**Федеральное агентство по образованию**

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

# ПОСОБИЕ ПО ФИЗИКЕ
## для обучающихся по сокращенной программе

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2005

УДК 530
ББК 22.3
П 62

П 62 **Пособие по физике для обучающихся по сокращенной программе**: Учеб. пособие/ И. В. Баранов, В. В. Курепин, В. А. Самолетов, В. Л. Частый. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2005. – 129 с.

Приводятся содержание рабочей программы, рекомендации по самостоятельному изучению теоретической части курса, методики решения задач, общие положения по выполнению и оформлению контрольных и лабораторных работ по курсу. Рабочая программа составлена в соответствии с ГОСом ВПО, утвержденным Госкомвузом РФ.

Учебное пособие предназначено для студентов факультета заочного обучения и экстерната, обучающихся по сокращенной программе.

УДК 530
ББК 22.3

Рецензенты
Кафедра физики Санкт-Петербургского государственного института точной механики и оптики (технического университета) (зав. кафедрой доктор техн. наук, проф. С. К. Стафеев)
Доц. В. Л. Мясников (Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения)

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета

# ВВЕДЕНИЕ

Учебная работа студентов-заочников всех специальностей складывается из самостоятельного изучения курса физики по рекомендованным учебникам, решения задач, выполнения контрольных и лабораторных работ, сдачи зачетов и экзаменов.

## Изучение курса физики по учебникам

1. Изучать курс необходимо систематически в течение всего учебного года последовательно по разделам программы, приведенной в данном пособии. Программа разбита на отдельные группы вопросов, в конце которых указаны номера параграфов рекомендуемого основного учебника, где эти вопросы изложены.
2. Работу по основному учебнику рекомендуется сопровождать составлением конспекта.
3. Необходимо тщательно изучить системы единиц физических величин. Следует обратить внимание на то, что формулы, выражающие физические законы и соотношения (особенно в разделе «Электростатика»), в различных системах единиц имеют разный вид.

## Решение задач

Успешное овладение курсом физики возможно только при условии решения задач. Это помогает уяснить физический смысл изучаемых явлений, закрепить в памяти формулы, получить навыки практического применения знаний и <u>подготавливает к выполнению контрольных работ.</u> Задачи для самостоятельного решения можно брать из рекомендованных в данном пособии учебников и задачника.

При решении задач рекомендуем воспользоваться следующими советами:

– внимательно прочитать условие задачи и проанализировать, какая информация содержится в условии. Следует иметь в виду, что в условии задачи каждое слово несет информацию. Если условие задачи допускает несколько вариантов толкований, то следует выбрать простейший вариант, не противоречащий условию;

– записать краткое условие задачи, т. е. заполнить разделы “Дано” и “Найти”. Все исходные и искомые данные обозначить общепринятыми или привычными для Вас символами.

Во избежание ошибок необходимо все параметры, относящиеся к одному и тому же состоянию или телу, обозначить одним и тем же индексом, например: $m_1$, $\boldsymbol{v}_1$, $m_2$, $\boldsymbol{v}_2$, $p_1$, $V_1$, $T_1$;

– необходимо выполнить рисунок, иллюстрирующий условие. Обозначения физических величин на рисунке должны совпадать с обозначениями тех же величин в разделах “Дано” и “Найти”;

– выполнить анализ физических явлений, рассматриваемых в задаче. Определить законы, описывающие эти явления. Записать словесную формулировку и уравнения, выражающие законы, в обозначениях, принятых в условии задачи. Пояснить буквенные обозначения в формулах. Если явление описывается векторными величинами, то после составления векторного уравнения необходимо выбрать систему координат и спроектировать величины, входящие в векторное уравнение, на выбранные оси. Составить систему скалярных уравнений, при этом число уравнений должно быть равно числу неизвестных;

– решить систему уравнений. Подставить в полученные выражения численные значения исходных величин в одной и той же системе единиц и вычислить результат;

– выполнить анализ полученного результата. Если результат противоречит условию задачи или законам природы, то задача решена неверно и необходимо начать все с начала;

– записать ответ.

Представление данных задачи в трех формах (текст, краткое условие, рисунок) позволяет более глубоко понять ее условие и суть процессов, поэтому является обязательным.

## Выполнение контрольных работ

1. К выполнению контрольных работ следует приступить только после изучения теоретического материала по данному разделу программы и внимательного ознакомления с примерами решения задач, приведенными в данном пособии перед каждой контрольной работой, а также с таблицами приложения, справочный материал которых облегчит Вашу работу и сэкономит время.

2. Каждая контрольная работа выполняется чернилами в отдельной школьной тетради. Для замечаний преподавателя, проверяющего работу, оставить поля.

3. На лицевой стороне тетради привести сведения по следующему образцу:

Контрольная работа № 1 по физике
Сокращенная программа обучения
Студент 2-го курса ФЗОиЭ СПбГУНиПТ
специализация 170600
Лебедев В. Н.
номер зачетной книжки (шифр) 12122
Адрес: 190000, г. Санкт-Петербург,
ул. Садовая, д. 27, кв. 35

4. Каждая задача должна начинаться с новой страницы.

5. Вначале следует записать полный текст задачи, затем дать буквенную запись условия в разделах “Дано” и “Найти”. Во всех случаях, когда это возможно, следует сделать аккуратный рисунок, поясняющий условие и решение задачи. В конце решения привести окончательный числовой ответ.

6. Задачи следует решать, как правило, в единицах СИ. Необходимо использовать общепринятые обозначения физических величин, как показано в примерах. Значения физических постоянных взять из приложений или справочного материала других пособий.

7. Решение задач необходимо сопровождать подробными пояснениями хода рассуждений, формулировками используемых законов и определениями, раскрывающими физический смысл всех входящих в них величин.

8. Задачи желательно (но не обязательно) решать до конца в общем виде, не делая промежуточных вычислений. В том случае, если математические выражения слишком громоздки или характер явлений, рассматриваемых в задаче, существенно зависит от конкретных численных значений физических величин, имеет смысл сделать промежуточные вычисления.

9. В окончательное буквенное решение надо подставить числовые значения всех входящих в него величин в единицах одной и той же системы и провести вычисления.

Приступая к вычислениям, помните, что числовые значения физических величин являются приближенными и ответ не может быть точнее исходных данных. Поэтому при расчетах руководствуйтесь правилами действий с приближенными числами (прил. 1). В кон трольных работах по физике студенты должны выполнять промежуточные вычисления с точностью до четырех значащих цифр, а ответ округлять до трех значащих цифр. Исключение составляют некоторые задачи по ядерной физике, где требуется большая точность.

10. Во избежание ошибок рекомендуем воспользоваться справочными материалами, приведенными в прил. 2 – 6.

11. В том случае, когда контрольная работа не зачтена, студент обязан решить заново только незачтенные задачи, соблюдая все указанные выше правила. Работу над ошибками можно выполнять в той же тетради.

Исправленная работа сдается на проверку обязательно вместе с незачтенной и с рецензией на нее.

12. Во избежание повторения ошибок на проверку рекомендуется сдавать по одной контрольной работе. Следующую работу рекомендуем выполнять и сдавать после того, как зачтена предыдущая.

13. Все контрольные работы следует сдавать в деканат.

14. Прием контрольных работ на первую проверку прекращается за 10 дней до начала экзаменационной сессии, а на повторную проверку (незачтенных) – за 2–3 дня до экзамена. С 1 июля по 1 сентября контрольные работы на проверку не принимаются.

15. В случае нарушения указанных выше требований контрольная работа не будет проверяться.

## Выполнение лабораторных работ

Лабораторные работы выполняются во время сессии на кафедре физики СПбГУНиПТ. Основная цель лабораторных работ по курсу физики – научить студентов методике проведения измерений, методике обработки результатов опыта, табличному и графическому представлению результатов измерений. Кроме того, выполнение лабораторных работ закрепляет знания студентов по самостоятельно прорабатываемому теоретическому материалу.

В процессе проведения работ следует систематически и аккуратно вести запись результатов измерения в таблицы, формы которых надо тщательно продумывать. Все факторы, способные влиять на точность измерений, необходимо также записывать. При работе с измерительными приборами следует помнить о необходимости весьма осторожного, аккуратного обращения с ними. Правильность записей в протокол проведения лабораторной работы заверяется преподава телем, проводящим лабораторное занятие. Перед выполнением каждой работы студенты должны прорабатывать выдаваемое кафедрой методическое руководство к ним. После выполнения работ следует оформить отчеты по каждой из них.

Работа заканчивается написанием краткого отчета, который включает в себя:

1) описание цели работы;

2) объекты и методы измерений, схемы экспериментальной установки, расчетные формулы и формулы для определения погрешности измерений;

3) таблицы результатов измерений;

4) расчеты;

5) необходимые графики;

6) полученный результат с указанием абсолютной и относительной погрешностей, а также доверительной вероятности. Методика расчета погрешностей изложена в прил. 7;

7) краткий анализ полученного результата.

## Сдача зачетов

Для получения зачета студент на зачетном занятии предъявляет:

1) установленное число зачтенных контрольных работ;

2) отчеты по лабораторным работам.

## Сдача экзаменов

К сдаче экзаменов допускаются студенты, получившие зачет.

В экзаменационные билеты включаются все вопросы программы, приведенной в настоящем пособии.

При подготовке к экзамену следует иметь в виду, что от студентов требуется не только знание законов и формул, но и умение выводить эти формулы.

# ПРОГРАММА КУРСА ФИЗИКИ

Программа составлена в соответствии с ГОСом ВПО, утвержденным Госкомвузом РФ, и предназначена для студентов, обучающихся по сокращенной программе.

В квадратных скобках указаны параграфы основного учебника.

## 1. Физические основы механики

Предмет механики. Классическая механика. Квантовая механика. Нерелятивистская и релятивистская классическая механика. Кинематика и динамика. Физические модели: материальная точка, абсолютно твердое тело, абсолютно упругое тело, сплошная среда. Механическое движение. Свойства ньютоновского пространства и времени. Система отсчета.

[1, §1].

### 1.1. Кинематика материальной точки

Радиус-вектор, перемещение, траектория и путь. Скорость и ускорение. Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения. Уравнение прямолинейного движения. Угловая скорость и угловое ускорение. Уравнение движения по окружности.

[1, §1–4].

### 1.2. Динамика материальной точки

Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Понятие силы. Масса и ее свойства. Второй закон Ньютона. Третий закон Ньютона. Фундаментальные взаимодействия. Основные силы в механике. Принцип суперпозиции сил. Импульс. Закон изменения и сохранения импульса тела. Закон изменения и сохранения импульса механической системы. Центр инерции (центр масс) механической системы. Закон движения центра инерции.

[1, §5–9, 272].

### 1.3. Работа и механическая энергия

Работа силы, мощность. Кинетическая энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия. Связь между потенциальной энергией и силой. Закон изменения и сохранения ме ханической энергии. Универсальный закон сохранения и превращения энергии.

[1, §11–13].

### 1.4. Динамика вращательного движения твердого тела

Момент силы. Момент импульса. Закон изменения и сохранения момента импульса (уравнение моментов). Уравнение динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Момент инерции тела, простейшие примеры. Теорема Штейнера. Работа силы при вращении. Кинетическая энергия при вращательном и плоском движении тела.

[1, §16–19].

### 1.5. Элементы гидродинамики

Особенности движения жидкости. Закон Паскаля. Линия и трубка тока. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли. Статическое и динамическое давление.

[1, §28–30].

### 1.6. Движение в неинерциальных системах отсчета

Силы инерции поступательного и вращательного движения. Принцип эквивалентности Эйнштейна.

[1, §27].

### 1.7. Элементы специальной теории относительности

Преобразования Галилея. Механический принцип относительности Галилея. Постулаты специальной теории относительности Эйнштейна. Преобразования Лоренца. Следствия из преобразований Лоренца. Основное уравнение релятивистской динамики. Релятивистский импульс. Закон взаимосвязи массы и энергии. Энергия покоя.

[1, §34–40].

## 2. Молекулярная физика и термодинамика

### 2.1. Исходные понятия

Тепловое движение. Статистический метод исследования. Термодинамический метод исследования. Термодинамические системы. Термодинамические параметры состояния: давление, объем, температура. Равновесный и неравновесный, обратимый и необратимый процессы. Термодинамический процесс и его изображение на термодинамической диаграмме.

[1, §41].

### 2.2. Молекулярная физика

Молекулярно-кинетическая теория идеального газа. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Давление с точки зрения молекулярно-кинетической теории. Молекулярно-кинетический смысл температуры. Частные законы поведения идеального газа. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона–Менделеева).

[1, §41–43, 50].

### 2.3. Кинетическая теория газов. Явления переноса в газах

Распределение Максвелла по модулям скорости. Средняя скорость молекул идеального газа. Распределение Больцмана. Барометрическая формула.

Эффективный диаметр молекулы. Среднее число соударений. Средняя длина свободного пробега.

Диффузия. Теплопроводность. Вязкость.

[1, §44–46, 48].

### 2.4. Основы термодинамики

Внутренняя энергия системы. Закон Больцмана о равном распределении энергии по степеням свободы молекулы. Внутренняя энергия идеального газа. Работа расширения идеального газа в простейших процессах. Первое начало термодинамики. Теплоемкость. Адиабатный процесс. Уравнение Пуассона. Показатель адиабаты. Второе начало термодинамики. Принцип действия тепловой и холо дильной машин. Цикл (круговой процесс). Термический КПД. Цикл Карно. Теорема Карно. Энтропия. Тепловая теорема Нернста (третье начало термодинамики).

[1, §50–59].

### 2.5. Реальные газы и пары

Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотермы Ван-дер-Ваальса. Критическая изотерма. Экспериментальные изотермы реального газа. Области жидкости, газа, влажного пара и сухого пара на термодинамической диаграмме. Линии насыщения пара и жидкости. Перегретая жидкость. Пересыщенный пар. Метастабильные состояния.

Внутренняя энергия вандерваальсовского газа. Адиабатный дроссельный эффект Джоуля–Томсона. Способы сжижения газов.

[1, §60–65].

### 2.6. Фазовые превращения и фазовые равновесия

Фазы. Фазовые переходы I и II рода. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса. Фазовые диаграммы. Критическая точка. Тройная точка.

[1, §74–76].

### 2.7. Жидкое и твердое состояния вещества

Молекулярная структура жидкостей. Поверхностное натяжение. Смачивание жидкостей. Капиллярные явления.

Кристаллическая структура твердых тел. Физические типы кристаллов. Дефекты кристаллической решетки.

[1, §66–72].

## 3. Электростатика. Законы постоянного тока

### 3.1. Основные характеристики электростатического поля

Электрический заряд и его свойства. Напряженность электростатического поля. Силовые линии электростатического поля. Потенциал электростатического поля. Эквипотенциальные кривые. Связь напряженности и потенциала. Поток вектора напряженности.

[1, §77, 79, 84, 85].

### 3.2. Основные законы электростатического поля

Принцип суперпозиции электростатических полей. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме. Работа сил электростатического поля по перемещению электрического заряда.

[1, §77, 78, 80, 81].

### 3.3. Электрическое поле в веществе

Проводник в электростатическом поле. Явление электростатической индукции. Поле в проводнике и вблизи его поверхности. Электростатическая защита.

Электрический диполь и его характеристики. Поведение диполя в однородном электрическом поле.

Полярные и неполярные диэлектрики. Диэлектрик в электрическом поле. Поляризация диэлектрика. Поле в диэлектрике. Диэлектрическая проницаемость.

[1, §87, 88, 92].

### 3.4. Электрическая емкость

Электрическая емкость уединенного проводника и конденсатора. Емкость плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов.

[1, §93, 94].

### 3.5. Энергия электрического поля

Энергия заряженного конденсатора. Энергия однородного электрического поля. Объемная плотность энергии электрического поля.

[1, §95].

### 3.6. Постоянный электрический ток

Электрический ток проводимости и его характеристики. Сторонние силы. Электродвижущая сила источника электрической энергии. Закон Ома. Последовательное и параллельное соединение резисторов. Закон Джоуля–Ленца. Правила Кирхгофа.

[1, §96–101].

## 4. Магнитное поле. Электромагнитная индукция

### 4.1. Основные характеристики магнитного поля

Индукция магнитного поля, напряженность магнитного поля. Магнитный поток. Силовые линии магнитного поля.

[1, §109].

### 4.2. Основные законы магнитного поля

Принцип суперпозиции магнитных полей. Закон Био–Савара–Лапласа. Закон постоянного тока. Сила Лоренца. Закон Ампера.

[1, §110, 111, 114, 118].

### 4.3. Магнитное поле в веществе

Магнитные характеристики контура с током. Поведение контура с током в магнитном поле. Магнитные моменты атомов. Поведение атома в магнитном поле. Диамагнетики. Парамагнетики. Ферромагнетики. Явление магнитного гистерезиса. Магнитная проницаемость.

[1, §131–133, 135, 136].

### 4.4. Явление электромагнитной индукции

Явление электромагнитной индукции. Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея). Правило Ленца. Индуктивность. Явление самоиндукции.

[1, §122, 123, 126, 129].

### 4.5. Энергия магнитного поля

Энергия проводника с током. Энергия однородного магнитного поля. Объемная плотность энергии магнитного поля.

[1, §130].

### 4.6. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля

Полная система уравнений Максвелла. Основные следствия теории Максвелла. Электромагнитные волны.

[1, §139].

## 5. Колебания и волны

### 5.1. Колебания

Уравнение гармонических колебаний. Фаза, период, частота, амплитуда. Сложение гармонических колебаний. Маятники и колебательный контур. Затухающие и вынужденные колебания. Резонанс. Энергия колебаний.

[1, §140–148].

### 5.2. Волны

Уравнение волны. Скорость и длина волны. Упругие волны. Электромагнитные волны. Интерференция, дифракция, поляризация и дисперсия волн.

[1, §153–158, 161, 162].

## 6. Основы квантовой физики

### 6.1. Квантовые свойства электромагнитного излучения

Тепловое излучение. Закон Кирхгофа. Модель абсолютно черного тела. Закон Стефана–Больцмана. Квантовая теория теплового излучения.

Внешний фотоэлектрический эффект. Квантовая теория внешнего фотоэффекта.

Фотоны. Энергия, импульс, масса и скорость фотона.

[1, §197–200, 202–205].

### 6.2. Элементы квантовой механики

Гипотеза де Бройля о корпускулярно-волновом дуализме материи. Взаимосвязь волновых и корпускулярных свойств квантовых частиц.

Соотношения неопределенностей Гейзенберга. Волновая функция. Волновое уравнение Шредингера.

[1, §207, 213, 215–217].

### 6.3. Элементы квантовой физики атомов и молекул

Планетарная ядерная модель атома. Модель строения атома водорода по теории Бора.

Квантово-механическая модель строения атома водорода. Квантовые числа. Спин электрона. Принцип Паули.

[1, §208, 210, 223, 225, 227, 228, 232, 233].

### 6.4. Элементы ядерной физики и физики элементарных частиц

Свойства ядра атомов. Явление радиоактивности. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$-распад. Элементарные и субэлементарные частицы.

[1, §251, 254, 255, 262, 272, 275].

### 6.5. Элементы квантовых статистик. Теплоемкость твердых тел

Простейшие системы квантовых частиц. Общие сведения о квантовых статистиках Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна.

Классическая теория теплоемкости кристаллов. Закон Дюлонга и Пти. Теория теплоемкости по Дебаю. Характеристическая температура Дебая. Закон кубов Дебая.

[1, §226, 234, 235, 237].

### 6.6. Зонная теория твердых тел. Контактные явления

Понятие о зонной теории твердых тел.

Собственная проводимость полупроводников. Примесная проводимость полупроводников.

Термоэлектрический эффект Зеебека. Термоэдс, термопары. Электротермический эффект Пельтье. Электротермический способ охлаждения. Полупроводниковые холодильники.

[1, §240–243, 247, 249].

## Темы контрольных работ

Контрольная работа 1. Механика.

Контрольная работа 2. Молекулярная физика и термодинамика.

## Темы лабораторных работ

Лабораторная работа 1. Законы постоянного тока.

Лабораторная работа 2. Явления переноса в газах и жидкостях. Поверхностное натяжение жидкости.

# ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ МЕХАНИКИ

## Основы кинематики

Положение точки в пространстве задают радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала системы отсчета в рассматриваемую точку. В прямоугольной системе координат радиус-вектор $\vec{r}$ может быть выражен через его проекции $x$, $y$, $z$ на оси $X$, $Y$, $Z$:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы (орты), совпадающие с положительными направлениями осей $X$, $Y$, $Z$.

Модуль радиуса-вектора

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z,$$

где $\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z$ – проекции мгновенной скорости $\vec{v}$ на оси $X$, $Y$, $Z$; соответственно, $\vec{v}_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}$, $\vec{v}_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$, $\vec{v}_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$.

Модуль мгновенной скорости

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Средний вектор скорости материальной точки

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1},$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение; $\Delta t$ – промежуток времени.

Мгновенная путевая скорость

$$v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t},$$

где $S$ – путь, пройденный точкой.

Средняя путевая скорость

$$\langle v \rangle = \frac{S}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}, \qquad \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z,$$

где $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ – проекции ускорения $\vec{a}$ на оси $X$, $Y$, $Z$; соответственно, $\vec{a}_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}$, $\vec{a}_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$, $\vec{a}_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$.

Модуль мгновенного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Среднее ускорение

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}.$$

Нормальное (центростремительное) ускорение

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R},$$

где $R$ – радиус кривизны траектории в данной точке; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали, направленный к центру кривизны.

Тангенциальное ускорение

$$\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}, \qquad a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, связанный с движущейся точкой и направленный по касательной к траектории по вектору скорости $\vec{v}$.

Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Классический закон преобразования (сложения) скорости при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \qquad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u},$$

где $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ – скорости тела в системах отсчета $K$ и $K'$; $\vec{u}$ – скорость движения системы отсчета $K'$ относительно системы отсчета $K$, $\vec{u} = \text{const}$.

Преобразование ускорения при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$\vec{a} = \vec{a}'.$$

Уравнения кинематики поступательного равнопеременного движения $(\vec{a} = \text{const})$:

– для радиуса-вектора и координат

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \qquad \begin{cases} x = x_0 \pm v_{0x}t \pm \dfrac{a_x t^2}{2}, \\ y = y_0 \pm v_{0y}t \pm \dfrac{a_y t^2}{2}, \\ z = z_0 \pm v_{0z}t \pm \dfrac{a_z t^2}{2}; \end{cases}$$

– для скорости

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \qquad \begin{cases} v_x = v_{0x} \pm a_x t, \\ v_y = v_{0y} \pm a_y t, \\ v_z = v_{0z} \pm a_z t. \end{cases}$$

Мгновенная угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}, \qquad \omega_z = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

где $\varphi$ – угол поворота; $\omega_z$ – проекция вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ на ось вращения $Z$, положительное направление которой связано с направлением вращения правилом правого винта.

Средняя угловая скорость

$$\langle \omega_z \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}.$$

Мгновенное угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t},$$

где $\varepsilon_z$ – проекция вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ на ось вращения $Z$.

Среднее угловое ускорение

$$\langle\vec{\varepsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_2 - t_1}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1}.$$

Уравнения кинематики вращательного равнопеременного движения $(\varepsilon_z = \mathrm{const})$:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t \pm \frac{\varepsilon_z t^2}{2}, \qquad \omega_z = \omega_{0z} \pm \varepsilon_z t.$$

Связь между линейными и угловыми кинематическими характеристиками:

$$S = \varphi R, \qquad v = \omega R, \qquad a_n = \omega^2 R, \qquad a_\tau = \varepsilon R,$$

где $R$ – радиус окружности, по которой движется точка.

## Основы динамики материальной точки

Импульс материальной точки

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

где $m$ – масса точки; $\vec{v}$ – скорость движения точки.

Сила гравитационного притяжения двух материальных точек

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $\gamma$ – гравитационная постоянная, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Н \cdot м^2 / кг^2}$; $m_1$ и $m_2$ – масса точек; $r$ – расстояние между точками.

Напряженность гравитационного поля

$$G = \frac{F}{m},$$

где $F$ – гравитационная сила, действующая на тело массой $m$.

Сила тяжести вблизи поверхности Земли

$$F = mg, \qquad g = \gamma \frac{M_З}{R_З^2},$$

где $g$ – ускорение свободного падения; $M_З$ – масса Земли; $R_З$ – радиус Земли.

Сила трения скольжения (всегда направлена против скорости $\vec{v}$)

$$F = \mu\, F_{\text{норм. давл}},$$

где $\mu$ – коэффициент трения скольжения; $F_{\text{норм. давл}}$ – сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу.

По третьему закону Ньютона сила нормального давления равна по модулю силе нормальной реакции опоры ($\vec{F}_{\text{норм. давл}} = -\vec{N}$), поэтому

$$F = \mu\, N.$$

Сила упругости упругодеформированного тела (закон Гука)

$$\vec{F} = -k\vec{x},$$

где $k$ – коэффициент упругости; $\vec{x}$ – вектор деформации.

Принцип суперпозиции сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i.$$

Давление – физическая величина, равная силе $F_n$ (сжимающей), действующей по нормали на поверхность единичной площади:

$$p = \frac{F_n}{S}.$$

Основное уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}, \qquad m\vec{a} = \vec{F},$$

где $\vec{p}$ – импульс точки; $\vec{F}$ – результирующая всех сил, действующих на точку; $\vec{a}$ – ускорение, приобретаемое точкой.

Импульс силы – векторная физическая величина, равная произведению силы $\vec{F}$ на время $\Delta t$ действия данной силы.

Положение и скорость центра масс (центра инерции) системы материальных точек:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}; \qquad \vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

Закон изменения импульса системы материальных точек:

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}_{\text{сист}}}{\mathrm{d}\,t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}}.$$

Закон сохранения импульса замкнутой инерциальной системы:

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}_{\text{сист}}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{или} \quad \vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}.$$

Замкнутая механическая система – это система, на которую не действуют внешние силы. Однако и в незамкнутых системах закон сохранения импульса можно использовать в следующих случаях:

1) если результирующая всех внешних сил, действующих на любое тело системы, равна нулю (в этом случае $\sum \vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0$), то импульс системы сохраняется. Такая система называется условно замкнутой;

2) если проекции всех внешних сил на какое-то направление в сумме равны нулю, то проекция импульса на это направление сохраняется:

$$\frac{\mathrm{d}\,p_{\text{сист}\,x}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{или} \quad p_{\text{сист}\,x} = \text{const}.$$

Данная система называется частично замкнутой;

3) если внешние силы, действующие на систему, много меньше внутренних сил, то изменением импульса системы за счет действия

внешних сил можно пренебречь по сравнению с величиной импульса системы, внутренние силы импульс системы не изменяют; таким образом, $\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}$.

