

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна**

Е. С. Цобкалло В. В. Васильева О. А. Москалюк

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

**Учебное пособие для выполнения
контрольных заданий**

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Санкт-Петербург
2020

УДК 620.22(075.8)
ББК 30.306я73
Ц76

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела
БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова *Н. Р. Туркина*;

кандидат технических наук, заместитель директора регионального института
непрерывного профессионального образования, директор образовательного
регионального центра ФГБОУВО «Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна» *Е. Л. Хлебникова*

Цобкалло, Е. С.

Ц76 Механика материалов и конструкций. Контрольные задания. Контроль-
ные задания: учеб. пособие / Е. С. Цобкалло, В. В. Васильева, О. А. Мос-
калюк. – СПб.: ФГБОУВО «СПбГУПТД», 2020. – 82 с.
ISBN 978-5-7937-1873-8

Учебное пособие содержит рекомендации по выполнению контрольной работы по дисциплине «Механика материалов и конструкций». Приведены общие методические указания к выполнению контрольной работы, условия задач, теоретические положения по соответствующим задачам темам дисциплины и даны примеры решения этих задач, представлен список рекомендуемой литературы.

Разработано для студентов, очной, очно-заочной и заочной форм обучения для укрупненной группы направления подготовки 29.00.00 «Технологии легкой промышленности».

УДК 620.22(075.8)
ББК 30.306я73

ISBN 978-5-7937-1873-8

© ФГБОУВО «СПбГУПТД», 2020
© Цобкалло Е. С., 2020
© Васильева В. В., 2020
© Москалюк О. А., 2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Порядок оформления контрольных работ	5
Литература	6
1. Общие положения	8
2. План рассмотрения нагружено-деформированных состояний	15
3. Осевое растяжение (сжатие)	17
4. Кручение.....	20
5. Плоский поперечный изгиб.....	26
Задачи для контрольных заданий	36
Варианты тестовых заданий для самоконтроля	70
Ответы к тестовым заданиям	82

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов и конструкций – наука о прочности, жесткости, устойчивости отдельных элементов конструкций. Инженеру любой специальности часто приходится производить расчеты на прочность. При проведении расчетов на прочность необходимо стремиться к сочетанию надежности работы конструкции с ее дешевизной, т. е. добиваться наибольшей прочности при наименьшем расходе материала.

Краткий курс механики материалов и конструкций для студентов заочной формы обучения включает в себя только основные виды напряжённо-деформированного состояния элементов конструкций. В связи с этим студенту предлагается решить четыре задачи только по следующим темам дисциплины:

1. Осевое растяжение (сжатие).
2. Статически неопределимые задачи растяжения (сжатия).
3. Кручение.
4. Прямой поперечный изгиб.

Прежде чем приступать к решению задач контрольной работы, необходимо проработать тему, по которой решается задача. Следует изучить теоретические основы данной темы, понять вывод формул, которыми в дальнейшем предстоит пользоваться при решении задачи.

Обращаться к пособиям по решению задач можно только после проработки теоретического материала.

Студент обязан выполнять задания контрольной работы в соответствии с номером своей зачетной книжки. Предпоследняя цифра номера соответствует **номеру строки** в таблице данных, а последняя цифра номера – **номеру схемы** для каждой задачи. Например: номер зачетной книжки 256963, тогда номер строки с данными будет 6, а номер схемы к задаче – 3.

При выполнении задач данные берутся из таблиц, номера которых указаны в условиях задач.

Контрольная работа, выполненная не по шифру, оценивается неудовлетворительно.

К сессии студент допускается только с зачтенными контрольными работами.

Порядок оформления контрольных работ

1. Все задачи, входящие в контрольную работу, должны быть выполнены в одной тетради или одном файле.

2. В заголовке контрольной работы должны быть записаны четко: номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя, отчество студента (полностью), название института и направления, номер зачетной книжки.

3. Заданные по условию задачи схемы должны быть представлены чётко в масштабе.

4. Данные для решения задач берутся в соответствии с шифром.

5. Решения задач должны даваться с пояснениями и промежуточными расчетами.

6. Необходимо указывать размерность всех величин в системе СИ и подчеркивать окончательные результаты.

7. После получения с проверки контрольной работы студент должен исправить в ней отмеченные ошибки и выполнить все данные ему указания. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

Литература

а) основная учебная литература

1. Агапов, В. П. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебник / В. П. Агапов. – Электрон. текстовые данные. – М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2014. – 336 с. гриф УМО – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/26864>. – ЭБС «IPRbooks».

2. Астанин, А. А. Техническая механика. Кн. 2. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А. А. Астанин. – Электрон. текстовые данные. – М.: Машиностроение, 2012. – 160 с. гриф УМО – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/18544>. – ЭБС «IPRbooks».

3. Сопротивление материалов. – 4-е изд. [Электронный ресурс]: учебник / Г. Д. Межецкий [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – М.: Дашков и К, 2013. – 431 с. гриф УМО – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/24812>. – ЭБС «IPRbooks».

4. Атапин, В. Г. Сопротивление материалов. Краткий теоретический курс: учеб. пособие / В. Г. Атапин. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011. – 204 с. – ISBN 978-5-7782-1593-1. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/45436.html>. – Режим доступа: для авторизир. пользователей.

5. Черноусов, Н. Н. Практикум по сопротивлению материалов. Ч. 1. Простые виды нагружения (растяжение, изгиб, кручение): учеб. пособие / Н. Н. Черноусов, Р. Н. Черноусов. – Липецк: Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2014. – 131 с. – ISBN 2227-8397. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/55135.html>. – Режим доступа: для авторизир. пользователей.

б) дополнительная учебная литература

6. Цобкалло, Е. С. Сопротивление материалов: учеб. пособие. Ч. 1. / Е. С. Цобкалло, Л. Н. Петрова, Д. М. Дарвиш. – СПб.: СПГУТД, 2009. – 84 с. – <http://publish.sutd.ru> (практические задания).

7. Сопротивление материалов: учеб. пособие для решения задач по курсу сопротивления материалов для студентов заочной и дневной форм обучения / Е. С. Цобкалло, Л. Н. Петрова, Д. М. Дарвиш. – СПб.: СПГУТД, 2009. – 88 с. – http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=356, по паролю.

8. Осевое растяжение (сжатие). Геометрические характеристики плоских сечений: метод. указания к выполнению расчетно-графических работ для студентов всех форм обучения / сост.: Е. С. Цобкалло, Л. Н. Петрова, О. П. Большухин. – СПб.: СПГУТД, 2009. – 21 с. – http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=353, по паролю.

9. Цобкалло, Е. С. Сопротивление материалов. Механика материалов и конструкций. Изгиб [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Е. С. Цобкалло, О. А. Москалюк. – СПб.: СПбГУПТД, 2017. – 77 с. – Режим доступа: <http://pub->

lish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=2017640, по паролю.

10. Сопротивление материалов. Механика материалов и конструкций. Самостоятельная работа [Электронный ресурс]: метод. указания / сост. Е. С. Цобкалло. – СПб.: СПбГУПТД, 2017. – 26 с. – Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=2017641, по паролю.

1. Общие положения

Механика материалов и конструкций – наука о механической надежности элементов конструкции (материала).

Механическая надежность обеспечивается прочностью, жесткостью и устойчивостью элементов.

- *Прочность* – способность элемента (материала) сопротивляться нагрузкам без разрушения.

- *Жесткость* – способность элемента (материала) сопротивляться деформациям без разрушения.

- *Устойчивость* – способность длинного гибкого элемента сохранять первоначальное прямолинейное состояние под воздействием сжимающей нагрузки, совпадающей с продольной осью элемента.

При расчетах элементов на прочность, жесткость и устойчивость необходимо составить *схему (план) сил*, т. е. в выбранной системе координат представить все внешние нагрузки, действующие на рассчитываемую конструкцию (элемент конструкции).

1.1. Классификация внешних нагрузок

Внешние нагрузки бывают двух видов.

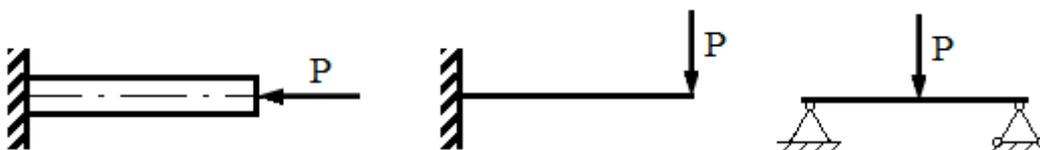
- **Активные:**

- сосредоточенная сила P , [кН];
- распределенная нагрузка q , [кН/м];
- пара сил (момент), M [кН·м].

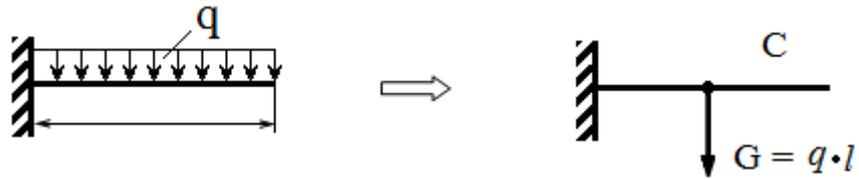
- **Реактивные:**

- продольная реакция, H [кН];
- поперечная реакция, R [кН];
- момент заделки, $M_{\text{зад}}$ [кН·м].

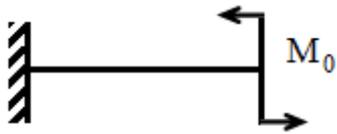
1.1.1. Сосредоточенная сила P , т. е. сила, приложенная в точке



1.1.2. Распределенная нагрузка, т. е. нагрузка, действующая на участке определённой длины. Количественно такой вид нагрузки характеризуется интенсивностью распределённой нагрузки q (**кН/м**), т. е. усилием, приходящимся на единицу длины элемента (в случае равномерно распределённой нагрузки). В ряде случаев (при составлении уравнений статики) равномерно распределённую нагрузку удобно заменить равнодействующей силой G , приложенной в точке C , где $G = ql$ (кН)



1.1.3. Пара сил (момент)



изгибающий момент

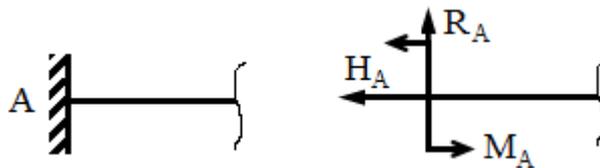


скручивающий момент

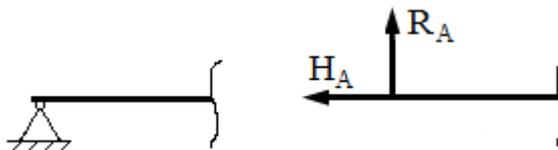
1.2. Способы закрепления элементов конструкции

Элементы конструкции могут закрепляться различными способами, но любое крепление ограничивает *степень свободы подвижности*, которых у движущегося элемента на плоскости может быть три. Рассмотрим варианты ограничения степени свободы подвижности.

1.2.1. Жесткая опора (защемление, жесткая заделка). Ограничение трех степеней свободы.



1.2.2. неподвижная шарнирная опора. Ограничение двух степеней свободы.



1.2.3. Подвижная шарнирная опора (каток). Ограничение одной степени свободы.



Величину и направление реактивных усилий (реакций опор) определяют с помощью уравнений статики (уравнений равновесия). Для составления уравнений статики необходимо выбрать систему координат и спроектировать все внешние (активные и реактивные) усилия. Центр координат обычно помещают в крайнюю левую точку на силовой схеме. Необходимо отметить, что для плоских схем можно составить не более трех следующих линейно-независимых уравнений статического равновесия:

1) сумма проекций всех сил, приложенных к системе, на ось X равна 0.

$$\Sigma X = 0;$$

2) сумма проекций всех сил, приложенных к системе, на ось Y равна 0.

$$\Sigma Y = 0;$$

3) сумма моментов относительно любой точки плоскости от всех силовых факторов, приложенных к системе, равна 0.

$$\Sigma M = 0.$$

Данные уравнения следует составлять с учётом направления усилий, что выражается в знаках (+ или -) перед каждым слагаемым уравнений.

1.3. Способ приложения нагрузок

При решении задач по сопротивлению материалов, связанных с вопросами прочности или жесткости, расчеты производят с помощью силовых схем. Силовая схема представляет собой ось элемента с приведенными к ней внешними усилиями (активными и реактивными). Осью элемента будем называть геометрическое место центров тяжести нормальных (поперечных) сечений стержня (балки, вала). Введем также понятия центральных и главных осей поперечного сечения стержня (балки, вала). Каждое нормальное сечение имеет центр тяжести. Через этот центр тяжести сечения можно провести бесконечное количество осей. Оси, проходящие через центр тяжести поперечного сечения, называются *центральными*.

Рассмотрим произвольное поперечное сечение, имеющее одну ось симметрии (рис. 1.1). Центр тяжести этого сечения обозначим точкой C .

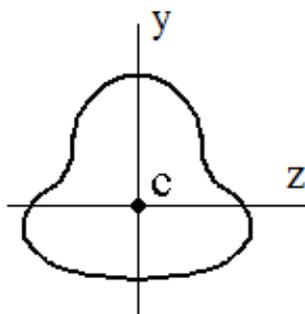


Рис. 1.1

В этом сечении из бесконечного множества центральных осей только лишь ось y окажется осью симметрии. Ось симметрии называется *главной осью*.

Ось симметрии, проходящая через центр тяжести сечения называется *главной центральной осью сечения*. Если сечение не имеет оси симметрии, то положение главных центральных осей может быть определено (см. раздел «Геометрические характеристики плоских сечений» пособия [6], [8]).

Центральная ось z , перпендикулярная указанной оси симметрии y , также будет являться главной осью. Поперечные сечения, имеющие сложную форму, получили название *сложного* или *составного* сечения. В ряде случаев любое составное сечение можно представить в виде сочетания простейших геометрических фигур (прямоугольник, треугольник, круг), либо в виде сочетания прокатных профилей, либо сочетания тех и других. Существует целый ряд геометрических характеристик для плоских сечений любой формы. Самой простой геометрической характеристикой плоского сечения является его площадь. При решении задач по сопротивлению материалов встречаются более сложные характеристики плоских сечений, которые включают в себя не только размеры сечения, но и удаленность точек данного сечения от центра тяжести или главных осей сечения. Для знакомства с этими вопросами необходимо проработать раздел «Геометрические характеристики плоских сечений». Геометрические характеристики для прокатных профилей можно посмотреть в любой справочной литературе или учебниках (задачниках) по сопротивлению материалов. Геометрические характеристики прокатных профилей сведены в таблицы, называемые *сортаментом*.

Расположение внешних силовых факторов (нагрузок) по отношению к продольной оси рассматриваемого элемента и главным осям сечения определяет следующие виды нагружено-деформированного состояния.

Простые виды нагружено-деформированного состояния (простое сопротивление):

- осевое растяжение (сжатие);
- сдвиг. Кручение;
- плоский поперечный изгиб.

Сложные виды нагружено-деформированного состояния (сложное сопротивление):

- пространственный изгиб (частный случай – косоугольный изгиб);
- совместное действие изгиба с осевым растяжением (сжатием);
- совместное действие изгиба с кручением;
- внецентренное растяжение (сжатие).

Нагрузки также классифицируются по продолжительности их приложения.

Приложение внешней нагрузки к элементу за отрезок времени, соизмеримый наблюдателем (т. е. с момента соприкосновения груза с элементом до полного его действия проходит время, которое наблюдатель успевает зафиксировать), классифицируется как *статическое нагружение*.

Приложение внешней нагрузки мгновенно (т. е. нагрузка прикладывается за очень короткий отрезок времени) классифицируется как *динамическое нагружение*.

Существуют также понятия, как *постоянно* действующая (например, вес Александрийской колонны на Дворцовой площади) и *временно* действующая (поезд, идущий по мосту) нагрузки.

1.4. Механические свойства конструкционных материалов

Этот раздел требует теоретической проработки для того, чтобы ответить на ряд важнейших вопросов сопротивления материалов. Например, при каком значении нагрузки в материале наступит опасная ситуация? Какая нагрузка является опасной? Ответ на эти и другие вопросы можно получить, проработав тему «Механические свойства конструкционных материалов». Следует ознакомиться с поведением пластичных и хрупких материалов под нагрузкой на примере диаграмм растяжения, поскольку большинство механических характеристик материалов как прочностных, так и деформационных можно рассчитать при помощи диаграммы растяжения. Например, необходимо обратить внимание на такие важные физико-механические характеристики материала, как модуль нормальной упругости E [МПа], допускаемое напряжение $[\sigma]$ [МПа], продольные деформации – абсолютную Δl , м, и относительную ε , %; поперечные деформации – абсолютную Δd , м, и относительную ψ , %.

Примечание. В курсе сопротивления материалов студентами рассматриваются классические строительно-конструкционные материалы, такие как металлы и сплавы, дерево, камень, бетон и др.

