(R_3 + R_{56})$$

$$b_2 = R_3(R_4 + R_{56}) + R_4R_{56}$$

$$c_2 = LC(R_3 + R_{56})$$

Числитель $A(p)$ приравниваем к нулю

$$A(p) = 1{,}9 \cdot 10^{-3}\, p^{2} + 13{,}7\, p + 20600 = 0$$

Находим корни квадратного уравнения

Итого: $p_1 = -2{,}1 \cdot 10^3 \, \dfrac{1}{c}$; $p_2 = -5{,}1 \cdot 10^3 \, \dfrac{1}{c}$ (31)

Корни (31) равны корням характеристического уравнения (30)

$$p_1 = \alpha_1; \qquad p_2 = \alpha_2$$

Отсюда значения корней α_1, α_2 можно получить менее трудоемким способом, определив корни p_1, p_2.

2.7 Определение постоянных интегрирования (корни α_1 и α_2 вещественные)

В уравнении (4) находим постоянные интегрирования A_1 и A_2 , для этого используем уравнение (4) и его производную

$$\left.\begin{aligned} &u_C(t) = u_{C\,уст} + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} && (4) \\ &\frac{du_c(t)}{dt} = A_1\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + A_2\alpha_2 e^{\alpha_2 t} && (32) \end{aligned}\right\}$$

Используем известную зависимость

$$C\frac{du_C(t)}{dt} = i_C, \text{ тогда } \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_C}{C}. \tag{33}$$

Записываем уравнения (4) и (32) с учетом (33) при $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} &u_c\big|_{t=0^+} = U_c^+ = U_{c\,уст} + A_1 + A_2 \\ &\left.\frac{du_c(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{I_c^+}{C} = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Подставляем в (34) численные значения (15) и (16)

$$U_c^+ = -115 \text{ В}, \quad U_{c\,уст} = 78{,}8 \text{ В}, \quad I_c^+ = 12{,}2 \text{ А}, \quad C = 10^{-5}\,Ф,$$

получаем

$$\left.\begin{aligned} -115 &= 78{,}8 + A_1 + A_2 \\ 12{,}2 \cdot 10^5 &= -2{,}1 \cdot 10^3 A_1 - 5{,}1 \cdot 10^3 A_2 \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Решая (35), находим

$$A_1 = 78 \text{ В}, \qquad A_2 = -272 \text{ В}$$

Итого, получаем переходный процесс по напряжению на емкости

$$u_c(t) = U_{c\ уст} + A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t} = 78{,}8 + 78 \cdot e^{-2{,}1 \cdot 10^3 t} - 272 \cdot e^{-5{,}1 \cdot 10^3 t} \qquad (36)$$

Проверяем (36) при $t = 0^+$

$U_c^+ = 78{,}8 + 78 - 272 = -115$ В,

при $t \to \infty \qquad U_{c\ уст} = 78{,}8$ В.

Полученные результаты соответствуют (15) и (16)

В уравнении (5) находим постоянные интегрирования B_1 и B_2

$$\left.\begin{aligned} & i_L(t) = I_{L\ уст} + B_1 e^{a_1 t} + B_2 e^{\alpha_2 t} && (5) \\ & \frac{di_L(t)}{dt} = B_1 \alpha_1 e^{a_1 t} + B_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t} && (37) \end{aligned}\right\}$$

Используем известную зависимость

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = u_L, \qquad \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{u_L}{L} \qquad (38)$$

Записываем уравнения (5) и (37) с учетом (38) при $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} & I_L\big|_{t=0^+} = I_L^+ = I_{L\ уст} + B_1 + B_2 \\ & \left.\frac{di_L(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{U_L^+}{L} = B_1 \alpha_1 + B_2 \alpha_2 \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

В (39) подставляем численные значения (15) и (16)

$$I_L^+ = -0{,}95 \text{ А}, \qquad I_{L\ уст} = 0{,}78 \text{ А}, \qquad U_L^+ = -16 \text{ В}, \qquad L = 0{,}05 \text{ Гн},$$

$$\alpha_1 = -2{,}1 \cdot 10^3 \frac{1}{c}, \qquad \alpha_2 = -5{,}1 \cdot 10^3 \frac{1}{c}$$

Получаем

$$\left.\begin{aligned} -0{,}95 &= 0{,}78 + B_1 + B_2 \\ -320 &= -2{,}1 \cdot 10^3 B_1 - 5{,}1 \cdot 10^3 B_2 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Решая (40), находим

$$B_1 = -3{,}05 \text{ А}, \qquad B_2 = 1{,}32 \text{ А}$$

Итого, получаем переходный процесс по току в индуктивности

$$i_L(t) = I_{L\,уст} + B_1 e^{\alpha_1 t} + B_2 e^{\alpha_2 t} = 0{,}78 - 3{,}05 \cdot e^{-2{,}1 \cdot 10^3 t} + 1{,}32 \cdot e^{-5{,}1 \cdot 10^3 t} \tag{41}$$

Проверяем (41) при $t = 0^+$

$$I_L^+ = 0{,}78 - 3{,}05 + 1{,}32 = -0{,}95 \text{ А},$$

при $\qquad t \to \infty \qquad I_{L\,уст} = 0{,}78$ А

Полученные результаты соответствуют (15) и (16)

2.8 Определение постоянных интегрирования

(корни α_1 и α_2 комплексно-сопряженные)

В качестве примера рассмотрим некоторую ЭЦ со следующими параметрами

$$C = 50 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \quad L = 0{,}1 \text{ Гн}; \quad U_C^+ = -50 \text{ В}; \quad I_c^+ = 0{,}4 A;$$

$$I_L^+ = 3{,}0 \text{ А}; \quad U_L^+ = -24 \ B; \quad U_{C\,уст} = 90 \text{ В}; \quad I_{L\,уст} = 6{,}0 \text{ А};$$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{U_L^+}{L} = \frac{-24}{0{,}1} = -240 \frac{\text{А}}{\text{с}};$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j\omega_{св} = -500 \pm j \cdot 3 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{с}},$$

В общем случае зависимость $u_C(t)$ имеет вид:

$$u_C(t) = U_{C\,уст} + u_{C\,св}(t) = U_{C\,уст} + A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega_{св} t + \varphi_{U_C}), \tag{42}$$

где A, φ_{U_C} - искомые постоянные интегрирования;

ω_0 - резонансная частота;

$\omega_{св}$ - частота свободных затухающих колебаний;

Производная функции $u_C(t)$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -A\cdot\delta\cdot e^{-\delta t}\cdot\sin(\omega_{св}t+\varphi_{U_C}) + A\cdot e^{-\delta t}\cdot\omega_{св}\cdot\cos(\omega_{св}t+\varphi_{U_C}) \qquad (43)$$

При $t=0^+$ уравнения (42) и (43) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &U_C^+ = U_{C\,уст} + A\cdot\sin\varphi_{U_C} \\ &\left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = -A\delta\cdot\sin\varphi_{U_C} + A\cdot\omega_{св}\cdot\cos\varphi_{U_C} \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Перепишем (44) в виде:

$$\left.\begin{aligned} &A\cdot\sin\varphi_{U_C} = U_C^+ - U_{C\,уст} = -50-90 = -140\,\text{В} \\ &A\cdot\omega_{св}\cdot\cos\varphi_{U_C} = \left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0^+} + \delta A\cdot\sin\varphi_{U_C} = 8000-500\cdot140 = -62\cdot10^3\,\text{В}/\text{с}, \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

где $\left.\dfrac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \dfrac{I_C^+}{C} = \dfrac{0,4}{50\cdot10^{-6}} = 8000\,\dfrac{\text{В}}{\text{с}}$;

Делим, левые и правые части уравнений (45);

$$\text{tg}\varphi_{U_C} = \frac{-140}{-62\cdot10^3}\cdot\omega_{св} = \frac{-140\cdot3,0\cdot10^3}{-62\cdot10^3} = 6,77.$$

Находим постоянную интегрирования φ_{U_C}:

$$\varphi_{U_C} = \text{arctg}\;6,77 = 81,6^\circ = 1,42\,рад.$$

Находим постоянную интегрирования A из (45):

$$A = \frac{-140}{\sin 81,6^\circ} = -142\,\text{В}.$$

Итого, уравнение переходного процесса напряжения на емкости:

$$u_C(t) = 90 - 142\cdot e^{-500\cdot t}\cdot\sin(3,0\cdot10^3 t + 81,6^\circ)\;B. \qquad (46)$$

В общем случае зависимость $i_L(t)$, имеет вид:

$$i_L(t) = I_{L\,уст} + i_{L\,св}(t) = I_{L\,уст} + D\cdot e^{-\delta t}\sin(\omega_{св}t + \varphi_{i_L}), \qquad (47)$$

где D, φ_{i_L} - искомые постоянные интегрирования.