## Основы динамики твердого тела

Момент силы относительно точки

$$M = Fr\sin\alpha = F\ell,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\vec{F}$; $\alpha$ – угол между направлениями радиуса-вектора $\vec{r}$ и силы $\vec{F}$; $\ell$ – плечо силы, $\ell = r\sin\alpha$.

Момент силы относительно оси $Z$

$$M_z = RF_\tau,$$

где $R$ – расстояние от тела до оси $Z$; $F_\tau$ – тангенциальная составляющая силы, т. е. проекция силы $\vec{F}$ на касательную к траектории вращения в плоскости, перпендикулярной оси $Z$.

Момент импульса относительно точки

$$L = pr\sin\alpha,$$

где $\vec{p}$ – импульс; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы; $\alpha$ – угол между направлениями радиуса-вектора $\vec{r}$ и импульса $\vec{p}$.

Момент импульса относительно оси $Z$

$$L_z = Rp_\tau,$$

где $R$ – расстояние от тела до оси $Z$; $p_\tau$ – тангенциальная составляющая импульса, т. е. проекция импульса на касательную к траектории вращения в плоскости, перпендикулярной оси $Z$.

Если тело вращается относительно оси $Z$, то

$$L_z = I_z\omega_z,$$

где $I_z$ – момент инерции тела относительно оси $Z$; $\omega_z$ – угловая скорость вращения вокруг оси $Z$.

Закон изменения момента импульса системы:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{сист}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внеш}} .$$

Закон сохранения момента импульса замкнутой инерциальной системы:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{сист}}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{или} \quad \vec{L}_{\text{сист}} = \text{const} .$$

Однако и в незамкнутых системах закон сохранения момента импульса можно использовать в следующих случаях:

1) если результирующий момент всех внешних моментов сил, действующих на систему, равен нулю (в этом случае $\sum \vec{M}_i^{\text{внеш}} = 0$), то момент импульса системы сохраняется;

2) если сумма проекций моментов внешних сил на какое-то направление равна нулю, то проекция момента импульса на это направление сохраняется.

Уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$M_z = I_z\,\varepsilon_z ,$$

где $M_z$ – суммарный момент всех внешних сил относительно оси вращения (оси $Z$), т. е. проекция момента сил на ось $Z$; $I_z$ – момент инерции тела относительно оси вращения (оси $Z$); $\varepsilon_z$ – угловое ускорение вращения вокруг оси вращения (оси $Z$), т. е. проекция углового ускорения на ось $Z$.

Момент инерции материальной точки

$$I = mR^2 ,$$

где $R$ – расстояние от оси вращения до точки.

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр инерции шара,

$$I_c = \frac{2}{5} mR^2 ,$$

где $R$ – радиус шара.

Момент инерции цилиндра (диска) относительно оси, совпадающей с геометрической осью цилиндра (диска),

$$I_c = \frac{1}{2} mR^2,$$

где $R$ – радиус диска.

Момент инерции тонкого обруча относительно оси, совпадающей с геометрической осью обруча,

$$I_c = mR^2,$$

где $R$ – радиус обруча.

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр инерции стержня и направленной перпендикулярно оси стержня,

$$I_c = \frac{1}{12} m\ell^2,$$

где $\ell$ – длина стержня.

Теорема Гюйгенса–Штейнера:

$$I = I_c + md^2,$$

где $I$ – момент инерции тела относительно произвольной оси $Z$; $I_c$ – момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции тела и параллельной оси $Z$; $d$ – расстояние между осями.

## Работа и энергия

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно,

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_{\text{к}} = \frac{I\omega^2}{2},$$

где $I$ – момент инерции тела относительно оси вращения.

Кинетическая энергия при плоском движении тела

$$E_{\text{к}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2},$$

где $v_c$ – скорость поступательного движения центра инерции тела; $\omega$ – угловая скорость вращения относительно оси, проходящей через центр инерции тела.

Потенциальная энергия материальной точки массой $m_1$ в гравитационном поле, созданном материальной точкой массой $m_2$,

$$E_{\text{п}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Потенциальная энергия материальной точки вблизи поверхности Земли

$$E_{\text{п}} = mgh,$$

где $g$ – ускорение свободного падения; $h$ – высота над поверхностью Земли.

Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2},$$

где $k$ – коэффициент упругости; $x$ – деформация.

Связь между консервативной силой и потенциальной энергией:

$$\vec{F} = -\text{grad}\ E_{\text{п}}.$$

Работа переменной силы

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r}, \qquad A_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_S \vec{F}\,\vec{\tau}\ \mathrm{d}S = \int_S F\cos\left(\vec{F}\wedge\vec{\tau}\right)\mathrm{d}S = \int_S F_\tau\ \mathrm{d}S,$$

где $\mathrm{d}\vec{r}$ – элементарное перемещение; $\vec{\tau}$ – орт касательной к траектории движения; $F_\tau$ – проекция силы на касательную к траектории.

Работа постоянной силы

$$A = F\,S\cos\left(\vec{F}\wedge\vec{\tau}\right).$$

Работа при вращении тела относительно неподвижной оси $Z$

$$A_{1-2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \mathrm{d}\varphi .$$

Закон сохранения механической энергии консервативной инерциальной замкнутой системы:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{м}}}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad E_{\text{м}} = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \text{const}.$$

Закон изменения механической энергии:

$$E_{\text{м}2} - E_{\text{м}1} = A_{1-2}^{\text{внеш.сил}} + A_{1-2}^{\text{внутр.диссип.сил}} + A_{1-2}^{\text{сил инерц}}.$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}t}, \qquad N = \vec{F}\,\vec{v} = F\,v\cos\alpha = F_\tau\,v,$$

где $\alpha$ – угол между направлениями силы и скорости.

Средняя мощность

$$N = \frac{A}{\Delta t}.$$

Коэффициент полезного действия (КПД)

$$\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{A_{\text{затр}}} = \frac{N_{\text{полезн}}}{N_{\text{затр}}},$$

где $A_{\text{полезн}}$ и $N_{\text{полезн}}$ – полезные работа и мощность; $A_{\text{затр}}$ и $N_{\text{затр}}$ – затраченные работа и мощность.

## Элементы специальной теории относительности

Преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + v\,t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \frac{t' + v\,x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где величины со штрихом относятся к системе отсчета $K'$, а без штриха – к системе отсчета $K$; $c$ – скорость света в вакууме; $\beta$ – отношение скоростей $v$ и $c$, $\beta = v/c$.

Инерциальная система отсчета $K'$ движется с постоянной скоростью $\vec{v}$ в положительном направлении оси $X$ инерциальной системы отсчета $K$. Причем оси $X'$ и $X$ совпадают, а оси $Y'$ и $Y$, $Z'$ и $Z$ – попарно параллельны; в начальный момент времени начала координат совпадают.

Релятивистское замедление хода часов

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\tau_0$ – промежуток времени между двумя событиями, отсчитанный по часам, которые движутся вместе с телом (собственное время); $\tau$ – промежуток времени между теми же событиями, отсчитанный по неподвижным часам.

Релятивистское (Лоренцево) сокращение длины

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\beta^2},$$

где $\ell_0$ – длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится (собственная длина); $\ell$ – длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень движется.

Релятивистский импульс

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $m$ – масса покоя частицы.

Полная энергия релятивистской частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Энергия покоя релятивистской частицы

$$E_0 = mc^2.$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_к = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы:

$$\vec{p} = \frac{E\,\vec{v}}{c^2}, \qquad p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к\left(E_к + 2mc^2\right)}\,, \qquad E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}\,.$$

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

**<u>Пример 1.</u>** Из траншеи глубиной 2,5 м выбрасывается камень с начальной скоростью 12,5 м/с под углом 62,0º к горизонту. Найти: 1) на какую максимальную высоту $H$ (относительно поверхности земли) поднимется камень; 2) на каком расстоянии $L$ от места бросания он упадет на землю; 3) сколько времени камень будет двигаться до точки максимального подъема $t_A$ и до точки падения $t_B$; 4) найти модуль и направление скорости $v_B$ камня в точке падения. Сопротивление воздуха не учитывать.

*Дано*:

$v_0 = 12{,}5$ м/с,
$\alpha = 62{,}0°$,
$h_0 = 2{,}50$ м.

*Найти*:

$H$, $L$, $t_A$, $t_B$, $v_B$, $\beta$.

*Решение*

Выберем систему отсчета. Начало отсчета поместим в точку $O$ (рис. 1.1) на поверхности земли. Ось $Y$ направим вертикально вверх, совместив ее с начальным положением камня, а ось $X$ – горизонтально в сторону его движения. Отсчет времени начинается с момента бросания камня. Камень совершает сложное движение и одновременно участвует в перемещении по горизонтали (вдоль оси $X$) и по вертикали (вдоль оси $Y$). Траектория движения камня представляет собой параболу. Покажем на рисунке векторы скоростей $\vec{v}_0$, $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$, которые являются касательными к траектории.

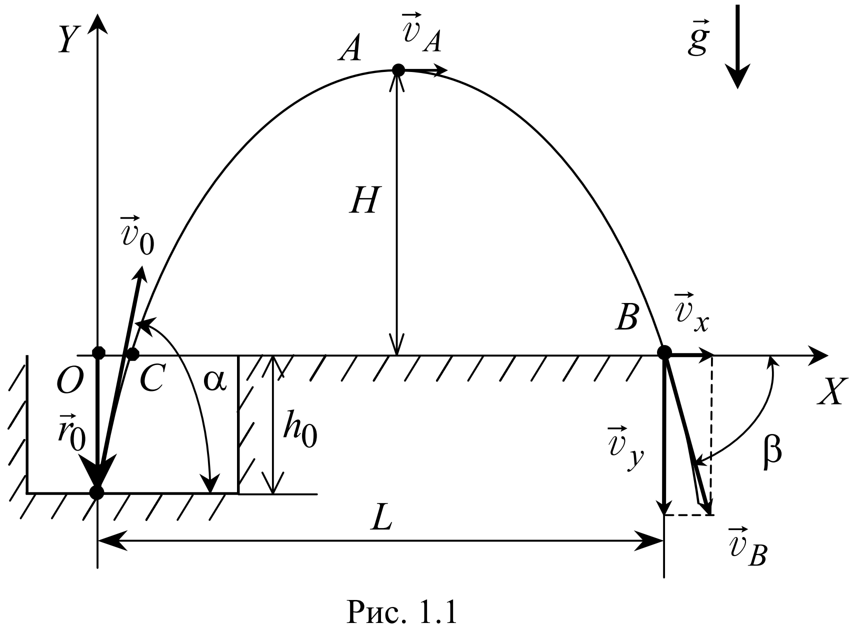


Рис. 1.1

Так как сопротивлением воздуха пренебрегаем, то полное ускорение $\vec{a}$ тела в любой момент времени будет равно ускорению свободного падения $\vec{g}$ и направлено вертикально вниз. Следовательно, уравнения кинематики поступательного движения тела в векторной форме будут иметь вид

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{\vec{g}t^2}{2}; \qquad \vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{g}t. \tag{1.1}$$

В проекциях на оси $X$ и $Y$ уравнения (1.1) примут следующие формы:

$$x(t)=(v_0\cos\alpha)\,t; \tag{1.2}$$

$$v_x(t)=v_0\cos\alpha=\mathrm{const}; \tag{1.3}$$

$$y(t)=(v_0\sin\alpha)\,t-\frac{gt^2}{2}; \tag{1.4}$$

$$v_y(t)=v_0\sin\alpha-gt. \tag{1.5}$$

В точке $A$, которая является точкой максимального подъема тела, вертикальная составляющая скорости $v_y(t_A)=0$. Тогда выражение (1.5) примет вид

$$v_0\sin\alpha-gt_A=0\ , \tag{1.6}$$

что позволяет определить время $t_A$ достижения телом точки $A$:

$$t_A=\frac{v_0\sin\alpha}{g}. \tag{1.7}$$

Подставив выражение (1.7) для времени $t_A$ в уравнение (1.4), определим вертикальную координату точки в этот момент времени. Поскольку начало координат находится на земле, то эта координата равна максимальной высоте подъема тела:

$$H=y(t_A)=v_0 t_A\sin\alpha-\frac{gt_A^2}{2}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}-\frac{g}{2}\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g^2}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}. \tag{1.8}$$

В точке $B$, которая является точкой падения тела на землю, координата $y(t_B)=0$, поэтому из выражения (1.4) следует

$$y(t_B) = -h_0 + v_0 t_B \sin\alpha - \frac{g t_B^2}{2} = 0. \qquad (1.9)$$

Квадратное уравнение (1.9) имеет два корня, что позволяет определить время $t_B$ достижения телом точки $B$:

$$t_{B_1} = \frac{v_0 \sin\alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh_0}}{g}; \qquad (1.10)$$

$$t_{B_2} = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh_0}}{g}\ . \qquad (1.11)$$

Это означает, что за время движения тело дважды будет иметь координату $y = 0$. Сравнивая выражения (1.10) и (1.11) с выражением (1.7), можно заметить, что $t_{B_1} < t_A$, а $t_{B_2} > t_A$. Следовательно, момент времени $t_{B_1}$ соответствует прохождению телом точки $C$, а момент времени $t_{B_2}$ – точки $B$ (см. рис. 1.1).

Подстановка полученного выражения (1.11) в формулу (1.2) позволяет определить горизонтальную координату тела в момент времени $t_{B_2}$. Поскольку начало координат совпадает с начальным положением тела, то значение этой координаты равно расстоянию $L$ от точки бросания до точки падения:

$$L = x(t_B) = (v_0 \cos\alpha)\, t_B =$$

$$= v_0 \cos\alpha \frac{\left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{\left(v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh_0\right)}\right)}{g}. \qquad (1.12)$$

Модуль скорости тела в любой точке траектории

$$v(t) = \sqrt{[v_x(t)]^2 + [v_y(t)]^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}\ . \qquad (1.13)$$

Подставив выражение (1.11) для времени $t_{B_2}$ в формулу (1.13), получим скорость мяча в точке $B$:

$$v_B = v(t_B) = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - g\, t_B)^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + \left( v_0 \sin\alpha - g \frac{\left( v_0 \sin\alpha + \sqrt{\left( v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh_0 \right)} \right)}{g} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left( v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh_0 \right)} = \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}\,. \tag{1.14}$$

Как видно из формулы (1.14), в нашем случае скорость в точке падения $v_B$ будет меньше скорости $v_0$ в начальный момент времени. Если точка бросания будет выше точки падения (изменяется знак у слагаемого $2gh_0$), то скорость $v_B$ будет больше $v_0$. Если точка бросания и точка падения находятся на одной высоте, то $v_B = v_0$.

Для определения направления вектора $\vec{v}$ найдем угол $\beta$ между направлением скорости и линией горизонта (см. рис. 1.1) из соотношения

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y(t_B)}{v_x(t_B)} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt_B}{v_0 \cos\alpha}. \tag{1.15}$$

Подставим выражение (1.11) для времени $t_{B_2}$ в формулу (1.15) и выразим $\beta$:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh_0}}{v_0 \cos\alpha}. \tag{1.16}$$

Используя формулы (1.7) и (1.8), определим время движения камня до точки максимального подъема и максимальную высоту подъема:

$$t_A = \frac{12{,}5\ \sin 62{,}0^\circ}{9{,}81} = 1{,}125 \approx 1{,}13\ \text{с};$$

$$H = -2{,}5 + \frac{12{,}5^2 \sin^2 62{,}0^\circ}{2 \cdot 9{,}81} = 3{,}811 \approx 3{,}81\ \text{м}.$$

По формуле (1.11) рассчитаем время полета камня:

$$t_B = \frac{12{,}5\ \sin 62{,}0° + \sqrt{12{,}5^2 \sin^2 62{,}0° - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}50}}{9{,}81} = 1{,}995 = 2{,}00 \text{ с.}$$

По формуле (1.12) рассчитаем расстояние $L$, на котором камень окажется в момент падения:

$$L = 12{,}5 \cos 62{,}0° \, \frac{\left(12{,}5 \sin 62{,}0° + \sqrt{12{,}5^2 \sin^2 62{,}0° - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}50}\right)}{9{,}81} =$$

$$= 11{,}70 \approx 11{,}7 \text{ м.}$$

По формуле (1.14) рассчитаем скорость $\upsilon_B$ в момент падения камня:

$$\upsilon_B = \sqrt{12{,}5^2 - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}50} = 10{,}35 \approx 10{,}4 \text{ м/с.}$$

По формуле (1.16) рассчитаем угол между вектором скорости и линией горизонта:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{12{,}5^2 \sin^2 62{,}0° - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}50}}{12{,}5 \cos 62{,}0°} = -55{,}47 \approx -55{,}5° .$$

Значение угла отрицательное, так как угол измеряется от горизонтали по часовой стрелке.

Ответ: 1) $H = 3{,}81$ м; 2) $L =$ 11,7 м; 3) $t_A = 1{,}13$ с; $t_B = 2{,}00$ с; 4) $\upsilon_B = 10{,}4$ м/с; $\beta = -55{,}5°$.

**Пример 2.** Мяч бросили с поверхности земли с начальной скоростью 10,0 м/с под углом 40,0° к горизонту. Определить нормальное $a_n$, тангенциальное $a_\tau$ ускорения и радиус кривизны $R$ в верхней точке $A$ траектории и в момент времени 0,600 с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

| *Дано*: | *Решение* |
|---|---|
| $\upsilon_0 = 10{,}0$ м/с,<br>$\alpha = 40{,}0°$,<br>$t_1 = 0{,}600$ с. | Выберем систему отсчета. Начало отсчета поместим в точку бросания $O$ (рис. 2.1). Ось $Y$ направим вертикально вверх, а ось $X$ – горизонтально в сторону движения мяча. Отсчет времени |

| *Найти*: | начинается с момента бросания мяча. Тело совершает сложное движение и одновременно участвует в перемещении по горизонтали (вдоль оси *X*) и по вертикали (вдоль оси $Y$). Траектория движения мяча представляет собой параболу. |
|---|---|
| $a_n(t_A)$, $a_\tau(t_A)$, $a_n(t_1)$, $a_\tau(t_1)$, $R(t_A)$, $R(t_1)$. | |

Покажем на рисунке векторы начальной скорости $\vec{v}_0$, скорости в верхней точки траектории $\vec{v}_A$, а также скорости и ускорения $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$ в двух произвольных точках траектории.

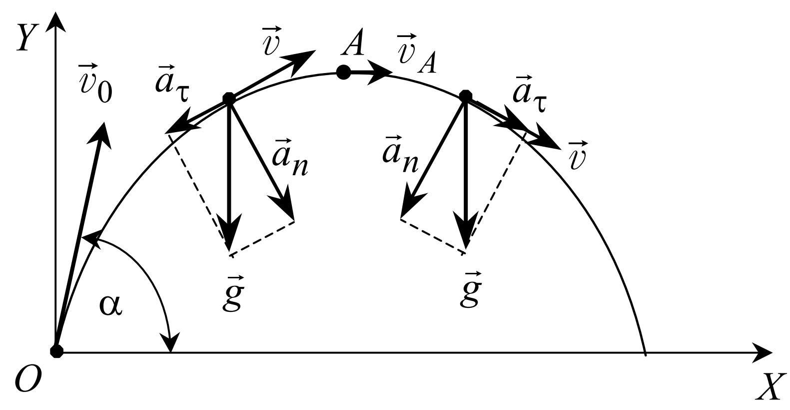


Рис. 2.1

Так как сопротивлением воздуха пренебрегаем, то полное ускорение $\vec{a}$ тела в любой момент времени будет равно ускорению свободного падения $\vec{g}$ и направлено вертикально вниз. Следовательно, уравнение скорости поступательного движения тела в векторной форме будет иметь вид

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t\,. \tag{2.1}$$

В проекциях на оси $X$ и $Y$ уравнение (2.1) примет следующие формы:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha = \text{const}\,; \tag{2.2}$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt\,. \tag{2.3}$$

В точке $A$, которая является точкой максимального подъема тела, вертикальная составляющая скорости $v_y(t_A) = 0$. Тогда выражение (2.3) примет вид

$$v_0 \sin\alpha - gt_A = 0\,, \tag{2.4}$$

что позволяет определить время $t_A$ достижения телом точки $A$:

$$t_A = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (2.5)$$

Модуль скорости тела в любой точке траектории

$$v(t) = \sqrt{[v_x(t)]^2 + [v_y(t)]^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}. \qquad (2.6)$$

Тангенциальное ускорение, по определению, $a_\tau = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, тогда, дифференцируя выражение (2.6) по времени, получим

$$a_\tau(t) = \frac{g\,(gt - v_0 \sin\alpha)}{\sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}}. \qquad (2.7)$$

Полное ускорение мяча $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$. В рассматриваемом движении полное ускорение равно ускорению свободного падения $(\vec{a} = \vec{g})$, что позволяет найти нормальное ускорение мяча:

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}. \qquad (2.8)$$

Подставляя формулу (2.7) в формулу (2.8), получим

$$a_n = g\frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}}. \qquad (2.9)$$

Поскольку $a_n = v^2/R$, можно найти радиус кривизны для любой точки траектории:

$$R(t) = \frac{v^2(t)}{a_n(t)} = \frac{\left[(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2\right]^{3/2}}{g\, v_0 \cos\alpha}. \qquad (2.10)$$

Формулы (2.7), (2.9), (2.10) для нахождения $a_\tau$, $a_n$, $R$ справедливы для любого момента времени. Для определения этих величин в верхней точке $A$ траектории движения мяча подставим в уравнения (2.7), (2.9), (2.10) выражение (2.5) для времени $t_A$ и произведем вычисления:

$$a_\tau(t_A) = g\,\frac{\left(g\,\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} - v_0 \sin\alpha\right)}{\sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}} = 0 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n(t_A) = g\,\frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + \left(v_0 \sin\alpha - g\,\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2}} = g = 9{,}81 \text{ м/с}^2;$$

$$R(t_A) = \frac{\left[(v_0 \cos\alpha)^2 + \left(v_0 \sin\alpha - g\,\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2\right]^{3/2}}{g\,v_0 \cos\alpha} =$$

$$= \frac{(v_0 \cos\alpha)^2}{g} = \frac{(10{,}0 \cos 40{,}0^\circ)^2}{9{,}81} = 5{,}982 \approx 5{,}98 \text{ м}.$$

Радиус кривизны в верхней точке траектории будет минимальным. Это можно увидеть, анализируя левую часть формулы (2.10): в верхней точке траектории скорость тела будет минимальной, а нормальное ускорение максимальным.

Для нахождения величин $a_\tau$, $a_n$, $R$ в момент времени $t_1$ подставим заданное значение времени в выражения (2.7), (2.9), (2.10) и произведем вычисления:

$$a_\tau(t_1) = 9{,}81\,\frac{9{,}81 \cdot 0{,}600 - 10{,}0 \sin 40{,}0^\circ}{\sqrt{(10{,}0 \cos 40{,}0^\circ)^2 + (10{,}0 \sin 40{,}0^\circ - 9{,}81 \cdot 0{,}600)^2}} =$$

$$= -0{,}6922 \approx -0{,}692 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n(t_1) = 9{,}81\,\frac{10{,}0 \cos 40{,}0^\circ}{\sqrt{(10{,}0 \cos 40{,}0^\circ)^2 + (10{,}0 \sin 40{,}0^\circ - 9{,}81 \cdot 0{,}600)^2}} =$$

$$= 9{,}786 \approx 9{,}79 \text{ м/с}^2;$$

$$R(t_1) = \frac{\left(\left(10{,}0\ \cos 40{,}0^\circ\right)^2 + \left(10{,}0\ \sin 40{,}0^\circ - 9{,}81 \cdot 0{,}06\right)^2\right)^{3/2}}{9{,}81 \cdot 10{,}0\ \cos 40{,}0^\circ} =$$

$$= 6{,}027 \approx 6{,}03\ \text{м}.$$

Ответ: $a_n(t_A) = 9{,}81$ м/с$^2$; $a_\tau(t_A) = 0$ м/с$^2$; $a_n(t_1) = 9{,}79$ м/с$^2$; $a_\tau(t_1) = -0{,}692$ м/с$^2$; $R(t_A) = 5{,}98$ м; $R(t_1) = 6{,}03$ м.

**Пример 3.** Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt - Ct^3$, где $\varphi$ – угол поворота тела в радианах; $B = 10{,}0$ рад/с; $C = 0{,}200$ рад/с$^3$; $t$ – время в секундах. Найти величину и направление полного ускорения $a$ тела, находящегося на расстоянии 0,100 м от оси вращения, в момент времени 4,00 с.

*Дано*:

$\varphi = A + Bt - Ct^3$,
$B = 10{,}0$ рад/с;
$C = 0{,}200$ рад/с$^3$,
$R = 0{,}100$ м,
$t_1 = 4{,}00$ с.

*Найти*:

$a(t_1)$, $\beta = \vec{a}\,^\wedge\vec{a}_\tau$.

*Решение*

Покажем на рис. 3.1 векторы тангенциального $\vec{a}_\tau$, нормального $\vec{a}_n$, полного $\vec{a}$ ускорений и координатную ось $Z$. Ось $Z$ направим перпендикулярно плоскости рисунка вниз и совместим с осью вращения.

Известно, что ускорение $\vec{a}$ точки при криволинейном движении есть векторная сумма тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного к центру кривизны траектории (см. рис. 3.1):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n;$$

модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,. \tag{3.1}$$

При вращении тела относительно неподвижной оси тангенциальное $a_\tau$ и нормальное $a_n$ ускорения можно найти из следующих соотношений:

$$a_\tau = \varepsilon R; \qquad a_n = \omega^2 R, \tag{3.2}$$

где $\omega$ – угловая скорость тела; $\varepsilon$ – угловое ускорение тела; $R$ – расстояние от точки до его оси вращения $Z$.

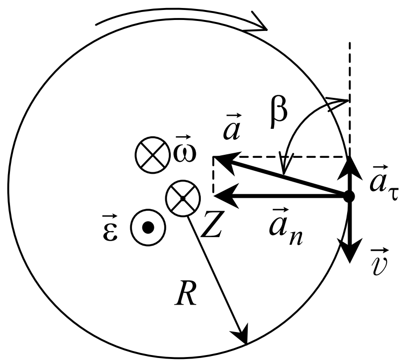


Рис. 3.1

Подставляя выражения (3.2) в формулу (3.1), находим

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \tag{3.3}$$

Угловая скорость тела направлена вдоль оси $Z$ (см. рис. 3.1) в сторону, связанную с направлением вращения правилом правого винта, т. е. перпендикулярно плоскости рисунка и от нас, и определяется следующим образом:

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A + Bt - Ct^3\right) = B - 3Ct^2. \tag{3.4}$$

Угловое ускорение тела

$$\varepsilon(t) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B - 3Ct^2\right) = -6Ct\,. \tag{3.5}$$

Из выражения (3.5) следует, что угловое ускорение является величиной отрицательной, так как константа $C$ больше нуля. Следовательно, тело совершает замедленное движение. Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен в сторону, противоположную направлению угловой скорости $\vec{\omega}$. Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено в сторону, противоположную направлению линейной скорости $\vec{v}$.