Испытания на растяжение или сжатие проводятся на специальных разрывных машинах, которые записывают диаграмму растяжения, выражающую зависимость удлинения образца Δl , мм, от действующей внешней нагрузки P , т. е. $\Delta l = f(P)$ (рис. 1.2).

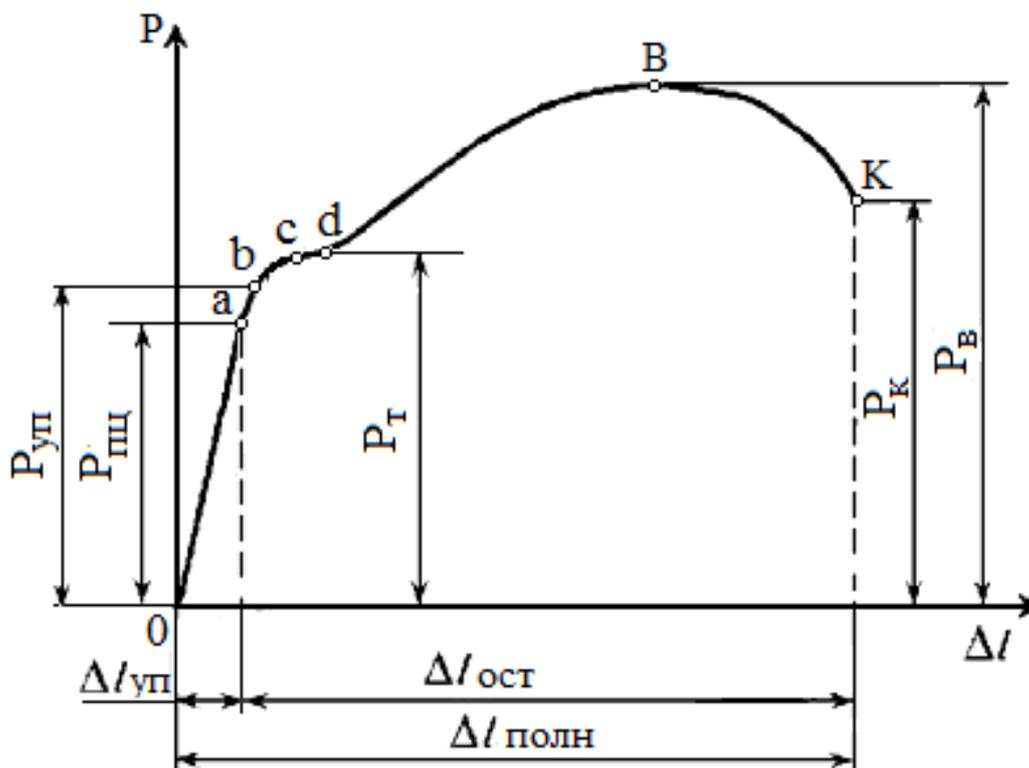


Рис. 1.2. Кривая растяжения углеродистой конструкционной стали

Проанализируем процессы, которые происходят в материале образца при увеличении нагрузки.

Участок $0a$ на диаграмме соответствует упругой деформации материала, когда соблюдается закон Гука. Напряжение, соответствующее упругой предельной деформации в точке a , называется *пределом пропорциональности*.

Предел пропорциональности ($\sigma_{пц}$) – максимальное напряжение, до которого сохраняется линейная зависимость между деформацией и напряжением:

$$\sigma_{пц} = \frac{P_{пц}}{F_0}, \quad (1.1)$$

где $P_{пц}$ – величина внешней нагрузки, соответствующей нагрузке в т. a на диаграмме растяжения;

F_0 – исходная площадь поперечного сечения образца.

Предел пропорциональности – очень важная прочностная характеристика материала, с ее помощью определяются допускаемые напряжения, рассчитываемые по формуле (1.2).

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пц}}{k}, \quad (1.2)$$

где k – коэффициент запаса.

Для пластичных материалов коэффициент $k = 2,5-3$, для хрупких – от 3 до 4.

При напряжениях выше предела пропорциональности происходит равномерная пластическая деформация (удлинение или сужение сечения). В точке b как в наиболее слабом месте начинает образовываться шейка – резкое местное уменьшение поперечного сечения образца.

На участке диаграммы растяжения между точками c и d мы видим существенное увеличение удлинения при совсем незначительном увеличении внешней нагрузки – происходит дальнейшая деформация образовавшейся шейки. Образование шейки характерно для пластичных материалов, которые имеют диаграмму растяжения с максимумом.

В зависимости от природы материала используют физический или условный предел текучести.

Физический предел текучести (σ_T) – это напряжение, при котором происходит увеличение деформации при постоянной нагрузке (наличие горизонтальной площадки на диаграмме растяжения cd). Используется для очень пластичных материалов.

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}, \quad (1.3)$$

где P_T – величина внешней нагрузки, соответствующей горизонтальной площадке на диаграмме растяжения cd .

Но основная часть металлов и сплавов не имеет площадки текучести, для них определяют условный предел текучести.

Условный предел текучести ($\sigma_{0,2}$) – это напряжение, вызывающее остаточную деформацию $\Delta l = 0,2 \%$:

$$\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F_0}. \quad (1.4)$$

Физический или условный предел текучести является важной расчетной характеристикой материала. Действующие в конструкции напряжения должны быть ниже предела текучести.

Равномерная по всему объему пластическая деформация продолжается до значения предела прочности.

Точка B соответствует максимальной нагрузке, которую может выдержать материал, по ней определяется предел прочности материала, который характеризует прочность, как сопротивление значительной равномерной пластической деформации.

Предел прочности (σ_B) – напряжение, соответствующее максимальной нагрузке, которую выдерживает образец до разрушения (временное сопротивление разрыву):

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0}, \quad (1.5)$$

где P_B – величина внешней нагрузки, соответствующей нагрузке в т. B на диаграмме растяжения.

В точке K происходит разрушение материала.

При испытании на растяжение определяются и деформационные характеристики.

К характеристикам пластичности следует отнести, прежде всего, **относительное удлинение** ε – отношение (в процентах) приращения расчетной длины образца, остающегося после разрыва, к его начальной расчетной длине:

$$\varepsilon = \frac{l_x - l_0}{l_0} 100 \%, \quad (1.6)$$

где l_0 и l_x – начальная и конечная длина образца;

и **относительное сужение** ψ – отношение (в процентах) наибольшего уменьшения площади поперечного сечения образца к начальной площади его поперечного сечения F_0 :

$$\psi = \frac{F_0 - F_x}{F_0} 100 \%, \quad (1.7)$$

где F_0 – начальная площадь поперечного сечения образца;

F_x – площадь поперечного сечения в шейке после разрыва.

2. План рассмотрения нагружено-деформированных состояний

Здесь следует заметить, что все расчеты конструкций в сопротивлении материалов (определение деформаций, напряжений) производятся через внутренние силовые факторы, возникающие в сечениях элементов конструкций вследствие приложения внешних нагрузок. Определяются внутренние силовые факторы методом сечений. Для определения опасного сечения или участка строят графики (эпюры) изменения внутренних силовых факторов по длине рассматриваемого элемента.

Рассмотрим понятия силового участка и метода сечений.

2.1. Понятие силового участка

Силовой участок определяется как часть длины элемента конструкции, расположенный между соседними силовыми факторами или занимаемый распределенной нагрузкой (рис. 2.1).

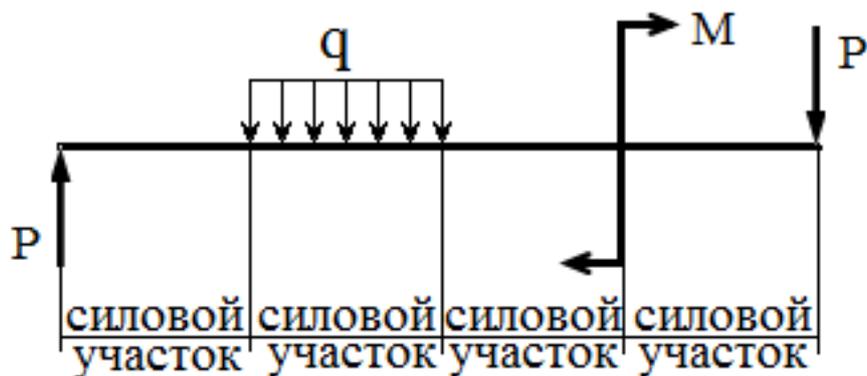


Рис. 2.1

2.2. Правило определения внутренних силовых факторов (метод сечений)

Внешние нагрузки в элементе вызывают внутренние усилия. Для определения этих усилий необходимо «заглянуть» в сечение элемента. Для этого необходимо мысленно разрезать элемент. Этот метод получил название *метод сечений*, который заключается в следующем:

- мысленно разрезаем элемент на каждом силовом участке;
- отбрасываем одну из частей (левую или правую, верхнюю или нижнюю);
- отброшенную часть элемента заменяем внутренними реакциями, т. е. внутренними силовыми факторами. Внутренние силовые факторы возникают строго в соответствии с внешними нагрузками. От действия продольной нагрузки возникает продольное внутреннее усилие, от поперечной нагрузки – внутренняя поперечная сила и изгибающий момент. От сосредоточенного момента – внутренний момент (изгибающий или крутящий);
- определяем значения внутренних силовых факторов как алгебраическую сумму всех соответствующих внешних силовых факторов, действующих на оставшуюся (не отброшенную) часть элемента.

Решение задач осуществляется по общему плану:

- 1) составляется план сил (силовая схема);
- 2) составляются уравнения статического равновесия. Определяются реактивные внешние силы (в случае статически определимых задач);
- 3) элемент разбивается на силовые участки;
- 4) методом сечений определяются внутренние силовые факторы по каждому участку;
- 5) строятся эпюры внутренних силовых факторов по каждому участку.

Исходя из условия прочности, отвечают на поставленный в задаче вопрос: проверяют прочность конструкции, подбирают сечения элементов конструкции, определяют грузоподъемность конструкции.

Далее в § 3 (осевое растяжение – сжатие) на примере стержня, нагруженного продольными силами P_1 и P_2 , рассматривается решение задачи по указанному плану. В этом же параграфе приводится пример решения задач № 1, 2.

3. Осевое растяжение (сжатие)

Осевым растяжением (сжатием) будем называть такой вид нагружено-деформированного состояния, при котором линия действия сил, приложенных к стержню, совпадает с его продольной осью x . Рассмотрим элемент произвольного сечения, к которому приложены усилия, совпадающие с продольной осью, при этом $P_1 > P_2$ (рис. 3.1).

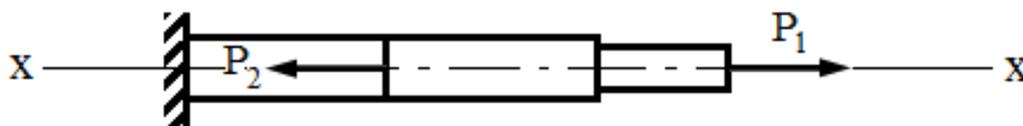


Рис. 3.1

3.1. Определение внутреннего продольного усилия

Под воздействием продольных внешних сил (активных и реактивных), совпадающих с продольной осью элемента x , в поперечных сечениях элемента возникает **внутреннее продольное усилие**, которое обозначим N .

Для определения внутреннего продольного усилия N применим *метод сечений* (см. § 2) в следующей последовательности:

- 1) построим силовую схему (рис. 3.2) (план сил)

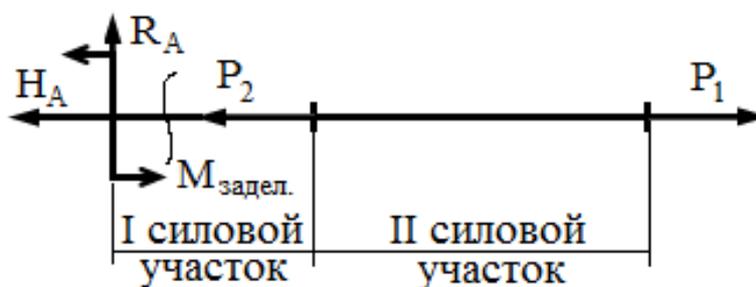


Рис. 3.2

Исходя из силовой схемы, составляем уравнения статики (3.1) (см. раздел 1.2) и определяем величины реактивных усилий H_A , R_A и M_A :

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; -H_A - P_2 + P_1 = 0; \\ \Sigma Y &= 0; R_A = 0; \\ \Sigma M_A &= 0; M_{\text{задел}} = 0. \\ H_A &= P_1 - P_2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Реактивные усилия R_A и $M_{\text{задел}}$ равны нулю, так как отсутствуют соответствующие активные силовые факторы (поперечная сила и момент).

Таким образом, определены все реактивные усилия.

Задачи, в которых неизвестные реактивные усилия можно определить с помощью только уравнений статики, называются **статически определенными**;

2) определим количество силовых участков на схеме (рис. 3.2). На силовой схеме имеются два силовых участка;

3) мысленно проведем сечение на первом силовом участке плоскостью, нормальной к оси стержня, и отбросим левую часть. Отброшенную часть заменим вектором продольного внутреннего усилия $N_1(x)$ для уравнивания оставшейся части (рис. 3.3). Направление вектора N для статически-определимых задач показываем «от сечения», считая его растянутым. Подобным образом рассматривается второй участок и определяется $N_2(x)$ (рис. 3.4).

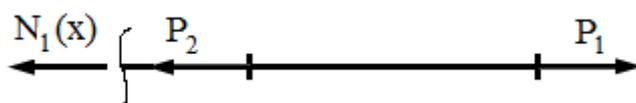


Рис. 3.3



Рис. 3.4

Внутреннее продольное усилие – это есть алгебраическая сумма всех внешних (активных и реактивных) продольных сил, расположенных на оставленной части стержня;

4) составим уравнения статического равновесия для каждого силового участка.

$$\sum X = 0; -N_1(x) - P_2 + P_1 = 0, \quad (3.2)$$

откуда $N_1(x) = P_1 - P_2$.

Для второго силового участка:

$$\sum X = 0; -N_2(x) + P_1 = 0, \quad (3.3)$$

откуда $N_2(x) = P_1$.

3.2. Построение эпюры внутреннего продольного усилия

Построим эпюру распределения внутреннего продольного усилия по длине всего элемента рис. 3.5. Для этого построим на каждом силовом участке график зависимости $N(x)$ по уравнениям (3.2) и (3.3).

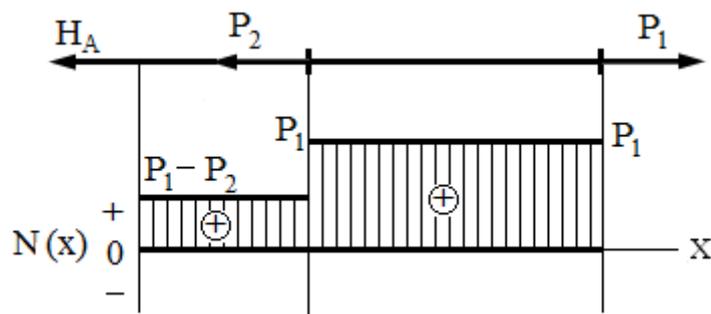


Рис. 3.5. Эпюра распределения внутреннего продольного усилия по длине элемента

Целью построения эпюр является определение опасного участка (сечения) элемента. В нашем примере опасным будет участок II, так как на этом участке значение внутреннего усилия N наибольшее. Рассматриваемая эпюра и для I, и для II силовых участков лежит в положительной области. Знак «+» на эпюре говорит о том, что все участки стержня испытывают деформацию растяжения. Как видно из рис. 3.5, поперечный размер элемента не оказывает влияния на величину внутреннего усилия N .

3.3. Проверка прочности, подбор сечения элемента конструкции

Конечной целью рассмотрения нагруженного состояния будет являться либо проверка прочности, либо подбор сечения элемента конструкции. Прочность любого элемента конструкции, как и конструкции в целом, связана с определением напряжения σ_{max} в опасном сечении и сравнении этой величины с допускаемым напряжением $[\sigma]$ (см. § 1.4). Это условие получило название *условие прочности*. Так, при осевом растяжении (сжатии) условие прочности записывается следующим образом:

$$|\sigma_{max}| = \frac{|N_{max}|}{F} \leq [\sigma], \quad (3.4)$$

где F – площадь поперечного сечения.

В нашем примере $N_{max} = P_1$ (рис. 3.5), $\sigma_{max} = \frac{P_1}{F}$.

Значение допускаемого напряжения $[\sigma]$ зависит только от свойств материала конструкции, определяется экспериментально для каждого материала и указывается в справочной литературе.

Для проверки прочности элемента необходимо сравнить рассчитанное по формуле (3.4) σ_{max} с $[\sigma]$. Если неравенство выполняется, то приложенные к элементу внешние нагрузки удовлетворяют условию прочности.