Производная функции $i_L(t)$:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -D\cdot\delta e^{-\delta t}\cdot\sin(\omega_{св}t+\varphi_{i_L}) + D\cdot e^{-\delta t}\cdot\omega_{св}\cdot\cos(\omega_{св}t+\varphi_{i_L}) \qquad (48)$$

При $t = 0^{+}$ уравнения (47) и (48) принимают вид:

$$I_L^{+} = I_{L\,уст} + D\cdot\sin\varphi_{i_L} \qquad (49)$$

$$\left.\frac{di_L(t)}{dt}\right|_{t=0^{+}} = -D\delta\cdot\sin\varphi_{i_L} + D\cdot\omega_{св}\cdot\cos\varphi_{i_L} \qquad (50)$$

Перепишем (49) и (50) при $t = 0^{+}$ в следующем виде:

$$D\cdot\sin\varphi_{i_L} = I_L^{+} - I_{L\,уст} = 3{,}0 - 6{,}0 = -3{,}0\ \text{А}; \qquad (51)$$

$$D\cdot\omega_{св}\cos\varphi_{i_L} = \left.\frac{di_L(t)}{dt}\right|_{t=0^{+}} + \delta\cdot D\cdot\sin\varphi_{i_L} = -240 - 500\cdot 3 = -1740\ \text{А}/\text{c}, \qquad (52)$$

где
$$\left.\frac{di_L(t)}{dt}\right|_{t=0^{+}} = \frac{U_L^{+}}{L} = \frac{-24}{0{,}1} = -240\,\frac{\text{А}}{\text{c}}.$$

Делим, левые и правые части (51) и (52), получаем:

$$\text{tg}\varphi_{i_L} = \frac{-3{,}0\cdot 3\cdot 10^{3}}{-1{,}74\cdot 10^{3}} = 5{,}22.$$

Находим постоянную интегрирования φ_{i_L}:

$$\varphi_{i_L} = \text{arctg}\ 5{,}22 = 79^{\circ} = 1.4\ \text{рад}.$$

Находим постоянную интегрирования D из (51):

$$D = \frac{-3{,}0}{\sin 79^{\circ}} = -3{,}05\ \text{А}.$$

Итого, уравнение переходного процесса тока в индуктивности:

$$i_L(t) = 6{,}0 - 3{,}05\cdot e^{-500\cdot t}\cdot\sin(3\cdot 10^{3}t + 79^{\circ})\ \text{А}. \qquad (53)$$

Проверяем уравнения (46) и (53) при $t = 0^{+}$ и $t \to \infty$:

$$U_C^{+} = 90 - 142\cdot\sin 81{,}6^{\circ} = -50\ \text{В}. \qquad U_{C\,уст} = 90\ \text{В}.$$

$$I_L^{+} = 6{,}0 - 3{,}05\cdot\sin 79^{\circ} = 3{,}0\ \text{А}. \qquad I_{L\,уст} = 6{,}0\ \text{А}.$$

Полученные результаты соответствуют (15) и (16).

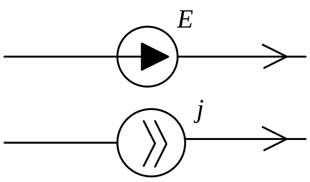
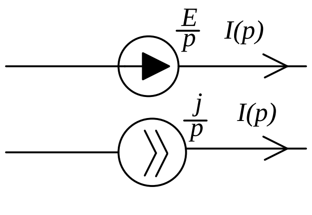
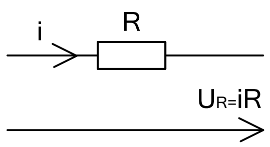
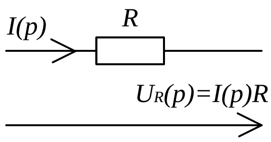
3. Исследование переходного процесса в линейной ЭЦ операционным методом

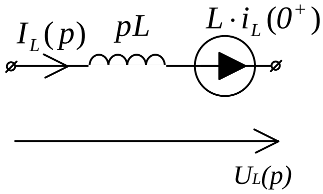
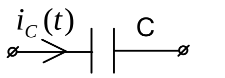
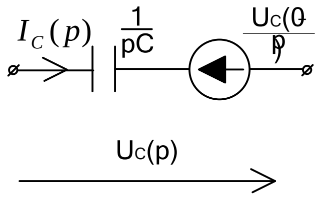
3.1 Построение операционной схемы замещения

Метод основан на прямом и обратном преобразованиях Лапласа. Его достоинства в том, что операции дифференцирования и интегрирования во временной области $x(t)$ заменяются более простыми алгебраическими операциями в комплексной плоскости с изображениями $X(p)$. При этом отпадает необходимость достаточно сложных действий по определению постоянных интегрирования, как это принято в классическом методе расчета переходного процесса.

Операционные схемы замещения элементов ЭЦ с ненулевыми начальными условиями приведены в табл. 2

Таблица 2

<table>
<tr><th>Временная область</th><th>Операционная схема</th></tr>
<tr><td>Источник электрической энергии
</td><td></td></tr>
<tr><td>Резистивный элемент
</td><td></td></tr>
</table>

Индуктивный элемент  $u_L(t) = L \cdot \dfrac{di_L(t)}{dt}$	
Емкостный элемент  $u_c(t) = \dfrac{1}{C}\int_0^t i_c(t)dt$	

Для исследуемой ЭЦ на рис. 14 построена операционная схема замещения

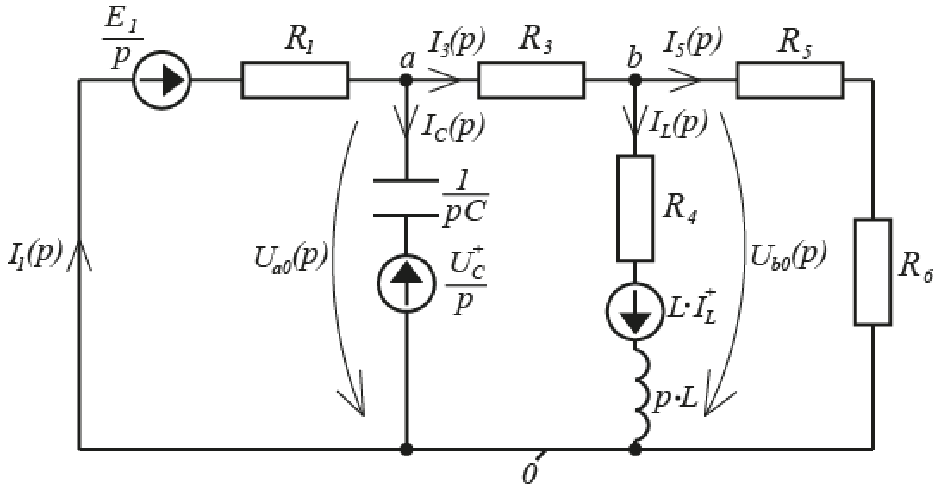


Рис.14

3.2 Определение изображений $U_C\ (p)$ и $I_L(p)$

Расчет ЭЦ в операционном виде может быть выполнен: по законам Кирхгофа; методом токов связей; методом узловых напряжений.