Подставим выражения (3.4) и (3.5) в выражение (3.3) и получим формулу для расчета модуля полного ускорения:

$$a(t) = R\sqrt{(-6Ct)^2 + \left(B - 3Ct^2\right)^4}\,. \tag{3.6}$$

Направление ускорения $\vec{a}$ можно определить, если найти один из углов, которые вектор $\vec{a}$ образует с касательной к траектории или с нормалью к ней.

Вычислим угол $\beta$, который вектор $\vec{a}$ образует с касательной к траектории (см. рис. 3.1). Для этого найдем косинус угла, используя выражения (3.2) – (3.6):

$$\cos\beta = \frac{|a_\tau|}{a} = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{6Ct}{\sqrt{(-6Ct)^2 + \left(B - 3Ct^2\right)^4}}. \qquad (3.7)$$

Произведем вычисления искомых величин.

Подставляя заданные значения констант $B, C$, времени $t_1$ и расстояния $R$ в формулу (3.6), находим значение полного ускорения $a$:

$$a = 0{,}100\sqrt{(-6\cdot 0{,}200\cdot 1{,}00)^2 + \left(10{,}0 - 3\cdot 0{,}200\cdot 1{,}00^2\right)^4} =$$

$$= 8{,}837 \approx 8{,}84\,\text{м/с}^2.$$

Используя формулу (3.7), определим

$$\cos\beta = \frac{6\cdot 0{,}200\cdot 1{,}00}{\sqrt{(-6\cdot 0{,}200\cdot 1{,}00)^2 + \left(10{,}0 - 3\cdot 0{,}200\cdot 1{,}00^2\right)^4}} = 0{,}01358.$$

Значение искомого угла

$$\beta = \arccos(0{,}01358) = 89{,}22 \approx 89{,}2^\circ.$$

Ответ: $a(t_1) = 8{,}84$ м/с$^2$; $\beta = \vec{a}\,{}^\wedge\vec{a}_\tau = 89{,}2^\circ$.

**Пример 4.** По наклонной плоскости вниз скользит тело массой 5,00 кг, связанное с грузом массой 2,00 кг нерастяжимой и невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок. Найти силу натяжения $T$ нити и ускорение $a$ тела и груза, если коэффициент трения между телом и плоскостью 0,100, а угол наклона плоскости к горизонту 36,0º. Трением в блоке пренебречь.

| *Дано*: | *Решение* |
|---|---|
| $\alpha = 36{,}0^\circ$,<br>$m_1 = 5{,}00$ кг,<br>$m_2 = 2{,}00$ кг, | Движение одного тела можно рассматривать независимо от движения другого, выбирая для каждого из них свою систему координат. Для тела |

| | |
|---|---|
| $\mu = 0{,}100.$ <br> *Найти*: <br> $T$, $a$. | массой $m_1$ выберем систему координат таким образом, чтобы ось $X$ была параллельна наклонной плоскости и направлена вниз, а ось $Y$ – перпендикулярна оси $X$ и направлена вверх. Для груза массой $m_2$ достаточно одной вертикальной оси $Y'$ (рис. 4.1). |

На тело действуют следующие силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T}_1$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$, которая всегда направлена в сторону, противоположную движению (скорости) тела (см. рис. 4.1).

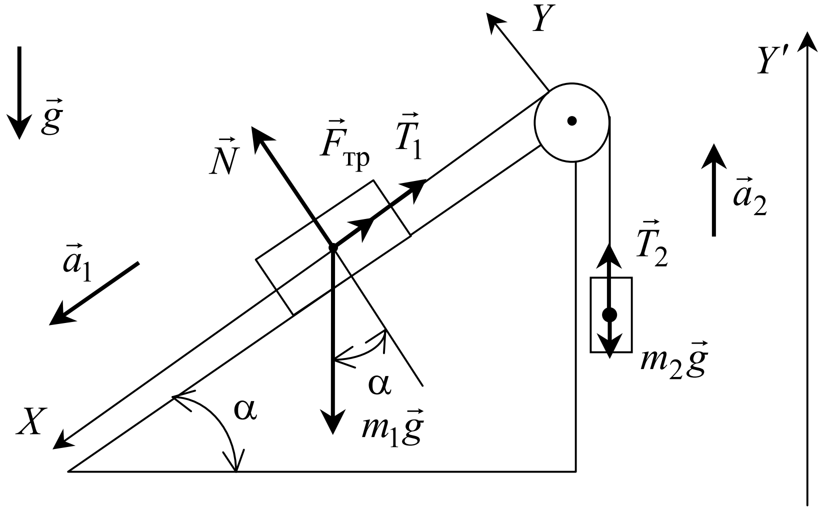


Рис. 4.1

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме для тела, скользящего по плоскости:

$$\vec{T}_1 + m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m_1\vec{a}_1. \quad (4.1)$$

Проекции выражения (4.1) на оси $X$ и $Y$ будут иметь вид

$$-T_1 + m_1 g \sin\alpha - F_{\text{тр}} = m_1 a_1; \quad (4.2)$$

$$N - m_1 g \cos\alpha = 0. \quad (4.3)$$

Так как сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$, то с учетом выражения (4.3) получим

$$F_{\text{тр}} = \mu m_1 g \cos\alpha. \quad (4.4)$$

Подставим выражение (4.4) в выражение (4.2):

$$-T_1 + m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha = m_1 a_1 . \tag{4.5}$$

На груз, висящий на нити, действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$. Второй закон Ньютона для этого груза в векторной форме имеет вид

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2 . \tag{4.6}$$

Проекция полученного выражения на ось $Y'$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2 . \tag{4.7}$$

Из условия нерастяжимости нити следует, что $a_1 = a_2 = a$, а из условий невесомости нити и блока и отсутствия в блоке сил трения следует, что $T_1 = T_2 = T$. Учитывая это, уравнения (4.5) и (4.7) можно переписать в виде

$$m_1 g \sin\alpha - T - m_1 g \mu \cos\alpha = m_1 a ; \tag{4.8}$$

$$T - m_2 g = m_2 a . \tag{4.9}$$

Решая совместно систему уравнений (4.8) и (4.9), получаем

$$a = g\frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} ; \tag{4.10}$$

$$T = m_2(a+g) = g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha + 1). \tag{4.11}$$

Подставим заданные числовые значения в выражения (4.10), (4.11) и произведем расчет:

$$a = 9{,}81\,\frac{5{,}00\left[\sin 36{,}0^\circ - 0{,}100\cos 36{,}0^\circ\right] - 2{,}00}{5{,}00 + 2{,}00} = 0{,}7489 \approx 0{,}749 \text{ м/с}^2;$$

$$T = 9{,}81\,\frac{5{,}00\cdot 2{,}00}{5{,}00 + 2{,}00}\left[\sin 36{,}0^\circ - 0{,}100\cos 36{,}0^\circ + 1\right] = 21{,}12 \approx 21{,}1 \text{ Н}.$$

Ответ: $T$ = 21,1 Н; $a$ = 0,749 м/с$^2$.

**Пример 5.** Движущийся по горизонтальной поверхности со скоростью 10,0 м/с шар массой 0,200 кг ударяется о неподвижный шар массой 0,100 кг. Удар прямой центральный абсолютно упругий. Найти: 1) скорости $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ шаров после удара; 2) во сколько раз уменьшится кинетическая энергия $E_{к1}$ первого шара после удара. Сопротивлением воздуха пренебречь. Трение шаров о поверхность отсутствует.

*Дано*:

$v_1 = 10{,}0$ м/с,
$v_2 = 0$ м/с,
$m_1 = 0{,}200$ кг,
$m_2 = 0{,}100$ кг.

*Найти*:

$\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\dfrac{E_{к1}}{E'_{к1}}$.

*Решение*

Покажем на рис. 5.1 состояние системы до и после соударения.

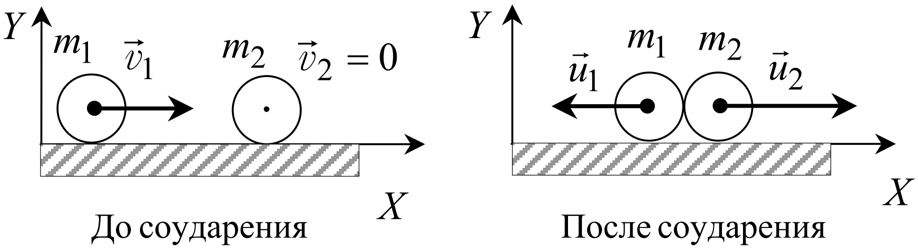


Рис. 5.1

В разделе “Динамика материальной точки” курса физики тела рассматриваются как материальные точки, что исключает возможность их вращательного движения относительно оси, связанной с самим телом. Таким образом, можно рассматривать только поступательное движение шаров. Направление скорости $\vec{u}_1$ первого шара после соударения выберем произвольно. Допустим, что скорости шаров после удара $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ направлены в противоположные стороны. Выберем направление оси $X$, совпадающее с направлением скорости $\vec{v}_1$ первого шара до соударения.

На шары действуют внешние силы – сила тяжести и сила нормальной реакции опоры, однако проекции этих сил на ось $X$ равны нулю, т. е. рассматриваемая система является частично замкнутой, поэтому проекция импульса системы на ось $X$ сохраняется:

$$p_{\text{сист }x} = p'_{\text{сист }x}, \tag{5.1}$$

где $p_{\text{сист }x}$, $p'_{\text{сист }x}$ – проекции импульсов системы до и после соударения:

$$p_{\text{сист }x} = p_{1\,x} + p_{2\,x} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1; \tag{5.2}$$

$$p'_{\text{сист }x} = p'_{1\,x} + p'_{2\,x} = -m_1 u_1 + m_2 u_2, \tag{5.3}$$

здесь $p_{1x}$, $p_{2x}$, $p'_{1x}$, $p'_{2x}$, – проекции импульсов тел до и после удара на ось *X*.

По условию удар является абсолютно упругим, следовательно, система является консервативной и появляется возможность использовать закон сохранения механической энергии:

$$E_{\text{м}} = E'_{\text{м}}. \tag{5.4}$$

За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии $E_{\text{п}}$ системы примем прямую, проходящую через центры масс шаров. Ввиду того что высота центров масс тел в процессе соударения не изменяется, потенциальная энергия $E_{\text{п}}$ системы остается постоянной и равной нулю $(E_{\text{п}} = 0)$. Таким образом, механическая энергия $E_{\text{м}}$ системы равна кинетической энергии. До соударения механическая энергия системы равна кинетической энергии только первого шара, так как второй шар покоится:

$$E_{\text{м}} = E_{\text{к}1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \tag{5.5}$$

После взаимодействия механическая энергия системы будет включать в себя кинетическую энергию двух шаров:

$$E'_{\text{м}} = E'_{\text{к}1} + E'_{\text{к}2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \tag{5.6}$$

Таким образом, законы сохранения (5.1) и (5.4) с учетом выражений (5.2), (5.3), (5.5), (5.6) можно записать следующим образом:

$$m_1 v_1 = m_2 u_2 - m_1 u_1; \tag{5.7}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2 u_2^2}{2} + \frac{m_1 u_1^2}{2}. \tag{5.8}$$

Решим систему уравнений (5.7), (5.8) относительно скоростей $u_1$, $u_2$. Умножив на 2 уравнение (5.8) и сгруппировав члены, содержащие $m_1$ в левой части, а $m_2$ в правой части уравнений (5.7) и (5.8), получим

$$m_1(v_1 + u_1) = m_2 u_2; \tag{5.9}$$

$$m_1\left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2 u_2^2. \quad (5.10)$$

Преобразуем уравнение (5.10) к виду

$$m_1\left(v_1 + u_1\right)\left(v_1 - u_1\right) = m_2 u_2^2, \quad (5.11)$$

а затем, разделив уравнение (5.11) на (5.9), получим

$$v_1 - u_1 = u_2. \quad (5.12)$$

Выражение (5.12) подставим в уравнение (5.7):

$$m_1 v_1 = m_2\left(v_1 - u_1\right) - m_1 u_1,$$

откуда получаем выражение для скорости $u_1$:

$$u_1 = v_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}. \quad (5.13)$$

Используя выражения (5.12) и (5.13), находим скорость $u_2$:

$$u_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}. \quad (5.14)$$

Кинетическая энергия первого шара после удара с учетом выражения (5.13)

$$E'_{\text{к}1} = \frac{m_1 u_1^2}{2} = \frac{m_1}{2} v_1^2 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = E_{\text{к}1}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2,$$

следовательно,

$$\frac{E_{\text{к}1}}{E'_{\text{к}1}} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}\right)^2. \quad (5.15)$$

Произведем вычисления по формулам (5.13) и (5.14):

$$u_1 = 10{,}0\,\frac{0{,}100 - 0{,}200}{0{,}200 + 0{,}100} = -3{,}333 \approx -3{,}33 \text{ м/с};$$

$$u_2 = 10{,}0\,\frac{2 \cdot 0{,}200}{0{,}200 + 0{,}100} = 13{,}33 \approx 13{,}3 \text{ м/с}.$$

Знак “–” скорости $u_1$ свидетельствует о том, что направление движения первого тела после соударения было задано неверно, но ис правлять направление вектора $\vec{u}_1$ на рисунке нельзя, так как это приведет к изменению выражения (5.3) и, следовательно, всего решения.

Произведем вычисления по формуле (5.15):

$$\frac{E_{к1}}{E'_{к1}} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}\right)^2 = \left(\frac{0{,}200 + 0{,}100}{0{,}100 - 0{,}200}\right)^2 = 9{,}00\,.$$

Ответ: 1) $u_1 = 3{,}33$ м/с, $u_2 = 13{,}3$ м/с; скорости $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ шаров после соударения по направлению совпадают со скоростью $\vec{v}_1$ первого шара до удара; 2) $\dfrac{E_{к1}}{E'_{к1}} = 9{,}00$.

**<u>Пример 6.</u>** Движущийся по горизонтальной поверхности со скоростью 10,0 м/с шар массой 0,200 кг ударяется о неподвижный шар массой 0,100 кг. Удар прямой центральный абсолютно неупругий. Найти: 1) скорость $\vec{u}$ шаров после удара; 2) часть кинетической энергии $Q/E_{к1}$, которая переходит в теплоту. Сопротивлением воздуха и трением шаров о поверхность пренебречь.

*Дано*:

$v_1 = 10{,}0$ м/с,
$v_2 = 0$ м/с,
$m_1 = 0{,}200$ кг,
$m_2 = 0{,}100$ кг.

*Найти*:

$\vec{u}$; $\dfrac{Q}{E_{к1}}$.

*Решение*

Выбор системы координат аналогичен выбору в примере 5. Состояния системы до и после соударения показаны на рис. 6.1.

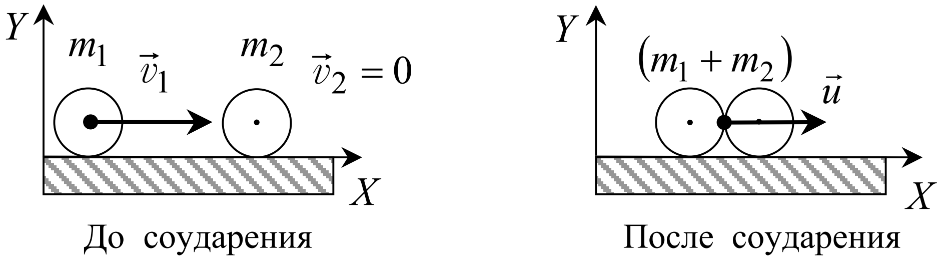


Рис. 6.1

При неупругом ударе в системе возникают неупругие деформации и механическая энергия $E_м$ системы частично переходит в теплоту $Q$, поэтому механическая энергия системы уменьшается, т. е. закон сохранения механической энергии данной системы не выполняется. На шары действуют внешние силы – сила тяжести и сила нормальной реакции опоры, однако проекции этих сил на ось $X$ равны нулю, т. е. рассматриваемая система является частично замкнутой, поэтому проекция импульса системы на ось $X$ сохраняется:

$$p_{\text{сист}\,x} = p'_{\text{сист}\,x}, \tag{6.1}$$

где $p_{\text{сист}\,x}$, $p'_{\text{сист}\,x}$ – проекции импульсов системы до и после соударения.

Проекция импульса системы на ось $X$ до соударения

$$p_{\text{сист}\,x} = p_{1\,x} + p_{2\,x} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1. \tag{6.2}$$

После абсолютно неупругого удара шары будут двигаться как единое тело со скоростью $u$, поэтому проекция импульса системы на ось $X$ после соударения

$$p'_{\text{сист}\,x} = p'_{1\,x} + p'_{2\,x} = m_1 u + m_2 u = (m_1 + m_2)u. \tag{6.3}$$

Из выражений (6.1), (6.2) и (6.3) получаем скорость $u$ шаров после соударения:

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \tag{6.4}$$

Теплоту $Q$, выделившуюся при соударении шаров, определим по закону изменения механической энергии:

$$Q = E_{\text{м}} - E'_{\text{м}}, \tag{6.5}$$

где $E_{\text{м}}$, $E'_{\text{м}}$ – механическая энергия системы до и после соударения.

Формулы для расчета механической энергии имеют следующий вид (см. объяснение в примере 5):

$$E_{\text{м}} = E_{\text{к}1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}; \tag{6.6}$$

$$E'_{\text{м}} = E'_{\text{к}} = E'_{\text{к}1} + E'_{\text{к}2} = \frac{m_1 u^2}{2} + \frac{m_2 u^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \tag{6.7}$$

Преобразуем формулу (6.5) с учетом соотношений (6.4), (6.6) и (6.7):

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = E_{\text{к}1}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right). \tag{6.8}$$

Искомая доля кинетической энергии $E_{к1}$, перешедшей в теплоту $Q$,

$$\frac{Q}{E_{к1}} = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right). \qquad (6.9)$$

Произведем вычисления по формулам (6.4) и (6.9):

$$u = \frac{0{,}200}{0{,}200 + 0{,}100} 10{,}0 = 6{,}666 \approx 6{,}67 \text{ м/с};$$

$$\frac{Q}{E_{к1}} = \left( \frac{0{,}100}{0{,}200 + 0{,}100} \right) = 0{,}3333 \approx 0{,}333.$$

Ответ: 1) $u = 6{,}67$ м/с; 2) $\dfrac{Q}{E_{к1}} = 0{,}333$.

**Пример 7.** Снаряд массой $m_0$, летевший горизонтально со скоростью 100 м/с, разрывается на две равные части на высоте 40 м. Одна часть падает через 1,25 с на землю точно над местом взрыва. Определить величину и направление скорости $u_2$ второй части снаряда сразу после взрыва. Сопротивлением воздуха пренебречь.

*Дано*:

$m_1 = m_2 = m = \dfrac{m_0}{2}$,

$v = 100$ м/с,

$h = 40{,}0$ м,

$t_1 = 1{,}25$ с.

*Найти*:

$u_2$, $\alpha$.

*Решение*

Точка $O$ начала отсчета системы координат находится на поверхности земли (рис. 7.1), ось $X$ горизонтальна и направлена в сторону движения снаряда. Ось $Y$ направлена вертикально вверх.

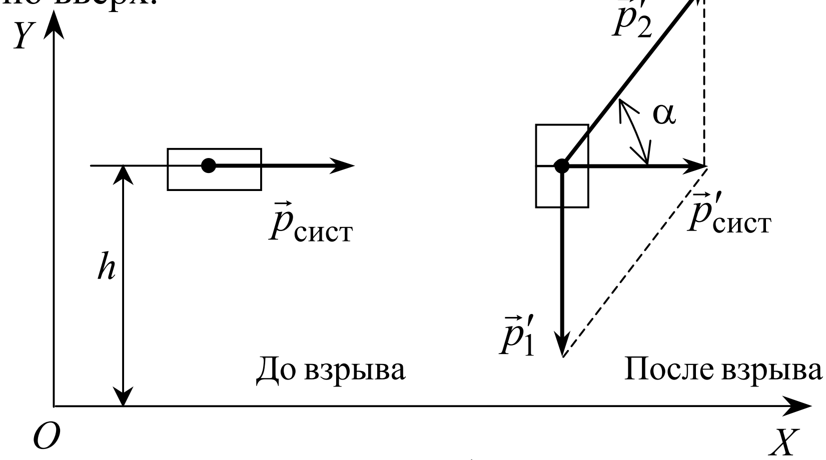


Рис. 7.1

Силы, возникающие при взрыве снаряда, настолько велики, что внешними силами можно пренебречь. Для момента взрыва к рассматриваемой системе “снаряд–осколки” можно применить закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}\,'_{\text{сист}}. \tag{7.1}$$

До взрыва импульс системы

$$\vec{p}_{\text{сист}} = m_0\vec{v}. \tag{7.2}$$

После взрыва импульс системы

$$\vec{p}\,'_{\text{сист}} = \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \tag{7.3}$$

где $\vec{p}\,'_1, \vec{p}\,'_2$ и $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ – импульсы и скорости первого и второго осколков после взрыва.

Подставим выражения (7.2) и (7.3) в закон (7.1), получим

$$m_0\vec{v} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2. \tag{7.4}$$

Проекция выражения (7.4) на ось $X$ примет вид

$$m_0 v = m_2 u_{2x},$$

откуда

$$u_{2x} = \frac{m_0}{m_2} v = 2v. \tag{7.5}$$

Проекция выражения (7.4) на ось $Y$ примет вид

$$0 = m_2 u_{2y} - m_2 u_1,$$

откуда

$$u_{2y} = u_1. \tag{7.6}$$

Выражения (7.5) и (7.6) позволяют найти модуль скорости второго осколка после взрыва:

$$u_2 = \sqrt{u_{2x} + u_{2y}} = \sqrt{4v^2 + u_1^2}.$$

Для определения направления второй части снаряда сразу после взрыва найдем угол $\alpha$ между направлением импульса и линией горизонта (см. рис. 7.1) из соотношения

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{p'_{2y}}{p'_{2x}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{u_{2y}}{u_{2x}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{u_1}{2v}\right).$$

Для нахождения скорости $u_1$ воспользуемся уравнением движения первого осколка

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}_1 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

и спроектируем его на ось $Y$:

$$y = h - u_1 t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (7.7)$$

В момент падения первого осколка на землю координата $y = 0$, из выражения (7.7) имеем

$$u_1 = \frac{h - gt_1^2/2}{t_1} = \left(\frac{h}{t_1} - \frac{gt_1}{2}\right).$$

Таким образом, окончательные расчетные формулы примут вид

$$u_2 = \sqrt{4v^2 + \left(\frac{h}{t_1} - \frac{gt_1}{2}\right)^2}; \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{h}{t_1} - \frac{gt_1}{2}\right)\frac{1}{2v}\right].$$

Произведем вычисления:

$$u_2 = \sqrt{4 \cdot 100^2 + \left(\frac{40{,}0}{1{,}25} - \frac{9{,}81 \cdot 1{,}25}{2}\right)^2} = 201{,}7 \approx 202 \text{ м/с};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{40{,}0}{1{,}25} - \frac{9{,}81 \cdot 1{,}25}{2}\right)\frac{1}{2 \cdot 100}\right] = 7{,}3699 \approx 7{,}37°.$$

Ответ: $u_2 = 202$ м/с; $\alpha = 7{,}37°$.

**Пример 8.** Найти работу $A$, совершаемую при подъеме тела массой 10,0 кг с поверхности земли на высоту 100 м. Тело перемещается из состояния покоя с ускорением 0,500 м/с$^2$. Силу сопротивления воздуха не учитывать.

| *Дано*: | *Решение* |
|---|---|
| $m = 10{,}0$ кг, | На рассматриваемое тело действуют две си |

| | |
|---|---|
| $h_1 = 0$ м,<br>$v_1 = 0$ м/с,<br>$h_2 = 100$ м,<br>$a = 0{,}500$ м/с$^2$. | лы – сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F}$. Покажем на рис. 8.1 направления векторов этих сил, вектор ускорения и систему координат. Выберем направление оси $Y$, совпадающее с направлением движения тела. Точка $O$ начала отсчета находится на поверхности земли. |
| *Найти*:<br>$A$. | |

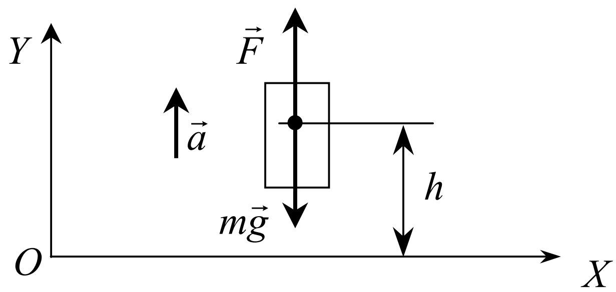

Рис. 8.1

Задача может быть решена двумя различными способами.

**1-й способ.** Задачу можно решить, используя второй закон Ньютона и понятие механической работы.

Согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}. \quad (8.1)$$

Проектируя выражение (8.1) на ось $Y$, получаем

$$F - mg = ma. \quad (8.2)$$

Так как $a = \text{const}$, то справедливо утверждение, что сила постоянна. Работа, совершаемая постоянной силой,

$$A = F\,S\cos\alpha, \quad (8.3)$$

где $S$ – путь, пройденный телом; $\alpha$ – угол между направлением силы $\vec{F}$ и направлением перемещения.

С учетом выражения (8.2) и того, что $S = h_2 - h_1 = h_2$ и $\alpha = 0°$, преобразуем формулу (8.3):

$$A = F(h_2 - h_1) = Fh_2 = m(g + a)h_2. \quad (8.4)$$

**2-й способ.** Задачу можно решить с использованием закона изменения механической энергии, согласно которому

$$A = E_{м2} - E_{м1},$$

где $E_{м2}$, $E_{м1}$ – механическая энергия тела на высоте $h_2$ и на поверхности земли $(h_1 = 0)$. Механическая энергия тела, по определению,

$$E_м = E_к + E_п,$$

где $E_к, E_п$ – кинетическая и потенциальная энергия тела.

Принимая за уровень отсчета потенциальной энергии поверхность земли $(E_{п1} = 0)$ и учитывая, что начальная скорость тела $\upsilon_1 = 0$, получим $E_{м1} = 0$. Таким образом, работа по подъему данного тела на высоту $h_2$

$$A = E_{м2} = E_{к2} + E_{п2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + mgh_2, \tag{8.5}$$

где $\upsilon_2$ – скорость тела на высоте $h_2$.