Для подбора сечения элемента конструкции из условия прочности, записанного для конкретного случая, рассчитывают площадь поперечного сечения по формуле (3.5).

$$F \geq \frac{|N_{max}|}{[\sigma]}. \quad (3.5)$$

4. Кручение

4.1. Внешние и внутренние силовые факторы, метод сечений

С кручением на практике приходится встречаться главным образом при проектировании и расчёте валов. Вал – стержень круглого поперечного сечения.

Нагружено-деформированное состояние – кручение создаётся в результате приложения пар сил M_1 и M_2 в плоскостях, нормальных к оси вала (стержня) (рис. 4.1). Пусть $|M_2| > |M_1|$.

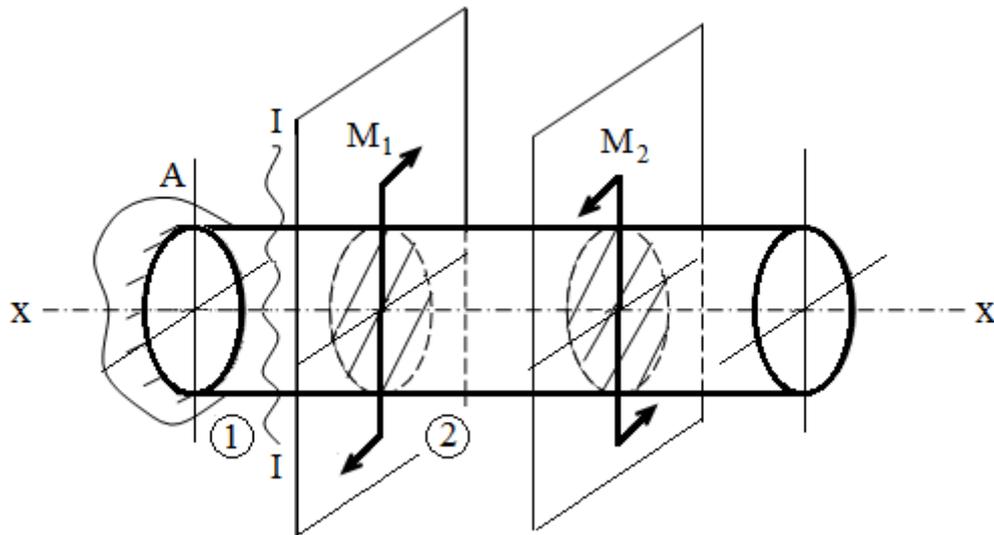


Рис. 4.1

M_1 и M_2 – скручивающие моменты (пары сил) – это внешние силовые факторы (кН·м)

Схематично рис. 4.1 можно представить в упрощенном виде (рис. 4.2).

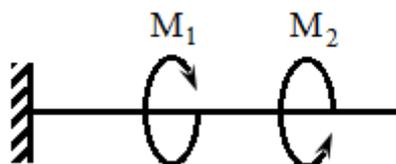


Рис. 4.2

К валу (стержню) может быть приложено сколько угодно таких скручивающих моментов. Для элемента, испытывающего кручение, можно составить только одно уравнение статического равновесия:

$$\Sigma M(x)_i = 0, \quad (4.1)$$

где i – число скручивающих моментов, действующих на вал.

При составлении расчетной схемы (плана сил) – в сечении A следует показать реактивный момент $M_{\text{зад}}$. Величина этого момента находится из уравнения равновесия (4.1).

Далее необходимо перейти от внешних скручивающих моментов к внутренним силовым факторам и их определению.

Внутренним силовым фактором, действующим в нормальных сечениях вала (стержня), является крутящий момент $M_{\text{кр}}$ (кН·м). Величина этого момента в любом нормальном сечении определяется методом сечений. Закон изменения $M_{\text{кр}}$ постоянен для всех сечений каждого из участков. По длине вал разбивается на участки, границами участков служат сечения, в которых приложены внешние скручивающие моменты. Рассматриваемый стержень состоит из двух участков – 1 и 2 (рис. 4.1). Крутящий момент $M_{\text{кр}}$ в поперечном сечении вала (стержня) равен алгебраической сумме внешних (скручивающих) моментов, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Определим методом сечений $M_{\text{кр}}$ в сечении I-I стержня (рис. 4.1). Рассекая стержень сечением I-I и отбросив левую часть, рассмотрим его правую часть (рис. 4.3).

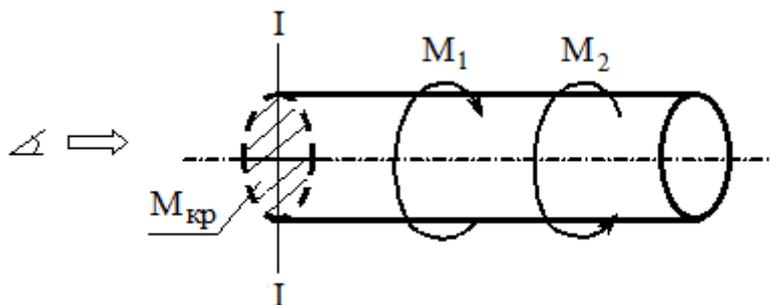


Рис. 4.3.

В сечении I-I будет действовать внутренний крутящий момент $M_{\text{кр}1}$, величина которого равна алгебраической сумме скручивающих внешних моментов M_1 и M_2 , действующих по правую сторону от сечения I-I:

$$M_{\text{кр}1} = \Sigma M_{\text{скр}}. \quad (4.2)$$

Если смотреть на сечение I-I, то внешние скручивающие моменты, направленные по часовой стрелке, будут записываться в уравнении (4.1) со знаком «+», а направленные против часовой стрелки – со знаком «-».

Так в примере (рис. 4.3), с учетом сказанного, выражение (4.3) примет вид

$$M_{\text{кр}1} = -M_1 + M_2. \quad (4.3)$$

По аналогии крутящий момент $M_{\text{кр}2}$ на участке 2 (рис. 4.3) будет равен

$$M_{\text{кр}2} = M_2. \quad (4.4)$$

Для выявления опасного участка необходимо построить эпюру крутящих моментов (рис. 4.4).

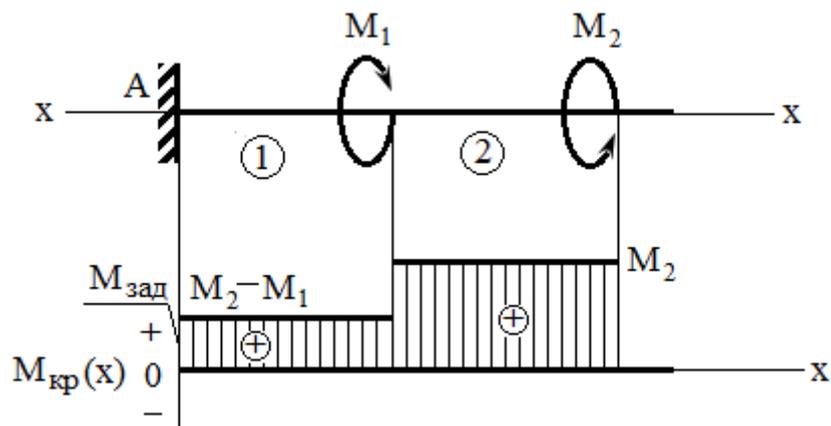


Рис. 4.4. Эпюра крутящих моментов

Следует обратить внимание на то, что в данном примере, при определении внутреннего крутящего момента $M_{кр}$ и на участке 1, и на участке 2 рассматривалась правая от сечения часть стержня, т. е. отбрасывалась левая часть с заделкой. При таком подходе можно было не вычислять момент в заделке $M_{зад}$. Величина реактивного момента $M_{зад}$ получается в этом случае при построении эпюры крутящих моментов «автоматически» как значение внутреннего крутящего момента в сечении А.

Из рис. 4.4 следует, что опасным является участок 2, т. е. $|M_{кр2}| = |M_{max}| = |M_2|$.

Скачки на эпюре наблюдаются в тех сечениях на заданной схеме, в которых приложены скручивающие моменты M_1 , M_2 и $M_{зад}$. Величина этих скачков равна величине моментов M_1 , M_2 , $M_{зад}$. Направления скачков на эпюре также определяется направлением этих моментов.

4.2. Напряжения и условие прочности при кручении

Рассмотрим отрезок стержня бесконечно малой длины dx , испытывающего кручение под действием внешнего скручивающего момента $M_{скр}$ (рис. 4.5).

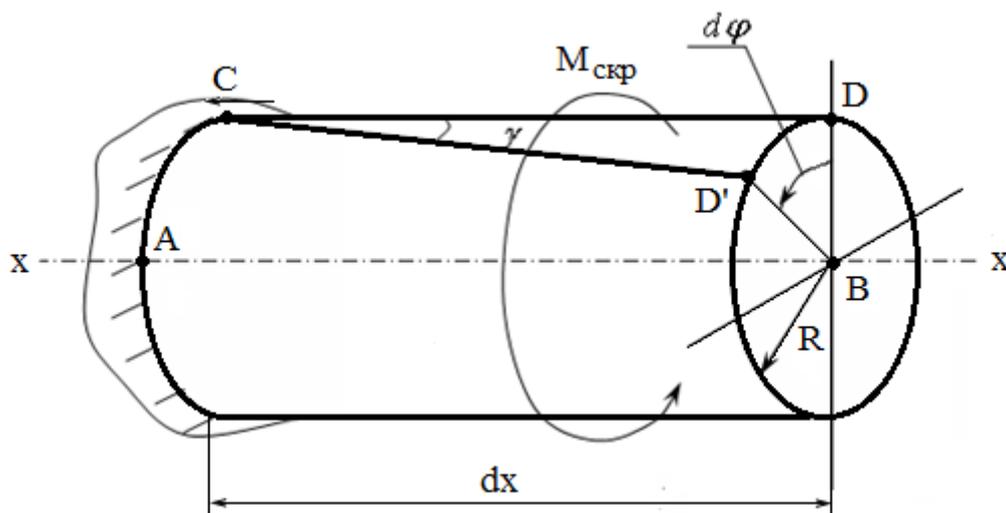


Рис. 4.5

Вырезанный на поверхности этого стержня элемент 1234 находится в состоянии чистого сдвига (рис. 4.6).

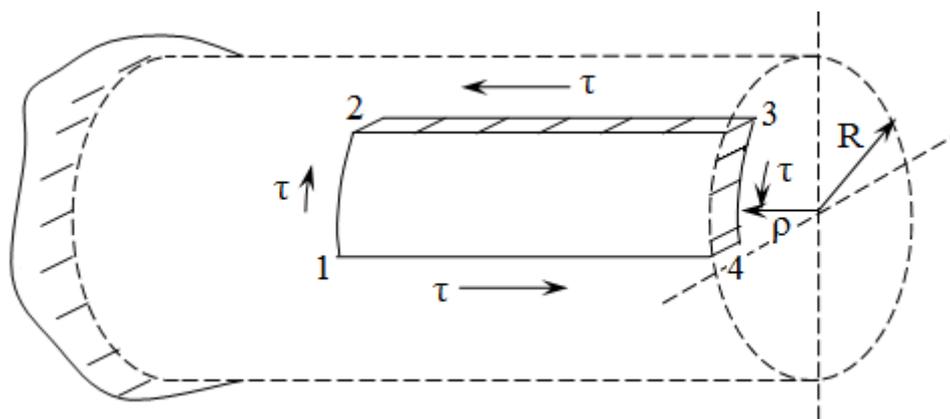


Рис. 4.6

По взаимно перпендикулярным граням этого элемента действуют только касательные напряжения τ .

$$\tau = \frac{|M_{\text{кр}}|}{J_{\rho}} \cdot \rho, \quad (4.5)$$

где $|M_{\text{кр}}|$, кН·м – внутренний крутящий момент;

J_{ρ} , м⁴ – полярный момент инерции сечения;

ρ , м – расстояние от точки, в которой рассчитывается τ , до полюса (центра тяжести круглого сечения вала).

Для наиболее удаленных от полюса точек, т. е. при $\rho = R$ величина τ – наибольшая (τ_{max}) и может быть вычислена по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{\text{кр}}|}{J_p} \cdot R, \quad (4.6)$$

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{\text{кр}}|}{W_p}, \quad (4.7)$$

где W_p – осевой момент сопротивления сечения;

$$W_p = \frac{J_p}{R}. \quad (4.8)$$

Для опасных сечений, в которых $|M_{\text{кр}}| = |M_{\text{кр}}|_{\max}$, имеем

$$\tau = \frac{|M_{\text{кр}}|_{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (4.9)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

Выражение (4.9) называется условием прочности при кручении.

4.3. Деформации и условие жесткости при кручении

Вернемся к рассмотрению отрезка стержня АВ (рис. 4.5). Сечение А неподвижно. Сечение В повернется по отношению к сечению А на угол $d\varphi$, а образующая CD – займет положение CD' , т. е. сдвинется на угол γ . Таким образом, деформация при кручении характеризуется либо углом сдвига образца γ , либо абсолютным углом закручивания $d\varphi$.

Для определения абсолютного угла закручивания на участке стержня длиной l используется следующая формула:

$$\Delta\varphi = \frac{|M_{\text{кр}}| \cdot l}{G \cdot J_p}, \quad (4.10)$$

где $\Delta\varphi$, град – абсолютный угол закручивания;

$|M_{\text{кр}}|$, кН·м – внутренний крутящий момент;

l , м – длина участка элемента, на котором вычисляется угол закручивания;

G , МПа – модуль упругости II рода;

J_p , м⁴ – полярный момент инерции сечения.

Относительный угол закручивания, град/м

$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{l} \quad (4.11)$$

или

$$\theta = \frac{|M_{кр}|}{G \cdot J_{\rho}}. \quad (4.12)$$

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta = \frac{|M_{кр}|_{max}}{G \cdot J_{\rho}} \leq [\theta], \quad (4.13)$$

где $[\theta]$ – допускаемый угол закручивания.

На практике часто приходится решать задачи по подбору диаметра вала, испытывающего кручение. Диаметр вала должен отвечать и условию прочности, и условию жесткости. Подбор диаметра вала осуществляется с использованием формул (4.9) и (4.13).

Подберем диаметр вала, отвечающий условию прочности, $d_{пр}$.

Из условия прочности (4.9):

$$W_{\rho} \geq \frac{|M_{кр}|_{max}}{[\tau]}; \quad (4.14)$$

$$\frac{\pi \cdot d_{пр}^3}{16} \geq \frac{|M_{кр}|_{max}}{[\tau]}; \quad (4.15)$$

$$d_{пр} \geq \sqrt[3]{\frac{16|M_{кр}|_{max}}{\pi[\tau]}}. \quad (4.16)$$

Подберем диаметр вала, отвечающий условию жесткости, $d_{ж}$.

Из условия жесткости (4.13)

$$J_{\rho} \geq \frac{|M_{кр}|_{max}}{G \cdot [\theta]}; \quad (4.17)$$

$$\frac{\pi \cdot d_{ж}^4}{32} \geq \frac{|M_{кр}|_{max}}{G \cdot [\theta]}; \quad (4.18)$$

$$d_{ж} \geq \sqrt[4]{\frac{32|M_{кр}|_{max}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}}. \quad (4.19)$$

Из двух значений $d_{пр}$ и $d_{ж}$, выбираем наибольшее значение.

5. Плоский поперечный изгиб

5.1. Внешние и внутренние силовые факторы, метод сечений

Элементы конструкции, воспринимающие изгибающие нагрузки, называются балками.

5.1.1. Активные внешние силовые факторы

- Сосредоточенная сила P (сечение C на *рис. 5.1, 5.2*). Единицы измерения – единицы силы (Н, кг, т, ... и т. д.);
- Распределённая нагрузка (участок AB на *рис. 5.1*, частный случай равномерно распределённой нагрузки). Характеризуется интенсивностью q , т. е. характеризуется нагрузкой, приходящейся на единицу длины. Единицы измерения – единицы силы / единицы длины (Н/м, кг/см, т/м, ... и т. д.);
- Сосредоточенный момент (пара сил) M_0 , (сечение A на *рис. 5.1, 5.2*). Единицы измерения – единицы силы · единицы длины (Н·м, кг·см, т·м, ... и т. д.).

Под действием активных внешних нагрузок (P , M_0 , q), приложенных к балкам, которые будут изгибаться, при этом изгиб будет называться плоским поперечным, если соблюдаются следующие условия:

- все внешние нагрузки, приложенные к балке, расположены в одной плоскости;
- эта плоскость проходит через одну из главных осей инерции всех нормальных сечений балки.

5.1.2. Реактивные внешние силовые факторы

Балки могут закрепляться с помощью опор трёх типов:

- шарнирно-подвижной (опора B на *рис. 5.1*);
- шарнирно-неподвижной (опора A на *рис. 5.1*);
- жесткой заделки (опора B на *рис. 5.2*).