Система уравнений содержит в первом случае пять уравнений, во втором – три, в третьем - два уравнения.

Для расчета данной ЭЦ рациональным является метод узловых напряжений, по нему система уравнений принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &U_{a0}(p)\cdot Y_{11}(p)-U_{b0}(p)\cdot Y_{12}(p)=\frac{E_1}{p}\cdot Y_1(p)+\frac{U_c^+}{p}\cdot Y_c(p) &&(54)\\ &U_{b0}(p)\cdot Y_{22}(p)-U_{a0}(p)\cdot Y_{12}(p)=-L^+\cdot i_L^+\cdot Y_4(p) &&(55)\end{aligned}\right\}$$

Здесь приняты в операционной форме:

$U_{a0}(p)$,$U_{b0}(p)$ - узловые напряжения;

$Y_{11}(p), Y_{22}(p), Y_1(p), Y_c(p), Y_3(p), Y_4(p), Y_5(p)$ - собственные проводимости узлов 1, 2 и проводимости ветвей:

$$Y_{11}(p)=Y_1(p)+Y_c(p)+Y_3(p)=\frac{1}{R_1}+pC+\frac{1}{R_3};$$

$$Y_{22}(p)=Y_3(p)+Y_4(p)+Y_5(p)=\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4+pL}+\frac{1}{R_5+R_6}$$

С целью упрощения записи принимаем *$U(p)\rightarrow U$, $Y(p)\rightarrow Y$*. Уравнения *(54)* и *(55)* принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &U_{a0}(Y_1+Y_c+Y_3)-U_{b0}\cdot Y_3=\frac{E_1}{p}\cdot Y_1+\frac{U_C^+}{p}\cdot Y_c &&(56)\\ &U_{b0}(Y_3+Y_4+Y_{56})-U_{a0}\cdot Y_3=-L\cdot i_L^+\cdot Y_4 &&(57)\end{aligned}\right\}$$

Из (57) находим

$$U_{b0}=\frac{-L\cdot i_L^+\cdot Y_L+U_{a0}\cdot Y_3}{Y_3+Y_4+Y_5} \qquad (58)$$

Подставляем (58) в (56), находим

$$U_{a0}=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{E_1\cdot Y_1\cdot Y_{22}+U_C^+\cdot Y_C\cdot Y_{22}-Li_L^+Y_4Y_3\cdot p}{p(Y_{22}\cdot Y_{11}-Y_{12}Y_3)} \qquad (59)$$

Числитель *A(p)*

$$A(p)=\frac{E_1Y_1\left[\left(Y_3+Y_5\right)\left(R_4+pL\right)+1\right]+U_C\left[\left(Y_3+Y_5\right)\left(R_4+pL\right)+1\right]pC-Li_L^{+}Y_3\cdot p}{R_4+pL}=$$
$$=\frac{a_1p^2+a_2p+a_3}{R_4+pL} \qquad (60)$$

где, $a_1=U_c^{+}LC(Y_3+Y_5)=-115\cdot 0{,}05\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}040=-2{,}28\cdot 10^{-6}$

$$a_2=E_1LY_1(Y_3+Y_5)+U_C^{+}CR_4(Y_3+Y_5)+U_C^{+}\cdot C-L_{i_L}^{+}Y_3=100\cdot 0{,}05\cdot 0{,}040\cdot 0{,}05-$$
$$-115\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}040\cdot 60-115\cdot 10^{-5}+0{,}05\cdot 0{,}95\cdot 0{,}033=7{,}63\cdot 10^{-3}$$

$$a_3=E_1Y_1(Y_3+Y_5)R_4+E_1Y_1=100\cdot 0{,}05\cdot 0{,}040\cdot 60+100\cdot 0{,}05=16{,}9$$

Знаменатель *B(p)*

$$B(p)=p\cdot\frac{\left[\left(Y_3+Y_5\right)\left(R_4+pL\right)+1\right]\left(Y_1+Y_3+pC\right)-Y_3Y_3R_4-Y_3Y_3pL}{R_4+pL}=\frac{p(b_1p^2+b_2p+b_3)}{R_4+pL}, \qquad (61)$$

где, $b_1=LC(Y_3+Y_5)=0{,}05\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}040=1{,}98\cdot 10^{-8}$

$$b_2=L(Y_3+Y_5)(Y_1+Y_3)+C(Y_3+Y_5)R_4+C-LY_3Y_3=0{,}05\cdot 0{,}083\cdot 0{,}040+10^{-5}\cdot 0{,}083\cdot 60+10^{-5}-$$
$$-0{,}05\cdot 0{,}033\cdot 0{,}033=143\cdot 10^{-6}$$

$$b_3=(Y_1+Y_3)(Y_3+Y_5)R_4+(Y_1+Y_3)-Y_3Y_3R_y=0{,}083\cdot 0{,}040\cdot 60+0{,}083-0{,}033\cdot 0{,}033\cdot 60=0{,}214$$

В нормальной форме изображение $U_{a0}(p)$ принимает вид

$$U_{a0}(p)=U_c(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{a_1p^2+a_2p+a_3}{p\left(b_1p^2+b_2p+b_3\right)}=\frac{-115(p^2-3{,}32\cdot 10^3p-7{,}43\cdot 10^6)}{p(p^2+7{,}19\cdot 10^3p+10{,}8\cdot 10^6)}. \qquad (62)$$

3.3 Определение оригиналов $u_c(t)$, $i_L(t)$

По изображению $U_c(p)$ можно определить оригинал функции $u_c(t)$. Это возможно двумя способами:

-по формулам соответствия, приведенным в справочниках по операционному методу. Выражение для изображения при этом необходимо привести к табличному виду в справочнике (Приложение 1);

- по формуле разложения, полученной из теоремы разложения.

Оригинал напряжения $u_c(t)$ на емкости находим с использованием формулы разложения:

$$U_{a0}(p)=\frac{A(p)}{B(p)} \qquad \Rightarrow \qquad U_{a0}(t)=\sum_{k=1}^{3}\frac{A(pk)}{B'(pk)}\cdot e^{p_k\cdot t} \qquad (63)$$

Порядок действий следующий.

1. Приравнять полином знаменателя к нулю,

$$B(p)=p\left(b_1p^2+b_2p+b_3\right)=0$$

и найти его корни т.е полюса *(62),* $p_0,\ p_1,\ p_2$.

2. Взять производную по *p* от полинома знаменателя и получить полином

$$B'(p)=\frac{dB(p)}{dp}=3b_1p^2+2b_2p+b_3$$

3. Подставить каждый из корней (полюсов) в *A(p)* и *B′(p)* , тогда оригинал $u_c(t)$ принимает вид

$$u_c(t)=\frac{A(p_0)}{B'(\mathrm{p}_0)}\cdot e^{p_0t}+\frac{A(p_1)}{B'(\mathrm{p}_1)}\cdot e^{p_1t}+\frac{A(p_2)}{B'(\mathrm{p}_2)}\cdot e^{p_2t}. \qquad (64)$$

где $B'(p_0)$, $B'(p_1)$, $B'(p_2)$ - производные знаменателя с подстановкой в них корней p_0, p_1, p_2;

$A(p_0)$, $A(p_1)$, $A(p_2)$ - значения числителя $A(p)$ при подстановке в него корней знаменателя p_0, p_1, p_2.