Так как тело участвует в равноускоренном движении, то уравнения кинематики материальной точки

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{\upsilon}_1 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}; \qquad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{a}t$$

в проекциях на ось $Y$ для момента времени $t$ (достижения высоты $h_2$) примут вид

$$h_2 = \frac{at^2}{2}; \qquad \upsilon_2 = at.$$

Из выражения для высоты $h_2$ получаем время подъема, которое позволяет определить скорость на высоте $h_2$:

$$t = \sqrt{\frac{2h_2}{a}}, \qquad \upsilon_2 = a\sqrt{\frac{2h_2}{a}} = \sqrt{2h_2 a}.$$

Тогда выражение (8.5) для работы запишем в виде

$$A = E_{м2} = \frac{m2h_2 a}{2} + mgh_2 = m(g + a)h_2. \tag{8.6}$$

Таким образом, мы получили выражение, тождественное (8.4). Подставим значения заданных величин и найдем

$$A = 10{,}0\,(9{,}81 + 0{,}500)\,100 = 10310 \text{ Дж} = 10{,}31 \text{ кДж} \approx 10{,}3 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = 10{,}3$ кДж.

**Пример 9.** Через блок в виде однородного цилиндра массой 300 г, вращающегося вокруг горизонтальной оси, перекинута невесомая и нерастяжимая нить, на концах которой закреплены грузы массой 300 и 200 г. Пренебрегая трением в оси блока, найти линейное ускорение $a$ грузов и силы натяжения нитей $T_1$, $T_2$.

*Дано*:

$m = 300$ г = $0{,}300$ кг,
$m_1 = 300$ г = $0{,}300$ кг,
$m_2 = 200$ г = $0{,}200$ кг.

*Найти*:

$a$, $T_1$, $T_2$.

*Решение*

Выберем системы отсчета для тел, рассматриваемых в задаче. Блок вращается вокруг неподвижной оси, поэтому для описания его движения воспользуемся координатной осью $Z$, совпадающей с осью вращения блока и направленной от нас (рис. 9.1).

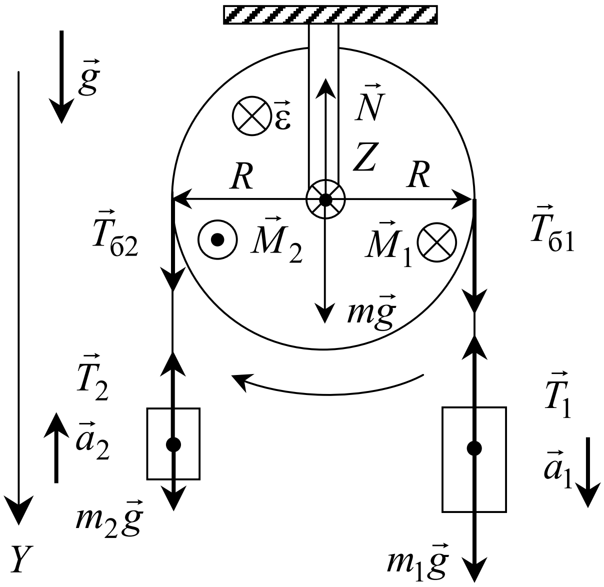

Рис. 9.1

Грузы двигаются прямолинейно, поэтому для описания их движения достаточно одной оси. Выберем направление оси $Y$ вертикально вниз (по движению более тяжелого груза).

Каждый из грузов находится под действием двух сил – силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$. Тогда для данных грузов второй закон Ньютона будет иметь вид

$$\vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1; \qquad (9.1)$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2. \qquad (9.2)$$

Так как грузы движутся вдоль одной прямой, но в противоположные стороны, то ускорения направлены в противоположные стороны. Поскольку нить нерастяжима, то ускорения равны по модулю ($a = a_1 = a_2$).

Проектируя на ось $Y$ уравнения (9.1) и (9.2), получим

$$m_1 g - T_1 = m_1 a; \qquad (9.3)$$

$$m_2 g - T_2 = -m_2 a. \qquad (9.4)$$

Блок вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через его центр, под действием моментов сил. На блок действуют четыре силы: сила тяжести блока $m\vec{g}$, сила реакции оси $\vec{N}$ и силы натяжения нити $\vec{T}_{б1}$ и $\vec{T}_{б2}$. Так как силы тяжести блока $m\vec{g}$ и реакции оси $\vec{N}$ приложены к точке, совпадающей с осью вращения, то моменты этих сил равны нулю. Следовательно, вращение блока вызывается действием моментов сил натяжения $\vec{T}_{б1}$ и $\vec{T}_{б2}$.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = I\,\vec{\varepsilon}, \tag{9.5}$$

где $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ – моменты сил натяжения нити $\vec{T}_{б1}$ и $\vec{T}_{б2}$; $I$ – момент инерции блока; $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение.

Вектор момента силы направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и ее плечо, в сторону, связанную с направлением силы правилом правого винта, поэтому в данной задаче вектор $\vec{M}_1$ направлен от нас, а вектор $\vec{M}_2$ – к нам (см. рис. 9.1).

Вектор углового ускорения направлен перпендикулярно плоскости вращения. Предположим, что он направлен от нас (см. рис. 9.1).

Проектируя уравнение (9.5) на ось $Z$, получим

$$M_1 - M_2 = I\,\varepsilon. \tag{9.6}$$

Модули моментов сил

$$M_1 = T_{б1}R; \qquad M_2 = T_{б2}R, \tag{9.7}$$

где $R$ – плечо сил $\vec{T}_{б1}$ и $\vec{T}_{б2}$ (радиус диска).

Из условия невесомости нити следует, что сила, с которой нить действует на груз, равна силе, с которой та же нить действует на блок, т. е.

$$T_{б1} = T_1; \qquad T_{б2} = T_2. \tag{9.8}$$

Так как нить не проскальзывает по блоку, то угловое ускорение связано с тангенциальным ускорением соотношением

$$\varepsilon = \frac{a}{R}. \tag{9.9}$$

Момент инерции блока (сплошного диска)

$$I = \frac{mR^2}{2}. \qquad (9.10)$$

Подставим формулы (9.7) – (9.10) в уравнение динамики вращательного движения блока (9.6) и получим

$$(T_1 - T_2)R = \frac{mR^2}{2}\frac{a}{R}. \qquad (9.11)$$

Выражение (9.11) упрощается и принимает вид

$$T_1 - T_2 = \frac{m}{2}a. \qquad (9.12)$$

Получена система уравнений, включающая выражения (9.3), (9.4) и (9.12):

$$\begin{cases} T_1 = m_1 g - m_1 a; \\ T_2 = m_2 g + m_2 a; \\ T_1 - T_2 = \dfrac{m}{2}a. \end{cases} \qquad (9.13)$$

Решив систему (9.13) относительно $a$, $T_1$, $T_2$, получим

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}}; \qquad T_1 = g\frac{m_1\left(2m_2 + \dfrac{m}{2}\right)}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}}; \qquad T_2 = g\frac{m_2\left(2m_1 + \dfrac{m}{2}\right)}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}}.$$

Подставив заданные численные значения в полученные выражения, рассчитаем искомые величины:

$$a = 9{,}81\frac{0{,}300 - 0{,}200}{0{,}300 + 0{,}200 + \dfrac{0{,}300}{2}} = 1{,}509 \approx 1{,}51 \text{ м/с}^2;$$

$$T_1 = 9{,}81\,\frac{0{,}300\left(2\cdot 0{,}200 + \dfrac{0{,}300}{2}\right)}{0{,}300 + 0{,}200 + \dfrac{0{,}300}{2}} = 2{,}490 \approx 2{,}49\ \text{Н};$$

$$T_2 = 9{,}81\,\frac{0{,}200\left(2\cdot 0{,}300 + \dfrac{0{,}300}{2}\right)}{0{,}300 + 0{,}200 + \dfrac{0{,}300}{2}} = 2{,}264 \approx 2{,}26\ \text{Н}.$$

Ответ: $a = 1{,}51$ м/с$^2$; $T_1 = 2{,}49$ Н; $T_2 = 2{,}26$ Н.

**Пример 10.** Стержень из однородного материала массой 60,0 г и длиной 50,0 см висит вертикально в положении равновесия. Он может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси $Z$, проходящей через один из его концов. В точку, отстоящую от оси вращения на расстоянии 40,0 см, попадает пуля массой 10,0 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с перпендикулярно оси вращения. Пуля застревает в стержне. Найти угловую скорость $\omega$, с которой начинает двигаться стержень сразу после попадания пули, и максимальный угол отклонения стержня $\varphi$.

*Дано*:

$\ell_1 = 50{,}0$ см = 0,500 м,
$\ell_2 = 40{,}0$ см = 0,400 м,
$m_1 = 60{,}0$ кг,
$m_2 = 10{,}0$ г $= 10{,}0\cdot 10^{-3}$ кг,
$v = 400$ м/с.

*Найти*:

$\omega$, $\varphi$.

*Решение*

На стержень действуют сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, приложенная к точке $O$, и сила тяжести $m_1\vec{g}$, приложенная к центру масс стержня (рис. 10.1). На пулю действует сила тяжести $m_2\vec{g}$. На рисунке показаны векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ стержня и момента импульса $\vec{L}_{\text{сист}}$ и координатная ось $Z$.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ стержня направлен перпендикулярно плоскости вращения в сторону, связанную с направлением вращения правилом правого винта, т. е. в данном случае от нас (см. рис. 10.1). Направление вектора момента импульса совпадает с направлением вектора угловой скорости. Выберем направление коор динатной оси $Z$, совпадающее с вектором $\vec{\omega}$, т. е. от нас (см. рис. 10.1).

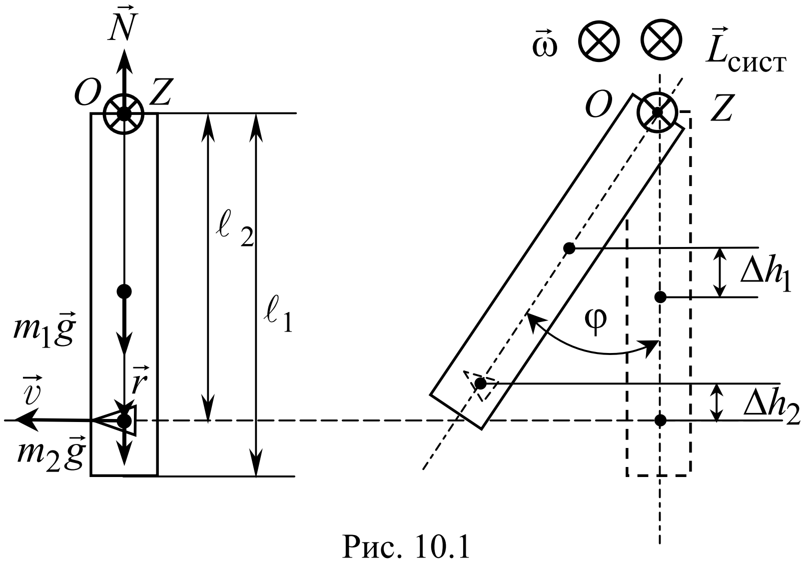


Рис. 10.1

В течение взаимодействия пули со стержнем моменты сил $\vec{N}$, $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ относительно точки $O$ равны нулю, так как линия их действия проходит через эту точку (плечо силы равно нулю).

Учитывая сказанное, для системы “стержень–пуля” можно применить закон сохранения момента импульса относительно точки $O$:

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \vec{L}'_{\text{сист}}, \tag{10.1}$$

где $\vec{L}_{\text{сист}}$, $\vec{L}'_{\text{сист}}$ – моменты импульса до и после взаимодействия.

Учитывая, что система состоит из двух тел, запишем

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2, \tag{10.2}$$

где $\vec{L}_1$, $\vec{L}_2$ – моменты импульса стержня и пули до взаимодействия; $\vec{L}'_1$, $\vec{L}'_2$ – моменты импульса стержня и пули после взаимодействия.

До взаимодействия с пулей стержень был неподвижен, следовательно, его момент импульса $\vec{L}_1 = 0$. Момент импульса пули, движущейся поступательно,

$$\vec{L}_2 = [\vec{r}\, m_2\vec{v}], \tag{10.3}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор пули, проведенный из точки $O$; $m_2$ – масса пули; $\vec{v}$ – линейная скорость пули.

После абсолютно неупругого соударения стержень и пуля будут двигаться вместе, начиная вращение относительно оси вращения $Z$ с угловой скоростью $\vec{\omega}$:

$$\vec{L}_1' + \vec{L}_2' = I_1\vec{\omega} + I_2\vec{\omega} = \left(I_1 + I_2\right)\vec{\omega}, \tag{10.4}$$

где $I_1$, $I_2$ – моменты инерции стержня и пули относительно оси $Z$.

Таким образом, закон сохранения момента импульса (10.2) примет вид

$$\left[\vec{r}\, m_2\vec{v}\right] = \left(I_1 + I_2\right)\vec{\omega}. \tag{10.5}$$

Проекция уравнения (10.5) на ось $Z$ запишется в следующем виде (с учетом того, что длина радиуса-вектора $\vec{r}$ равна $\ell_2$):

$$\ell_2\, m_2 v = \left(I_1 + I_2\right)\omega. \tag{10.6}$$

Моменты инерции стержня и пули относительно оси вращения:

$$I_1 = \frac{m_1\ell_1^2}{12} + m_1\left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2 = \frac{m_1\ell_1^2}{3}; \qquad I_2 = m_2\ell_2^2.$$

Подставляя выражения для моментов инерции $I_1, I_2$ в уравнение (10.6) и решая его относительно угловой скорости $\omega$, получим

$$\omega = \frac{3m_2\ell_2}{m_1\ell_1^2 + 3m_2\ell_2^2}\,v.$$

Используя исходные значения, вычисляем

$$\omega = \frac{3\cdot 10{,}0\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}400}{60{,}0\cdot 0{,}500^2 + 3\cdot 10{,}0\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}400^2}\,400 = 0{,}3199 \approx 0{,}320 \text{ рад/с}.$$

После того как перестанут действовать неконсервативные силы, возникающие при неупругой деформации пули и стержня, система будет консервативной. Поэтому воспользуемся законом сохранения механической энергии для движения после соударения:

$$E_{\text{м}}^{\text{н}} = E_{\text{м}}^{\text{в}}, \tag{10.7}$$

где $E_{\text{м}}^{\text{н}}$, $E_{\text{м}}^{\text{в}}$ – механическая энергия системы в нижнем и верхнем положениях стержня.

Механическая энергия $E_{\text{м}}^{\text{н}}$ системы сразу после попадания пули (окончания абсолютно неупругого удара)

$$E_{\text{м}}^{\text{н}} = E_{\text{к}}^{\text{н}} + E_{\text{п}}^{\text{н}} = \frac{(I_1 + I_2)\,\omega^2}{2} + m_1 g h_1 + m_2 g h_2, \qquad (10.8)$$

где $h_1$, $h_2$ – высоты центров масс стержня и пули над поверхностью земли.

Механическая энергия системы в момент окончания вращательного движения

$$E_{\text{м}}^{\text{в}} = E_{\text{п}}^{\text{в}} = m_1 g h_1' + m_2 g h_2', \qquad (10.9)$$

где $h_1'$ и $h_2'$ – высоты центров масс стержня и пули над поверхностью земли в верхнем положении.

Подставим выражения (10.8) и (10.9) в закон сохранения энергии (10.7), получим

$$\frac{(I_1 + I_2)\,\omega^2}{2} + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = m_1 g h_1' + m_2 g h_2'.$$

После преобразований

$$\frac{(I_1 + I_2)\,\omega^2}{2} = m_1 g \Delta h_1 + m_2 g \Delta h_2, \qquad (10.10)$$

где $\Delta h_1$, $\Delta h_2$ – высоты подъема центров масс стержня и пули (см. рис. 10.1), которые найдем по следующим формулам:

$$\Delta h_1 = \frac{\ell_1}{2}(1 - \cos\varphi); \qquad \Delta h_2 = \ell_2 (1 - \cos\varphi). \qquad (10.11)$$

На основе выражений (10.10) и (10.11) получим

$$\frac{(I_1 + I_2)\,\omega^2}{2} = g\left[m_1 \frac{\ell_1}{2}(1 - \cos\varphi) + m_2 \ell_2 (1 - \cos\varphi)\right],$$

откуда выразим, а затем рассчитаем значение искомого угла отклонения $\varphi$:

$$\varphi = \arccos\left[1 - \frac{\left(m_1 \ell_1^2 + 3 m_2 \ell_2^2\right)\omega^2}{g(3 m_1 \ell_1 + 6 m_2 \ell_2)}\right] =$$

$$= \arccos\left[1 - \frac{\left(60{,}0 \cdot 0{,}500^2 + 3 \cdot 10{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}400^2\right)\ 0{,}320^2}{9{,}81\left(3 \cdot 60{,}0 \cdot 0{,}500 + 6 \cdot 10{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}400\right)}\right] = 3{,}3803 \approx 3{,}38°.$$

Ответ: $\omega = 0{,}320$ рад/с; $\varphi = 3{,}38°$.

**<u>Пример 11.</u>** Определить импульс $p$ и кинетическую энергию $E_к$ электрона в мегаэлектронвольтах, движущегося со скоростью $0{,}9c$, где $c$ – скорость света в вакууме.

| *Дано*: | *Решение* |
|---|---|
| $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг,<br>$v = 0{,}9c$. | Так как скорость электрона близка к скорости света, то его необходимо рассматривать как релятивистскую частицу с импульсом |
| *Найти*:<br>$p$, $E_к$. | $$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$ |

Произведем вычисления:

$$p = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}}{\sqrt{1 - 0{,}81}} 0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^8 = 5{,}643 \cdot 10^{-22} \approx 5{,}64 \cdot 10^{-22} \text{ кг·м/с}.$$

Кинетическая энергия $E_к$ релятивисткой частицы определяется как разность между ее полной энергией $E$ и энергией покоя $E_0$:

$$E_к = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right).$$

Произведем вычисления:

$$E_к = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\left(3 \cdot 10^8\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}81}} - 1\right) =$$

$$= 1{,}061 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 0{,}6632 \text{ МэВ} \approx 0{,}663 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $p = 5{,}64 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с; $E_к = 0{,}663$ МэВ.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

### Варианты

Вариант контрольной работы № 1 выбирается из таблицы по двум последним цифрам номера зачетной книжки.

| Предпоследняя цифра номера зачетной книжки | Последняя цифра номера зачетной книжки | Порядковый номер задачи | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0, 1, 2, 3 | 1 | 101 | 112 | 123 | 134 | 145 | 156 |
| | 2 | 102 | 113 | 124 | 135 | 146 | 157 |
| | 3 | 103 | 114 | 125 | 136 | 147 | 158 |
| | 4 | 104 | 115 | 126 | 137 | 148 | 159 |
| | 5 | 105 | 116 | 127 | 138 | 149 | 160 |
| | 6 | 106 | 117 | 128 | 139 | 150 | 151 |
| | 7 | 107 | 118 | 129 | 140 | 141 | 152 |
| | 8 | 108 | 119 | 130 | 131 | 142 | 153 |
| | 9 | 109 | 120 | 121 | 132 | 143 | 154 |
| | 0 | 110 | 111 | 122 | 133 | 144 | 155 |
| 4, 5, 6 | 1 | 101 | 113 | 125 | 137 | 149 | 151 |
| | 2 | 102 | 114 | 126 | 138 | 150 | 152 |
| | 3 | 103 | 115 | 127 | 139 | 141 | 153 |
| | 4 | 104 | 116 | 128 | 140 | 142 | 154 |
| | 5 | 105 | 117 | 129 | 131 | 143 | 155 |
| | 6 | 106 | 118 | 130 | 132 | 144 | 156 |
| | 7 | 107 | 119 | 121 | 133 | 145 | 157 |
| | 8 | 108 | 120 | 122 | 134 | 146 | 158 |
| | 9 | 109 | 111 | 123 | 135 | 147 | 159 |
| | 0 | 110 | 112 | 124 | 136 | 148 | 160 |
| 7, 8, 9 | 1 | 101 | 114 | 127 | 140 | 143 | 156 |
| | 2 | 102 | 115 | 128 | 131 | 144 | 157 |
| | 3 | 103 | 116 | 129 | 132 | 145 | 158 |
| | 4 | 104 | 117 | 130 | 133 | 146 | 159 |
| | 5 | 105 | 118 | 121 | 134 | 147 | 160 |
| | 6 | 106 | 119 | 122 | 135 | 148 | 151 |
| | 7 | 107 | 120 | 123 | 136 | 149 | 152 |
| | 8 | 108 | 111 | 124 | 137 | 150 | 153 |
| | 9 | 109 | 112 | 125 | 138 | 141 | 154 |
| | 0 | 110 | 113 | 126 | 139 | 142 | 155 |

## Задачи

**101.** Точка движется по окружности радиусом $R = 1{,}20$ м. Уравнение движения точки имеет вид $\varphi = At + Bt^3$, где $A = 0{,}500$ рад/с, $B = 0{,}200$ рад/с$^3$. Определить тангенциальное $a_\tau$, нормальное $a_n$ и полное $a$ ускорение точки в момент времени $t = 4{,}00$ с.

**102.** Тело брошено со скоростью $\upsilon_0 = 20{,}0$ м/с под углом $\alpha = 30{,}0°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить для момента времени $t = 1{,}50$ с после начала движения нормальное $a_n$ и тангенциальное $a_\tau$ ускорение.

**103.** Определить скорость $\upsilon$ и полное ускорение $a$ точки в момент времени $t = 2{,}00$ с, если она движется по окружности радиусом $R = 1{,}00$ м согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где $A = 8{,}00$ рад/с, $B = -1{,}00$ рад/с$^3$.

**104.** Тело брошено горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 8{,}71$ м/с с башни, высота которой $H = 35{,}0$ м. Определить радиус кривизны траектории $R$ в момент времени $t = 0{,}50$ с после начала движения и дальность полета тела $S$ в момент падения его на землю.

**105.** Точка движется по окружности с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3{,}00$ рад/с. Определить радиус окружности, если к концу первой секунды после начала движения полное ускорение точки $a = 7{,}50$ м/с.

**106.** Начальная скорость камня, брошенного под углом к горизонту, $\upsilon_0 = 8{,}00$ м/с. Через $t_1 = 0{,}500$ с после начала движения его скорость $\upsilon_1 = 7{,}00$ м/с. Под каким углом $\alpha$ к горизонту брошен камень?

**107.** Точка движется по окружности радиусом $R = 8{,}00$ м. В момент времени $t_1$ нормальное ускорение точки $a_n = 4{,}00$ м/с$^2$, а вектор полного ускорения $\vec{a}$ образует с вектором нормального ускорения $\vec{a}_n$ угол $\alpha = 60{,}0°$. Найти скорость $\upsilon$ и тангенциальное ускорение $a_\tau$ точки в этот момент времени $t_1$.

**108.** Пуля выпущена с начальной скоростью $v_0 = 200$ м/с под углом $\alpha = 60{,}0°$ к горизонту. Определить наибольшую высоту подъема $H$ и дальность полета $S$ пули. Сопротивлением воздуха пренебречь.

**109.** Диск, радиус которого равен 30,0 см, вращается так, что точка, лежащая на его краю, имеет линейную скорость, меняющуюся по закону $v = At^2 + Bt^3$, где $A = 4{,}00$ м/с$^3$, $B = 12{,}0$ м/с$^4$. Определить величину и направление полного ускорения $\vec{a}$ этой точки и угловое ускорение $\varepsilon$ диска при $t = 0{,}100$ с.

**110.** Камень, брошенный горизонтально с высоты $h = 2{,}00$ м над землей, упал на расстоянии $\ell = 7{,}00$ м от места бросания (считая по горизонтали). Найти начальную $v_0$ и конечную $v$ скорости камня.

**111.** Брусок массой $m = 50{,}0$ кг начинает двигаться по горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы $F = 25{,}0$ Н. Найти коэффициент трения скольжения $\mu$, если через время $t = 5{,}00$ с после начала движения модуль скорости бруска $v = 0{,}500$ м/с.

**112.** К телу массой $m = 40{,}0$ кг, скользящему по горизонтальной плоскости, прикладывается сила $F = 60{,}0$ Н, направленная вниз под углом $\alpha = 30{,}0°$ к плоскости. Коэффициент трения скольжения $\mu = 0{,}100$. Определить модуль ускорения $a$, с которым будет двигаться тело.

**113.** Груз массой $m = 45{,}0$ кг перемещается по горизонтальной плоскости равномерно под действием силы $F = 294$ Н, направленной вверх под углом $\alpha = 30{,}0°$ к плоскости. Определить коэффициент трения скольжения $\mu$.

**114.** Два груза массой $m_1 = 0{,}980$ кг и $m_2 = 0{,}200$ кг связаны невесомой и нерастяжимой нитью и лежат на гладком столе. К левому грузу $m_1$ приложена сила $F_1 = 5{,}30$ Н, направленная в сторону от правого груза $m_2$. К правому грузу в противоположном направлении приложена сила $F_2 = 2{,}90$ Н. Найти силу натяжения нити $T$ при движении грузов (трением пренебречь).

**115.** Доска приставлена к горизонтальному столу так, что она составляет с плоскостью стола угол $\alpha = 60{,}0°$. Два груза массой $m_1 = m_2 = 1{,}00$ кг каждый соединены между собой невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный и невесомый блок. Грузы могут перемещаться, соответственно, вниз по доске и по столу. Найти силу натяжения нити $T$ и модуль ускорения $a$ системы, если коэффициент трения скольжения для обеих поверхностей $\mu = 0{,}300$.

**116.** Локомотив массой $m = 50{,}0$ т тянет за собой два вагона массой $m_1 = 40{,}0$ т каждый с постоянной скоростью $v$. Найти силу тяги $F$ двигателя локомотива и силы $F_1$ и $F_2$ в точках сцепления, действующие на каждый вагон, если коэффициент трения скольжения $\mu = 50{,}0 \cdot 10^{-3}$.

**117.** Тело массой $m = 10{,}0$ кг поднимают силой $F = 150$ Н по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30{,}0°$ с горизонтом. Сила, приложенная к телу, направлена горизонтально. С каким ускорением $a$ будет двигаться тело, если коэффициент трения скольжения $\mu = 0{,}300$?

**118.** Автомобиль движется прямолинейно вдоль оси $X$ так, что уравнение его движения имеет вид $x = 2{,}00\,t + 0{,}600\,t^2$ м, где $t$ – время, с. Найти силу тяги $F$ двигателя автомобиля, если сила трения скольжения $F_{тр} = 0{,}100\,mg$, а масса автомобиля $m = 3{,}00$ т.

**119.** Тело массой $m = 10{,}0$ кг поднимают силой $F = 139$ Н по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 40{,}0°$ с горизонтом. Эта сила приложена к телу под углом $\beta = 60{,}0°$ относительно горизонта и направлена вверх. С каким ускорением $a$ будет двигаться тело, если коэффициент трения скольжения $\mu = 0{,}300$?

**120.** Тело соскальзывает по гладкой наклонной плоскости $(\mu = 0)$ длиной $\ell = 10{,}0$ м за время $t = 2{,}00$ с. Какой угол $\alpha$ в градусах составляет данная плоскость с горизонтом?