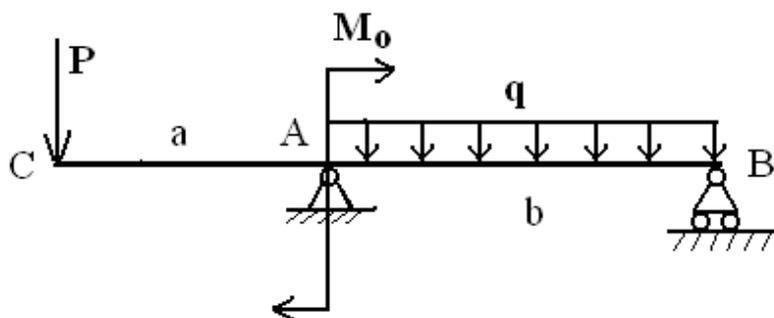


Рис. 5.1

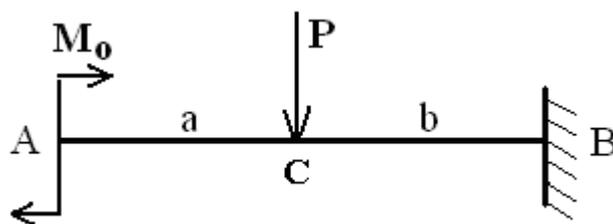


Рис. 5.2

5.1.3. Внутренние силовые факторы. Дифференциальные зависимости между $Q(x)$ и $M(x)$

Под воздействием внешних силовых факторов в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия – *внутреннее поперечное усилие $Q(x)$* и *внутренний изгибающий момент $M(x)$* . Внутренние силовые факторы определяют с помощью метода сечений (см. разд. 2).

Внутреннее поперечное усилие $Q(x)$ есть алгебраическая сумма всех внешних поперечных сил (активных и реактивных), действующих на оставленной части балки.

Внутренний изгибающий момент $M(x)$ есть алгебраическая сумма всех моментов, возникающих в сечении от внешних усилий (активных и реактивных), действующих на оставленной части балки.

При составлении функций $Q(x)$ и $M(x)$ для расчета внутренних усилий используется **правило знаков**, приведенное ниже (рис. 5.3).

Для внутреннего поперечного усилия $Q(x)$:

- при рассмотрении сечения слева внешняя сила, направленная вверх, считается положительной, вниз – отрицательной;
- при рассмотрении сечения справа внешняя сила, направленная вверх, считается отрицательной, вниз – положительной.

Для внутреннего изгибающего момента $M(x)$:

- внешний момент считается положительным, если его действие на балку вызывает растяжение нижних волокон, а сжатие – верхних волокон;
- внешний момент считается отрицательным, если его действие на балку вызывает растяжение верхних волокон, а сжатие – нижних волокон.

При рассмотрении сечения и слева, и справа правило знаков для внутреннего изгибающего момента $M(x)$ одинаково.

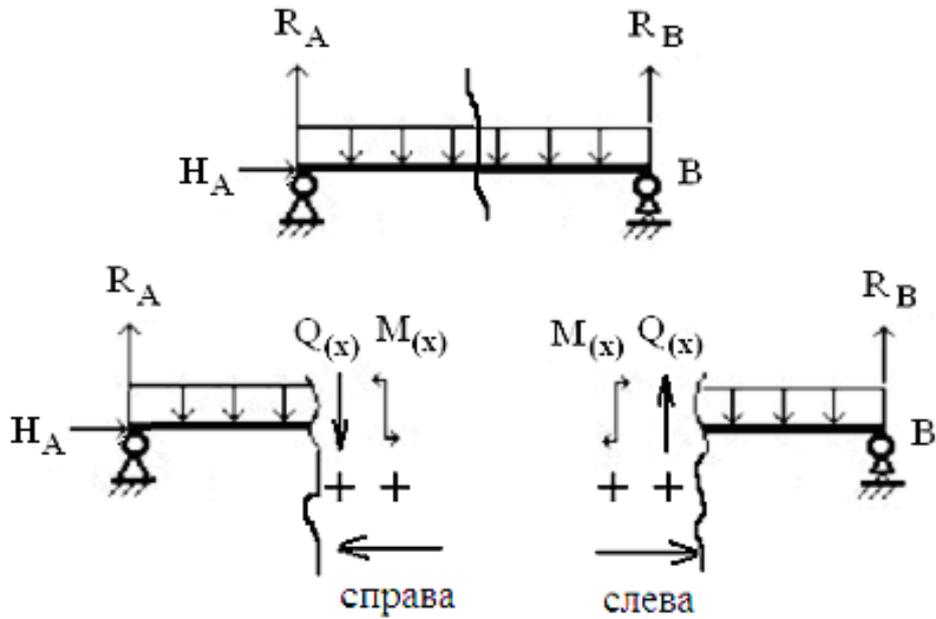


Рис. 5.3. Иллюстрация правила знаков при изгибе

Чтобы проще запомнить это правило, можно пользоваться следующей схемой, представленной на рис.5.4.

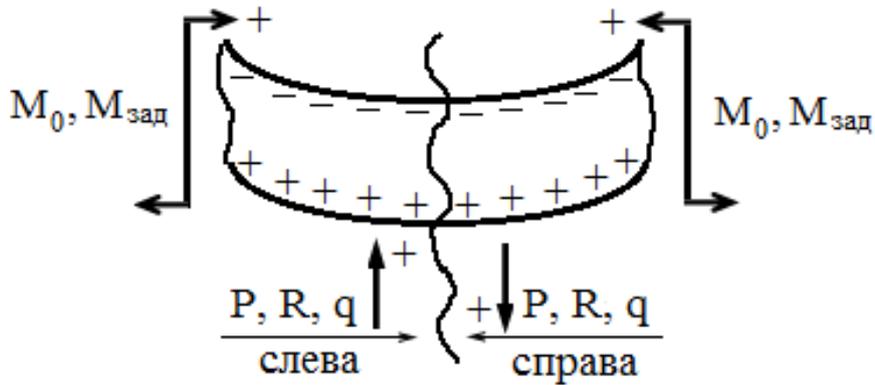


Рис. 5.4

Дифференциальные зависимости между внутренними силовыми факторами $Q(x)$, $M(x)$ и интенсивностью распределённой нагрузки q имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ(x)}{dx} &= q \\ \frac{dM(x)}{dx} &= Q(x) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

$$\left. \begin{aligned} dQ(x) &= q \cdot dx \\ dM(x) &= Q(x) \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q(x) &= \int_{x_1}^{x_2} q dx \\ \Delta M(x) &= \int_{x_2}^{x_1} Q(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} q dx &= S_q \\ \int_{x_1}^{x_2} Q(x) dx &= S_Q \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Здесь S_q – площадь участка балки, загруженного внешней распределенной нагрузкой q . Величина S_q определяет приращение ординаты $Q(x)$ на интервале от x_1 до x_2 , т. е. $\Delta Q(x)$.

S_Q – площадь эпюры $Q(x)$ на интервале от x_1 до x_2 . Величина S_Q определяет приращение ординаты $M(x)$ на этом интервале, т. е. $\Delta M(x)$.

Формулы (5.3) и (5.4) позволяют строить эпюры $Q(x)$ и $M(x)$ по площадям.

5.2. Нормальные и касательные напряжения при изгибе. Условие прочности

Поперечная сила $Q(x)$ вызывает в точках поперечного сечения балки касательное напряжение τ , а изгибающий момент $M(x)$ – нормальные напряжения σ .

Нормальные напряжения при плоском поперечном изгибе определяются следующим образом:

$$\sigma = \frac{|M(x)|}{J_z} \cdot y, \quad (5.5)$$

где $|M(x)|$ – изгибающий момент, действующий в рассматриваемом сечении, определяется из эпюры $M(x)$;

J_z – осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси z ;

y – расстояние от точки, в которой определяем σ , до нейтральной оси.

Нейтральная ось – ось z .

Из формулы (5.5) следует, что самые опасные точки сечения будут находиться на расстоянии y_{\max} от нейтральной оси z ; в этом случае формула (5.5) может быть написана так:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M(x)|}{J_z} \cdot y_{\max}; \quad (5.6)$$

$$\frac{J_z}{y_{\max}} = W_z, \quad (5.7)$$

где $W_z, \text{ м}^3$ – геометрическая характеристика сечения, называется осевым моментом сопротивления.

Для опасных точек сечения (наиболее удаленных от нейтральной оси z) формула (5.5) принимает вид

$$\sigma_{max} = \frac{|M(x)|}{W_z}. \quad (5.8)$$

В опасном сечении балки, где на эпюре внутреннего изгибающего момента наблюдается максимальное значение, т. е. $|M(x)|_{max}$, будут находиться точки, имеющие наибольшее значение нормальных напряжений σ_{max} :

$$\sigma_{max} = \frac{|M(x)|_{max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (5.9)$$

Выражение (5.9) называется *условием прочности* при плоском поперечном изгибе.

Касательные напряжения при плоском поперечном изгибе определяются по формуле Журавского

$$\tau = \frac{|Q(x)| \cdot S_z^{отс}}{J_z \cdot b(y)}, \quad (5.10)$$

где $|Q(x)|$ – поперечная сила, действующая в рассматриваемом сечении; берем с эпюры $Q(x)$;

J_z – осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси z ;

$S_z^{отс}$ – статический момент площади отсеченной части сечения на уровне точки, в которой определяем τ ;

$b(y)$, м – ширина сечения на уровне точки, в которой определяем τ .

5.3. Главные напряжения при плоском поперечном изгибе

Рассмотрим отрезок балки, испытывающей плоский поперечный изгиб, выделенный двумя сечениями I-I и II-II на бесконечно малом расстоянии dx (рис. 5.5).

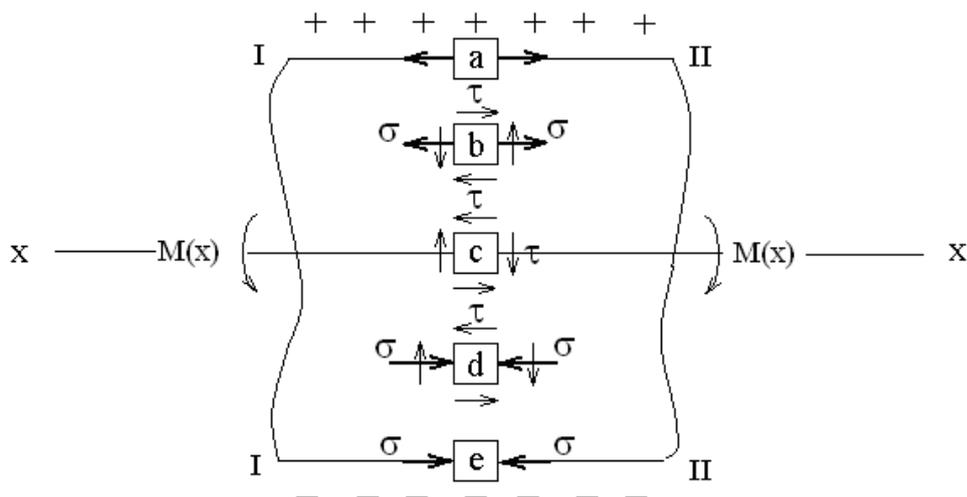


Рис. 5.5

Изгибающий момент $M(x)$ в поперечных сечениях этого отрезка балки отрицательный, т. е. верхние волокна растянуты, нижние – сжаты. В окрестностях точек a, b, c, d, e , взятых на различном расстоянии от оси X балки, мысленно вырежем элементарные кубики с бесконечно малым размером ребра, боковые стенки которых совпадают с нормальным сечением балки. Из рис. 5.5 следует, что материал балки в этих точках находится в плоском напряженном состоянии, а присутствие касательных напряжений τ на гранях элементов указывает на то, что эти площадки не главные, значит, значения нормальных напряжений, действующие в них, не являются главными. Главные площадки в окрестностях этих точек будут повернуты по отношению к этим площадкам на $\angle\alpha$. Нахождение этих площадок и действующих в них главных напряжений определяем по формуле (19), полученной при решении обратной задачи плоского напряженного состояния (см. раздел теория напряженного состояния пособия [8]).

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad (5.11)$$

5.4. Деформации и условие жесткости при плоском поперечном изгибе

Приложение внешних силовых факторов к балке приводит к искривлению ее оси. Ось балки является геометрическим местом точек, соответствующим центрам тяжести нормальных сечений. При искривлении оси центры тяжести сечений, а это значит, что и сами сечения балки, будут перемещаться. Ввиду малости значений этих перемещений можно допустить, что их смещение происходит по вертикали.

На рис. 5.6 показана изогнутая ось балки, защемленной одним концом, под действием внешней силы P . Обозначим вертикальные перемещения центров тяжести сечений $f(x)$. Кроме вертикальных перемещений имеют место и угловые перемещения сечений, которые обозначим $V(x)$.

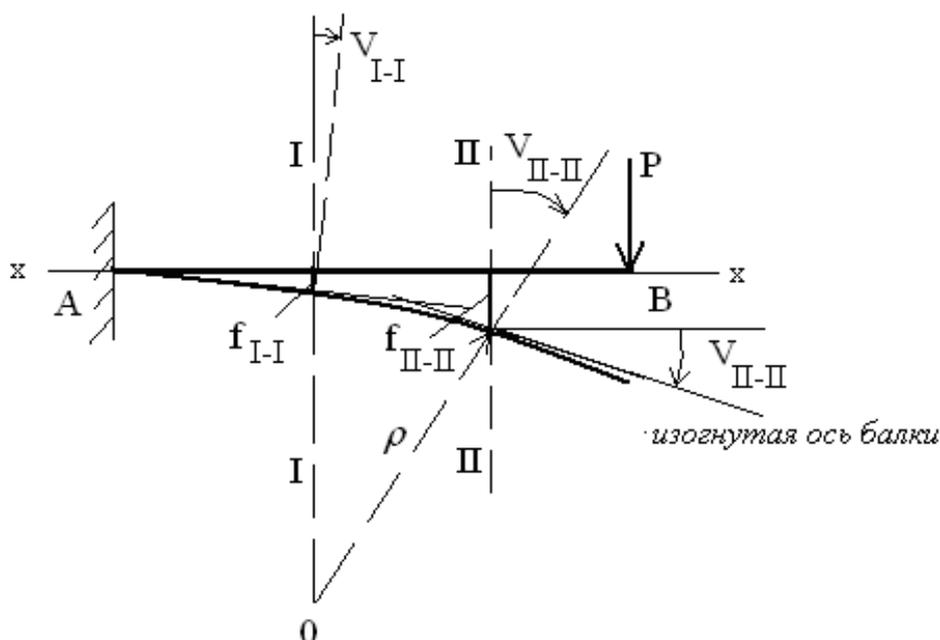


Рис. 5.6. Линейные и угловые перемещения балки. Положение изогнутой оси

Произвольно взятое сечение I-I балки имеет вертикальное перемещение f_{I-I} и угловое перемещение V_{I-I} . Правило знаков: вертикальное перемещение сечения вниз от оси X будем считать отрицательным, вверх – положительным. Поворот сечения по часовой стрелке – отрицательным, против часовой стрелки – положительным. В нашем примере $f_{I-I} (-)$; $V_{I-I} (-)$.

Для построения изогнутой оси балки необходимо численно определить перемещения нескольких сечений, после чего графически в масштабе можно построить изогнутую ось балки и график угловых перемещений. Целью такого построения является определение максимального прогиба балки и наибольшего значения угла поворота.

Существует несколько методов определения перемещений балки. Одним из них является метод начальных параметров. Сущность метода заключается в составлении функций $f(x)$ и $V(x)$, описывающих очертание изогнутой оси балки и кривой углов поворота. В этих функциях X обозначаем текущую координату любого сечения балки, т. е. расстояние выбранного сечения от начала координат. В методе начальных параметров начало координат всегда помещают в крайнее левое сечение балки. Для балки, изображенной на рис. 5.6, начало координат необходимо поместить в сечение A .

На рис. 5.6 показан центр кривизны O и ρ – радиус кривизны.

Кривизна балки K может также выразить деформацию балки.

С одной стороны,

$$K = \frac{1}{\rho}; \quad (5.12)$$

$$K = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}. \quad (5.13)$$

С другой стороны,

$$K = \frac{M(x)}{E \cdot J_z}, \quad (5.14)$$

т. е. кривизна зависит от силовых факторов, входящих в функцию $M(x)$, и от деформационной жесткости балки при изгибе – EJ_z .

Приравнивая правые части выражений (5.13) и (5.14), получим

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{E \cdot J_z}. \quad (5.15)$$

Выражение (5.15) носит название дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Это уравнение связывает вертикальные перемещения сечений балки (вторую производную) с силовыми факторами, приложенными к балке и входящими в функцию $M(x)$.