Находим корни B(*p*) в *(61)*

$$B(p)=p(p^2+7{,}19\cdot10^3p+10{,}8\cdot10^6)=0$$

$$p_0=0$$
$$p_{1,2}=-3{,}6\cdot10^3\pm\sqrt{(3{,}6\cdot10^3)^2-10{,}8\cdot10^6}=-3{,}6\cdot10^3\pm1{,},5\cdot10^3\ \frac{1}{c}$$
$$p_1=-2{,}1\cdot10^3\ \frac{1}{c}$$
$$p_2=-5{,}1\cdot10^3\ \frac{1}{c}$$

Корни p_1, p_2 вещественные отрицательные, они равны значениям $\alpha_1,\ \alpha_2$ *(30).* Переходный процесс апериодический затухающий.

Производная знаменателя $B(p)$ по p , т.е. $B'(p)$

$$B'(p) = (b_{11}p^3 + b_{21}p^2 + b_{31}p)' = 3b_{11}p^2 + 2b_{21}p + b_{31}, \qquad (65)$$

где $b_{11} = 1, \quad b_{21} = \dfrac{b_2}{b_1}, \quad b_{31} = \dfrac{b_3}{b_1}.$

Подставляем численные значения в $B'(p)$

$$B'(p_0) = 10{,}8 \cdot 10^6$$
$$B'(p_1) = \left[3 \cdot 1 \cdot (-2{,}1)^2 + 2 \cdot 7{,}19(-2{,}1) + 10.8\right] \cdot 10^6 = -6{,}25 \cdot 10^6$$
$$B'(p_2) = \left[3 \cdot 1 \cdot (-5{,}1)^2 + 2 \cdot 7{,}19(-5{,}1) + 10{,}8\right] \cdot 10^6 = 14{,}3 \cdot 10^6$$

Подставляем значения корней p_0, p_1, p_2 в числитель $A(p)$ *(60)*

$$A(p_0) = 115 \cdot 7{,}43 \cdot 10^6 = 850 \cdot 10^6$$
$$A(p_1) = -115\left[(-2{,}1 \cdot 10^3)^2 - 3{,}32 \cdot 10^3(-2{,}1 \cdot 10^3) - 7{,}43 \cdot 10^6\right] = -505 \cdot 10^6$$
$$A(p_2) = -115\left[(-5{,}1 \cdot 10^3)^2 - 3{,}32 \cdot 10^3(-5{,}1 \cdot 10^3) - 7{,}46 \cdot 10^6\right] = -3{,}95 \cdot 10^9$$

Оригинал напряжения $u_c(t)$ на емкости

$$u_c(t) = \frac{A(p_0)}{B'(\mathrm{p}_0)} \cdot e^{p_0 t} + \frac{A(p_1)}{B'(\mathrm{p}_1)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(\mathrm{p}_2)} \cdot e^{p_2 t} = \frac{850 \cdot 10^6}{10{,}8 \cdot 10^6} \cdot e^{-0 \cdot t} + \frac{505 \cdot 10^6}{-6{,}25 \cdot 10^6} \cdot e^{-2{,}1 \cdot 10^3 t} +$$
$$+ \frac{3{,}95 \cdot 10^9}{14{,}3 \cdot 10^6} \cdot e^{-5{,}1 \cdot 10^3 t} = 78{,}8 + 80 \cdot e^{-2{,}1 \cdot 10^3 t} - 274 \cdot e^{-5{,}1 \cdot 10^3 t} \qquad (66)$$

Полученное выражение *(66)* соответствует *(36)*.

Расчет тока $i_L(t)$ в индуктивности L выполняется в следующей последовательности:

- из *(26)* найти выражение $U_{b0}(p)$;

- составить уравнение по закону напряжений Кирхгофа для контура, образованного ветвью 4 и напряжением $U_{b0}(p)$ (рис. 14)

$$I_L(p) \cdot (R_4 + pL) - U_{b0}(p) = L \cdot i_L^+; \qquad (67)$$

- найти изображение тока $I_L(p)$ в индуктивности L

$$I_L(p) = \frac{L \cdot i_L^+ + U_{b0}(p)}{R_4 + pL}; \qquad (68)$$

- в итоге привести выражение $I_L(p)$ к табличному виду, или применить формулу разложения;

- определить оригинал тока $i_L(t)$.

4. Формирование уравнений состояния ЭЦ

4.1 Составление уравнений состояния линейной ЭЦ

Уравнения состояния далее используются для расчета переходного процесса на компьютере.

Переходный процесс сопровождается изменением энергии электрического поля емкости *C*, $W_C(t)=\frac{Cu_C^2(t)}{2}$, и магнитного поля индуктивности *L*, $W_L(t)=\frac{Li_L^2(t)}{2}$, а также потреблением энергии от ИЭЭ.

За основу принимаем систему дифференциальных уравнений *(25),* при этом сохраняем переменные энергетического состояния $u_C(t)$, $i_L(t)$, а также источник напряжения E_1.

$$u_C + C\frac{du_C(t)}{dt}R_1 + i_3R_1 = E_1 \qquad (69)$$

$$-u_C + i_3R_3 + i_LR_4 + L\frac{di_L(t)}{dt} = 0 \qquad (70)$$

$$i_3R_{56} - i_L(R_4 + R_{56}) - L\frac{di_L(t)}{dt} = 0 \qquad (71)$$

Из *(69)* находим далее исключаемую переменную $i_3(t)$

$$i_3 = \frac{E_1}{R_1} - \frac{U_C}{R_1} - C\frac{dU_C}{dt} \qquad (72)$$

Суммируем левые и правые части уравнений *(70)* и *(71)*, получаем:

$$i_3(R_3 + R_{56}) - i_LR_{56} - U_C = 0 \qquad (73)$$

Подставляем *(72)* в *(73)*, получаем:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -a_{11}u_C - a_{12}i_L + b_1E_1 = -5{,}5\cdot 10^3u_C - 84\cdot 10^3 i_L + 5\cdot 10^3E_1, \qquad (74)$$

где $$a_{11} = \frac{R_1 + R_3 + R_{5\,6}}{R_1 C(R_3 + R_{5\,6})} = \frac{20 + 30 + 160}{20 \cdot 10^{-5}(30 + 160)} = 5{,}5 \cdot 10^3$$

$$a_{12} = \frac{R_{5\,6}}{C(R_3 + R_{5\,6})} = \frac{160}{10^{-5}(30 + 160)} = 84 \cdot 10^3$$

$$b_1 = \frac{1}{R_1 C} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-5}} = 5 \cdot 10^3$$

Подставляем *(72)* и *(74)* в *(70)*, получаем:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = a_{21}u_C - a_{22}i_L + b_2 E = 16{,}8u_C - 1705 i_L + 0 \cdot E_1 \qquad (75)$$

где, $$a_{21} = \frac{1}{L}\left(1 - \frac{R_3}{R_3 + R_{5\,6}}\right) = \frac{1}{0{,}05}\left(1 - \frac{30}{30 + 160}\right) = 16{,}8$$

$$a_{22} = \frac{1}{L}\left(R_4 + \frac{R_3 \cdot R_{5\,6}}{R_3 + R_{5\,6}}\right) = \frac{1}{0{,}05}\left(60 + \frac{30 \cdot 160}{30 + 160}\right) = 1705$$

$$b_2 = 0$$

Итого, получаем в нормальном виде искомую систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_C(t)}{dt} &= -a_{11}u_C - a_{12}i_L + b_1 E_1 = -5{,}5 \cdot 10^3 \cdot u_C - 84 \cdot 10^3 i_L + 5 \cdot 10^3 E_1 \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= a_{21}u_C - a_{22}i_L + b_2 E_1 = 16{,}8 \cdot u_C - 1705 i_L + 0 \cdot E_1 \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

Проверим правильность формирования уравнений состояния. В установившемся режиме все производные становятся равными нулю.

$$\left.\begin{aligned} &-5{,}5 \cdot 10^3 \cdot U_{C\,уст} - 84 \cdot 10^3 \cdot I_{L\,уст} + 500 \cdot 10^3 = 0 \\ &16{,}8 \cdot U_{C\,уст} - 1705 \cdot I_{L\,уст} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

Решая систему уравнений *(77)*, находим

$U_{C\ уст} = 78.8$ *В*, $\quad I_{L\ уст} = 0.78$ *А*

Полученные значения $U_{c\,уст}$ и $I_{L\,уст}$ равны соответствующим значениям *(16)*.