**121.** При горизонтальном полете со скоростью $v = 250$ м/с снаряд массой $m = 8{,}00$ кг разорвался на две части. Большая часть массой $m_1 = 6{,}00$ кг получила скорость $u_1 = 400$ м/с в направлении полета снаряда. Определить модуль и направление скорости $\vec{u}_2$ меньшей части снаряда.

**122.** Шар массой $m_1 = 1{,}00$ кг движется со скоростью $v_1 = 2{,}00$ м/с и сталкивается с шаром массой $m_2 = 2{,}00$ кг, движущимся навстречу ему со скоростью $v_2 = 3{,}00$ м/с. Каковы скорости $u_1$

и $u_2$ шаров после удара? Удар считать абсолютно упругим прямым центральным.

**123.** Снаряд, летевший со скоростью $\upsilon = 400$ м/с, разорвался на два осколка. Меньший осколок, масса которого составляет 40 % от массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью $u_1 = 150$ м/с. Определить скорость $u_2$ большего осколка.

**124.** Шар массой $m_1 = 5{,}00$ кг движется со скоростью $\upsilon_1 = 1{,}00$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2 = 2{,}00$ кг. Найти скорости $u_1$ и $u_2$ шаров после удара. Удар считать абсолютно упругим прямым центральным.

**125.** В деревянный шар массой $m_1 = 8{,}00$ кг, подвешенный на нити длиной $\ell = 1{,}80$ м, попадает горизонтально летящая пуля массой $m_2 = 4{,}00$ г. С какой скоростью летела пуля, если нить с шаром и застрявшей в нем пулей отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 3{,}00°$?

**126.** Шар массой $m_1 = 1{,}00$ кг движется со скоростью $\upsilon_1 = 3{,}50$ м/с, догоняет шар массой $m_2 = 2{,}00$ кг, движущийся в том же направлении со скоростью $\upsilon_2 = 1{,}00$ м/с, и сталкивается с ним. Каковы скорости $u_1$ и $u_2$ шаров после удара? Удар считать абсолютно упругим прямым центральным.

**127.** Шар массой $m_1 = 3{,}00$ кг движется со скоростью $\upsilon_1 = 2{,}00$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2 = 5{,}00$ кг. Какая работа $A$ будет совершена при деформации шаров? Удар считать абсолютно неупругим прямым центральным.

**128.** Движущийся шар массой $m_1$ ударяется о неподвижный шар массой $m_2$. Каким должно быть отношение масс $m_1/m_2$, чтобы при центральном абсолютно упругом ударе скорость первого шара уменьшилась в 1,50 раза? Какой кинетической энергией $E'_{к2}$ будет при этом обладать второй шар, если кинетическая энергия первого шара до удара $E_{к1} = 1{,}00$ кДж?

**129.** Шар массой $m_1 = 5{,}00$ кг ударяется о неподвижный шар массой $m_2 = 2{,}50$ кг, который после удара стал обладать кинетической энергией $E'_{к2} = 5{,}00$ Дж. Считая удар центральным и абсолютно упругим, найти для первого шара кинетическую энергию до удара $E_{к1}$ и после удара $E'_{к1}$.

**130.** Движущийся шар массой $m_1 = 200$ г ударяется о неподвижный шар массой $m_2 = 400$ г. Считая удар абсолютно упругим и центральным, найти, какую часть кинетической энергии $E_{к1}$ первый шар передает второму.

**131.** Какую нужно совершить работу $A$, чтобы пружину жесткостью $k = 800$ кН/м, сжатую на $\Delta\ell_1 = 6{,}00$ см, дополнительно сжать на $\Delta\ell_2 = 8{,}00$ см?

**132.** Если на верхний конец вертикально расположенной спиральной пружины положить груз, то пружина сожмется на $\Delta\ell = 3{,}00$ мм. На сколько сожмет пружину тот же груз, упавший на конец пружины с высоты $h = 8{,}00$ см?

**133.** При сжатии невесомой пружины в пистолете была совершена работа $A = 0{,}120$ Дж. Затем из пружинного пистолета был произведен выстрел пулей массой $m_2 = 8{,}00$ г. Определить максимальную силу $F_{max}$, прикладываемую для сжатия пружины, и скорость $v$ пули при вылете ее из пистолета. Коэффициент жесткости пружины $k = 150$ Н/м.

**134.** Груз массой $m = 10{,}0$ кг перемещают с постоянным ускорением $a$ вверх по наклонной плоскости с углом у основания $\alpha = 45{,}0°$ на расстояние $S = 2{,}00$ м. Найти работу, совершаемую при перемещении груза, если время движения $t = 2{,}00$ с, а коэффициент трения скольжения $\mu = 0{,}100$. Перед началом движения груз находился в состоянии покоя.

**135.** Какую работу $A$ необходимо выполнить, чтобы телеграфный столб массой $m_1 = 200$ кг, к вершине которого прикреплена крестовина массой $m_2 = 30{,}0$ кг, перевести из горизонтального положения в вертикальное? Высота столба $h = 10{,}0$ м.

**136.** Тело массой $m = 2{,}00$ кг под действием силы $F = 50{,}0$ Н поднимается по наклонной плоскости с углом у основания $\alpha = 30{,}0°$ на высоту $h = 1{,}00$ м. Направление силы $F$ совпадает с направлением движения тела. Коэффициент трения тела скольжения $\mu = 0{,}200$. Определить величину совершаемой работы $A$. Найти скорость $v$ тела в момент окончания подъема.

**137.** Тело массой $m = 5{,}00$ кг поднимают вертикально вверх на высоту $h = 10{,}0$ м под действием силы $F = 120$ Н. Найти конечную скорость $v$ тела, используя закон сохранения энергии.

**138.** На тонкой невесомой нити длиной $\ell = 1{,}00$ м висит груз массой $m = 2{,}00$ кг. Какую начальную скорость $v_0$ нужно сообщить грузу, чтобы он смог сделать полный оборот?

**139.** На тонком невесомом стержне длиной $\ell = 1{,}00$ м висит груз массой $m = 2{,}00$ кг. Какую начальную скорость $v_0$ нужно сообщить грузу, чтобы он смог сделать полный оборот?

**140.** Автомобиль, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, развивает скорость $v_2 = 54{,}0$ км/ч. Найти отношение работы $A_1$, совершаемой двигателем автомобиля при разгоне из состояния покоя до $v_1 = 27{,}0$ км/ч, к работе $A_2$, затраченной на увеличение скорости от $v_1$ до $v_2$. Силами трения и сопротивления пренебречь.

**141.** Тонкостенный цилиндр, масса которого $m = 12{,}0$ кг, а диаметр основания $d = 30{,}0$ см, вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4{,}00$ рад, $B = -2{,}00$ рад/с, $C = 0{,}20$ рад/с$^3$. Определить действующий на цилиндр момент сил $M$ в момент времени $t = 3{,}00$ с.

**142.** На обод маховика (сплошного диска) диаметром $d = 60{,}0$ см намотан невесомый и нерастяжимый шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 2{,}00$ кг. Груз, опускаясь, раскручивает маховик. Определить момент инерции $I$ маховика, если он, вращаясь равноускоренно, за время $t = 3{,}00$ с приобрел угловую скорость $\omega = 9{,}00$ рад/с.

**143.** Невесомая и нерастяжимая нить с привязанными к ее концам грузами массой $m_1 = 50{,}0$ г и $m_2 = 60{,}0$ г, соответственно, перекинута через блок диаметром $d = 4{,}00$ см. Определить момент инерции $I$ блока, если он получил угловое ускорение $\varepsilon = 1{,}50$ рад/с$^2$.

**144.** Стержень вращается вокруг оси, проходящей через его середину, согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где $A = 2{,}00$ рад, $B = 0{,}200$ рад/с$^3$. Определить вращающий момент $M$, действующий на стержень через время $t = 2{,}00$ с после начала вращения, если момент инерции стержня $I = 0{,}048$ кг · м$^2$.

**145.** Определить момент силы $M$, который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой $n = 12{,}0\ \text{с}^{-1}$, чтобы он остановился в течение времени $t = 8{,}00$ с. Диаметр блока $d = 30{,}0$ см. Массу блока $m = 6{,}00$ кг считать равномерно распределенной по ободу.

**146.** Блок, имеющий форму диска, массой $m = 0{,}400$ кг вращается под действием силы натяжения невесомой и нерастяжимой нити, к концам которой подвешены грузы массой $m_1 = 0{,}300$ кг и $m_2 = 0{,}700$ кг. Определить силы $T_1$ и $T_2$ натяжения нити по обе стороны блока.

**147.** Однородный стержень длиной $\ell = 1{,}00$ м и массой $m = 0{,}500$ кг вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. С каким угловым ускорением ε вращается стержень, если вращающий момент $M = 0{,}500$ Н · м, а момент силы трения $M_{\text{тр}} = 5{,}00 \cdot 10^{-3}$ Н · м?

**148.** Шар массой $m = 10{,}0$ кг и радиусом $R = 20{,}0$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 5{,}00$ рад, $B = 4{,}00$ рад/с$^2$, $C = -0{,}100$ рад/с$^3$. По какому закону меняется момент сил $M$, действующих на шар? Какова величина момента сил $M$ в момент времени $t = 2{,}00$ с?

**149.** По касательной к шкиву маховика в виде диска диаметром $d = 75{,}0$ см и массой $m = 40{,}0$ кг приложена сила $F = 1{,}00$ кН. Определить угловое ускорение ε и частоту вращения $n$ маховика через время $t = 10{,}0$ с после начала движения, если радиус шкива $R = 12{,}0$ см. Силой трения пренебречь.

**150.** Однородный диск радиусом $R = 20{,}0$ см и массой $m = 5{,}00$ кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости ω от времени задается уравнением $\omega = A + Bt$, где $A = 8{,}00$ рад/с, $B = 8{,}00$ рад/с$^2$. Найти величину касательной силы, приложенной к ободу диска, угловое ускорение ε и частоту вращения $n$ диска через $t = 1{,}00$ с после начала движения.

**151.** Однородный тонкий стержень массой $m_1 = 0{,}200$ кг и длиной $\ell = 1{,}00$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс.

В верхний конец стержня попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси вращения стержня) со скоростью $\upsilon = 10{,}0$ м/с, и прилипает к стержню. Масса шарика $m_2 = 10{,}0$ г. Определить угловую скорость ω системы “стержень–шарик” сразу после взаимодействия.

**152.** Карандаш, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую ω и линейную $\upsilon$ скорости будут иметь в конце падения: 1) середина карандаша; 2) его верхний конец? Длина карандаша $\ell = 15{,}0$ см.

**153.** На краю платформы в виде диска, вращающегося по инерции вокруг вертикальной оси с частотой $n_1 = 8{,}00$ мин$^{-1}$, стоит человек массой $m_1 = 70{,}0$ кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой $n_2 = 10{,}0$ мин$^{-1}$. Определить массу $m_2$ платформы. Момент инерции $I$ человека рассчитывать как для материальной точки.

**154.** Однородный стержень длиной $\ell = 1{,}00$ м подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. На какой угол φ необходимо отклонить стержень, чтобы нижний конец стержня при прохождении положения равновесия имел скорость $\upsilon = 5{,}00$ м/с?

**155.** На краю неподвижной платформы в виде диска диаметром $d = 2{,}00$ м и массой $m_1 = 200$ кг стоит человек массой $m_2 = 60{,}0$ кг. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться платформа, если человек поймает летящий на него мяч массой $m_3 = 0{,}500$ кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии $R = 1{,}00$ м от оси платформы. Скорость мяча $\upsilon = 5{,}00$ м/с. Момент инерции $I$ человека рассчитывать как для материальной точки.

**156.** Маховик в виде диска массой $m = 80{,}0$ кг и радиусом $R = 30{,}0$ см находится в состоянии покоя. Какую работу $A$ нужно совершить, чтобы сообщить маховику частоту $n = 24{,}0$ с$^{-1}$? Какую работу $A_1$ пришлось бы совершить, если бы при той же массе $m$ диск имел меньшую толщину, но вдвое больший радиус $R_1 = 2R$?

**157.** В центре вращающейся горизонтальной платформы массой $m = 80{,}0$ кг и радиусом $R = 1{,}00$ м стоит человек и держит в расставленных руках гири. Во сколько раз увеличится кинетическая энергия платформы с человеком, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $I_1 = 2{,}94$ кг · м$^2$ до $I_2 = 0{,}980$ кг · м$^2$? Считать платформу однородным диском.

**158.** Определить линейную скорость $v$ центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой $h = 1{,}00$ м.

**159.** Горизонтальная платформа массой $m = 80{,}0$ кг и радиусом $R = 1{,}00$ м вращается с частотой $n_1 = 20{,}0$ об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой $n_2$ будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $I_1 = 2{,}94$ кг · м$^2$ до $I_2 = 0{,}980$ кг · м$^2$? Считать платформу однородным диском.

**160.** Шар и сплошной цилиндр, двигаясь с одинаковой скоростью $v$, вкатываются вверх по наклонной плоскости. Какое из тел поднимается выше? Найти отношение высот подъема.

# ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

## Молекулярная физика

Уравнение Клапейрона–Менделеева (уравнение состояния идеального газа):

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \qquad pV = NkT,$$

где $p$ – давление; $V$ – объем; $m$ – масса; $\mu$ – молярная масса; $R$ – универсальная газовая постоянная, $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К); $T$ – термодинамическая температура газа; $N$ – число молекул; $k$ – постоянная Больцмана, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Уравнение Клапейрона:

$$\frac{pV}{T} = \text{const}.$$

Уравнения обратимых (квазистатических) процессов:

1) изобарный процесс ($p = \text{const}$, $m = \text{const}$):

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \qquad \text{или} \qquad \frac{V}{T} = \text{const};$$

2) изохорный процесс ($V = \text{const}$, $m = \text{const}$):

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \qquad \text{или} \qquad \frac{p}{T} = \text{const};$$

3) изотермический процесс ($T = \text{const}$, $m = \text{const}$):

$$p_1V_1 = p_2V_2, \qquad \text{или} \qquad pV = \text{const};$$

4) адиабатный процесс ($Q = 0$, $m = \text{const}$):

– в координатах $pV$

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma}, \qquad \text{или} \qquad pV^{\gamma} = \text{const};$$

– в координатах $TV$

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}, \qquad \text{или} \qquad TV^{\gamma-1} = \text{const};$$

– в координатах $Tp$

$$T_1^{\gamma} p_1^{1-\gamma} = T_2^{\gamma} p_2^{1-\gamma}, \qquad \text{или} \qquad T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma$ – коэффициент Пуассона (показатель адиабаты).

<u>Закон Дальтона для смеси идеальных газов</u>. Давление смеси $p_{\text{см}}$ идеальных газов равно сумме парциальных $p_i$ давлений:

$$p_{\text{см}} = \sum_{i=1}^{N} p_i ,$$

где $N$ – число компонентов смеси.

Молярная масса смеси

$$\mu_{\text{см}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} \nu_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\mu_i}},$$

где $N$ – число компонентов смеси; $m_i$ – масса $i$-го компонента смеси; $\nu_i$ – число молей $i$-го компонента смеси; $\mu_i$ – молярная масса $i$-го компонента смеси.

<u>Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа:</u>

$$pV = \frac{2}{3} E_{\text{к}} ,$$

где $E_{\text{к}}$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул идеального газа, $E_{\text{к}} = N\langle \varepsilon_0 \rangle$, здесь $N$ – число молекул в объеме газа; $\langle \varepsilon_0 \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа.

Зависимость давления идеального газа от концентрации и температуры:

$$p = nkT ,$$

где $n$ – концентрация молекул; $k$ – постоянная Больцмана, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

## Статистическая физика

Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по проекциям скорости:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}}\ \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}\right),$$

где $v_x$ – проекция скорости молекулы на ось $X$; $m_0$ – масса одной молекулы.

Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по модулям скорости:

$$F(v) = 4\pi\sqrt{\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^3}\, v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right),$$

где $v$ – модуль скорости молекулы.

Наиболее вероятная скорость молекул

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$$

Средняя скорость молекул

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}.$$

Средняя квадратичная скорость молекул

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Вероятность того, что модуль скорости заключен в бесконечно малом интервале от $v$ до $v + \mathrm{d}v$,

$$\mathrm{d}P(v) = F(v)\,\mathrm{d}v = 4\pi\sqrt{\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^3}\, v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)\mathrm{d}v.$$

Число молекул, скорости которых заключены в бесконечно малом интервале от $v$ до $v + \mathrm{d}v$,

$$\mathrm{d}N = N\mathrm{d}P(v) = NF(v)\,\mathrm{d}v,$$

где $N$ – общее число молекул.

Число молекул, скорости которых заключены в интервале от $v_1$ до $v_2$,

$$\Delta N = \int_{v_1}^{v_2} N\,\mathrm{d}P(v) = \int_{v_1}^{v_2} NF(v)\,\mathrm{d}v.$$

Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по энергиям:

$$F(E_{\text{к}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\left(\frac{1}{kT}\right)^3}\sqrt{E_{\text{к}}}\exp\left(-\frac{E_{\text{к}}}{kT}\right),$$

где $E_{\text{к}}$ – кинетическая энергия.

Распределение Больцмана для частиц во внешнем потенциальном поле:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{п}}}{kT}\right),$$

где $n$ – концентрация частиц, потенциальная энергия которых $E_{\text{п}}$; $n_0$ – концентрация частиц с нулевой потенциальной энергией; $E_{\text{п}}$ – потенциальная энергия частицы во внешнем потенциальном поле.

Барометрическая формула ($T = \text{const}$):

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right),$$

где $p$ – давление идеального газа на высоте $h$; $p_0$ – давление на высоте $h = 0$; $\mu$ – молярная масса; $g$ – ускорение свободного падения; $m_0$ – масса одной молекулы.

Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой идеального газа за 1 с,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d_{эф}^{2} n \langle v \rangle,$$

где $d_{эф}$ – эффективный диаметр молекулы; $n$ – концентрация молекул; $\langle v \rangle$ – средняя скорость молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle \ell \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\, d_{эф}^{2}\, n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi\, d_{эф}^{2}\, p},$$

где $k$ – постоянная Больцмана; $T$ – термодинамическая температура; $p$ – давление.

Выражения для коэффициентов диффузии $D$, динамической вязкости $\eta$, теплопроводности $\lambda$ идеального газа, полученные в молекулярно-кинетической теории:

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle \ell \rangle; \qquad \eta = \frac{1}{3}\rho \langle v \rangle \langle \ell \rangle; \qquad \lambda = \frac{1}{3} c_{уд\,V}\, \rho \langle v \rangle \langle \ell \rangle,$$

где $c_{удV}$ – удельная теплоемкость при постоянном объеме; $\rho$ – плотность; $\langle v \rangle$ – средняя скорость молекул; $\langle \ell \rangle$ – средняя длина свободного пробега.

Коэффициент кинематической вязкости

$$\nu = \frac{\eta}{\rho},$$

где $\rho$ – плотность вещества.

## Термодинамика

Закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где $\langle \varepsilon \rangle$ – средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа; $i$ – сумма поступательного, вращательного и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы, $i = i_{пост} + i_{вр} + 2i_{кол}$.

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = N\langle\varepsilon\rangle = N\frac{i}{2}kT = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{\mu}c_{\mu V}T,$$

где $N$ – число молекул; $c_{\mu V}$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{\mu}c_{\mu V}\,\mathrm{d}T, \qquad \Delta U_{1-2} = U_2 - U_1 = \frac{m}{\mu}c_{\mu V}(T_2 - T_1),$$

где индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состояниям.

Полная работа расширения

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V.$$

Работа расширения, совершаемая идеальным газом в изобарном процессе,

$$A_{1-2} = p(V_2 - V_1).$$

Работа расширения, совершаемая идеальным газом в изохорном процессе,

$$A_{1-2} = 0.$$

Работа расширения, совершаемая идеальным газом в изотермическом процессе,

$$A_{1-2} = \frac{m}{\mu}RT\,\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu}RT\,\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Работа расширения, совершаемая идеальным газом в адиабатном процессе,

$$A_{1-2} = -\Delta U_{1-2};$$

$$A_{1-2} = -\frac{m}{\mu}c_{\mu V}(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}c_{\mu V}(T_1 - T_2).$$

Работа расширения, совершаемая идеальным газом в политропном процессе,

$$A_{1-2} = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right),$$

где $n$ – показатель политропы.

Первое начало термодинамики

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A, \qquad Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2}.$$

Теплота $\delta Q$ положительная, если она сообщается системе, и отрицательная, если забирается от нее. Работа $\delta A$, производимая системой над внешними телами, имеет положительный знак, а работа, производимая внешними силами над системой, имеет отрицательный знак.

Теплоемкость (полная теплоемкость)

$$C = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}, \qquad C = \frac{Q}{\Delta T}.$$

Удельная теплоемкость (теплоемкость единицы массы вещества)

$$c_{\text{уд}} = \frac{1}{m}\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}, \qquad c_{\text{уд}} = \frac{1}{m}\frac{Q}{\Delta T},$$

где $m$ – масса вещества.

Молярная теплоемкость (теплоемкость одного моля вещества)

$$c_{\mu} = \frac{1}{\nu}\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}, \qquad c_{\mu} = \frac{1}{\nu}\frac{Q}{\Delta T},$$

где $\nu$ – число молей.

Полная $C$, удельная $c_{\text{уд}}$ и молярная $c_{\mu}$ теплоемкости связаны между собой следующими соотношениями:

$$C = c_{\text{уд}}\, m = c_{\mu}\, \nu, \qquad c_{\mu} = \mu\, c_{\text{уд}}.$$

Расчетное соотношение для молярной теплоемкости идеального газа при постоянном объеме:

$$c_{\mu V} = \frac{i}{2} R.$$

Расчетное соотношение для молярной теплоемкости идеального газа при постоянном давлении:

$$c_{\mu p} = \frac{i+2}{2} R .$$

Уравнение Майера для идеального газа:

$$c_{\mu p} = c_{\mu V} + R .$$

Коэффициент Пуассона (показатель адиабаты) для идеального газа

$$\gamma = \frac{c_{\mu p}}{c_{\mu V}} .$$

Связь коэффициента Пуассона с числом степеней свободы:

$$\gamma = \frac{i+2}{i} .$$

Молярная теплоемкость идеального газа в политропном процессе

$$c_{\mu n} = \frac{n-\gamma}{(\gamma-1)(n-1)} R ,$$

где $n$ – показатель политропы; $\gamma$ – коэффициент Пуассона.

Показатель политропы для идеального газа

$$n = \frac{c_{\mu n} - c_{\mu p}}{c_{\mu n} - c_{\mu V}} .$$

Работа, совершенная рабочим телом, в прямом цикле (в тепловой машине)

$$A_{\text{ц}} = Q_{\text{н}} + Q_{\text{х}} = Q_{\text{н}} - |Q_{\text{х}}| ,$$

где $Q_{\text{н}}$ – теплота, полученная рабочим телом от нагревателя; $Q_{\text{х}}$ – теплота, отданная рабочим телом холодильнику.

Термический КПД для прямого цикла

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q_{\text{н}} - |Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}} .$$

Холодильный коэффициент для обратного цикла

$$\varepsilon = \frac{Q_х}{|A_ц|} = \frac{Q_х}{|Q_н| - Q_х},$$

где $Q_х$ – теплота, отбираемая от охлаждаемого тела; $Q_н$ – теплота, передаваемая окружающей среде (нагреваемому телу).

Термический КПД для прямого цикла Карно

$$\eta_К = \frac{T_н - T_х}{T_н} = 1 - \frac{T_х}{T_н},$$

где $T_н$ – температура нагревателя; $T_х$ – температура холодильника.

Холодильный коэффициент для обратного цикла Карно

$$\varepsilon_К = \frac{T_х}{T_н - T_х},$$

где $T_х$ – температура охлаждаемого тела; $T_н$ – температура окружающей среды (нагреваемого тела).

Изменение энтропии идеального газа в произвольном обратимом (квазистатическом) процессе:

– в координатах $TV$

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} c_{\mu V} \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1};$$

– в координатах $pV$

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} c_{\mu V} \ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{\mu} c_{\mu p} \ln\frac{V_2}{V_1};$$

– в координатах $Tp$

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} c_{\mu p} \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln\frac{p_1}{p_2},$$

где индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состояниям.

Изменение энтропии идеального газа в обратимом (квазистатическом) адиабатном процессе ($Q = 0,\ m = \text{const}$);

$$\mathrm{d}S = 0, \quad \text{или} \quad \Delta S = 0, \quad \text{т. е.} \quad S = \text{const}.$$

Изменение энтропии идеального газа в обратимом (квазистатическом) изотермическом процессе ($T = \text{const}$, $m = \text{const}$):

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Изменение энтропии идеального газа в обратимом (квазистатическом) изохорном процессе ($V = \text{const}$, $m = \text{const}$):

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} c_{\mu V} \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{\mu} c_{\mu V} \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Изменение энтропии идеального газа в обратимом (квазистатическом) изобарном процессе ($p = \text{const}$, $m = \text{const}$):

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} c_{\mu p} \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} c_{\mu p} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Изменение энтропии идеального газа в обратимом (квазистатическом) политропном процессе ($C = \text{const}$, $m = \text{const}$):

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} c_{\mu n} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Изменение энтропии при нагревании (охлаждении) конденсированного вещества:

$$S_2 - S_1 = m\, c_{\text{уд}} \ln \frac{T_2}{T_1},$$

где $m$ – масса тела; $c_{\text{уд}}$ – среднее значение удельной теплоемкости в интервале температур от $T_1$ до $T_2$.

Изменение энтропии при плавлении (затвердевании) вещества:

$$\Delta S = \frac{m\lambda}{T_{\text{пл}}},$$

где $\Delta S > 0$ при переходе из твердой фазы в жидкую; $\lambda$ – удельная теплота плавления.

Изменение энтропии при испарении (конденсации) вещества:

$$\Delta S = \frac{mr}{T_{\text{кип}}}, \qquad \Delta S = \frac{mr}{T_{\text{исп}}},$$

где $\Delta S > 0$ при переходе из жидкой фазы в газообразную; $r$ – удельная теплота испарения.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

**Пример 1.** Определить число $N$ молекул, содержащихся в $1{,}00$ мм$^3$ воды, и массу $m_0$ одной молекулы воды. Считая условно, что молекулы воды имеют вид шариков, соприкасающихся друг с другом, найти эффективный диаметр $d$ молекулы.

*Дано*:

$H_2O$:

$V = 1{,}00$ мм$^3 = 1{,}00 \cdot 10^{-9}$ м$^3$,

$\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

*Найти*:

$N$, $m_0$, $d$.

*Решение*

Число молекул, содержащихся в некоторой системе массой $m$,

$$N = \nu N_A,$$

где $\nu$ – количество вещества; $N_A$ – постоянная Авогадро.