Проинтегрировав обе части выражения (5.15), получим

$$\frac{df(x)}{dx} = V(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \int_L M(x) dx + V_0. \quad (5.16)$$

Проинтегрировав обе части выражения (5.16), получим

$$f(x) = f_0 + V_0 x + \frac{1}{E \cdot J_z} \int_L V(x) dx, \quad (5.17)$$

где V_0 и f_0 – постоянные интегрирования. Их физический смысл: f_0 – вертикальное перемещение крайнего левого сечения балки; V_0 – угол поворота крайнего левого сечения балки. V_0 и f_0 называются начальными параметрами и определяются из начальных условий задачи (Н.У.).

Таким образом, составив функцию изгибающих моментов для всей балки $M(x)$ и дважды проинтегрировав это выражение (5.15), получаем функцию углов поворота $V(x)$ и функцию вертикальных перемещений сечений $f(x)$.

Графическое изображение функции $f(x)$, построенное в масштабе, дает очертание изогнутой оси балки под действием на нее внешней нагрузки. Из графика определяем величину максимального прогиба и сравниваем ее с предельно допустимой величиной, т. е.

$$f_{max} \leq [f]. \quad (5.18)$$

Выражение (5.18) называется условием жесткости балки при изгибе. $[f]$ – предельно допустимая величина прогиба балки при плоском поперечном изгибе, измеряется в единицах длины (мм, см, м).

Разберем применение метода начальных параметров для определения угловых и линейных перемещений балки, изображенной на *рис. 5.6*. За начало координат при использовании метода начальных параметров принимают крайнее левое сечение балки, и все участки балки рассматривают по направлению слева направо.

1. Составляем план сил (*рис. 5.7*).

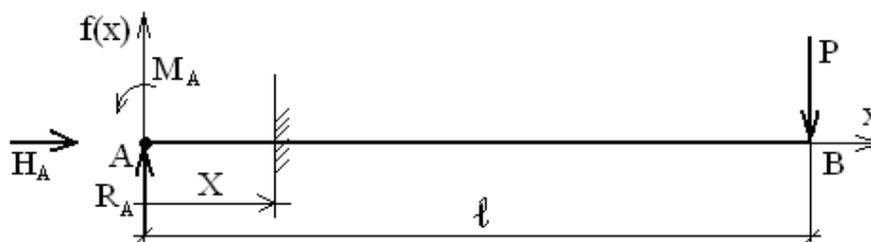


Рис. 5.7. План сил

2. Из уравнений статического равновесия определяем силы реакции опор в заделке А:

$$H_A = 0; R_A = P; M_A = P \cdot l. \quad (5.19)$$

3. Начало координат помещаем в (\cdot) А.

4. Составляем функцию изгибающих моментов $M(x)$ (на балке один участок), идя слева направо

$$M(x) = R_A x - M_A x^0. \quad (5.20)$$

5. Интегрируем выражение (5.20):

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\frac{R_A x^2}{2} - M_A x \right]. \quad (5.21)$$

6. Интегрируем выражение (5.21):

$$f(x) = f_0 + V_0 x + \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} \right]. \quad (5.22)$$

Примечание. В рассматриваемой задаче силовые факторы R_A и M_A действуют непосредственно в начале координат, поэтому в выражениях (5.20–5.22) x – расстояние от точки А до рассматриваемого произвольного сечения. В случае, если внешний силовой фактор удалён от начала координат (например, на расстояние «а») в соответствующем этому силовому фактору слагаемом, в уравнении необходимо вместо x подставлять $(x-a)$, т. е. необходимо указывать расстояние от точки приложения силового фактора до рассматриваемого сечения.

7. Для того чтобы пользоваться функциями (5.21) и (5.22), необходимо определить начальные параметры V_0 и f_0 . Записываем условия закрепления балки, т. е. начальные условия (Н.У.):

В нашей задаче

$$\left. \begin{array}{l} 1) f_{x=0} = 0 \\ 2) V_{x=0} = 0 \end{array} \right\} \quad (5.23)$$

Выражения (5.23) указывают на то, что сечение A , находящееся в заделке, не перемещается, т. е.

$$\left. \begin{array}{l} f_{x=0} = f_0 = 0 \\ V_{x=0} = V_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (5.24)$$

Примечание. В других задачах для определения начальных параметров могут быть использованы условия равенство нулю перемещений в других местах закрепления балки, например, на опорах линейное перемещение сечений также равно нулю.

8. Определяем вертикальное перемещение и угол поворота сечения B , находящегося на конце балки:

Из (5.22):

$$f_B = f_{x=l} = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^3}{2} \right] = -\frac{Pl^3}{3E \cdot J_z}; \quad (5.25)$$

Из (5.21):

$$V_B = V_{x=l} = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\frac{Pl^2}{2} - Pl^2 \right] = -\frac{Pl^2}{2E \cdot J_z}. \quad (5.26)$$

Задачи для контрольных заданий

Тема 1. Осевое растяжение (сжатие)

В этой теме рассмотрены простые случаи воздействия сил на стержень и содержится ряд вопросов (механические свойства материалов, выбор допускаемых напряжений, статически неопределимые задачи), встречающихся в других разделах курса.

Необходимо обратить внимание на то, что механические характеристики материала (предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести, предел прочности) находят путем деления соответствующей нагрузки на первоначальную площадь поперечного сечения. В связи с этим получают условные напряжения, а не истинные; для вычисления последних надо делить нагрузки на действительную площадь поперечного сечения, которая изменяется при опыте. Зная истинные напряжения, можно построить так называемую истинную диаграмму растяжения, которая точнее характеризует свойства материала, чем условная диаграмма. Пользуясь формулами, основанными на законе Гука, надо всегда помнить, что этот закон справедлив только до предела пропорциональности. Нельзя, например, напряжение для мягкой стали при $\varepsilon = 0,1$ вычислять по формуле $\sigma = E \cdot \varepsilon$, так как тогда получается, что $\sigma = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,1 = 20\,000$ МПа, в то время как при 400 МПа материал уже разрушается.

ЗАДАЧА 1

Стальной стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) находится под действием продольной силы P и собственного веса ($\gamma = 78$ кН/м³). Найти перемещение сечения I-I (рис. 1). Данные указаны в табл. 1.

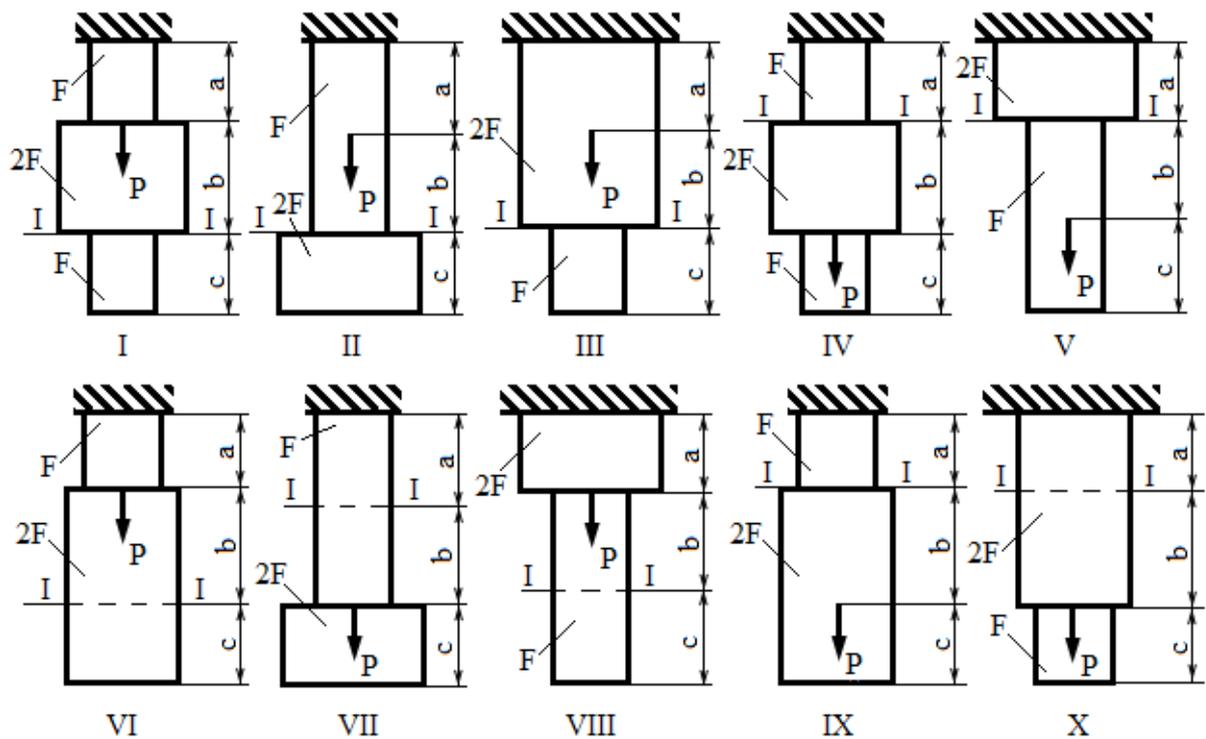


Рис. 1

Т а б л и ц а 1

Номер строки	P, Н	F, см ²	a	b	c
			м		
1	1100	11	2,1	3,0	1,1
2	1200	12	2,2	2,9	1,2
3	1300	13	2,3	2,8	1,3
4	1400	14	2,4	2,7	1,4
5	1500	15	2,5	2,6	1,5
6	1600	16	2,6	2,5	1,6
7	1700	17	2,7	2,4	1,7
8	1800	18	2,8	2,3	1,8
9	1900	19	2,9	2,2	1,9
0	2000	20	3,0	2,1	2,0

Далее рассмотрим решение задач на осевое растяжение (сжатие) № 1.

Пример решения ЗАДАЧИ 1

Стальной стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) находится под действием продольной силы P и собственного веса ($\gamma = 78$ кН/м³). Найти перемещение сечения I-I (рис. 1).

Дано: $P = 1000$ Н
 $\gamma = 78$ кН/м³ = $78 \cdot 10^3$ Н/м³
 $E = 2 \cdot 10^5$ МПа = $2 \cdot 10^{11}$ Па
 $F_a = 10$ см² = $10 \cdot 10^{-4}$ м²
 $F_b = F_c = 12$ см² = $12 \cdot 10^{-4}$ м²
 $a = 2$ м
 $b = 1,5$ м
 $c = 3$ м

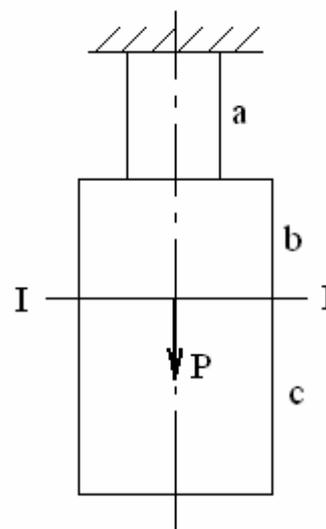


Рис. 1. Заданная схема

Требуется: определить перемещение сечения I-I – δ_{I-I} .

РЕШЕНИЕ

1. Общие формулы

Под действием внешней силы P и веса всех участков стержня сечение I-I переместится вниз вследствие растяжения участков a и b , т. е.

$$\delta_{I-I} = \Delta l_a + \Delta l_b, \quad (1)$$

где Δl_a – абсолютная деформация участка a ; Δl_b – абсолютная деформация участка b .

Деформации участков a и b определяем по формуле

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}. \quad (2)$$

В формуле (2) (Закон Гука) N – внутреннее усилие в сечении рассматриваемого участка. Как указывалось выше, величина N определяется методом сечения.

2. Составление плана сил

От заданной схемы (рис. 1) переходим к составлению плана сил, R – сила реакции со стороны опоры (заделки) (рис. 2).

3. Определение неизвестной силы R

Для этого составим уравнение статического равновесия

$$\sum Y = 0; \quad R - P - Q_a - Q_b - Q_c = 0, \quad (3)$$

$$R = P + Q_a + Q_b + Q_c. \quad (4)$$

В уравнении (4):

Q_a – вес участка a :

$$Q_a = F_a \cdot a \cdot \gamma = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 78 \cdot 10^3 = 156H ;$$

Q_b – вес участка b :

$$Q_b = F_b \cdot b \cdot \gamma = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 \cdot 78 \cdot 10^3 = 140H ;$$

Q_c – вес участка c :

$$Q_c = F_c \cdot c \cdot \gamma = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 78 \cdot 10^3 = 281H .$$

4. Определение внутренней продольной силы на участке a .

Методом сечения определим внутреннюю продольную силу $N_{(x)a}$ в поперечном сечении участка a , выбранном на расстоянии x от заделки (рис. 3).

Для уравновешенной системы (рис. 3) составим уравнение статического равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad R - N_{(x)a} - Q_{(x)a} = 0, \quad (5)$$

где $Q_{(x)a}$ – вес отрезка стержня длиной x участка a :

$$Q_{(x)a} = F_a \cdot x \cdot \gamma = 10 \cdot 10^{-4} \cdot x \cdot 78 \cdot 10^3 = 78 \cdot x \text{ кН}. \quad (6)$$

$$\text{Из (5) получаем } N_{(x)a} = R - Q_{(x)a} = 1577 - 78 \cdot x. \quad (7)$$

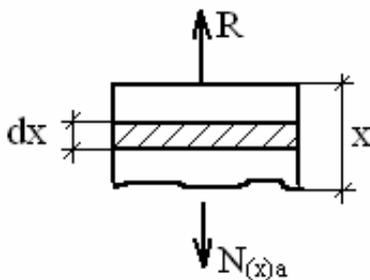


Рис. 3

5. Определение деформации участка a .

Величина $N_{(x)a}$ является функцией от x , деформацию участка a удобно рассмотреть через деформацию элемента dx бесконечно малой длины (рис. 3). Относительное удлинение этого участка dx будет такое же, как и относительное удлинение всего участка a , т. е.

$$\varepsilon_{dx} = \frac{\Delta dx}{dx}, \quad (8)$$

где Δdx – абсолютное удлинение участка dx .

Из формулы закона Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (9)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (10)$$

получаем

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma}{E}. \quad (11)$$

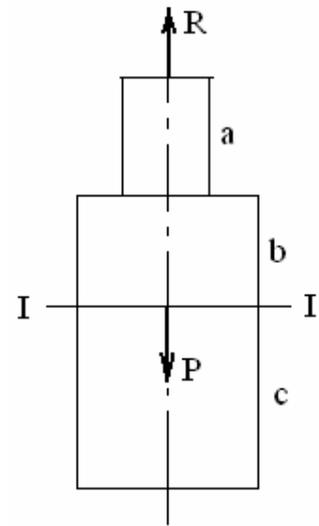


Рис. 2. План сил

$$\text{Но } \sigma = \frac{N}{F}. \quad (12)$$

Подставив (12) в (11), получаем

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N_{(x)a}}{E \cdot F_a}. \quad (13)$$

Абсолютное удлинение участка dx :

$$\Delta dx = \frac{N_{(x)a} dx}{E \cdot F_a}. \quad (14)$$

Полную деформацию участка a получим, интегрируя выражение (14):

$$\begin{aligned} \Delta l_a &= \frac{1}{E \cdot F_a} \int_0^a N_{(x)a} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot F_a} \int_0^a (1577 - 78 \cdot x) dx = \frac{1}{E \cdot F_a} \left(1577 \cdot x - \frac{78 \cdot x^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{E \cdot F_a} \left(1577 \cdot a - \frac{78 \cdot a^2}{2} \right) = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \left(1577 \cdot 2 - \frac{78 \cdot 2^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^8} (3154 - 156) = \frac{2998}{2 \cdot 10^8} = 1499 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 0,015 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (15)$$

6. Определение внутренней продольной силы на участке b .

Определим внутреннюю продольную силу $N_{(x)b}$ в поперечном сечении участка b (рис. 4).

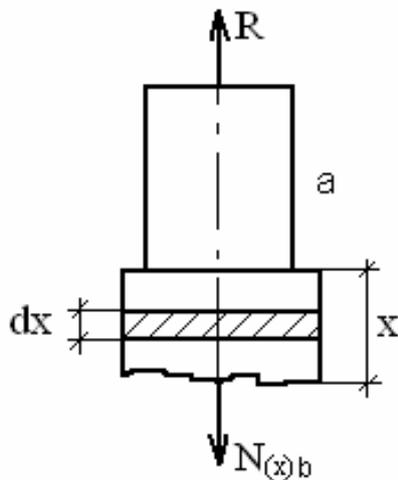


Рис. 4

Для уравновешенной системы (рис. 4) составим уравнение статического равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad R - N_{(x)b} - Q_a - Q_{(x)b} = 0, \quad (16)$$

где Q_a – вес участка a стержня. $Q_a = 156 \text{ Н}$;
 $Q_{(x)b}$ – вес стержня длиной x участка b ;

$$Q_{(x)b} = F_b \cdot x \cdot \gamma = 12 \cdot 10^{-4} \cdot x \cdot 78 \cdot 10^3 = 93,6 \cdot x \text{ кН}.$$

Из (16) получаем

$$N_{(x)b} = R - Q_a - Q_{(x)b} = 1577 - 156 - 93,6 \cdot x. \quad (17)$$

7. Определение деформации участка b .