4.2 Составление уравнений состояния нелинейной ЭЦ (УИРС)

Этот пункт технического задания выполняется в рамках учебно-исследовательской работы студентов (УИРС)

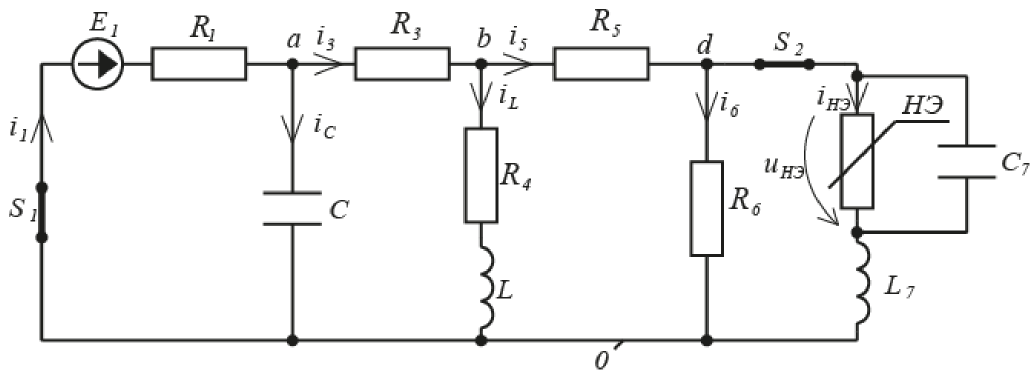


Рис.15

В исследуемой ЭЦ ключ S2 замыкается и к линейной ЭЦ подключается ветвь с резистивным нелинейным элементом НЭ (рис.15),образуется нелинейная ЭЦ. В этой цепи возникает переходный процесс, который со временем затухает и нелинейная ЭЦ переходит в установившийся режим.

Вольтамперную характеристику резистивного нелинейного элемента представляем в виде аналитической зависимости

$$I_{НЭ} = a_1 U_{НЭ} + a_2 U_{НЭ}^2 + a_3 U_{НЭ}^3 + a_4 U_{НЭ}^4 \qquad (78)$$

Коэффициенты аппроксимации a_1, a_2, a_3, a_4 могут быть рассчитаны по методу наименьших квадратов или по методу выбранных точек. За выбранные точки могут быть приняты табличные значения ВАХ НЭ технического задания.

Алгоритм формирования искомых уравнений и порядок их расчета изложен в [4]. Запишем уравнения состояния исследуемой нелинейной ЭЦ в нормальной форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_C(t)}{dt} &= f_1(u_C, i_L, i_{НЭ}) \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= f_2(u_C, i_L, i_{НЭ}) \\ \frac{di_{НЭ}(t)}{dt} &= f_3(u_C, i_L, i_{НЭ}) \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

Решение этой нелинейной системы уравнений может быть реализовано на основе одного из численных методов.

4.3 Расчет нелинейной ЭЦ в установившемся режиме

Целью такого расчета является определение в установившемся режиме следующих величин: напряжения $U_{НЭ\,уст}$ и тока $I_{НЭ\,уст}$ на НЭ; заряда Q_{C7} на емкости C_7; магнитного потока Ψ_{L7} на индуктивности L_7 (в качестве примера принимаем L_7=*15мГн*). Ток $I_{НЭ\,уст}$ через НЭ находим методом эквивалентного источника напряжения. При этом линейная часть ЭЦ относительно узлов *d0* заменяется эквивалентным источником с ЭДС $E_{ЭКВ}$ и внутренним сопротивлением $R_{ЭКВ}$.

Искомые напряжение $U_{НЭ\,уст}$ и ток

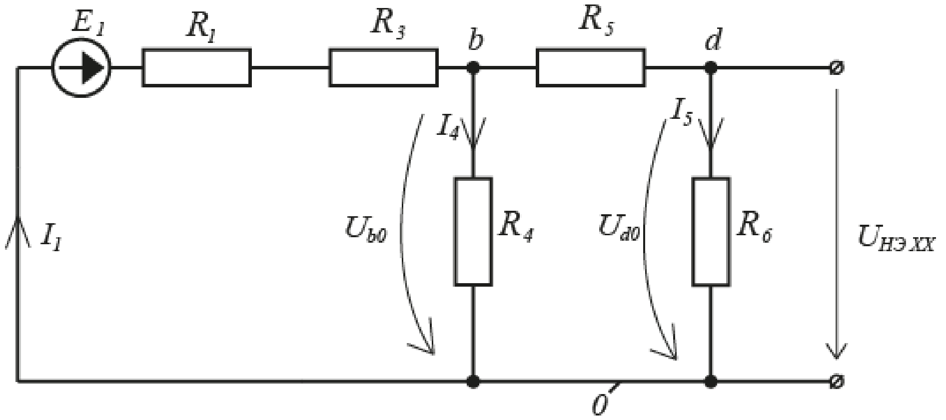


Рис.16

Находим $E_{ЭКВ}$ в режиме холостого хода (разрыв) ветви НЭ электрической цепи (рис.16)

$$E_{ЭКВ} = U_{НЭXX} = I_5 R_6 = 0{,}29 \cdot 70 = 20{,}4 \text{ В}, \qquad (80)$$

где
$$I_5 = \frac{Ubo}{R_5 + R_6} = \frac{46{,}6}{90+70} = 0{,}29 \text{ А};$$

$$U_{b0} = \frac{E_1 \cdot R_{456}}{R_1 + R_3 + R_{456}} = \frac{100 \cdot 43{,}6}{20+30+43{,}6} = 46{,}6 \text{ В};$$

$$R_{456} = \frac{R_4(R_5+R_6)}{R_4+R_5+R_6} = \frac{60(90+70)}{60+90+70} = 43{,}6 \text{ Ом}.$$

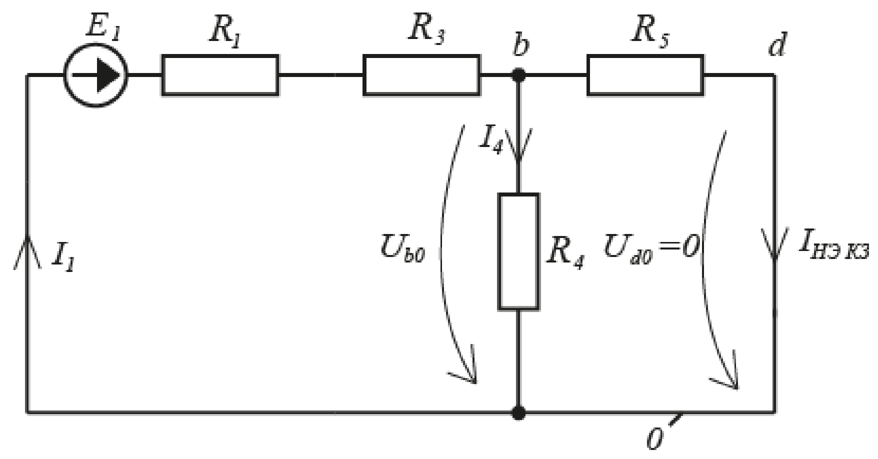


Рис.17

Находим ток $I_{НЭ\,КЗ}$ в режиме короткого замыкания ветви с НЭ (рис. 17)

$$I_{НЭ\,КЗ} = \frac{U_{b0}}{R_5} = \frac{41{,}9}{90} = 0{,}47\,A, \tag{81}$$

где
$$U_{b0} = I_1 R_{45} = 1{,}16 \cdot 36 = 41{,}9\,В,$$

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R_{45}} = \frac{100}{20 + 30 + 36} = 1{,}16\,А,$$

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \frac{60 \cdot 90}{60 + 90} = 36\ Ом.$$

На рис. 18 построена ВАХ НЭ в относительных единицах, где обозначены точки: *B* - короткого замыкания; *D* – холостого хода. Через эти точки проводим прямую *BD* , получаем точку пересечения *A*.