Так как $\nu = \dfrac{m}{\mu}$, где $\mu$ – молярная масса, то

$$N = \frac{m}{\mu} N_A. \tag{1.1}$$

Выразив в формуле (1.1) массу через произведение плотности $\rho$ на объем $V$, получим

$$N = \frac{\rho V}{\mu} N_A. \tag{1.2}$$

Произведем вычисления, учитывая, что плотность воды $\rho = 1000$ кг/м$^3$:

$$N = \frac{1000 \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-9}}{18 \cdot 10^{-3}} 6{,}02 \cdot 10^{23} = 3{,}34 \cdot 10^{19} \text{ молекул}.$$

Массу одной молекулы можно найти по формуле

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A}. \tag{1.3}$$

Подставив в выражение (1.3) значения $\mu$ и $N_A$, найдем массу молекулы воды:

$$m_0 = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 2{,}99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Если молекулы воды плотно прилегают друг к другу, то можно считать, что на каждую молекулу приходится объем (кубическая ячейка) $V_0 = d^3$, где $d$ – эффективный диаметр молекулы. Отсюда

$$d = \sqrt[3]{V_0}. \qquad (1.4)$$

Объем одной молекулы найдем, разделив молярный объем $V_\mu$ на число молекул в моле, т. е. на $N_A$:

$$V_0 = \frac{V_\mu}{N_A}. \qquad (1.5)$$

Молярный объем (объем одного моля вещества) можно найти, используя один из двух следующих способов:

$$V_\mu = \frac{V}{\nu}; \qquad V_\mu = \frac{\mu}{\rho}. \qquad (1.6)$$

Подставим выражение (1.5) в формулу (1.4):

$$d = \sqrt[3]{\frac{V_\mu}{N_A}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}},$$

где $V_\mu = \mu/\rho$.

Произведем вычисления:

$$d = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 10^{-3}}{1{,}00 \cdot 10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}} = 0{,}310 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 0{,}310 \text{ нм}.$$

Ответ: $N = 3{,}34 \cdot 10^{19}$; $m_0 = 2{,}99 \cdot 10^{-26}$ кг; $d = 0{,}310$ нм.

**Пример 2.** Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях равна $480 \text{ м/с}$. Сколько молекул содержит 1,00 г этого газа?

| *Дано*: | *Решение* |
|---|---|
| $\upsilon_{кв} = 480$ м/с, $p_0 = 101$ кПа $= 1{,}01 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К, $m = 1{,}00$ г $= 1{,}00 \cdot 10^{-3}$ кг. | Нормальные условия – такие физические условия, при которых давление $p = 101325$ Па (760 мм рт. ст.), температура $T = 273{,}15$ К ($0\ ^{\circ}$С). |
| *Найти*: $N$. | Количество молекул в газе массой $m$ $$N = \frac{m}{m_0}, \qquad (2.1)$$ где $m_0$ – масса одной молекулы. |

Средняя квадратичная скорость молекул идеального газа

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3kT_0}{m_0}}, \qquad (2.2)$$

где $k$ – постоянная Больцмана.

Из формулы (2.2) получаем выражение для массы одной молекулы:

$$m_0 = \frac{3kT_0}{\upsilon_{кв}^2}. \qquad (2.3)$$

Подставим выражение (2.3) в формулу (2.1):

$$N = \frac{m\ \upsilon_{кв}^2}{3kT_0}.$$

Произведем вычисления:

$$N = \frac{1{,}00 \cdot 10^{-3} \cdot 480^2}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} = 2{,}04 \cdot 10^{22} \text{ молекул.}$$

Ответ: $N = 2{,}04 \cdot 10^{22}$.

**Пример 3.** В баллоне объемом 10,0 л находится гелий (He) под давлением 1,00 МПа и при температуре 300 К. После того как из баллона было взято 10,0 г гелия, температура в баллоне понизилась до 290 К. Определить давление гелия, оставшегося в баллоне.

| *Дано*: | *Решение* |
|---|---|
| He:<br>$V = 10{,}0\ \text{л} = 10{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3$,<br>$p_1 = 1{,}00\ \text{МПа} = 1{,}00 \cdot 10^6\ \text{Па}$,<br>$T_1 = 300\ \text{К}$,<br>$m = 10{,}0\ \text{г} = 10{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}$,<br>$T_2 = 290\ \text{К}$,<br>$\mu = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}$. | Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для начального и конечного состояний газа:<br>$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1; \qquad (3.1)$$<br>$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2. \qquad (3.2)$$ |
| *Найти*:<br>$p_2$. | |

Из уравнения (3.1) выразим массу газа в начальном состоянии:

$$m_1 = \frac{p_1 V \mu}{R T_1}. \qquad (3.3)$$

Тогда масса оставшегося в баллоне газа

$$m_2 = m_1 - m. \qquad (3.4)$$

Из уравнения (3.2) найдем давление газа в конечном состоянии:

$$p_2 = m_2 \frac{R T_2}{\mu V}. \qquad (3.5)$$

Подставив выражение (3.3) для массы $m_1$ в формулу (3.4), а затем выражение (3.4) для $m_2$ в формулу (3.5), получим

$$p_2 = \left( \frac{\mu p_1 V}{R T_1} - m \right) \frac{R T_2}{\mu V} = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{\mu} \frac{R T_2}{V}. \qquad (3.6)$$

Произведем вычисления по формуле (3.6):

$$p_2 = \frac{290}{300} 1{,}00 \cdot 10^6 - \frac{10{,}0 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} \frac{8{,}31 \cdot 290}{10{,}0 \cdot 10^{-3}} = 3{,}64 \cdot 10^5\ \text{Па} = 0{,}364\ \text{МПа}.$$

Ответ: $p_2 = 0{,}364\ \text{МПа}$.

**Пример 4.** Баллон содержит 80,0 г кислорода $(O_2)$ и 320 г аргона $(Ar)$. Давление смеси 1,00 МПа, а температура 300 К. Принимая данные газы за идеальные, определить объем баллона.

*Дано*:

$O_2$:

$m_1 = 80{,}0\,г = 80{,}0 \cdot 10^{-3}$ кг,

$\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

$Ar$:

$m_2 = 320\,г = 320 \cdot 10^{-3}$ кг,

$\mu_2 = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,

$p_{см} = 1{,}00\,МПа = 1{,}00 \cdot 10^6$ Па,

$T = 300\,К$.

*Найти*:

$V$.

*Решение*

По уравнению Клапейрона–Менделеева парциальные давления кислорода $p_1$ и аргона $p_2$ выражаются формулами

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu_1 V} RT; \quad p_2 = \frac{m_2}{\mu_2 V} RT. \qquad (4.1)$$

По закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений газов, входящих в состав смеси:

$$p_{см} = p_1 + p_2. \qquad (4.2)$$

Подставив выражение (4.1) в закон (4.2), получим

$$p_{см} = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V}.$$

Откуда объем баллона

$$V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{p_{см}}.$$

Произведем вычисления:

$$V = \left(\frac{80{,}0 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} + \frac{320 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3}}\right)\frac{8{,}31 \cdot 300}{1{,}00 \cdot 10^{6}} = 0{,}0262\,м^3 = 26{,}2\,л.$$

Ответ: $V = 26{,}2\,л$.

**Пример 5.** Найти среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_{вращ} \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода $(O_2)$ при тем пературе 350 К, а также кинетическую энергию $W_{вр}$ вращательного движения всех молекул кислорода массой 4,00 г.

| *Дано*: | *Решение* |
|---|---|
| $O_2$: <br> $T = 350\,К$, <br> $m = 4{,}00\,г = 4{,}00 \cdot 10^{-3}$ кг, <br> $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. | Двухатомная молекула кислорода обладает двумя степенями свободы вращательного движения $i_{вр} = 2$, поэтому, согласно закону Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы, средняя энергия вращательного движения |
| *Найти*: <br> $\langle \varepsilon_{вр} \rangle$, $W_{вр}$. | |

$$\langle \varepsilon_{вр} \rangle = \frac{i_{вр}}{2} k\,T = k\,T\,, \tag{5.1}$$

где $k$ – постоянная Больцмана; $T$ – термодинамическая температура газа.

Кинетическая энергия вращательного движения всех молекул

$$W_{вр} = \langle \varepsilon_{вр} \rangle\, N = N\,k\,T\,. \tag{5.2}$$

Число всех молекул газа

$$N = \nu\, N_A = \frac{m}{\mu}\, N_A, \tag{5.3}$$

где $\nu$ – количество вещества; $N_A$ – постоянная Авогадро.

Подставив выражение (5.3) в формулу (5.2), получим

$$W_{вр} = \frac{m}{\mu}\, N_A\, k\,T\,. \tag{5.4}$$

Произведем вычисления:

$$\langle \varepsilon_{вр} \rangle = kT = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 = 4{,}83 \cdot 10^{-21}\ \text{Дж};$$

$$W_{вр} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}}\ 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 = 364\ \text{Дж}.$$

Ответ: $\langle \varepsilon_{вр} \rangle = 4{,}83 \cdot 10^{-21}$ Дж; $W_{вр} = 364$ Дж.

**Пример 6.** Плотность некоторого газа $0{,}0820\ \text{кг}/\text{м}^3$ при давлении $100\ \text{кПа}$ и температуре $17\,°\text{C}$. Найти среднюю квадратичную скорость $v_{\text{кв}}$ молекул газа. Какова молярная масса $\mu$ этого газа?

*Дано*:

$\rho = 0{,}0820\ \text{кг}/\text{м}^3$,

$p = 100\ \text{кПа} = 100 \cdot 10^3\ \text{Па}$,

$t = 17\ °\text{C}$, $T = 290\ \text{К}$.

*Найти*:

$v_{\text{кв}}$, $\mu$.

*Решение*

Средняя квадратичная скорость молекул идеального газа

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \qquad (6.1)$$

где $k$ – постоянная Больцмана; $T$ – термодинамическая температура; $m_0$ – масса одной молекулы.

Плотность газа равна произведению концентрации на массу одной молекулы:

$$\rho = n\,m_0. \qquad (6.2)$$

Давление идеального газа связано с концентрацией и температурой соотношением

$$p = n\,k\,T. \qquad (6.3)$$

Из формул (6.2) и (6.3) выразим массу молекулы и температуру:

$$m_0 = \frac{\rho}{n}; \qquad T = \frac{p}{nk}.$$

Подставив полученные выражения в формулу (6.1), определим среднюю квадратичную скорость:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}. \qquad (6.4)$$

Молярная масса может быть определена как произведение массы молекулы на число Авогадро:

$$\mu = m_0\,N_A. \qquad (6.5)$$

Найдем формулу для массы одной молекулы из выражения (6.1) и подставим ее в уравнение (6.5):

$$m_0 = \frac{3kT}{v_{\text{кв}}^2};$$

$$\mu = \frac{3kT}{v_{\text{кв}}^2} N_A = \frac{3RT}{v_{\text{кв}}^2}. \tag{6.6}$$

Произведем вычисления по формулам (6.4) и (6.6):

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 100 \cdot 10^3}{0{,}0820}} = 1913 \text{ м/с} \approx 1910 \text{ м/с};$$

$$\mu = \frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 290}{1913^2} = 1{,}98 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Ответ: $v_{\text{кв}} = 1910$ м/с; $\mu = 1{,}98 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

**Пример 7.** Вычислить удельную теплоемкость при постоянном объеме $c_{\text{уд}\,V}$ и постоянном давлении $c_{\text{уд}\,p}$ неона $(\text{Ne})$ и водорода $(\text{H}_2)$, принимая эти газы за идеальные.

*Дано*:

Ne:
$\mu_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,
$i_1 = 3$.
$\text{H}_2$:
$\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,
$i_2 = 5$.

*Найти*:

$c_{\text{уд}\,V1}$, $c_{\text{уд}\,p1}$.
$c_{\text{уд}\,V2}$, $c_{\text{уд}\,p2}$.

*Решение*

Удельные теплоемкости идеальных газов выражаются формулами

$$c_{\text{уд}\,V} = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}; \tag{7.1}$$

$$c_{\text{уд}\,p} = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}, \tag{7.2}$$

где $i$ – число степеней свободы молекулы газа; $\mu$ – молярная масса.

Произведем вычисления:

– для неона

$$c_{\text{уд}\,V1} = \frac{3}{2}\frac{8{,}31}{20 \cdot 10^{-3}} = 624 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)};$$

$$c_{\text{уд } p1} = \frac{3+2}{2}\frac{8{,}31}{20\cdot 10^{-3}} = 1{,}04\cdot 10^{3}\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) = 1{,}04\ \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К});$$

– для водорода

$$c_{\text{уд } V2} = \frac{5}{2}\frac{8{,}31}{2\cdot 10^{-3}} = 10{,}4\cdot 10^{3}\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) = 10{,}4\ \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К});$$

$$c_{\text{уд } p2} = \frac{5+2}{2}\frac{8{,}31}{2\cdot 10^{-3}} = 14{,}6\cdot 10^{3}\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) = 14{,}6\ \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К}).$$

Ответ: $c_{\text{уд } V1} = 624\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; $c_{\text{уд } p1} = 1{,}04\ \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; $c_{\text{уд } V2} = 10{,}4\ \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; $c_{\text{уд } p2} = 14{,}6\ \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$.

**Пример 8.** Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме $c_{\text{уд } V}$ и постоянном давлении $c_{\text{уд } p}$ смеси неона $(\text{Ne})$ и водорода $(\text{H}_2)$, если массовые доли неона и водорода составляют 80 % и 20 %. Значения удельных теплоемкостей взять из примера 7.

*Дано*:

$\text{Ne}$:

$c_{\text{уд } V1} = 624\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$,

$c_{\text{уд } p1} = 1{,}04\cdot 10^{3}\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$,

$w_1 = 80\ \% = 0{,}8$.

$\text{H}_2$:

$c_{\text{уд } V2} = 10{,}4\cdot 10^{3}\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$,

$c_{\text{уд } p2} = 14{,}6\cdot 10^{3}\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$,

$w_2 = 20\ \% = 0{,}2$.

*Найти*:

$c_{\text{уд } V}$, $c_{\text{уд } p}$.

*Решение*

Удельную теплоемкость $c_{\text{уд } V}$ смеси при постоянном объеме найдем следующим образом. Теплоту, необходимую для нагревания смеси на $\Delta T$, выразим двумя способами:

$$Q = c_{\text{уд } V}(m_1 + m_2)\Delta T; \qquad (8.1)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 =$$

$$= c_{\text{уд } V1}\ m_1\,\Delta T + c_{\text{уд } V2}\ m_2\,\Delta T, \quad (8.2)$$

где $c_{\text{уд } V1}$ – удельная теплоемкость неона; $c_{\text{уд } V2}$ – удельная теплоемкость водорода.

Приравняв правые части выражений (8.1) и (8.2) и разделив обе части полученного равенства на $\Delta T$, получим

$$c_{\text{уд}V}(m_1+m_2)=c_{\text{уд}V1}\,m_1+c_{\text{уд}V2}\,m_2,$$

откуда

$$c_{\text{уд}V}=c_{\text{уд}V1}\frac{m_1}{m_1+m_2}+c_{\text{уд}V2}\frac{m_2}{m_1+m_2}, \tag{8.3}$$

или

$$c_{\text{уд}\,V}=c_{\text{уд}\,V1}w_1+c_{\text{уд}\,V2}w_2, \tag{8.4}$$

где $w_1$ и $w_2$ – массовые доли,

$$w_1=\frac{m_1}{m_1+m_2} \quad \text{и} \quad w_2=\frac{m_2}{m_1+m_2}.$$

Рассуждая аналогично, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении:

$$c_{\text{уд}\,p}=c_{\text{уд}\,p1}\,w_1+c_{\text{уд}\,p2}\,w_2. \tag{8.5}$$

Произведем вычисления по формулам (8.4) и (8.5):

$$c_{\text{уд}\,V}=624\cdot 0{,}8+1{,}04\cdot 10^4\cdot 0{,}2=2{,}58\cdot 10^3\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})=$$

$$=2{,}58\ \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К});$$

$$c_{\text{уд}\,p}=1{,}04\cdot 10^3\cdot 0{,}8+1{,}46\cdot 10^4\cdot 0{,}2=3{,}75\cdot 10^3\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})=$$

$$=3{,}75\ \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К}).$$

Ответ: $c_{\text{уд}\,V}=2{,}58\,\text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; $c_{\text{уд}\,p}=3{,}75\ \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$.

**Пример 9.** Кислород $(\text{O}_2)$ массой 2,00 кг находится под давлением 200 кПа и занимает объем 1,00 м$^3$. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема 3,00 м$^3$, а затем при постоянном объеме до давления 500 кПа. Найти изменение $\Delta U$ внутренней энергии газа, совершенную им работу $A$ и теплоту $Q$, переданную газу. Построить график процессов.

*Дано*:

$O_2$:

$m = 2{,}00$ кг,

$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,

$V_1 = 1{,}00$ м$^3$,

$p_1 = 200$ кПа $= 200 \cdot 10^3$ Па,

$V_2 = 3{,}00$ м$^3$,

$p_2 = p_1$,

$V_3 = V_2$,

$p_3 = 500$ кПа $= 500 \cdot 10^3$ Па.

*Найти*:

$\Delta U$, $A$, $Q$.

*Решение*

Графическое изображение процессов показано на рис. 9.1.

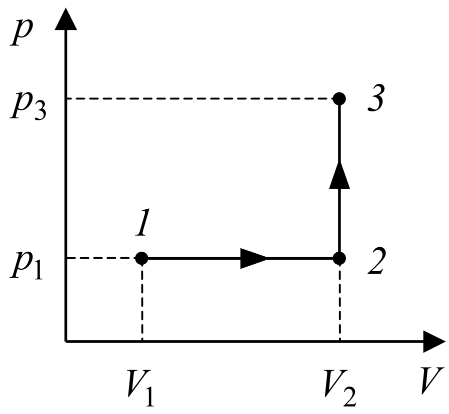


Рис. 9.1

Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\Delta U = C_{\mu V} \frac{m}{\mu}(T_3 - T_1) = \frac{i}{2} R \frac{m}{\mu}(T_3 - T_1), \tag{9.1}$$

где $i$ – сумма числа степеней свободы поступательного и вращательного движения молекул газа (для двухатомных молекул кислорода $i = 5$); $T_3$, $T_1$ – температуры газа в конечном (третьем) и начальном состояниях (см. рис. 9.1).

Температуры газа в характерных точках процесса найдем из уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Тогда

$$T_1 = \frac{p_1 V_1 \mu}{m R} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 1{,}00 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2{,}00 \cdot 8{,}31} = 385 \text{ К};$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2 \mu}{m R} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 3{,}00 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2{,}00 \cdot 8{,}31} = 1155 \text{ К};$$

$$T_3 = \frac{p_3 V_3 \mu}{m R} = \frac{500 \cdot 10^3 \cdot 3{,}00 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2{,}00 \cdot 8{,}31} = 2887 \text{ К}.$$

Рассчитаем изменение внутренней энергии по формуле (9.1):

$$\Delta U = \frac{i}{2} R \frac{m}{\mu} (T_3 - T_1) = \frac{5}{2} 8{,}31 \frac{2{,}00}{32 \cdot 10^{-3}} (2887 - 385) = 3249 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Работа, совершаемая газом,

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} = A_{1-2}, \qquad (9.2)$$

так как работа расширения газа в изохорном процессе $A_{2-3} = 0$.

Работа изобарного расширения

$$A_{1-2} = p_1 (V_2 - V_1).$$

Произведем вычисления:

$$A_{1-2} = 200 \cdot 10^3 \ (3{,}00 - 1{,}00) = 400 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 400 \text{ кДж};$$

$$A = A_{1-2} = 400 \text{ кДж}.$$

Согласно первому началу термодинамики, теплота $Q$, переданная газу, равна сумме изменения внутренней энергии $\Delta U$ и работы $A$:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (9.3)$$

Произведем вычисления:

$$Q = (3249 + 400) 10^3 = 3649 \cdot 10^3 \text{ Дж} \approx 3{,}65 \text{ МДж}.$$

Ответ: $\Delta U = 3{,}25$ МДж; $A = 400$ кДж; $Q = 3{,}65$ МДж.

**Пример 10.** В цилиндре под поршнем находится водород $(\mathrm{H_2})$ массой 20,0 г при температуре 300 К. Водород сначала расширился адиабатно, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в 5 раз. Найти температуру в конце адиабатного расширения и работу, совершенную газом при этих процессах. Изобразить процесс графически.

*Дано*:

$H_2$:

$m = 20{,}0$ г $= 20{,}0 \cdot 10^{-3}$ кг,

$T_1 = 300$ К,

$n_1 = V_2/V_1 = 5$,

$n_2 = V_2/V_3 = 5$,

$T_3 = T_1$,

$\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

*Найти*:

$T_2$, $A_{1-2}$, $A_{2-3}$.

*Решение*

Графическое изображение процессов показано на рис. 10.1.

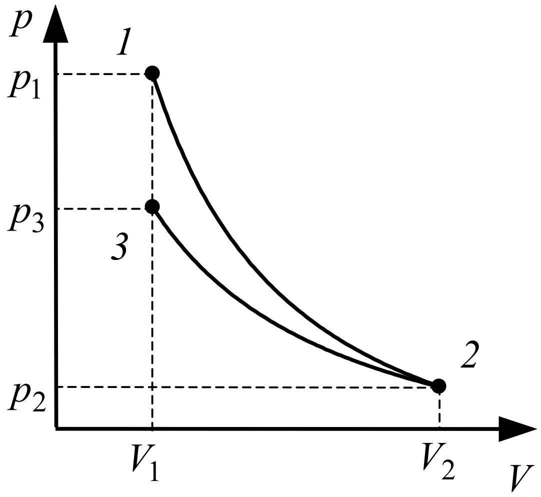


Рис. 10.1

Температуры и объемы газа, совершающего адиабатный процесс, связаны между собой соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{1}{n_1^{\gamma-1}}, \tag{10.1}$$

где $\gamma$ – коэффициент Пуассона (показатель адиабаты),

$$\gamma = \frac{C_{\mu p}}{C_{\mu V}} = \frac{i+2}{i}.$$

Для двухатомной молекулы водорода $i = 5$, поэтому $\gamma = 1{,}4$.

Из соотношения (10.1) получаем следующее выражение для конечной температуры:

$$T_2 = \frac{T_1}{n_1^{\gamma-1}}. \tag{10.2}$$

Работа газа при адиабатном расширении может быть определена по формуле

$$A_{1-2} = \frac{m}{\mu} C_{\mu V}\left(T_1 - T_2\right) = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R\left(T_1 - T_2\right), \tag{10.3}$$

где $C_{\mu V}$ – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Работа газа при изотермическом процессе может быть выражена в виде

$$A_{2-3} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln\frac{V_3}{V_2} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln\frac{1}{n_2}. \qquad (10.4)$$

Произведем вычисления по формулам (10.2) – (10.4):

$$T_2 = \frac{300}{5^{1,4-1}} = \frac{300}{5^{0,4}} = 157 \text{ К};$$

$$A_{1-2} = \frac{20{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 8{,}31}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2}(300 - 157) = 29{,}8 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 29{,}8 \text{ кДж};$$

$$A_{2-3} = \frac{20{,}0 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} 8{,}31 \cdot 157 \cdot \ln\frac{1}{5} = -21{,}0 \cdot 10^3 \text{ Дж} = -21{,}0 \text{ кДж}.$$

Знак “минус” показывает, что при сжатии работа над газом совершается внешними силами.

Ответ: $T_2 = 157$ К; $A_{1-2} = 29{,}8$ кДж; $A_{2-3} = -21{,}0$ кДж.

**Пример 11.** Тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя 500 К. Определить термический КПД цикла и температуру $T_х$ холодильника тепловой машины, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.

*Дано*:

$T_н = 500$ К,

$A_ц = 350$ Дж,

$Q_н = 1000$ Дж.

*Найти*:

$\eta$, $T_х$.

*Решение*

Термический КПД тепловой машины показывает, какая доля теплоты, полученной от нагревателя, превращается в механическую работу. Термический КПД выражается формулой

$$\eta = \frac{A_ц}{Q_н},$$

где $A_ц$ – работа, совершенная рабочим телом тепловой машины за один цикл; $Q_н$ – теплота, полученная от нагревателя.

Зная КПД цикла, можно по формуле $\eta = (T_н - T_х)/T_н$ определить температуру холодильника:

$$T_х = T_н(1-\eta).$$

Произведем вычисления:

$$\eta = \frac{350}{1000} = 0{,}350 = 35{,}0\ \%;$$

$$T_х = 500(1-0{,}35)\ К = 325\ К.$$

Ответ: $\eta = 35{,}0\ \%$; $T_х = 25\ К$.

**Пример 12.** Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 70 % количества теплоты $Q_н$, полученной от нагревателя, отдает холодильнику. Количество теплоты, полученное от нагревателя, равно 5,00 кДж. Определить термический КПД цикла $\eta$, работу, совершаемую в цикле $A_ц$.

*Дано*:

$|Q_х| = 0{,}700\,Q_н$,

$Q_н = 5{,}00\ кДж = 5{,}00\cdot 10^3\ Дж$.

*Найти*:

$\eta$, $A_ц$.

*Решение*

Термический КПД цикла можно выразить через теплоту $Q_н$ и $Q_х$:

$$\eta = \frac{Q_н - |Q_х|}{Q_н} = 1 - \frac{|Q_х|}{Q_н} =$$

$$= 1 - \frac{0{,}700\,Q_н}{Q_н} = 0{,}300 = 30{,}0\ \%.$$

С другой стороны, КПД цикла можно выразить через работу $A_ц$, совершаемую рабочим телом за цикл:

$$\eta = \frac{A_ц}{Q_н},$$

отсюда

$$A_ц = \eta\, Q_н = 0{,}300\cdot 5{,}00\cdot 10^3 = 1{,}50\cdot 10^3\ Дж = 1{,}50\ кДж.$$

Ответ: $\eta = 30{,}0\ \%$; $A_ц = 1{,}50\ кДж$.

**Пример 13.** Гелий $(He)$ массой 10,0 г в качестве рабочего тела используется в прямом цикле, состоящем из двух изобар, адиабаты и изохоры. В начальном состоянии гелий занимает объем 12,5 л при давлении 500 кПа. При изобарном нагревании объем газа увеличивается в 2 раза, а затем газ адиабатно расширяется, в результате чего его температура уменьшается на 100 К. Затем газ изобарно охлаждают до первоначального объема и изохорно повышают давление до первоначального значения. Изобразить цикл в координатах $pV$. Определить температуры характерных точек цикла, КПД цикла $\eta$ и изменение энтропии на участке изохорного нагревания.

*Дано*:

He:

$m = 10{,}0$ г $= 10{,}0 \cdot 10^{-3}$ кг,

$\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,

$V_1 = 12{,}5$ л $= 12{,}5 \cdot 10^{-3}$ м$^3$,

$p_1 = 500$ кПа $= 500 \cdot 10^3$ Па,

$V_2 = 2V_1$,

$\Delta T_{2-3} = 100$ К,

$p_4 = p_3$,

$V_4 = V_1$.