Деформацию участка стержня b , так же как и участка стержня a , определим через относительную деформацию бесконечно малой длины заштрихованного элемента, выделенного на участке b .

$$\Delta dx = \frac{N_{(x)b} \cdot dx}{E \cdot F_b}. \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
\Delta l_b &= \frac{1}{E \cdot F_b} \int_0^b (1421 - 93,6 \cdot x) dx = \frac{1}{E \cdot F_b} \left(1421 \cdot x - \frac{93,6 \cdot x^2}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{E \cdot F_b} \left(1421 \cdot b - \frac{93,6 \cdot b^2}{2} \right) = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} \left(1421 \cdot 1,5 - \frac{93,6 \cdot 1,5^2}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{24 \cdot 10^7} (2131,5 - 105,3) = \frac{2026,2}{24 \cdot 10^7} = 84,4 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,0084 \text{ мм}.
\end{aligned} \tag{19}$$

8. Определение перемещения сечения I-I – δ_{I-I} :

$$\delta_{I-I} = \Delta l_a + \Delta l_b = 0,0150 + 0,0084 = 0,023 \text{ мм}.$$

Ответ: перемещение сечения I-I – δ_{I-I} равно 0,023 мм.

Тема 2. Статически неопределимые задачи

При решении статически неопределимых задач надо обратить внимание на то, что усилия в стержнях статически неопределимой системы зависят от площадей поперечных сечений F и модулей упругости E , тогда как в статически определимой системе величины F и E не влияют на распределение усилий.

Способ расчета по допускаемым нагрузкам для статически определимых систем дает такие же результаты, как и способ расчета по допускаемым напряжениям, но для статически неопределимых систем он позволяет вскрыть дополнительные резервы прочности, повысить несущую способность конструкции и указывает на возможность более экономного расходования материала.

Следует обратить внимание на весьма важные понятия: предел прочности, допускаемое напряжение и коэффициент запаса прочности.

ЗАДАЧА 2

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров (*рис. 5*). Требуется:

- 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ;
- 2) найти допускаемую нагрузку $Q_{дон}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma] = 160$ МПа;
- 3) найти предельную грузоподъемность системы Q_T^K и допускаемую нагрузку $Q_{дон}$, если предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа и запас прочности $k = 1,5$;
- 4) сравнить величины $Q_{дон}$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

Данные взять из *табл. 2*.

У к а з а н и я. Для определения двух неизвестных сил в стержнях надо составить одно уравнение статики и одно уравнение, которое называется уравнением совместности деформаций.

Для ответа на третий вопрос задачи следует иметь в виду, что в одном из стержней напряжение больше, чем в другом. При увеличении нагрузки напряжение в первом стержне достигнет предела текучести ранее, чем во втором. Ко-

гда это произойдет, напряжение в первом стержне не будет некоторое время расти даже при увеличении нагрузки, система станет как бы статически определимой, нагруженной силой Q (пока еще неизвестной) и усилием в первом стержне

$$N_1 = \sigma_m F_1 . \quad (1)$$

При увеличении нагрузки напряжение во втором стержне достигнет предела текучести

$$N_2 = \sigma_m F_2 . \quad (2)$$

Написав уравнение статики и подставив в него значения усилий (1) и (2), найдем из этого уравнения грузоподъемность Q_T^K .

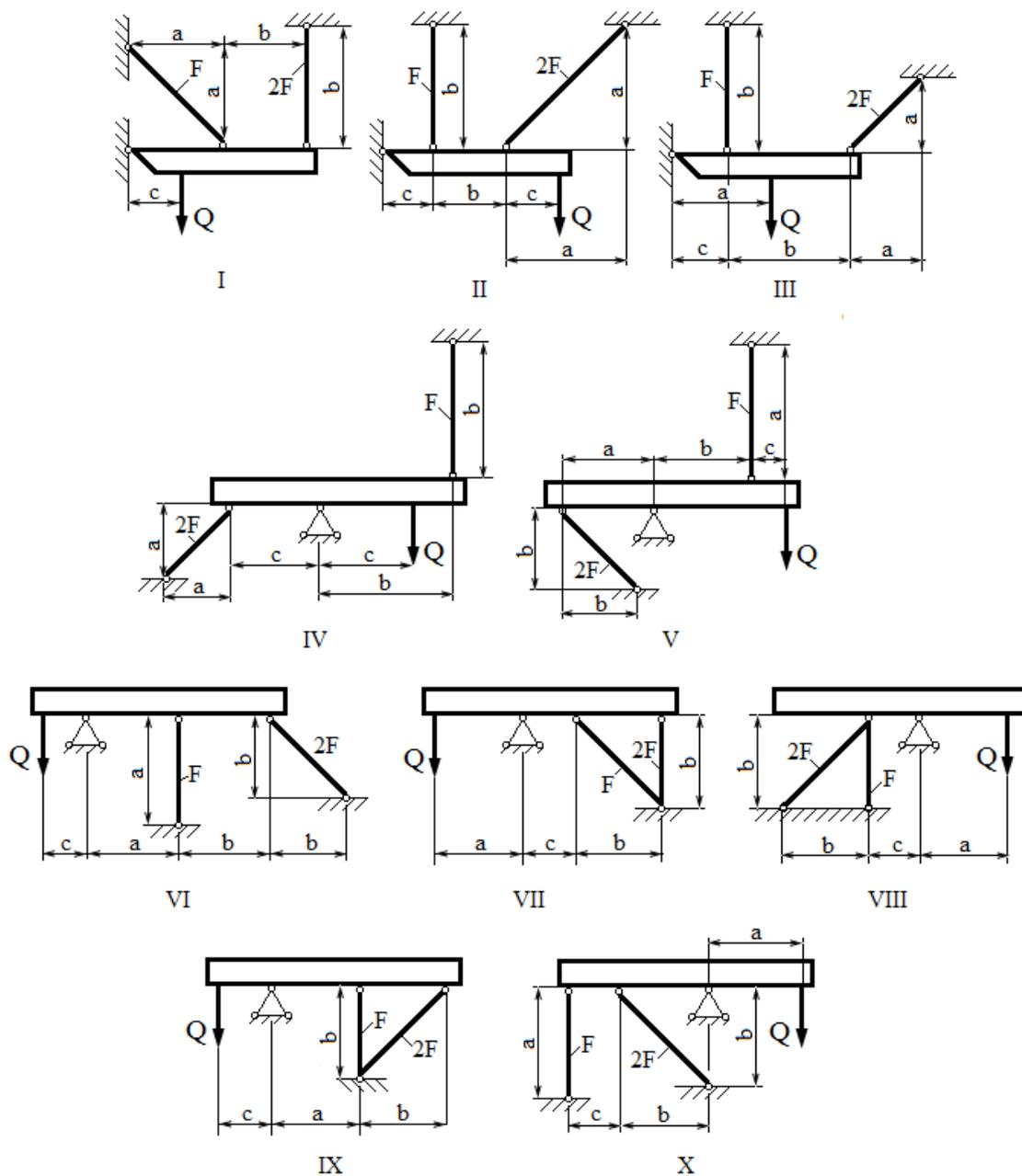


Рис. 5

Т а б л и ц а 2

Номер строки	F, см ²	a	b	c
		м		
1	11	2,1	3,0	1,1
2	12	2,2	2,9	1,2
3	13	2,3	2,8	1,3
4	14	2,4	2,7	1,4
5	15	2,5	2,6	1,5
6	16	2,6	2,5	1,6
7	17	2,7	2,4	1,7
8	18	2,8	2,3	1,8
9	19	2,9	2,2	1,9
0	20	3,0	2,1	2,0

Пример решения ЗАДАЧИ 2

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров (рис. 6). Требуется:

- 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ;
- 2) найти допускаемую нагрузку $[Q_{дон}]$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma] = 160$ МПа;
- 3) найти предельную грузоподъемность системы Q_T^K и допускаемую нагрузку $[Q_{дон}]$, если предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа и запас прочности $k = 1,5$;
- 4) сравнить величины $[Q_{дон}]$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

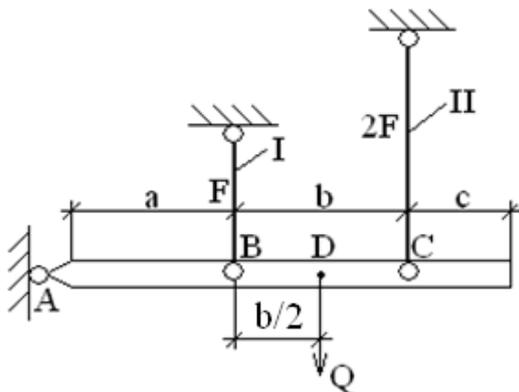


Рис. 6. Заданная схема

Дано:

$$F = 10 \text{ см}^2$$

$$a = 2 \text{ м}$$

$$b = 2 \text{ м}$$

$$c = 1 \text{ м}$$

$$l_2 = 2l_1$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

$$\sigma_T = 240 \text{ МПа}$$

$$k = 1,5$$

$$E_1 = E_2 = E$$

Найти: $Q_T^K - ?$ $[Q_{дон}] - ?$

РЕШЕНИЕ

1. Составление плана сил

От заданной схемы (рис. 6) переходим к составлению плана сил (рис. 7).

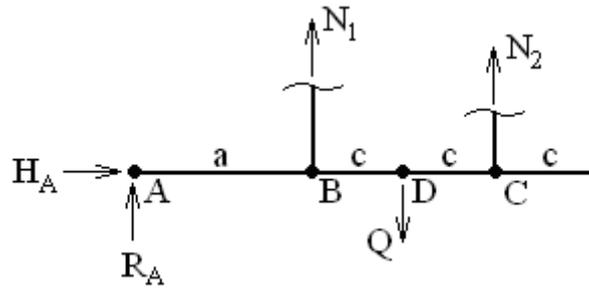


Рис. 7. План сил

Стержни 1 и 2 под действием силы Q испытывают осевое растяжение. N_1 и N_2 – внутренние растягивающие силы в стержнях. В неподвижном шарнире A показаны две связи (реакции) – R_A и H_A .

2. Составление уравнений равновесия

Для уравновешенной системы (рис. 7) составим уравнения статического равновесия.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum x = 0; \quad H_A = 0 \\ 2) \sum y = 0; \quad R_A + N_1 - Q + N_2 = 0 \\ 3) \sum M(A) = 0; \quad N_1 \cdot a - Q(a+c) + N_2(a+b) = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

В составленных уравнениях имеем четыре неизвестные: H_A , R_A , N_1 , N_2 , а уравнений статического равновесия – три. Разность между числом неизвестных, входящих в уравнения статического равновесия, и числом составленных уравнений, называется степенью статической неопределенности. Обозначим степень статической неопределенности символом m . В рассматриваемой задаче $m = 1$. Это указывает на то, что для решения системы (1) необходимо составить еще одно дополнительное уравнение. Дополнительные уравнения, позволяющие раскрыть статическую неопределенность, основываются на связях между деформациями элементов и называются уравнениями совместности деформаций. Составляются они на основе рассмотрения плана перемещений элементов системы.

3. Составление плана перемещения элементов системы

Рассмотрим план перемещения элементов системы (рис. 8), на котором BB' – величина абсолютного удлинения стержня 1, Δl_1 ; CC' – величина абсолютного удлинения стержня 2, Δl_2 .

Примечание. При повороте бруса AC вокруг шарнира A (\cdot) B и (\cdot) C описывают дуги. Учитывая, что деформации Δl_1 и Δl_2 имеют очень малые значения, дуги можно заменить касательными к ним, т. е. вертикальными отрезками.

Находим зависимость между отрезками Δl_1 и Δl_2 . Для этого сначала рассмотрим два подобных треугольника ABB' и ACC' .

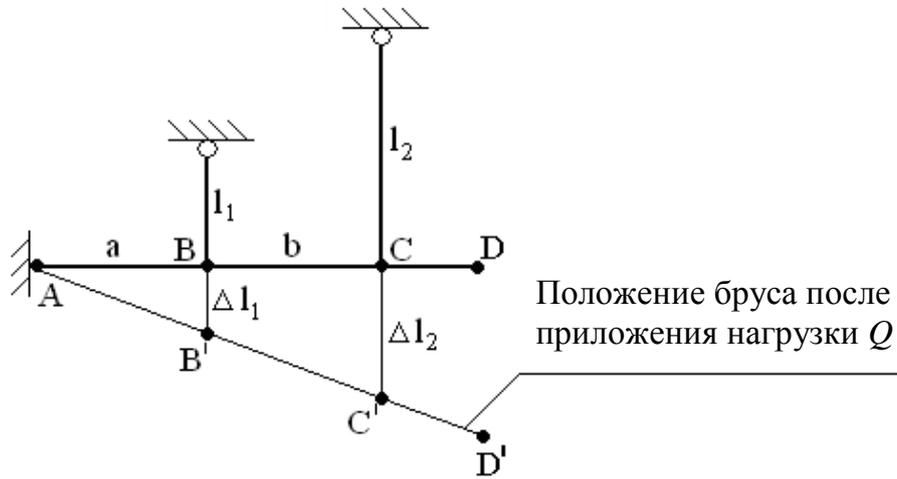


Рис. 8. План перемещения элементов системы

Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{BB'}{a} = \frac{CC'}{(a+b)}, \quad (2)$$

или

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{(a+b)}. \quad (3)$$

Это уравнение и называется уравнением *совместности деформаций*.

4. Нахождение дополнительного уравнения, связывающего неизвестные силы

По закону Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot F_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot F_2}. \quad (4)$$

С учетом (4) запишем выражение (3):

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot F_1 \cdot a} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot F_2 \cdot (a+b)}; \quad (5)$$

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2} = \frac{N_2 \cdot 2l_2}{E \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 4}. \quad (6)$$

$$\text{Из (6) получаем } N_2 = 2N_1. \quad (7)$$

Уравнение (7) и есть искомое дополнительное уравнение.

5. Определение неизвестных сил

Решаем систему уравнений (1) совместно с уравнением (7):

$$\left. \begin{array}{l} 2) \ R_A + N_1 - Q + 2N_2 = 0 \\ 3) \ N_1 \cdot a - Q(a+c) + 2N_1(a+b) = 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

Из 3) получаем

$$N_1 \cdot 2 - Q \cdot 3 + 2N_1 \cdot 4 = 0 \quad (9)$$

$$10N_1 = 3Q \Rightarrow N_1 = 0,3Q \quad (10)$$

Из (9) с учетом (7) получаем

$$N_2 = 0,6Q. \quad (11)$$

Из 2) получаем

$$R_A = Q - N_1 - 2N_2 = -0,5Q. \quad (12)$$

Таким образом, мы раскрыли статическую неопределимость, все неизвестные силы выразили через внешнюю нагрузку Q .

6. Определение напряжений в стержнях

Найдем напряжения в каждом из стержней, выразив их через Q :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0,3Q}{10 \cdot 10^{-4}} = 300Q; \quad (13)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{0,6Q}{20 \cdot 10^{-4}} = 300Q. \quad (14)$$

В данном примере напряжения в обоих стержнях получились одинаковые.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 300Q. \quad (15)$$

7. Определение допускаемой нагрузки

Найдем допускаемую нагрузку $[Q]$. Приравняем σ к допускаемому напряжению $[\sigma]$:

$$300[Q] = [\sigma] \Rightarrow [Q] = \frac{[\sigma]}{300} = \frac{160 \cdot 10^6}{300} = 530 \text{ кН}. \quad (16)$$

8. Определение предельной нагрузки

Найдем предельную нагрузку $Q_{пр}$, вызывающую предельно допустимое нагруженное состояние системы:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \sigma_T \cdot F_1 \\ N_2 &= \sigma_T \cdot F_2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

В уравнение статического равновесия (см. уравнение (3) системы (1)) подставим значения N_1 и N_2 из (17):

$$\sigma_T \cdot F_1 \cdot a - Q_T^K (a+c) + \sigma_T \cdot F_2 (a+b) = 0; \quad (18)$$

$$240 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2 - Q_T^K \cdot 3 + 240 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 0; \quad (19)$$

$$Q_T^K = \frac{10^3(480+1920)}{3} = \frac{10^3 \cdot 2400}{3} = 8 \cdot 10^5 \text{ Н} = 800 \text{ кН}; \quad (20)$$

$$Q_{пр} = \frac{Q_T^K}{K} = \frac{800}{1,5} = 533,3 \text{ кН}. \quad (21)$$

Ответ: предельная нагрузка $Q_{пр}$, рассчитанная по предельному состоянию системы, больше, чем $[Q]$, рассчитанная по допускаемым напряжениям.