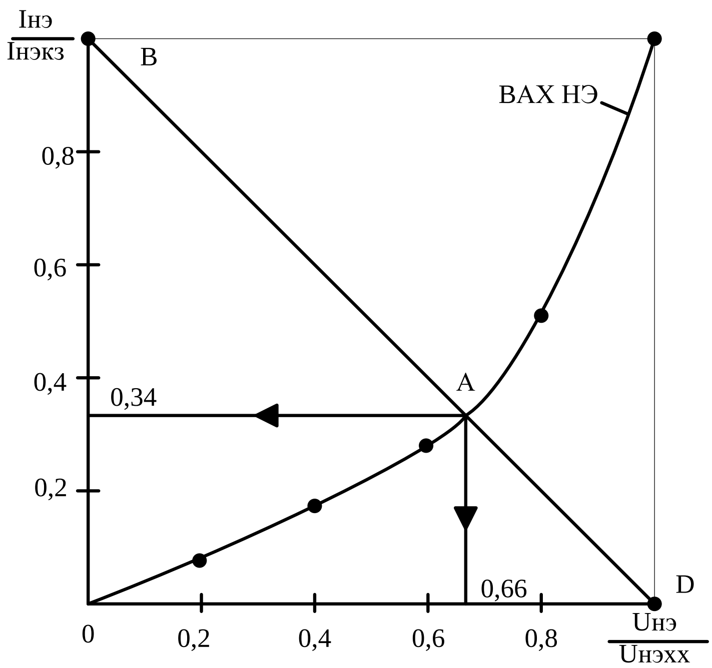


Рис.18

Находим координаты точки *A*:

$$\frac{U_{НЭ\,A}}{U_{НЭ\,XX}} = 0{,}66, \text{ отсюда } U_{НЭ} = U_{НЭ\,A} = 0{,}66 \cdot U_{НЭ\,XX} = 0{,}66 \cdot 20{,}4 = 13{,}5 \text{ В} \tag{82}$$

$$\frac{I_{НЭ\,A}}{I_{НЭ\,КЗ}} = 0{,}34, \text{ отсюда } I_{НЭ} = I_{НЭ\,A} = 0{,}34 \cdot I_{НЭ\,КЗ} = 0{,}34 \cdot 0{,}47 = 0{,}16 \text{ А} \tag{83}$$

Находим заряд емкости C_7 и магнитный поток индуктивности L_7

$$Q_7 = C_7 \cdot U_{НЭ} = 120 \cdot 10^{-6} \cdot 13{,}5 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\, Кл \tag{84}$$

$$\psi_7 = L_7 I_{НЭ} = 25 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}16 = 4{,}0 \cdot 10^{-3}\, Вб \tag{85}$$

Итого, получены все искомые величины ветви с НЭ.

5. Компьютерное исследование переходного процесса в линейной ЭЦ

5.1. Построение переходного процесса (корни α_1, α_2 - вещественные)

Расчет выполнен в пакете Matlab. Программа расчета приведена в Приложении 2.

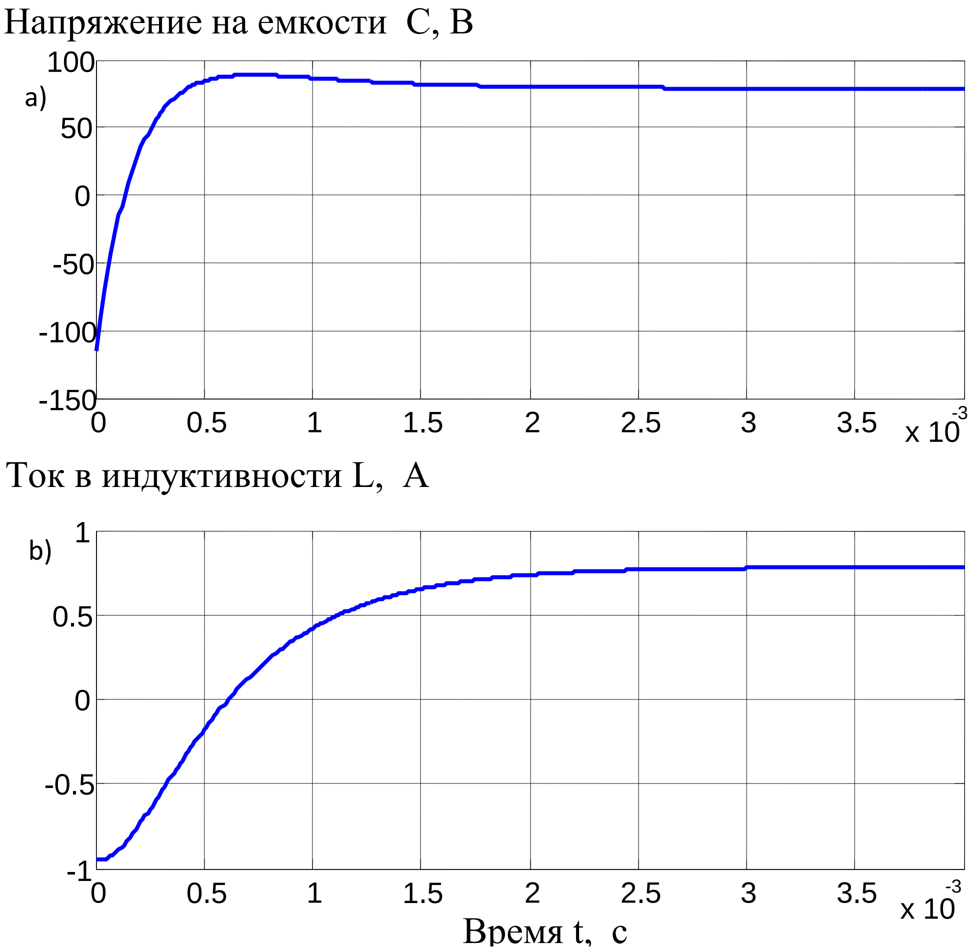


Рис. 19. Переходный процесс в линейной ЭЦ, корни α_1, α_2 вещественные: $a)\, u_c(t); b)\, i_L(t)$

5.2. Построение переходного процесса (корни α_1, α_2 комплексно- сопряженные)