*Найти*:

$T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ \eta,\ \Delta S_{4-1}$.

*Решение*

Цикл тепловой машины показан на рис. 13.1.

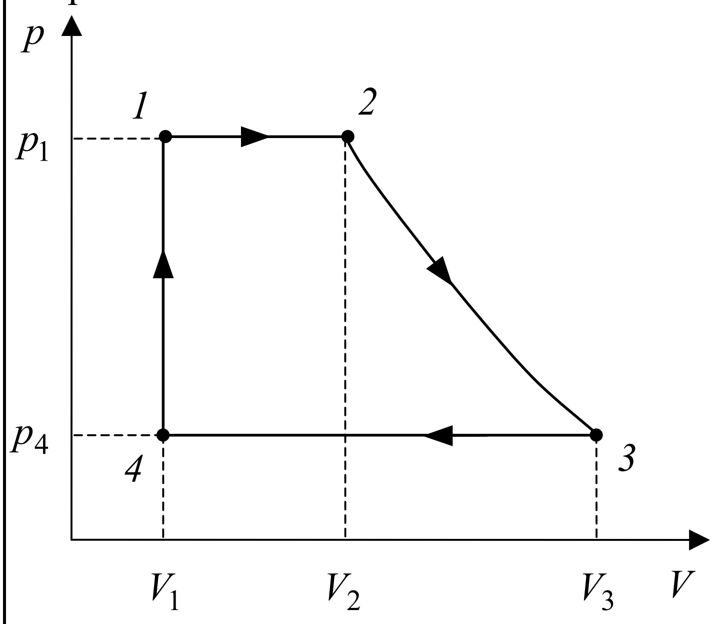


Рис. 13.1

Одноатомный газ гелий имеет три степени свободы: $i = 3$.

Найдем изохорную и изобарную молярные теплоемкости гелия:

$$C_{\mu V} = \frac{i}{2}R = \frac{3}{2}\,8{,}31 = 12{,}5 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)};$$

$$C_{\mu p} = \frac{i+2}{2} R = \frac{3+2}{2}\, 8{,}31 = 20{,}8\ \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

Коэффициент Пуассона (показатель адиабаты)

$$\gamma = \frac{C_{\mu p}}{C_{\mu V}} = \frac{i+2}{i} = \frac{3+2}{3} = 1{,}67\,.$$

Количество вещества в рабочем теле

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{10{,}0 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} = 2{,}50\ \text{моль}\,.$$

Температуру газа в начальном состоянии найдем из уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1,$$

откуда

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R} = \frac{500 \cdot 10^3 \cdot 12{,}5 \cdot 10^{-3}}{2{,}50 \cdot 8{,}31} = 301\ \text{К}\,.$$

Температуры и объемы в изобарном процессе *1–2* (см. рис. 13.1) связаны следующим соотношением:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

откуда и находим температуру $T_2$:

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 301 \cdot 2 = 602\ \text{К}.$$

Температура в точке *3*

$$T_3 = T_2 - \Delta T_{2-3} = 602 - 100 = 502\ \text{К}.$$

Температуры и давления в адиабатном процессе *2–3* (см. рис. 13.1) связаны следующим соотношением:

$$T_2^{\gamma}\, p_2^{1-\gamma} = T_3^{\gamma}\, p_3^{1-\gamma}.$$

Давление в точке *3*

$$p_3 = p_2 \left( \frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 500 \cdot 10^3 \left( \frac{602}{502} \right)^{\frac{1,67}{1-1,67}} = 318 \cdot 10^3 \text{ Па} = 318 \text{ кПа}.$$

Давление и объем в точке *4*

$$p_4 = p_3 = 318 \text{ кПа}; \qquad V_4 = V_1 = 12{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Температуру газа в точке *4* найдем из уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$p_4 V_4 = \nu R T_4,$$

откуда

$$T_4 = \frac{p_4 V_4}{\nu R} = \frac{318 \cdot 10^3 \cdot 12{,}5 \cdot 10^{-3}}{2{,}50 \cdot 8{,}31} = 191 \text{ К}.$$

КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{|Q_\text{х}|}{Q_\text{н}},$$

где $Q_\text{х}$ – теплота, отданная рабочим телом холодильнику; $Q_\text{н}$ – теплота, переданная от нагревателя рабочему телу.

Теплота в изобарном процессе *1–2* (см. рис. 13.1)

$$Q_{1-2} = \nu C_{\mu p} (T_2 - T_1) = 2{,}50 \cdot 20{,}8 \, (602 - 301) =$$

$$= 15{,}6 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 15{,}6 \text{ кДж}.$$

Теплота в адиабатном процессе *2–3* (см. рис. 13.1)

$$Q_{2-3} = 0.$$

Теплота в изобарном процессе *3–4* (см. рис. 13.1)

$$Q_{3-4} = \nu C_{\mu p} (T_4 - T_3) = 2{,}50 \cdot 20{,}8 \, (191 - 502) =$$

$$= -16{,}2 \cdot 10^3 \text{ Дж} = -16{,}2 \text{ кДж}.$$

Теплота в изохорном процессе *4–1* (см. рис. 13.1)

$$Q_{4-1} = \nu C_{\mu V}\left(T_1 - T_4\right) = 2{,}50 \cdot 12{,}5\left(301 - 191\right) =$$

$$= 3{,}44 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 3{,}44 \text{ кДж}.$$

Если теплота положительная, то она передается от нагревателя рабочему телу, следовательно,

$$Q_{\text{н}} = Q_{1-2} + Q_{4-1} = \left(15{,}6 + 3{,}44\right)10^3 = 19{,}0 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 19{,}0 \text{ кДж}.$$

Если теплота отрицательная, то она передается от рабочего тела холодильнику, следовательно,

$$Q_{\text{х}} = Q_{3-4} = -16{,}2 \text{ кДж}.$$

На рис. 13.2 показано, в каких процессах осуществляется подвод от нагревателя и отвод теплоты к холодильнику.

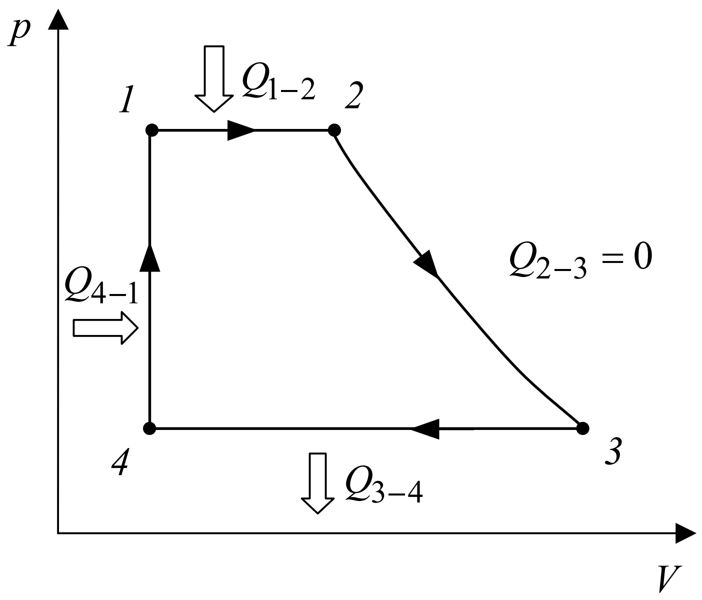


Рис. 13.2

КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{\left|-16{,}2\right|}{19{,}0} = 0{,}147 = 14{,}7\ \%.$$

Изменение энтропии при изохорном нагревании

$$\Delta S_{4-1} = S_1 - S_4 = \nu\, C_{\mu V}\, \ln\frac{T_1}{T_4} = 2{,}50 \cdot 12{,}5 \cdot \ln\frac{301}{191} = 14{,}2 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $T_1 = 301$ К; $T_2 = 602$ К; $T_3 = 502$ К; $T_4 = 191$ К; $\eta = 14{,}7\,\%$; $\Delta S_{4-1} = 14{,}2$ Дж/К.

# КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

## Варианты

Вариант контрольной работы № 2 выбирается из таблицы по двум последним цифрам номера зачетной книжки.

| Предпоследняя цифра номера зачетной книжки | Последняя цифра номера зачетной книжки | Порядковый номер задачи | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0, 1, 2, 3 | 1 | 201 | 212 | 223 | 234 | 245 | 256 |
| | 2 | 202 | 213 | 224 | 235 | 246 | 257 |
| | 3 | 203 | 214 | 225 | 236 | 247 | 258 |
| | 4 | 204 | 215 | 226 | 237 | 248 | 259 |
| | 5 | 205 | 216 | 227 | 238 | 249 | 260 |
| | 6 | 206 | 217 | 228 | 239 | 250 | 251 |
| | 7 | 207 | 218 | 229 | 240 | 241 | 252 |
| | 8 | 208 | 219 | 230 | 231 | 242 | 253 |
| | 9 | 209 | 220 | 221 | 232 | 243 | 254 |
| | 0 | 210 | 211 | 222 | 233 | 244 | 255 |
| 4, 5, 6 | 1 | 201 | 213 | 225 | 237 | 249 | 251 |
| | 2 | 202 | 214 | 226 | 238 | 250 | 252 |
| | 3 | 203 | 215 | 227 | 239 | 241 | 253 |
| | 4 | 204 | 216 | 228 | 240 | 242 | 254 |
| | 5 | 205 | 217 | 229 | 231 | 243 | 255 |
| | 6 | 206 | 218 | 230 | 232 | 244 | 256 |
| | 7 | 207 | 219 | 221 | 233 | 245 | 257 |
| | 8 | 208 | 220 | 222 | 234 | 246 | 258 |
| | 9 | 209 | 211 | 223 | 235 | 247 | 259 |
| | 0 | 210 | 212 | 224 | 236 | 248 | 260 |
| 7, 8, 9 | 1 | 201 | 214 | 227 | 240 | 243 | 256 |
| | 2 | 202 | 215 | 228 | 231 | 244 | 257 |
| | 3 | 203 | 216 | 229 | 232 | 245 | 258 |
| | 4 | 204 | 217 | 230 | 233 | 246 | 259 |
| | 5 | 205 | 218 | 221 | 234 | 247 | 260 |
| | 6 | 206 | 219 | 222 | 235 | 248 | 251 |
| | 7 | 207 | 220 | 223 | 236 | 249 | 252 |
| | 8 | 208 | 211 | 224 | 237 | 250 | 253 |
| | 9 | 209 | 212 | 225 | 238 | 241 | 254 |
| | 0 | 210 | 213 | 226 | 239 | 242 | 255 |

## Задачи

**201.** Микроскопическая пылинка углерода $(\mathrm{C})$ обладает массой $m = 0{,}100$ нг. Определить количество вещества $\nu$ и число атомов $N$ в пылинке.

**202.** Сколько атомов $N$ ртути $(\mathrm{Hg})$ содержится в воздухе объемом $V = 1{,}30$ м$^3$ в помещении, зараженном ртутью, при температуре $t = 20$ °C, если давление насыщенного пара ртути при этой температуре $p = 0{,}133$ Па?

**203.** Какова длина ребра куба $a$, содержащего $N = 1{,}00 \cdot 10^6$ молекул идеального газа при нормальных условиях?

**204.** В сосуде объемом $V = 1{,}00$ дм$^3$ содержится некоторый газ при температуре $t = 17$ °C. Найти приращение давления газа $\Delta p$, если вследствие утечки газа из него выйдет $\Delta N = 1{,}00 \cdot 10^{21}$ молекул.

**205.** Вода при температуре $t = 4$ °C занимает объем $V = 10{,}0$ см$^3$. Определить количество вещества $\nu$ и число $N$ молекул воды $(H_2O)$. Плотность воды при этой температуре максимальна: $\rho = 1000$ кг/м$^3$.

**206.** Определить концентрацию $n$ молекул идеального газа, находящегося в сосуде объемом $V = 5{,}00$ л. Количество вещества $\nu = 0{,}500$ моль.

**207.** Сколько атомов $N$ содержится в натрии $(\mathrm{Na})$: 1) количество вещества $\nu = 1{,}00$ моль; 2) масса $m = 3{,}00$ г?

**208.** Найти молярную массу $\mu$ и массу $m_0$ одной молекулы поваренной соли (NaCl).

**209.** В баллоне объемом $V = 5{,}00$ л содержится аргон $(\mathrm{Ar})$ массой $m = 20{,}0$ г. Определить концентрацию $n$ молекул газа.

**210.** Сколько молекул воды $(H_2O)$ содержится в стакане вместимостью 0,250 л при температуре 4 °C. Плотность воды при этой температуре максимальна: $\rho = 1000$ кг/м$^3$.

**211.** Баллон вместимостью $V = 20{,}0$ л заполнен азотом $(N_2)$ при температуре $T = 600$ К. Когда часть газа была израсходована, давление в баллоне понизилось на $\Delta p = 150$ кПа. Определить массу $\Delta m$ израсходованного газа. Процесс считать изотермическим.

**212.** В одном баллоне вместимостью $V_1 = 15{,}0$ дм$^3$ находится газ под давлением $p_1 = 200$ кПа, а в другом – тот же газ под давлением $p_2 = 1{,}00$ МПа. Баллоны, температура которых одинакова, соединены трубкой с краном. Если открыть кран, то в обоих баллонах устанавливается давление $p = 400$ кПа. Какова вместимость $V_2$ второго баллона?

**213.** При давлении $p = 200$ кПа и температуре $t = 7$ °C плотность газа $\rho = 2{,}41$ кг/м$^3$. Какова масса $\mu$ одного моля этого газа?

**214.** Газ находится при температуре $t_1 = 20$ °C и давлении $p_1 = 500$ кПа. Какое давление $p_2$ потребуется для того, чтобы увеличить плотность газа в 2 раза, если его температура будет доведена до $t_2 = 80$ °C?

**215.** Определить массу одного моля смеси, состоящей из кислорода $(O_2)$ массой $m_1 = 8{,}00$ г и углекислого газа $(CO_2)$ массой $m_2 = 22{,}0$ г.

**216.** Найти объем смеси, состоящей из азота $(N_2)$ массой $m_1 = 2{,}80$ кг и кислорода $(O_2)$ массой $m_2 = 3{,}20$ кг и имеющей температуру $t = 17$ °C и давление $p = 400$ кПа.

**217.** Определить плотность смеси $\rho$, состоящей из гелия $(He)$ массой $m_1 = 8{,}00$ г и аргона $(Ar)$ массой $m_2 = 4{,}00$ г, при температуре $t = 17$ °C и давлении $p = 100$ кПа.

**218.** В баллоне вместимостью $V = 20{,}0$ л находится аргон $(Ar)$ под давлением $p_1 = 800$ кПа и при температуре $T_1 = 300$ К. Когда из баллона было взято некоторое количество газа, давление в баллоне понизилось до $p_2 = 400$ кПа, а температура установилась $T_2 = 250$ К. Определить массу $m$ аргона, взятого из баллона.

**219.** Определить молярную массу $\mu$ газа, если при температуре $T = 309$ К и давлении $p = 560$ кПа он имеет плотность $\rho = 6{,}10$ кг/м$^3$.

**220.** Определить плотность $\rho$ водяного пара $(H_2O)$, находящегося под давлением $p = 5{,}00$ кПа и имеющего температуру $T = 350$ К.

**221.** Определить внутреннюю энергию $U$ кислорода $(O_2)$, а также среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon\rangle$ молекулы этого газа при температуре $T = 600$ К, если количество вещества этого газа $\nu = 0{,}500$ моль.

**222.** Определить суммарную кинетическую энергию $W_к$ поступательного движения всех молекул газа, находящегося в сосуде объемом $V = 10{,}0$ л под давлением $p = 600$ кПа.

**223.** Определить суммарную кинетическую энергию $W_к$ поступательного движения всех молекул газа, находящегося при температуре $T = 200$ К. Количество вещества $\nu = 2{,}00$ моль.

**224.** Молярная внутренняя энергия некоторого двухатомного газа $U_\mu = 12{,}04$ кДж. Определить среднюю кинетическую энергию вращательного движения $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$ одной молекулы этого газа. Газ считать идеальным.

**225.** Молярная внутренняя энергия некоторого трехатомного газа $U_\mu = 10{,}5$ кДж. Определить среднюю кинетическую энергию вращательного движения $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$ одной молекулы этого газа. Газ считать идеальным.

**226.** При какой температуре $T$ средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы газа $\langle\varepsilon_{пост}\rangle = 8{,}28 \cdot 10^{-21}$ Дж?

**227.** Полная кинетическая энергия молекул многоатомного газа, масса которого $m = 20{,}0$ г, $W_к = 3{,}20$ кДж. Найти среднюю квадратичную скорость молекул этого газа $v_{кв}$.

**228.** Какова средняя квадратичная $v_{кв}$ и средняя арифметическая $\langle v\rangle$ скорости пылинки, находящейся в воздухе во взвешенном состоянии при температуре $t = 17$ °C, если ее масса $m = 0{,}100$ нг?

**229.** При какой температуре $T_1$ молекулы аргона $(Ar)$ имеют такую же среднюю квадратичную скорость, как молекулы гелия $(He)$ при $T_2 = 100$ К?

**230.** Определить среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon\rangle$ одной молекулы водяного пара $(H_2O)$ при $T = 400$ К и среднюю кинетическую энергию вращательного движения $\langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle$.

**231.** Удельная теплоемкость при постоянном давлении некоторого газа $c_{\text{уд}\,p} = 970$ Дж/(кг · К), его молярная масса $\mu = 30{,}0$ г/моль. Определить, каким числом степеней свободы обладают молекулы этого газа.

**232.** Вычислить удельные теплоемкости при постоянном давлении $c_{\text{уд}\,p}$ и постоянном объеме $c_{\text{уд}\,V}$ газа, зная, что его молярная масса $\mu = 40{,}0$ г/моль, а отношение теплоемкостей $c_{\text{уд}\,p}/c_{\text{уд}\,V} = 1{,}67$.

**233.** Плотность некоторого газа при нормальных условиях $\rho = 1{,}25$ кг/м$^3$. Коэффициент Пуассона $\gamma = 1{,}40$. Определить удельные теплоемкости $c_{\text{уд}\,p}$ и $c_{\text{уд}\,V}$ газа.

**234.** Определить коэффициент Пуассона $\gamma$ для газовой смеси, состоящей из водорода $(H_2)$ массой $m_1 = 4{,}00$ г и углекислого газа $(CO_2)$ массой $m_2 = 22{,}0$ г.

**235.** Коэффициент Пуассона смеси $\gamma = 1{,}35$. Смесь состоит из нескольких $\nu_1$ молей азота $(N_2)$ и $\nu_2 = 5{,}00$ моль аммиака $(NH_3)$. Определить $\nu_1$ – число молей азота в смеси.

**236.** Найти удельные теплоемкости $c_{\text{уд}\,p}$ и $c_{\text{уд}\,V}$ и молярные $C_{\mu\,p}$ и $C_{\mu\,V}$ теплоемкости кислорода $(O_2)$.

**237.** Трехатомный газ под давлением $p = 240$ кПа при температуре $t = 50$ °C занимает объем $V = 15{,}0$ л. Определить теплоемкость всей массы этого газа при постоянном давлении.

**238.** Одноатомный газ при нормальных условиях занимает объем $V = 10{,}0$ л. Вычислить теплоемкость $C_V$ всей массы газа при постоянном объеме.

**239.** Определить молярную массу $\mu$ двухатомного газа и его удельные теплоемкости, если известно, что разность удельных теплоемкостей этого газа $c_{\text{уд}\,p} - c_{\text{уд}\,V} = 260$ Дж/(кг · К).

**240.** Найти удельные $c_{\text{уд}\,p}$ и $c_{\text{уд}\,V}$, а также молярные $C_{\mu\,p}$ и $C_{\mu\,V}$ теплоемкости азота $(N_2)$.

**241.** Азот $(N_2)$ массой $m = 5{,}00$ кг, нагретый на $\Delta T = 250$ К, сохранил неизменный объем $V$. Найти: 1) количество теплоты $Q$, сообщенное газу; 2) изменение $\Delta U$ внутренней энергии; 3) совершенную газом работу $A$.

**242.** Водород $(H_2)$ занимает объем $V_1 = 10{,}0$ м$^3$ при давлении $p_1 = 100$ кПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления $p_2 = 300$ кПа. Определить: 1) изменение $\Delta U$ внутренней энергии газа; 2) совершенную газом работу $A$; 3) количество теплоты $Q$, сообщенное газу.

**243.** Баллон объемом $V = 20{,}0$ л содержит водород $(H_2)$ при температуре $T_1 = 300$ К под давлением $p_1 = 400$ кПа. Каковы будут температура $T_2$ и давление $p_2$, если газу сообщить количество теплоты $Q = 6{,}00$ кДж?

**244.** Кислород $(O_2)$ при неизменном давлении $p = 80{,}0$ кПа нагревается. Его объем увеличивается от $V_1 = 1{,}00$ м$^3$ до $V_2 = 3{,}00$ м$^3$. Определить: 1) изменение $\Delta U$ внутренней энергии кислорода; 2) работу $A$, совершаемую им при расширении; 3) количество теплоты $Q$, сообщенное газу.

**245.** На нагревание кислорода $(O_2)$ массой $m = 160$ г на $\Delta T = 12{,}0$ К было затрачено количество теплоты $Q = 1{,}76$ кДж. Как протекал процесс: при постоянном объеме или при постоянном давлении?

**246.** Азот $(N_2)$ массой $m = 200$ г расширяется изотермически при температуре $T = 280$ К, причем объем газа увеличивается в 2 раза. Найти: 1) изменение $\Delta U$ внутренней энергии газа; 2) совершенную при расширении газа работу $A$; 3) количество теплоты $Q$, полученное газом.

**247.** При адиабатном сжатии кислорода $(O_2)$ массой $m = 1{,}00$ кг совершена работа $A = 100$ кДж. Определить конечную температуру $T_2$ газа, если до сжатия кислород находился при температуре $T_1 = 300$ К.

**248.** Водород $(H_2)$ при нормальных условиях имел объем $V_1 = 100$ м$^3$. Найти изменение $\Delta U$ внутренней энергии газа при его адиабатном расширении до объема $V_2 = 150$ м$^3$.

**249.** Гелий $(He)$, находящийся при нормальных условиях, изотермически расширяется от объема $V_1 = 10{,}0$ л до $V_2 = 20{,}0$ л. Определить: 1) изменение $\Delta U$ внутренней энергии газа; 2) работу $A$, совершенную газом при расширении; 3) количество теплоты $Q$, полученное газом.

**250.** Азот $(N_2)$, находящийся при температуре $T_1 = 400$ К, подвергли адиабатному расширению, в результате которого его объем увеличился в $n = 5$ раз, а внутренняя энергия уменьшилась на $\Delta U = 4{,}00$ кДж. Определить массу азота $m$ и конечную температуру $T_2$.

**251.** Тепловую машину, работающую по циклу Карно с КПД $\eta = 20{,}0$ %, используют при тех же условиях, что и холодильную машину. Найти ее холодильный коэффициент $\varepsilon$.

**252.** Какую работу $A_ц$ совершают внешние силы в идеальной холодильной машине, работающей по обратному циклу Карно, чтобы отнять у холодильника, температура которого $t_х = -10$ °C, $Q_х = 100$ кДж теплоты? Температура окружающей среды $t_н = 10$ °C.

**253.** Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, имеет температуру нагревателя $t_н = 227$ °C, а температуру холодильника $t_х = 127$ °C. Во сколько раз нужно увеличить температуру нагревателя, чтобы КПД машины $\eta$ увеличился в 3 раза?

**254.** Двухатомный газ участвует в цикле Карно. Определить КПД цикла $\eta$, если известно, что на каждый моль этого газа при его адиабатном сжатии затрачивается работа $A = 2{,}00$ кДж. Температура нагревателя $t_н = 127$ °C.

**255.** Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего тела работает по циклу Карно, КПД которого $\eta = 25$ %, при изотермическом расширении производит работу 240 Дж. Какова работа, совершаемая рабочим телом при изотермическом сжатии?

**256.** Идеальный газ участвует в цикле Карно, при этом он отдает охладителю $2/3$ количества теплоты $Q_н$, полученной от нагре вателя. Температура охладителя $T_х = 280$ К. Определить температуру $T_н$ нагревателя.

**257.** Идеальный газ участвует в цикле Карно. Температура нагревателя $T_н = 470$ К, температура охладителя $T_х = 280$ К. При изотермическом расширении газ совершает работу $A = 100$ Дж. Определить термический КПД цикла $\eta$, а также количество теплоты $Q_х$, которое газ отдает охладителю при изотермическом сжатии.

**258.** Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего тела, работающая по циклу Карно, получает от нагревателя количество теплоты $Q_н = 4{,}20$ кДж и совершает работу $A_ц = 590$ Дж. Найти термический КПД этого цикла $\eta$. Во сколько раз температура $T_н$ нагревателя больше температуры $T_х$ охладителя?

**259.** В цикле Карно газ получил от нагревателя теплоту $Q_н = 500$ Дж и совершил работу $A_ц = 100$ Дж. Температура нагревателя $T_н = 400$ К. Определить температуру $T_х$ охладителя.

**260.** Домашний холодильник потребляет от сети среднюю мощность $N = 40{,}0$ Вт. Какое количество теплоты $Q_н$ выделится на радиаторе холодильника за сутки, если холодильный коэффициент $\varepsilon = 9$?

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная:

1. **Трофимова Т. И.** Курс физики: Учеб. – М.: Высш. шк., 1999. – 542 с.

Дополнительная:

2. **Савельев И. В.** Курс физики. Т. 1: Механика. Молекулярная физика: Учеб. – М.: Наука, 1989. – 352 с.
3. **Савельев И. В.** Курс физики. Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика: Учеб. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
4. **Савельев И. В.** Курс физики. Т. 3: Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц: Учеб. – М.: Наука, 1989. – 304 с.
5. **Волькенштейн. В. С.** Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

## О приближенных вычислениях

При решении физических задач обычно используют величины с приближенными числовыми значениями.