Тема 3. Кручение

В случае кручения круглого стержня касательные напряжения в поперечном сечении распределяются неравномерно, изменяясь по линейному закону – от нуля на оси до максимального значения у поверхности стержня. В связи с этим и возникла мысль о замене сплошного вала полым, материал сечения которого находится в более напряженной зоне и используется рациональнее.

Следует внимательно разобрать построение эпюры крутящих моментов M_k , которая наглядно показывает изменение крутящего момента по длине вала. При вычислении напряжений в каком-либо поперечном сечении вала необходимо брать по эпюре M_k значение соответствующей ординаты.

ЗАДАЧА 3

К стальному валу приложены три известных момента: M_1, M_2, M_3 (рис. 9). Требуется:

- 1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю;
- 2) для нейтрального значения X построить эпюру крутящих моментов;
- 3) при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его значение до ближайшего равного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
- 4) построить эпюру углов закручивания;
- 5) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м). Данные взять из табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Номер строки	Расстояния, м			Моменты, Н·м			[τ], МПа
	a	b	c	M_1	M_2	M_3	
1	1,1	1,1	1,1	1100	1100	1100	35
2	1,2	1,2	1,2	1200	1200	1200	40
3	1,3	1,3	1,3	1300	1300	1300	45
4	1,4	1,4	1,4	1400	1400	1400	50
5	1,5	1,5	1,5	1500	1500	1500	55
6	1,6	1,6	1,6	1600	600	1600	60
7	1,7	1,7	1,7	1700	700	1700	65
8	1,8	1,8	1,8	1800	800	1800	70
9	1,9	1,9	1,9	1900	900	1900	75
0	2,0	2,0	2,0	2000	1000	2000	80

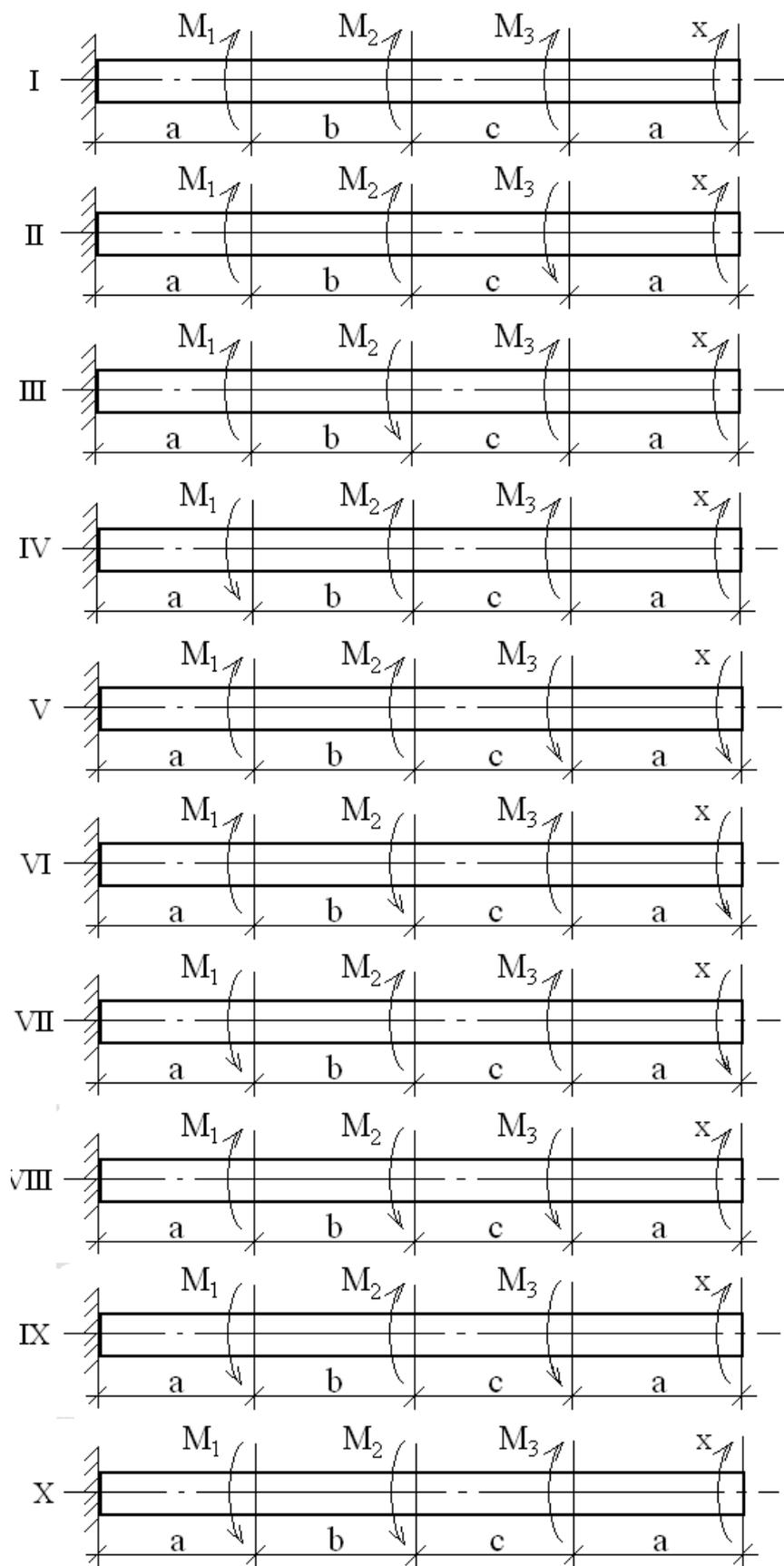
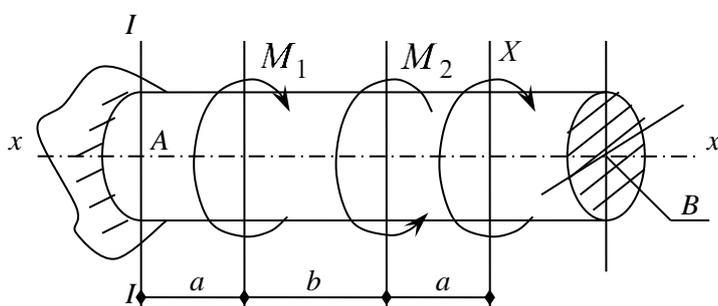


Рис. 9

Пример решения ЗАДАЧИ 3

К стальному валу приложены два известных момента: M_1 , M_2 (рис. 10). Требуется:

- 1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю;
- 2) для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов;
- 3) при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его значение до ближайшего равного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
- 4) построить эпюру углов закручивания;
- 5) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м).



Дано: $M_1 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$
 $M_2 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$
 $a = 1 \text{ м}$
 $b = 2 \text{ м}$
 $\Delta\varphi_B = 0$
 $G_{\text{ст}} = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$
 $[\tau] = 40 \text{ МПа}$

Рис. 10. Заданная схема

Найти: диаметр вала $d_{\text{пр}}$ из условия прочности, построить эпюру углов закручивания, найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м).

Решение

1. Составляется план сил (рис. 11)

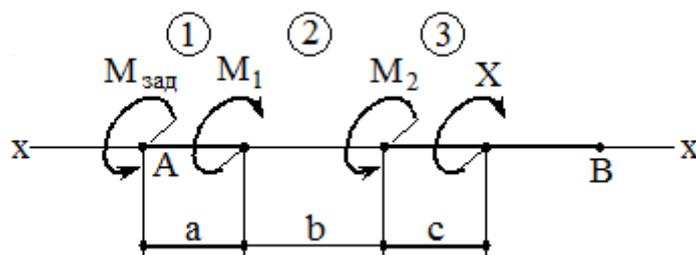


Рис. 11

2. Записывается уравнение статического равновесия для рис. 11:

$$\sum M(x) = 0; \quad (1)$$

$$M_{\text{зад}} - M_1 + M_2 - X = 0. \quad (2)$$

В выражении (2) имеем две неизвестные: $M_{зад}$ и X , т. е. в одно уравнение равновесия входят два неизвестных внешних силовых фактора – это статически неопределенная задача.

3. Определение неизвестных внешних силовых факторов

Необходимо составить второе условие, связывающее неизвестные силовые факторы, используя условие $\Delta\varphi_B = 0$.

Разобьем стержень на три участка: 1, 2, 3.

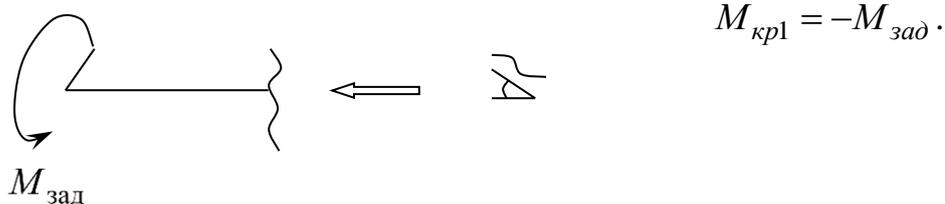
Составим уравнение (3) для определения угла поворота сечения B

$$\frac{M_{кр1} \cdot a}{G \cdot J_p} + \frac{M_{кр2} \cdot b}{G \cdot J_p} + \frac{M_{кр3} \cdot a}{G \cdot J_p} = 0, \quad (3)$$

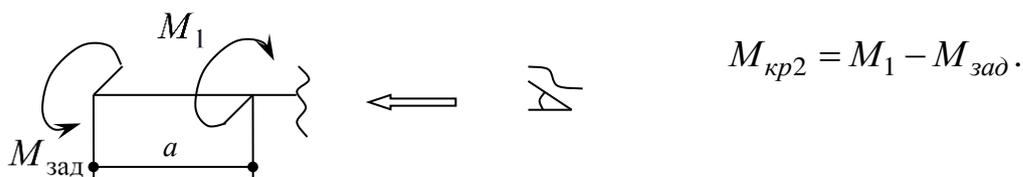
где $M_{кр1}$, $M_{кр2}$, $M_{кр3}$ – внутренние крутящие моменты, действующие в сечениях стержня каждого из трех участков.

Выразим значения этих моментов через внешние скручивающие моменты с помощью метода сечений. Стрелками и значком (глаз) показаны направления взгляда в сечения.

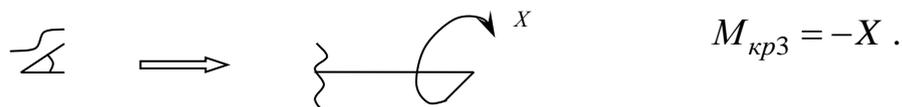
Участок 1:



Участок 2:



Участок 3:



Подставим значения $M_{кр1}$, $M_{кр2}$, $M_{кр3}$ через внешние скручивающие моменты в уравнение (3):

$$-M_{зад} \cdot a + (M_1 - M_{зад})b + (-X)a = 0. \quad (4)$$

Решим совместно уравнения (2) и (4). Из уравнения (2) следует

$$X = M_{зад} - M_1 + M_2. \quad (5)$$

Подставим значение X из уравнения (5) в уравнение (4):

$$-M_{зад} \cdot a + M_1 \cdot b - M_{зад} \cdot b - M_{зад} \cdot a + M_1 \cdot a - M_2 \cdot a = 0;$$

$$-M_{зад}(2a + b) + M_1(b + a) - M_2 \cdot a = 0;$$

$$-M_{зад} \cdot 4 + M_1 \cdot 3 - M_2 \cdot 1 = 0;$$

$$M_{зад} = \frac{M_1 \cdot 3 - M_2 \cdot 1}{4} = \frac{4,5 - 2}{4} = 0,62 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из выражения (2) определим X

$$X = M_{зад} - M_1 + M_2 = 0,62 - 1,5 + 2,0 = 1,12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. Построение эпюры крутящих моментов (рис. 12)

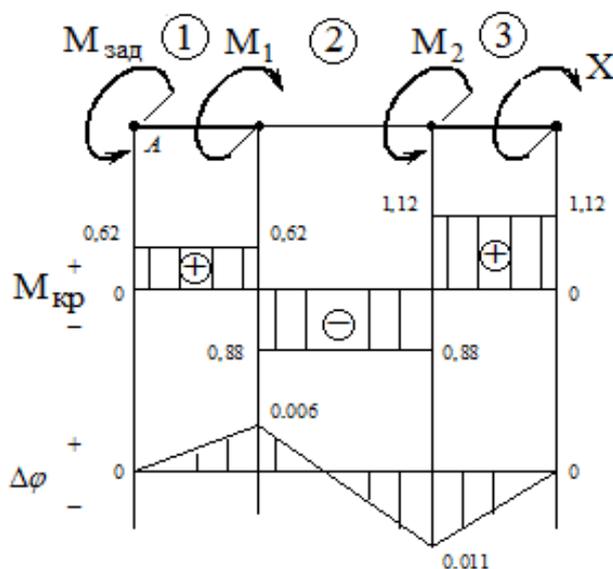


Рис. 12

5. Определение опасного участка и значения $|M_{\max}|$
Из эпюры следует, что опасным является участок 3.

$$|M_{кр3}| = |M_{кр}|_{\max} = 1,12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

6. Определение диаметра вала из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{кр}|_{\max}}{W_p} \leq [\tau];$$

$$W_p \geq \frac{|M_{кр}|_{\max}}{[\tau]} \geq \frac{1,12 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{40 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}} \geq 0,028 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \geq 28 \text{ см}^3;$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 28 \text{ см}^3 \Rightarrow d_{np} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 28}{3,14}} \geq \sqrt[3]{142,68} \geq \approx 5,22 \text{ см} \geq 52,2 \text{ мм}.$$

Выбираем диаметр вала, округляя, как указано в задании, $d_g = 60 \text{ мм}$.

7. Построение эпюры углов закручивания

Рассчитаем значения углов закручивания по каждому участку вала по

формуле $\Delta\varphi = \frac{|M_{кр}| \cdot l}{G \cdot J_p}$.

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} = 127,17 \text{ см}^4 = 127,17 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

$$G \cdot J_p = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 127,17 \cdot 10^{-8} = 12717 \cdot 8 = 101736 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Участок 1

$$\Delta\varphi_1 = \frac{M_{кр1} \cdot a}{G \cdot J_p} = \frac{0,62 \cdot 10^3 \cdot 1}{101736} = 0,006 \text{ рад}.$$

Участок 2

$$\Delta\varphi_2 = \frac{M_{кр2} \cdot b}{G \cdot J_p} = -\frac{0,88 \cdot 10^3 \cdot 2}{101736} = -0,017 \text{ рад}.$$

Участок 3

$$\Delta\varphi_3 = \frac{M_{кр3} \cdot a}{G \cdot J_p} = \frac{1,12 \cdot 10^3 \cdot 1}{101736} = 0,011 \text{ рад}.$$

Строим эпюру углов закручивания (*рис. 12*).

Тема 4. Изгиб прямых брусьев

Эта тема является самой большой и самой сложной темой курса сопротивления материалов; ее следует изучать постепенно, обращая особое внимание на решение задач. Сначала надо усвоить весьма важные понятия изгибающего момента M и поперечной силы Q и научиться свободно строить эпюры M и Q .

Необходимо помнить, что поперечная сила в данном сечении равна алгебраической сумме проекций сил, расположенных только по одну сторону от рассматриваемого сечения, на перпендикуляр к оси балки, а изгибающий момент в данном сечении равен алгебраической сумме моментов сил, расположенных только с одной стороны, относительно центральной оси поперечного сечения. В связи с этим рекомендуется – при вычислениях, например, изгиба-

ющего момента в сечении балки как момента левых сил – закрывать чем-либо (рукой, книгой, листом бумаги) часть балки, расположенную правее рассматриваемого сечения, чтобы открытыми оставались только одни левые силы. Следует при этом иметь в виду, что можно рассматривать как одни левые, так и одни правые силы, в зависимости от того, с какой стороны проще получить выражения Q и M .

Правильность построения эпюр $Q(x)$ и $M(x)$ можно проверить, зная дифференциальную зависимость между распределенной нагрузкой q , $Q(x)$ и $M(x)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q; \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q(x).$$

Необходимо обратить внимание на неравномерность распределения нормальных напряжений по высоте балки и на то, что прочность балки зависит от момента сопротивления W . Надо ясно представлять, каким путем увеличить момент сопротивления без увеличения расхода материала.

Рекомендуется сравнить между собой эпюры σ и τ , построенные для балки прямоугольного поперечного сечения. Наибольшее и наименьшее нормальные напряжения (главные напряжения) находят по формуле

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).$$

Необходимо разобрать графическое построение, при помощи которого можно получить эту формулу.

После этого следует перейти к изучению деформаций при изгибе.