Расчет выполнен в пакете Mathcad. Программа расчета приведена в Приложении 3

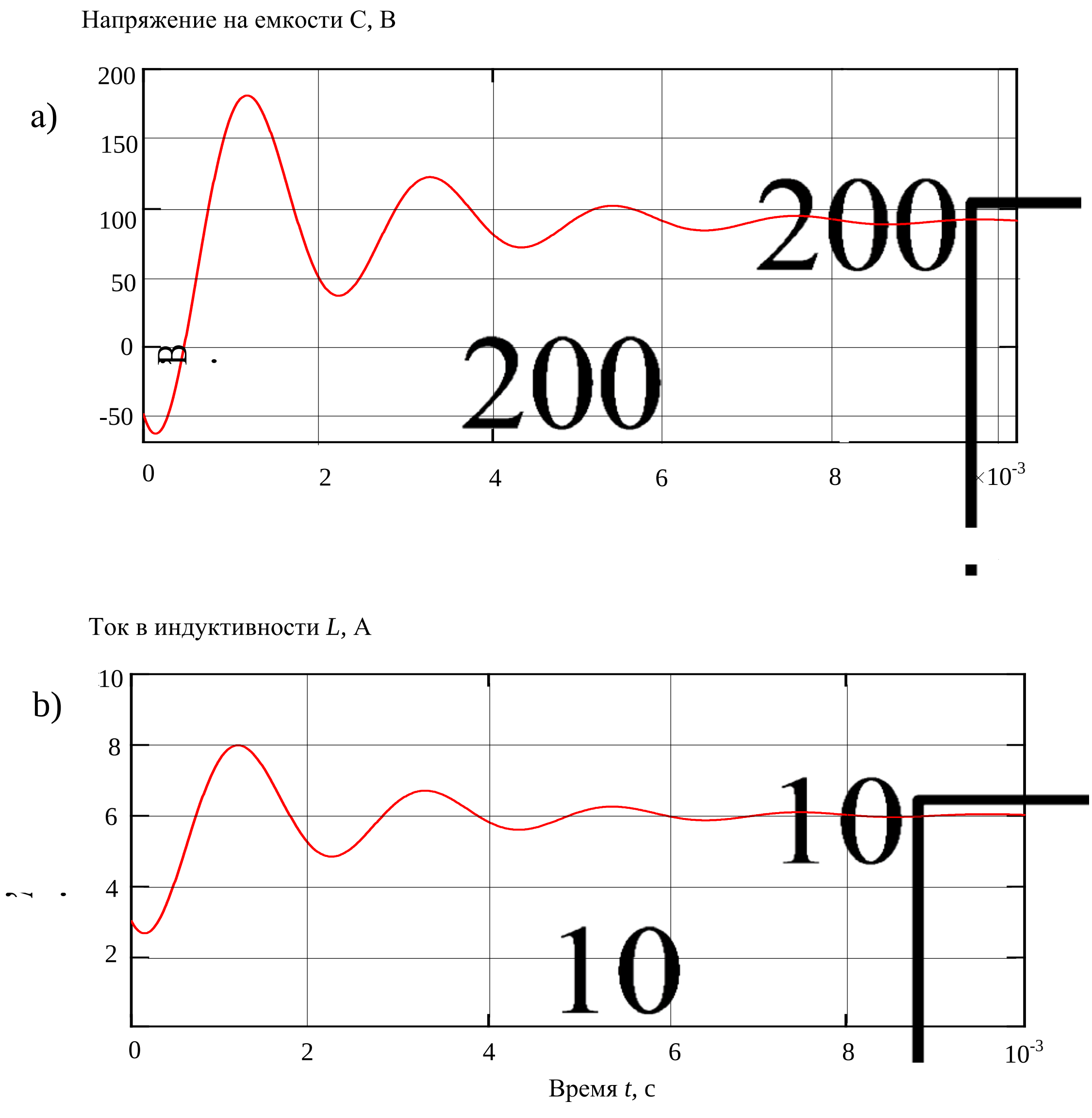


Рис. 20. Переходный процесс в линейной ЭЦ, корни α_1, α_2 комплексно-сопряженные: $a)\, u_c(t); b)\, i_L(t)$

Для оценки скорости затухания колебаний используем декремент колебаний

$$\Delta = \frac{I_{1m}}{I_{2m}} = e^{\delta T_{\text{св}}} = e^{500 \cdot 2,1 \cdot 10^{-3}} = 2,86,$$

где I_{1m}, I_{2m} значения первого и второго максимума тока относительно установившегося значения $I_{\text{уст}}$ (определяется из рис.20);

δ- коэффициент затухания, δ=500;

$T_{\text{св}}$ - период свободных колебаний.

$$T_{\text{св}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{св}}} = \frac{2\pi}{3000} = 2,1 \cdot 10^{-3} c.$$

Итого, $\Delta = 2,86,$ колебания практически затухают при $t \geq 3 \cdot T_{\text{св.}}$

Заключение (выводы).

В заключении должны быть отражены основные результаты исследования и их соответствие техническому заданию.

В качестве примера приведем следующий вариант заключения.

Проведено исследование ЭЦ в трех режимах работы. В линейной ЭЦ (режим 1) расчет выполнен методом наложения решений ЭЦ с постоянным ИЭЭ и гармоническим ИЭЭ. Результаты расчетов проверены по балансу мощностей и векторным диаграммам.

В линейной ЭЦ (режим 2) расчет выполнен классическим (или операционным) методом. Корни $\alpha_1 = -2,1 \cdot 10^3 \frac{1}{c}$, $\alpha_2 = -5,1 \cdot 10^3 \frac{1}{c}$ вещественные отрицательные, переходный процесс апериодический затухающий. Значения корней α_1, α_2 соответствуют значениям нулей p_1, p_2 сопротивления $Z_{вх}(\text{p})$. Сформированы уравнения состояния.

В нелинейной ЭЦ по завершении режима 3 методом эквивалентного источника напряжения определены ток, напряжение, электрический заряд, магнитный поток в элементах ветви с НЭ.

В линейной (нелинейной – УИРС) ЭЦ проведено исследование переходного процесса методом компьютерного моделирования в среде Matlab.

Приложение 1

Изображения *F(p)* и оригиналы *f(t)* по Лапласу

N	*F(p)*	*f(t)*
1	$\frac{1}{P}$	1
2	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
3	$\frac{1}{p(p+\alpha)}$	$\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$
4	$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$
5	$\frac{1}{p(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha\cdot\beta}+\frac{\beta\cdot e^{-\alpha t}-\alpha\cdot e^{-\beta t}}{\alpha\cdot\beta(\alpha-\beta)}$
6	$\frac{1}{(p+\delta)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}e^{-\delta t}\cdot\sin\omega t$
7	$\frac{1}{p[(p+\delta)^2+\omega^2]}$	$\frac{1}{\omega_0^2}+\frac{1}{\omega_0\cdot\omega}e^{-\delta t}\cdot\sin(\omega t-\varphi),$ где $\varphi=arctg\frac{\omega}{-\delta}, \omega_0^2=\delta^2-\omega^2$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\delta)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\cdot\sqrt{(\alpha-\delta)^2+\omega^2}\cdot e^{-\delta t}\cdot\sin(\omega t+\varphi)$

Приложение 2

Применение программы Matlab к построению $u_C(t)$, $i_L(t)$ по уравнениям состояния (корни α_1 и α_2 вещественные)

Для решения задачи на компьютере представляем систему уравнений переменных состояния (76) в матричной форме [8]:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} u_C \\ i_L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_C \\ i_L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} \cdot E \qquad (86)$$

Матрица начальных условий:

$$\begin{vmatrix} U_C^+ & i_L^+ \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} -115 & -0{,}95 \end{vmatrix}^T \qquad (87)$$

Определяем собственные числа матрицы коэффициентов переменных состояния:

$$\det\left(\alpha \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} \right) = \det\begin{pmatrix} \alpha + a_{11} & a_{12} \\ -a_{21} & \alpha + a_{22} \end{pmatrix}$$

Строим характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\alpha^2 + (a_{11} + a_{22})\alpha + a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} = 0;$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})} =$$

$$= -\frac{(5{,}53 + 1{,}71)\cdot 10^3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5{,}53 + 1{,}71}{2}\right)^2 \cdot 10^6 - (5{,}53 \cdot 1{,}71 \cdot 10^6 + 16{,}8 \cdot 84{,}2 \cdot 10^3)} =$$

$$= -3{,}62 \cdot 10^3 \pm 1.49 \cdot 10^3;$$

$$\alpha_1 = (-3{,}62 + 1{,}49)\cdot 10^3 = -2{,}1 \cdot 10^3 \,\frac{1}{c};$$

$$\alpha_2 = (-3{,}62 - 1{,}49)\cdot 10^3 = -5{,}1 \cdot 10^3 \,\frac{1}{c}.$$

Значения корней α_1, α_2 соответствуют *(30)*.