Рассмотрим следующий пример. Пусть требуется определить плотность $\rho$ вещества некоторого тела. При взвешивании тела на весах с точностью до 0,01 г определили его массу:

$$m = (9{,}38 \pm 0{,}01)\ \text{г}.$$

Затем с точностью до $0{,}01\ \text{см}^3$ был измерен объем тела:

$$V = (3{,}46 \pm 0{,}01)\ \text{см}^3.$$

Без критического подхода к вычислениям можно получить такой результат:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{9{,}38}{3{,}46}\ \text{г}/\text{см}^3 = 2{,}710\,982\,659...\ \text{г}/\text{см}^3.$$

Числа 9,38 и 3,46 – приближенные. Последние цифры в них недостоверны. При взвешивании с указанной выше точностью могла быть допущена ошибка на 0,01 г как в сторону увеличения массы, так и в сторону ее уменьшения (то же самое и в отношении объема). При измерении могли быть получены такие числа: первое – 9,39 или 9,37; второе – 3,47 или 3,45. Таким образом, плотность тела, если ее вычислить с точностью до девятого десятичного знака, как это сделано выше, могла оказаться

$$\rho = \frac{9{,}39}{3{,}45}\ \text{г}/\text{см}^3 = 2{,}721\,739\,130...\ \text{г}/\text{см}^3$$

или

$$\rho = \frac{9{,}37}{3{,}47}\ \text{г}/\text{см}^3 = 2{,}700\,288\,184...\ \text{г}/\text{см}^3.$$

Сравнение всех трех результатов показывает, что они отличаются уже вторыми десятичными знаками и что достоверным является лишь первый десятичный знак, а второй – недостоверен. Цифры, вы ражающие остальные десятичные знаки, совершенно случайны, способны лишь ввести в заблуждение пользующегося полученными результатами и показывают, что автор этих вычислений не знаком с правилами приближенных вычислений и записи приближенных чисел. Следовательно, работа по вычислению большинства знаков проведена не только впустую, но и показывает неграмотность автора. Во избежание бесполезных затрат труда и времени принято вычислять, кроме достоверных знаков, один недостоверный, для возможности дальнейшего округления.

В рассмотренном примере нужно было вести вычисления до второго десятичного знака:

$$\rho = \frac{9{,}38}{3{,}46}\ \text{г}/\text{см}^3 = 2{,}71\ \text{г}/\text{см}^3 .$$

Теория приближенных вычислений позволяет:

1) зная погрешность исходных данных, оценить погрешность результата еще до выполнения действий;

2) брать данные с надлежащей точностью, достаточной, чтобы обеспечить требуемую точность результата, но не слишком большой, чтобы избавить вычислителя от бесполезных расчетов;

3) рационализировать сам процесс вычисления, освободив его от тех выкладок, которые не окажут влияния на достоверные цифры результата.

Значащими цифрами числа называют все цифры числа, кроме нулей, стоящих впереди числа. Например, в числе 0,00385 три значащие цифры: 3, 8, 5; в числе 2500 – четыре: 2, 5, 0, 0; в числе $2{,}5\cdot10^3$ – две: 2, 5.

Нули, стоящие в середине или конце числа (справа), являются значащими цифрами, так как обозначают отсутствие единиц в соответствующем разряде.

Абсолютной погрешностью приближенного числа называется абсолютное значение разности между этим числом и его точным значением.

Относительной погрешностью приближенного числа называется отношение абсолютной погрешности приближенного числа к самому числу.

Способ записи приближенных чисел. При приближенных вычислениях отличают запись 2,4 от 2,40; запись 0,02 от 0,0200 и т. д.

Запись 2,4 означает, что достоверны только две значащие цифры – цифры целых и десятых; истинное же значение числа может быть, например, 2,43 или 2,38. Запись 2,40 означает, что достоверны три значащие цифры – цифры целых, десятых и сотых; истинное же значение числа может быть, например, 2,403 или 2,398, но не 2,421 и 2,382.

То же отличие имеет место и для целых чисел. Запись 382 означает, что достоверны все три значащие цифры; если же за последнюю цифру ручаться нельзя, то число округляется и записывается в виде $38 \cdot 10$, но лучше записывать так: $0{,}38 \cdot 10^3$. Запись же 380 означает, что последняя цифра (0) достоверна.

Для каждого приближенного числа должна быть известна его погрешность (абсолютная или относительная). Когда она прямо не указана, подразумевается, что абсолютная погрешность составляет половину единицы последнего выписанного разряда. Так, если приведено приближенное число 4,72 без указания погрешности, то подразумевается, что абсолютная погрешность составляет половину от одной сотой, т. е. 0,005; для числа 47,2 – 0,05; для числа 472 – 0,5; для числа 4720 – 0,5; для числа $4{,}72 \cdot 10^3$ – 5.

Вследствие этого соглашения всегда можно обойтись без указания погрешности числа, округленного по правилам.

***Правила подсчета цифр при выполнении математических действий***

1. При сложении, вычитании, умножении и делении в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством цифр.

Например, при сложении чисел

$$4{,}462 + 2{,}38 + 1{,}17273 + 1{,}0262 = 9{,}04093$$

следует сумму округлить до сотых долей, т. е. принять ее равной 9,04, так как слагаемое 2,38 задано с точностью до сотых долей.

Например, вместо вычисления выражения $3{,}723 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}1846$ следует вычислять выражение $3{,}7 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}2$.

Исключения из этого правила допускаются в тех случаях, когда один из сомножителей произведения начинается с единицы, а сомножитель, содержащий наименьшее количество значащих цифр, начинается с какой-нибудь другой цифры. В этих случаях в результате сохраняют на одну цифру больше (так называемая запасная цифра), чем в числе с наименьшим количеством значащих цифр.

2. Результат расчета значений функций $x^n$, $\sqrt[n]{x}$, $\ln x$, $\lg x$ некоторого приближенного числа $x$ должен содержать столько значащих цифр, сколько их имеется в числе $x$. Например, $1{,}32^2 \approx 1{,}74$ или $\sqrt{1{,}217 \cdot 10^{-4}} \approx 1{,}103 \cdot 10^{-2}$.

3. При вычислении промежуточных результатов сохраняют на одну значащую цифру больше, чем рекомендуют правила 1 и 2 (так называемая запасная цифра). В окончательном результате запасная цифра отбрасывается с выполнением правил округления.

Например,

$$\frac{(3{,}2 + 17{,}062)\sqrt{3{,}7}}{5{,}1 \cdot 2{,}007 \cdot 10^3}.$$

Сомножитель 5,1 имеет наименьшее число значащих цифр – две, поэтому результаты всех промежуточных вычислений должны округляться до трех значащих цифр:

$$\frac{(3{,}2 + 17{,}062)\sqrt{3{,}7}}{5{,}1 \cdot 2{,}007 \cdot 10^3} \approx \frac{20{,}3 \cdot 1{,}92}{10{,}3 \cdot 10^3} \approx \frac{39{,}0}{10{,}3 \cdot 10^3} \approx 3{,}79 \cdot 10^{-3}.$$

Окончательный результат округляется до двух значащих цифр. После округления до двух значащих цифр получаем $3{,}8 \cdot 10^{-3}$.

***Правила округления***

1. В первую очередь округляется погрешность приближенного числа. Погрешность должна содержать не более двух значащих цифр. Если первая значащая цифра погрешности 1, 2, 3, то погрешность округляется до двух значащих цифр. Если первая значащая цифра погрешности 4, 5, 6, 7, 8, 9, то погрешность округляется до одной значащей цифры.

2. Во вторую очередь округляется приближенное число. Оно округляется до того же десятичного разряда, до которого округлялась погрешность этого числа. Например:

472±234   7,2±2,3   4,72±0,23   0,472±0,023;

472±6   47,2±0,6   4,72±0,06   0,472±0,006;

1) если первая из отбрасываемых цифр больше чем 5, то последняя из сохраняемых цифр увеличивается на единицу;

2) если первая из отбрасываемых цифр меньше чем 5, то последняя из сохраняемых цифр уменьшается на единицу;

3) если первая из отбрасываемых цифр равна 5, то последняя из сохраняемых цифр увеличивается на единицу.

Если отбрасывается только цифра 5 и за ней нет значащих цифр, то округление производится на ближайшее четное число, т. е. последняя из сохраняемых цифр остается неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если нечетная.

В большинстве задач по физике числовые значения исходных данных содержат три значащие цифры, поэтому ответ в задаче должен содержать также три значащие цифры. Исключение составляют некоторые задачи по ядерной физике, в которых требуется большая точность и, следовательно, большее число значащих цифр.

Советуем при вычислении пользоваться микрокалькулятором.

Приложение 2

## Единицы СИ

| Физическая величина | Единица | | |
|---|---|---|---|
| | Наименование | Обозначение | |
| | | русское | международное |
| *Основные единицы* | | | |
| Длина | метр | м | m |
| Масса | килограмм | кг | kg |
| Время | секунда | с | s |
| Термодинамическая температура | кельвин | К | K |
| Сила электрического тока | ампер | А | A |
| Количество вещества | моль | моль | mol |
| Сила света | кандела | кд | cd |
| *Дополнительные единицы* | | | |
| Плоский угол | радиан | рад | rad |
| Телесный угол | стерадиан | ср | sr |
| *Некоторые производные единицы* | | | |
| Внутренняя энергия | джоуль | Дж | J |
| Давление | паскаль | Па | Pa |
| Импульс | килограмм-метр на секунду | кг · м/с | kg · m/s |
| Импульс силы | ньютон-секунда | Н · с | N · s |
| Молярная масса | килограмм на моль | кг/моль | kg/mol |
| Молярная теплоемкость | джоуль на моль-кельвин | Дж/(моль ·К) | J/(mol · К) |
| Момент импульса | килограмм-метр в квадрате на секунду | кг · м$^2$/с | kg·m$^2$/s |
| Момент инерции | килограмм-метр в квадрате | кг · м$^2$ | kg · m$^2$ |
| Момент силы | ньютон-метр | Н · м | N · m |

Окончание прил. 2

| Физическая величина | Единица | | |
|---|---|---|---|
| | Наименование | Обозначение | |
| | | русское | международное |
| Мощность | ватт | Вт | W |
| Объем, вместимость | кубический метр | $м^3$ | $m^3$ |
| Плотность | килограмм на кубический метр | $кг/м^3$ | $kg/m^3$ |
| Площадь | квадратный метр | $м^2$ | $m^2$ |
| Работа | джоуль | Дж | J |
| Сила | ньютон | Н | N |
| Скорость | метр в секунду | м/с | m/s |
| Тепловой поток | ватт | Вт | W |
| Теплоемкость | джоуль на кельвин | Дж/К | J/K |
| Теплопроводность | ватт на метр-кельвин | Вт/(м · К) | W/(m · K) |
| Теплота | джоуль | Дж | J |
| Угловая скорость | радиан в секунду | рад/с | rad/s |
| Угловое ускорение | радиан на секунду в квадрате | $рад/с^2$ | $rad/s^2$ |
| Удельная теплоемкость | джоуль на килограмм-кельвин | Дж/(кг · К) | J/(kg · K) |
| Удельный объем | кубический метр на килограмм | $м^3/кг$ | $m^3/kg$ |
| Ускорение | метр на секунду в квадрате | $м/с^2$ | $m/s^2$ |
| Частота вращения | секунда в минус первой степени | $с^{-1}$ | $s^{-1}$ |
| Энергия | джоуль | Дж | J |
| Энтальпия | джоуль | Дж | J |
| Энтропия | джоуль на кельвин | Дж/К | J/K |

Приложение 3

## Внесистемные единицы, допущенные к применению

| Величина | Единица | | |
|---|---|---|---|
| | Наименование | Обозначение | Соотношение с единицей СИ |
| Время | минута | мин | 60 с |
| | час | ч | 3600 с |
| | сутки | сут | 86 400 с |
| Плоский угол | градус | $...^\circ$ | $\frac{\pi}{180}$ рад $= 1{,}74 \cdot 10^{-2}$ рад |
| | минута | $...'$ | $2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад |
| | секунда | $...''$ | $4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад |
| Энергия | электронвольт | эВ | $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Дж |
| Масса | атомная единица массы | а.е.м. | $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг |
| Относительная величина | процент | % | $10^{-2}$ |

Примечание. Кроме температурной шкалы Кельвина (обозначение температуры $T$) допускается также применять шкалу Цельсия (обозначение температуры $t$); $t = T - T_0$, где $T_0 = 273{,}15$ К. Температура по шкале Кельвина измеряется в кельвинах (К), температура по шкале Цельсия – в градусах Цельсия (°С). По размеру градус Цельсия равен кельвину $(1\ \text{К} = 1\ °\text{С})$, поэтому разность температур можно выражать как в кельвинах, так и в градусах Цельсия $(\Delta T = \Delta t)$.

Приложение 4

## Десятичные кратные и дольные приставки и множители

| Приставка | | | Множитель | Пример |
|---|---|---|---|---|
| Наименование | Обозначение | | | |
| | русское | международное | | |
| экса | Э | E | $10^{18}$ | 1 Эм $=10^{18}$ м |
| пета | П | P | $10^{15}$ | 1 Пм $=10^{15}$ м |
| тера | Т | T | $10^{12}$ | 1 Тм $=10^{12}$ м |
| гига | Г | G | $10^{9}$ | 1 Гм $=10^{9}$ м |
| мега | М | M | $10^{6}$ | 1 Мм $=10^{6}$ м |
| кило | к | k | $10^{3}$ | 1 км $=10^{3}$ м |
| гекто | г | h | $10^{2}$ | 1 гм $=10^{2}$ м |
| дека | да | da | $10^{1}$ | 1 дам $=10^{1}$ м |
| деци | д | d | $10^{-1}$ | 1 дм $=10^{-1}$ м |
| санти | с | c | $10^{-2}$ | 1 см $=10^{-2}$ м |
| милли | м | m | $10^{-3}$ | 1 мм $=10^{-3}$ м |
| микро | мк | µ | $10^{-6}$ | 1 мкм $=10^{-6}$ м |
| нано | н | n | $10^{-9}$ | 1 нм $=10^{-9}$ м |
| пико | п | p | $10^{-12}$ | 1 пм $=10^{-12}$ м |
| фемто | ф | f | $10^{-15}$ | 1 фм $=10^{-15}$ м |
| атто | а | a | $10^{-18}$ | 1 ам $=10^{-18}$ м |

Примечание. Приставку или ее обозначение следует писать слитно с наименованием единицы, к которой она присоединяется, или с ее обозначением.

Присоединение двух и более приставок подряд не допускается.

Кратные и дольные единицы должны выбираться таким образом, чтобы числовые значения величины находились в диапазоне от 0,1 до 1000. (Выбор кратной или дольной единицы диктуется удобством ее применения.)

Для уменьшения вероятности ошибок при расчетах десятичные кратные и дольные единицы рекомендуется подставлять только в конечный результат, а в процессе вычислений все величины выражать в единицах СИ, заменяя приставки множителями $10^{n}$.

Приложение 5

## Основные физические постоянные (округленные значения)

| Величина | Обозначение | Значение величины |
|---|---|---|
| Скорость света в вакууме | $c$ | 299792458 м/с |
| Магнитная постоянная | $\mu_0$ | $4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м |
| Электрическая постоянная | $\varepsilon_0$ | $8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м |
| Гравитационная постоянная | $\gamma$ | $6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$ |
| Постоянная Планка | $h$ | $6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с |
| | $\hbar$ | $1{,}055\cdot10^{-34}$ Дж·с |
| Элементарный электрический заряд | $e$ | $1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл |
| Число Авогадро | $N_{\mathrm{A}}$ | $6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ |
| Универсальная газовая постоянная | $R$ | 8,31 Дж/(моль·К) |
| Постоянная Больцмана | $k$ | $1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К |
| Нормальное атмосферное давление | — | 101325 Па |
| Объем моля идеального газа при нормальных условиях | $V_\mu$ | $22{,}4\cdot10^{-3}$ м$^3$/моль |
| Нормальное ускорение свободного падения | $g_n$ | 9,81 м/с$^2$ |

Приложение 6

## Относительные атомные массы (округленные значения) некоторых элементов (кг/моль)

| Элемент | Символ | Атомная масса | Элемент | Символ | Атомная масса |
|---|---|---|---|---|---|
| Азот | N | 14 | Натрий | Na | 23 |
| Аргон | Ar | 40 | Неон | Ne | 20 |
| Водород | H | 1 | Ртуть | Hg | 201 |
| Гелий | He | 4 | Углерод | C | 12 |
| Кислород | O | 16 | Хлор | Cl | 35 |
| Олово | Sn | 119 | | | |

Приложение 7

## Обработка результатов измерений

При измерениях любую искомую физическую величину определяют всегда с некоторой погрешностью. В задачу измерений входит не только получение наиболее вероятного значения искомой величины, но и оценка допущенной при измерениях погрешности.

Принято различать прямые и косвенные измерения. При прямых измерениях искомое значение величины находят непосредственно путем наблюдений (например, измерение длины линейкой, силы тока – амперметром, массы – пружинными весами). При косвенных измерениях искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, определенными в прямых измерениях (например, определение площади прямоугольника по длине его сторон, силы тока – по напряжению и сопротивлению электрической цепи и т. п.). Независимо от вида измерения экспериментатор должен записывать результат с указанием наиболее вероятного значения (оценки) искомой величины и интервала, в котором оно содержится, а также доверительной вероятности, т. е. надежности результата измерений.

Обычно измерения проводят многократно, путем нескольких наблюдений. За лучшую оценку истинного значения $x_0$ искомой физической величины принимают среднее арифметическое из полученных в процессе отдельных наблюдений значений $x_i$:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum x_i}{n},$$

где $n$ – число наблюдений.

Абсолютная погрешность измерений $\Delta$ есть абсолютное значение разности между $\langle x \rangle$ и $x_0$:

$$\Delta = \left| \langle x \rangle - x_0 \right|.$$

Относительная погрешность измерений $\varepsilon$ есть отношение абсолютной погрешности $\Delta$ к среднему значению $\langle x \rangle$:

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{\langle x \rangle} 100~\%.$$

Погрешности измерений по их свойствам принято подразделять на систематические и случайные. К систематическим погрешностям относятся такие, которые остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины. К ним относятся методические погрешности, являющиеся следствием недостаточной проработанности метода измерений, а также неточности используемых расчетных соотношений. Значительную долю в этой составляющей погрешности имеют инструментальные и личные погрешности. Первые являются следствием несовершенности измерительных приборов и устанавливаются классом их точности. Вторые определяются индивидуальными особенностями эксперимента. Систематические погрешности возникают также за счет неправильной установки средства измерения. Обнаруженные и рассчитанные систематические погрешности следует исключать из результата измерения путем введения поправок. Неисключенные остатки систематических погрешностей переводят в разряд случайных и учитывают, например, как инструментальные погрешности.

К случайным погрешностям относятся такие, которые изменяются случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины и появляются под влиянием целого ряда случайных причин: вибрации здания, трения в опорах измерительного механизма, скачков напряжения в сети, рассеяния внимания экспериментатора, несовершенства органов чувств и средств измерения. Случайные погрешности подчиняются статистическим закономерностям: увеличение числа наблюдений при одних и тех же условиях приводит к уменьшению случайных погрешностей. Необходимое число наблюдений в конечном итоге определяется соотношением случайной и систематической погрешностей. Если систематическая погрешность является определяющей, то измерения выполняют один раз, если основной является случайная погрешность, то проводят многократные наблюдения.

Различают также грубые погрешности и промахи, явно выходящие за границы отклонений, обусловленных ходом эксперимента, квалификацией экспериментатора, свойствами примененных средств измерений и т. п. Результаты наблюдений, содержащие грубые погрешности и промахи, исключают из рассмотрения.

Проводя многократные измерения, всегда получают совокупность случайных результатов отдельных наблюдений $x_i$. Математи ческая обработка результатов измерений (основанная на теории вероятностей) позволяет определить интервал значений $a \le x_0 \le b$, а также вероятность $P$, с которой величина $x_0$ оказывается в этом интервале. Область значений $[a, b]$ называется *доверительным интервалом*, а соответствующее ему значение $P$ – *доверительной вероятностью* $\alpha$. Для большинства технических измерений, а также при физических измерениях в учебных лабораториях оценку погрешностей производят для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$.

Рассмотрим последовательность обработки результатов прямых и косвенных измерений.

***Прямые измерения***

1. В результате прямых измерений получаем $n$ значений измеряемой величины:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n .$$

2. Находим среднее (наиболее вероятное) значение искомой величины по формуле

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (1)$$

3. Определяем оценку среднеквадратического отклонения результата из $n$ измерений по формуле

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \langle x \rangle\right)^2}{n(n-1)}} . \qquad (2)$$

4. В зависимости от числа проведенных измерений $n$ и для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ из таблицы находим коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n}$:

| Число измерений $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_{\alpha,n}$ | 12,7 | 4,30 | 3,18 | 2,78 | 2,57 | 2,45 | 2,26 | 2,09 | 2,04 |

5. По паспорту измерительного прибора или из таблицы, вывешенной в лаборатории, определяем инструментальную погреш

ность $\Delta_{x\text{и}}$. Величина этой погрешности определяется классом точности или указывается в паспорте прибора как предельная погрешность, т. е. для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}997$. Поэтому при принятом значении $\alpha = 0{,}95$ инструментальную погрешность результата измерений следует учитывать с коэффициентом $2/3$.

6. Находим абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta = \sqrt{\left(t_{\alpha,n}\ S_{\langle x\rangle}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\Delta_{x\text{и}}\right)^2}. \tag{3}$$

7. Находим относительную погрешность по формуле

$$\varepsilon_{\langle x\rangle} = \frac{\Delta}{\langle x\rangle}\,100\ \%. \tag{4}$$

8. Округляем абсолютную и относительную погрешности до двух значащих цифр (если первая из них меньше или равна 3) или до одной значащей цифры (если первая из них больше 3).

9. Округляем результат измерения. Число значащих цифр результата измерений должно быть ограничено порядком величины абсолютной погрешности.

10. Записываем результат измерений с указанием единиц:

$$x = \langle x\rangle \pm \Delta; \qquad \varepsilon_{\langle x\rangle} = \ldots\ \% \qquad \text{при } \alpha = 0{,}95.$$

***Косвенные измерения***

При косвенных измерениях физическая величина $z$ определяется функциональной зависимостью

$$z = f\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots, x_n\right), \tag{5}$$

где $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots, x_n$ – непосредственно измеряемые величины или же величины, значения которых приводятся в справочных таблицах.

Вид этой функции различен и приводится в методических указаниях к лабораторной работе.

Результаты косвенных измерений обрабатывают в такой последовательности:

1. Находят средние значения и погрешности (абсолютную и относительную) каждой из непосредственно измеренных величин:

$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Погрешности $\Delta_{\langle x_i \rangle}$ и $\varepsilon_{x_i}$ определяют обработкой прямых измерений или же как инструментальную погрешность прибора при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$.

2. Находят значение $\langle z \rangle$ искомой величины при средних арифметических значениях параметров:

$$\langle z \rangle = f\left(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \langle x_3 \rangle, ..., \langle x_n \rangle\right). \tag{6}$$

3. Определяют погрешность искомой величины $\langle z \rangle$, которая зависит от погрешностей непосредственно измеренных величин. Определение погрешности величины $\langle z \rangle$ можно выполнить одним из двух способов.

Способ 1. Вначале определяют абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta_{\langle z \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_{\langle x_i \rangle} \right)^2}, \tag{7}$$

где $\Delta_{\langle x_i \rangle}$ – абсолютная погрешность величины $x_i$. Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ вычисляют при $x_i = \langle x_i \rangle$.

Затем определяют относительную погрешность по формуле

$$\varepsilon_{\langle z \rangle} = \frac{\Delta_{\langle z \rangle}}{\langle z \rangle} 100\ \%. \tag{8}$$

Способ 2. Вначале определяют относительную погрешность по формуле

$$\varepsilon_{\langle z \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \Delta_{\langle x_i \rangle} \right)^2}\ 100\ \%, \tag{9}$$

где $\Delta_{\langle x_i \rangle}$ – абсолютная погрешность величины $x_i$. Частные производные от логарифма $\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}$ вычисляют при $x_i = \langle x_i \rangle$.

Затем определяют абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta_{\langle z \rangle} = \frac{\langle z \rangle \varepsilon_{\langle z \rangle}}{100}. \tag{10}$$

4. Округляют погрешности.

5. Округляют результат косвенных измерений и записывают с указанием единиц по следующей форме:

$$z = \langle z \rangle \pm \Delta_{\langle z \rangle}; \qquad \varepsilon_{\langle z \rangle} = \ldots\ \% \qquad \text{при } \alpha = 0{,}95.$$

З а м е ч а н и я.

1. Если искомая величина является функцией одной переменной ($i = 1$), то следует применять первый способ, тогда формула (7) принимает вид

$$\Delta_{\langle x \rangle} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \Delta_{\langle x \rangle} \right| = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta_{\langle x \rangle}.$$

Например, $z = A \sin x$, где $A$ – величина постоянная,

$$\langle z \rangle = A \sin \langle x \rangle; \qquad \Delta_{\langle z \rangle} = A \cos \langle x \rangle \Delta_{\langle x \rangle}.$$

2. Погрешность суммы и разности двух величин следует определять первым способом.

Например, $z = Ax \pm By$. В соответствии с формулой (6) $\langle z \rangle = A \langle x \rangle \pm B \langle y \rangle$.

Абсолютную погрешность находят по формуле (7)

$$\Delta_{\langle z \rangle} = \sqrt{A^2 \Delta^2_{\langle x \rangle} + B^2 \Delta^2_{\langle y \rangle}}.$$

3. Если искомая физическая величина определяется как произведение или частное от деления нескольких непосредственно измеряемых величин, то следует использовать второй способ.

Например,

$$z = \frac{A\ x_1^{\alpha}\ x_2^{\beta}}{x_3^{\gamma}}.$$

Прологарифмируем это выражение:

$$\ln z = \ln A + \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 - \gamma \ln x_3.$$

Учитывая, что производная от постоянной величины равна нулю, а производная от натурального логарифма $\frac{\partial \ln x_i}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i}$, по формуле (9) получаем

$$\varepsilon_{\langle z \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\alpha \Delta \langle x_1 \rangle}{\langle x_1 \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\beta \Delta \langle x_2 \rangle}{\langle x_2 \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\gamma \Delta \langle x_3 \rangle}{\langle x_3 \rangle}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\alpha^2 \varepsilon^2_{\langle x_1 \rangle} + \beta^2 \varepsilon^2_{\langle x_2 \rangle} + \gamma^2 \varepsilon^2_{\langle x_3 \rangle}}\,.$$

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
ПРОГРАММА КУРСА ФИЗИКИ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ МЕХАНИКИ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ . . . . . . . . . . . . . . . 30
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ
И ТЕРМОДИНАМИКИ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ
И ТЕРМОДИНАМИКИ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
102
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ . . . . . . . . . . . . . 110
ПРИЛОЖЕНИЯ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111
Приложение 1. О приближенных вычислениях . . . . . . . . . . . . 111
Приложение 2. Единицы СИ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 116
Приложение 3. Внесистемные единицы, допущенные
к применению . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 118
Приложение 4. Десятичные кратные и дольные приставки
и множители . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 119
Приложение 5. Основные физические постоянные
(округленные значения) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 120
Приложение 6. Относительные атомные массы (округленные
значения) некоторых элементов (кг/кмоль) . . . . . . . . . . . . . 120
Приложение 7. Обработка результатов измерений . . . . . . . . . . 121