Далее находим следующие величины:

- постоянные времени ЭЦ

$$\tau_1 = \frac{1}{|\alpha_1|} = 0{,}48 \cdot 10^{-3}\, c$$

$$\tau_2 = \frac{1}{|\alpha_2|} = 0{,}19 \cdot 10^{-3}\, c$$

- шаг интегрирования

$\Delta t < 0{,}1 \cdot \tau_{\min}$, где $\tau_{\min} = \tau_2$, принимаем $\Delta t = 0{,}01 \cdot 10^{-3}\, c$

- временной интервал интегрирования

$t_{\text{int}} = 3\tau_{\max}$, где $\tau_{\max} = \tau_1$, принимаем $t_{\text{int}} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\, c$

- число шагов интегрирования

$$N = \frac{t_{\text{int}}}{\Delta t} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{0{,}01 \cdot 10^{-3}} = 150$$

Начальные условия переходного процесса:

$$U_C^+ = -115\,В, \quad I_L^+ = -0{,}95\,А$$

Для контроля расчета используем установившиеся значения:

$$U_{C\,уст} = 78{,}8\,В, \;\; I_{L\,уст} = -0{,}95\,А\,.$$

Моделирование переходного процесса выполняется в пакете программ Matlab.

Программа расчета

% Программа расчета ЭЦ while 1 u=menu('Ваш выбор:','Ввод матриц', 'Расчет','Настройка графиков','Выход'); switch u case 1 A=input('Матрица A=') B=input('Матрица B=') x0=input('Начальные условия =') E=input('Напряжение питания ='); t=0:0.1:1; case 2 C=eye(size(A)); D=zeros(size(C,1),size(B,2)); sys=ss(A,B,C,D); U=E+0*t; y=lsim(sys,U,t,x0); subplot(2,1,1) plot(t,y(:,1)) grid % xlabel('Время t, с'); ylabel('Напряжение на конденсаторе C, В '); subplot(2,1,2) plot(t,y(:,2)) grid xlabel('Время t, с'); ylabel('Ток в индуктивности L, A'); case 3 h=input('Временной шаг ='); T=input('Конечное время ='); t=0:h:T; case 4 disp('Конец') break end end

В командном окне представлено меню:

«Ваш выбор», «Ввод матриц», «Расчет», «Настройка графиков», «Выход».

1. В меню выбрать «Ввод матриц».
2. Ввести матрицы коэффициентов уравнения состояния, начальные условия, величину ЭДС *E*.
3. В меню выбрать «Расчёт».
4. Получить графики $u_C(t), i_L(t)$ в отдельном окне.
5. В меню выбрать «Настройка графиков».
6. Обозначить оси:
7. X lable («время, пробел, с»);
   Y lable («напряжение U_c пробел, В»);
   Y lable («ток I_L, пробел, А»).
8. В меню выбрать «Выход».

Для исследуемого примера ЭЦ полученные зависимости $u_C(t), i_L(t).$ приведены на рис.19.

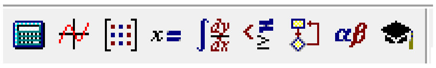
Приложение 3

Применение программы Mathcad к построению $u_C(t)$, $i_L(t)$ (корни α_1 и α_2 комплексно- сопряженные)

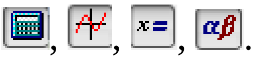
1) Запускаем «Mathcad 15»

2) На приборной панели:

активируем инструменты :



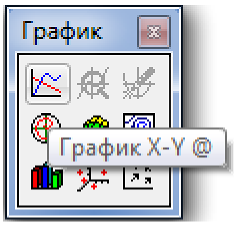
А именно:



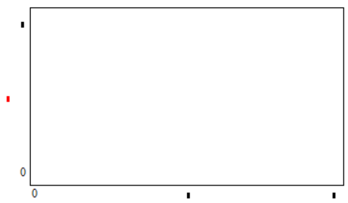
3) Вводим функцию:

$$I(t) := 6.0 - 3.66\cdot e^{-500\cdot t}\cdot \sin\left(3.0\cdot 10^{3}\cdot t + 0.96\right)$$

4) Ниже вставляем график типа «X-Y».



Если все операции выполнены верно, то видим:



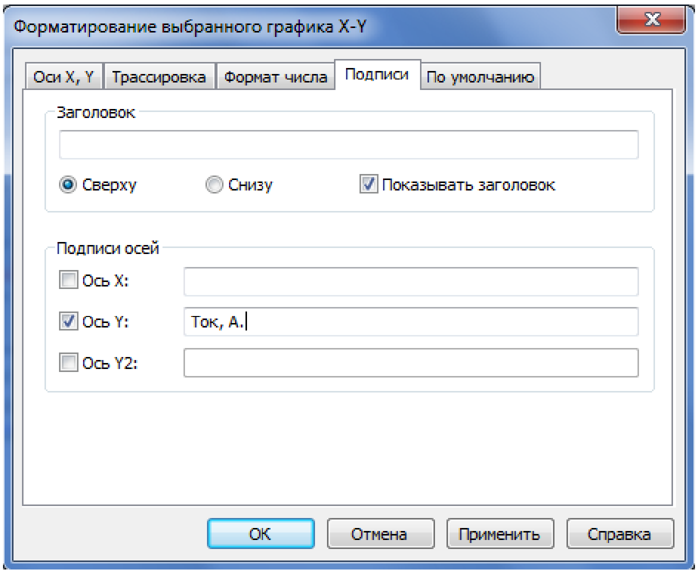
5) Вводим параметры I(t) и t на оси Y и X соответственно.

Пределы для графика выбираем следующие:

от 0 до 10 для оси Y,

от 0 до 0,01 для оси X.

6) Щелкаем правой кнопкой мыши по графику, выбираем «Формат».



Ставим флажок рядом с «Ось Y». Даём название для оси Y «Ток, А».

Ставим флажок рядом с «Ось X». Даем название для оси X «t, c»

Аналогично получаем график зависимости $U_C(t)$. Полученные зависимости приведены на рис. 20.

Библиографический список

1. Атабеков Г.Н. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи: Учебник для вузов. Лань, 2009.

2. Атабеков Г.Н. Теоретические основы электротехники. Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле: учебное пособие / Г.Н.Атабеков – Санкт-Петербург: Москва: Краснодар: Лань,2010-432с.

3. Лавров В.Я. Линейные электрические цепи. Установившиеся режимы: учебное пособие/В.Я. Лавров – СПБ: ГУАП 2010.

4. Лавров В.Я. Основы теории цепей. Переходные процессы: учебное пособие/В.Я.Лавров –СПб: ГУАП,2012

5. Колесников В.В. Основы теории цепей. Установившиеся режимы. Текст лекций. Санкт-Петербург, ГУАП,2006

6. Колесников В.В. Основы теории цепей. Переходные процессы четырехполюсника: текст лекций. СПб, ГУАП, 2006.

7. Атанов В.А. Основы теории цепей. Расчет цепей с управляемыми источниками. Методические указания к курсовой работе. СПб, ГУАП, 2011.

8. Герман-Галкин С.Г. Matlab. Проектирование мехатронных систем на ПК. - СПб, КОРОНА-Век, 2008.

Содержание