Деформацией балки при изгибе является искривление оси балки. При этом необходимо вертикальные перемещения сечений балки (f) и углы поворота сечений балки (θ) удобно определять методом начальных параметров. Обычно начало координат помещают на левом конце балки и общие функции углов поворота и прогибов пишут так:

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[\sum M(x-a_M) + \frac{\sum P(x-a_P)}{2} + \frac{\sum q(x-a_q)^3}{6} \right];$$

$$f(x) = f_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{\sum M(x-a_M)^2}{2} + \frac{\sum P(x-a_P)^3}{6} + \frac{\sum q(x-a_q)^4}{24} \right].$$

Здесь f_0 и θ_0 – начальные параметры, которые определяются из начальных условий задачи; a_M ; a_P ; a_q – соответственно абсциссы точек приложения сосредоточенного момента M , силы P , начала приложения равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью q .

При решении статически неопределимых балок дополнительными уравнениями к уравнениям статики будут являться уравнения прогибов и углов поворота.

ЗАДАЧА 4

Для заданных двух систем балок (*рис. 13*) требуется написать выражения Q и M для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M , найти максимальное M и подобрать:

1) для схемы *a* деревянную балку круглого поперечного сечения при $[\sigma] = 80$ МПа;

2) для схемы *б* стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma] = 160$ МПа.

Данные взять из *табл. 4*.

Т а б л и ц а 4

Номер строки	l	a	M , кН·м	P , кН	q , кН/м
	m				
1	2	1	20	10	30
2	4	2	30	20	40
3	2	1	40	30	50
4	4	2	50	40	10
5	2	1	10	50	20
6	4	2	20	10	30
7	2	1	30	20	40
8	4	2	40	30	50
9	2	1	50	40	10
0	4	2	10	50	20

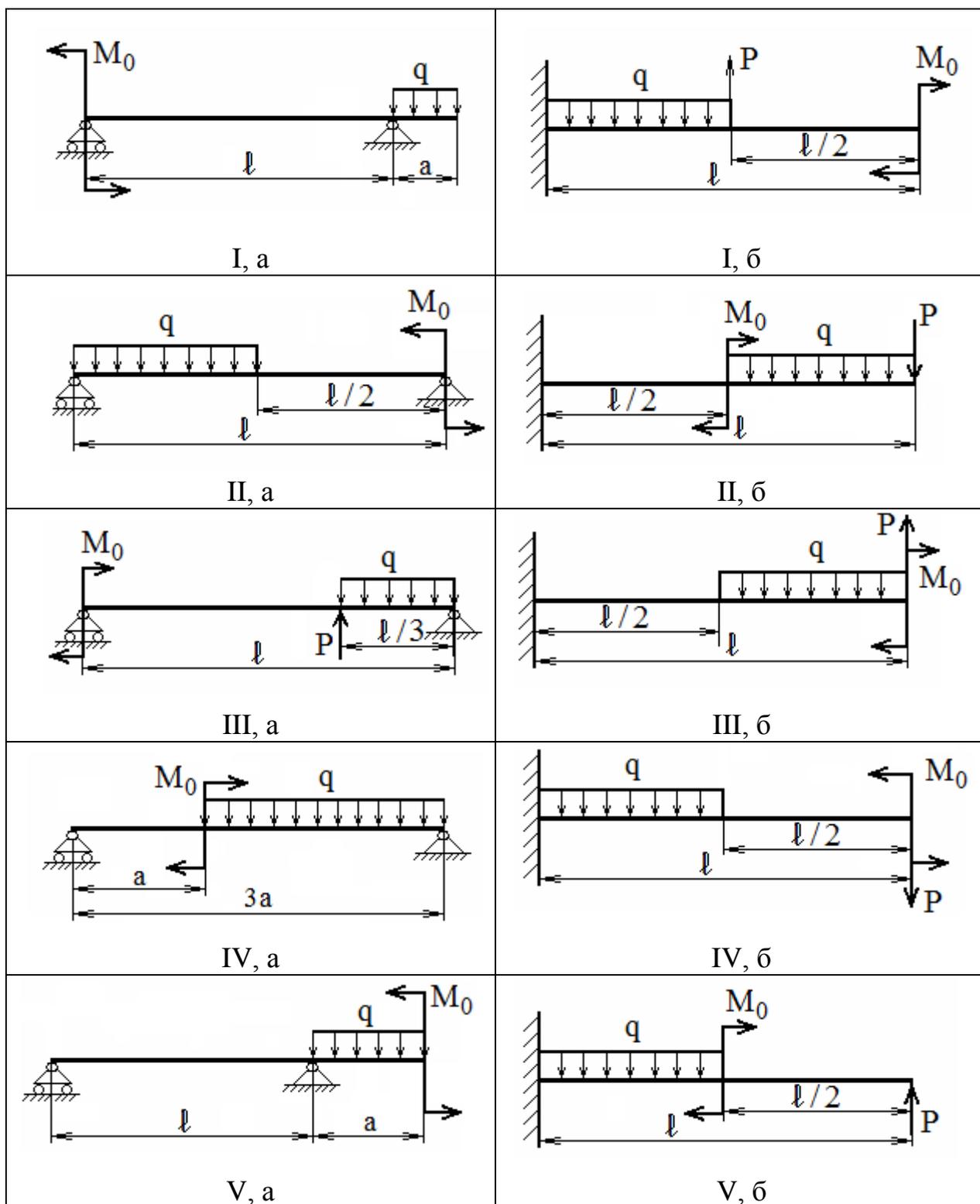


Рис. 13

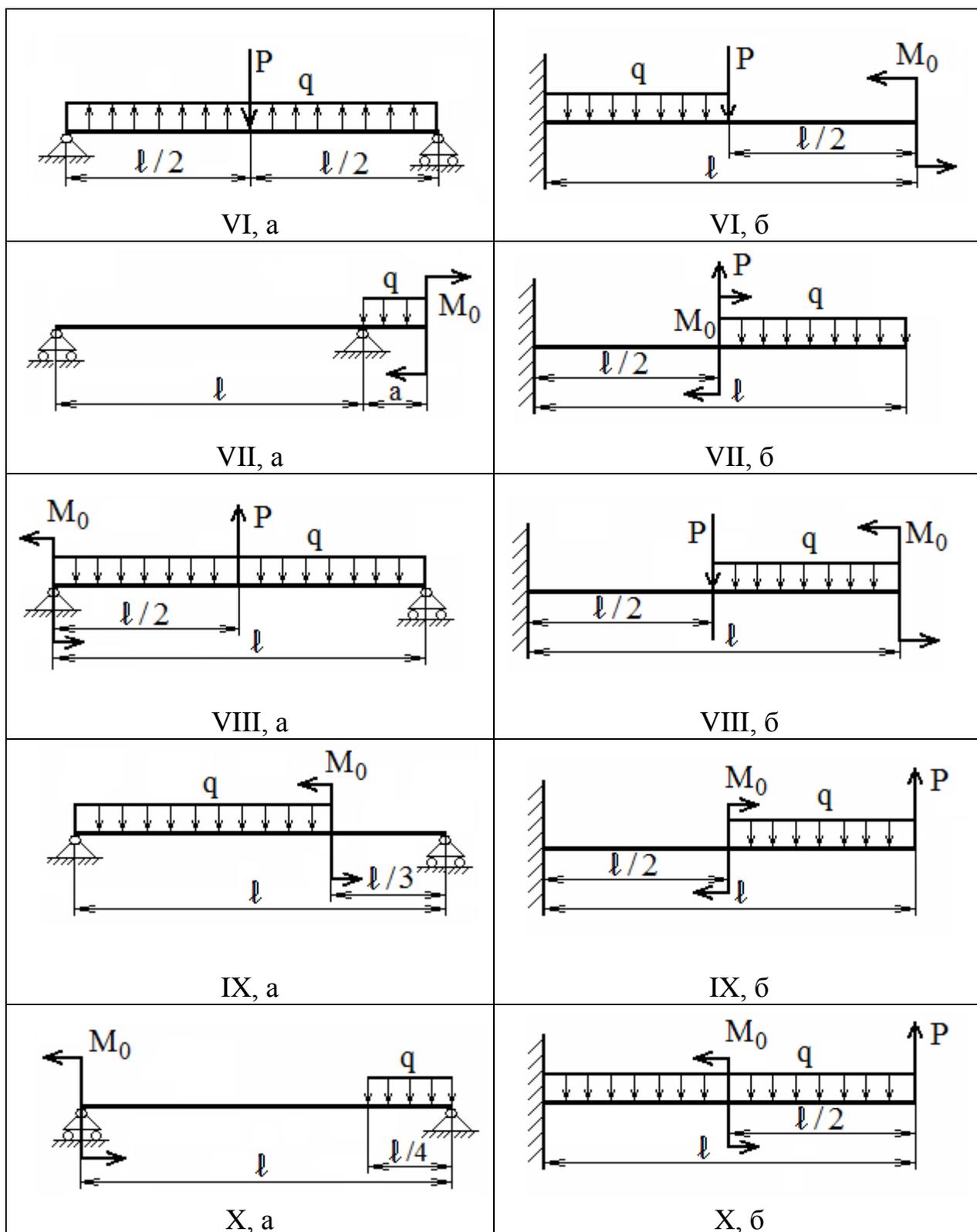


Рис. 13. Окончание

Пример решения ЗАДАЧИ 4

Для балки двутаврового сечения, закрепленной на двух шарнирных опорах A и B (рис. 14), требуется:

- написать выражения $Q_{(x)}$ и $M_{(x)}$ для каждого участка;
- построить эпюры $Q_{(x)}$ и $M_{(x)}$;
- найти максимальный изгибающий момент $|M_{(x)}|^{\max}$;
- подобрать стальную балку двутаврового поперечного сечения;
- вычертить в масштабе двутавровое сечение;
- построить эпюры распределения нормальных, касательных, главных напряжений по высоте сечения балки;
- вычислить вертикальные прогибы $f(x)$ сечений $(\cdot) 1$ и $(\cdot) 2$ методом начальных параметров и построить изогнутую ось балки.

Дано:

$$P = 20 \text{ кН}$$

$$M_0 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$q = 10 \text{ кН/м}$$

$$a = 2 \text{ м}$$

$$l = 4 \text{ м}$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

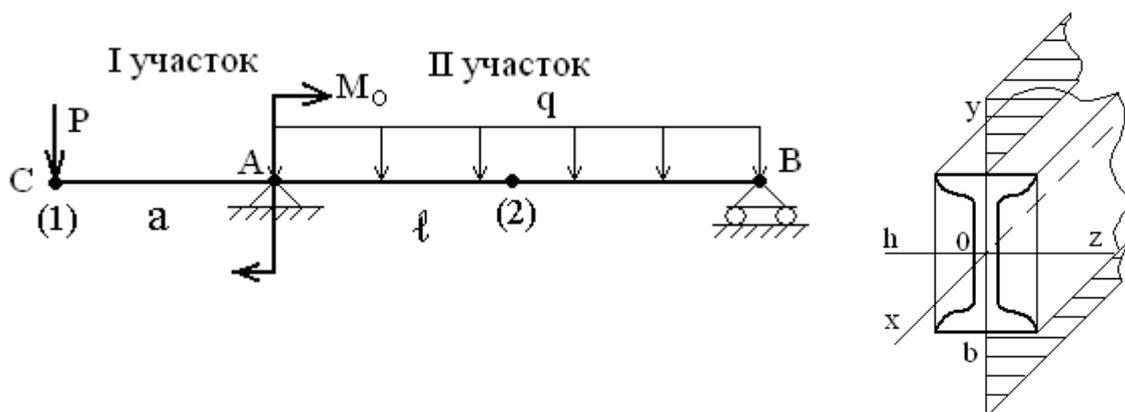


Рис. 14

Оси Y и Z – центральные оси сечения (рис. 1). Для двутаврового сечения эти оси являются главными центральными осями (признак симметрии оси).

По определению внешняя нагрузка для создания плоского поперечного изгиба должна лежать либо в плоскости XOY , либо в плоскости ZOX . В нашем примере – в плоскости XOY . Осью X будем обозначать ось балки (это геометрическое место центров тяжести нормальных сечений балки).

РЕШЕНИЕ

1. Составление плана сил (рис. 15)

Мысленно убираем опоры A и B , заменяем их связями H_A , R_A и R_B .

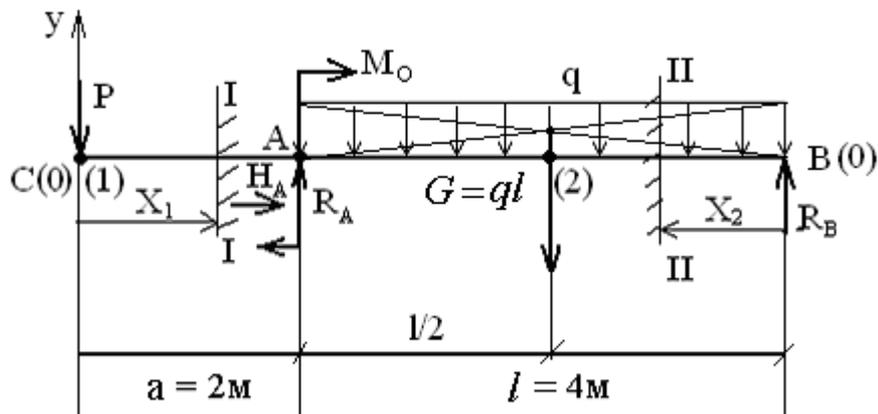


Рис. 15. План сил

Под действием приложенных силовых факторов (активных внешних нагрузок и реактивных сил) балка находится в равновесии.

2. Составление уравнений статического равновесия:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum X = 0; H_A = 0 \\ 2) \sum Y = 0; -P + R_A - q \cdot 4 + R_B = 0 \\ 3) \sum M(A) = 0; P \cdot 2 - M_0 - q \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\text{Из (3): } R_B = \frac{-2P + M_0 + 8q}{4} = \frac{-40 + 30 + 80}{4} = \frac{70}{4} = 17,5 \text{ кН}.$$

$$\text{Из (2): } R_A = P + 4q - R_B = 20 + 40 - 17,5 = 42,5 \text{ кН}.$$

Примечания: 1) при составлении уравнений моментов пользуются следующим правилом знаков – поворот силового фактора вокруг выбранной точки плоскости «по часовой стрелке» $\curvearrowright \ominus$; «против часовой стрелки» $\curvearrowleft \oplus$;

2) необходимо обратить внимание на размерность силовых факторов, так, q (кН/м) – интенсивность нагрузки на длине ее действия l . равнодействующая этой нагрузки $G = ql$ (кН) приложена в центральной точке прямоугольника (рис. 15). Плечо действия этой силы G до $(\cdot) A$ равно $l/2$, т. е. 2 м;

3) при составлении уравнения моментов относительно какой-либо точки надо помнить, что момент силы, линия действия которой проходит через эту точку, равен нулю, так как плечо этой силы равно 0. Это не относится к сосредоточенному моменту M_0 , так как плечо «заложено» в самом моменте. В нашем примере см. уравнение статики (3);

4) после определения опорных реакций R_A и R_B необходимо сделать проверку, например, составить следующее уравнение:

$$\sum M(B) = 0 \quad P(a+l) - R_A l - M_0 + \frac{ql^2}{2} = 0. \quad (2)$$

Подставить найденные значения силы R_A и убедиться, что найденное значение удовлетворяет уравнению (2).

3. Определение внутренних силовых факторов

Разбиваем балку на участки: в нашем примере два участка: CA и AB .

Применяем метод сечений для нахождения внутренних силовых факторов.

1-й участок (CA)

В пределах длины этого участка выбираем произвольное нормальное сечение I-I (*рис. 15*), мысленно рассекаем балку по этому сечению, получаем две части – левую и правую от сечения. Мысленно отбрасываем правую часть и заменяем действие отброшенной части пока неизвестными внутренними силовыми факторами $Q(x)$ и $M(x)$. Внутренняя поперечная сила $Q(x)$ определяется как алгебраическая сумма всех внешних сил, действующих на оставшуюся (не отброшенную часть балки). $M(x)$ определяется как алгебраическая сумма моментов от всех силовых факторов, действующих на оставшуюся (не отброшенную часть балки), относительно этого сечения.

Определяем пределы изменения X_1 , текущей координаты рассматриваемого сечения. Начало координат помещаем в $(\cdot) C$ – начало первого участка. Индекс (1) указывает на то, что сечение принадлежит 1-му участку.

$$0 \leq x \leq a.$$

Далее записываем выражения для определения внутренних силовых факторов на 1-м участке:

$$\left. \begin{aligned} Q(x_1) &= -P = \text{const} = -20 \text{ кН} \\ M(x_1) &= -Px_1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

На первом участке внутренняя поперечная сила не зависит от расстояния сечения от выбранного начала координат, есть величина постоянная в пределах этого участка (-20 кН). Внутренний изгибающий момент на 1-м участке изменяется по линейному закону.

2-й участок (AB)

В пределах длины этого участка выбираем произвольное нормальное сечение II-II (*рис. 2*), мысленно рассекаем балку по этому сечению, получаем две части – левую и правую от сечения и заменяем действие отброшенной части пока неизвестными внутренними факторами $Q(x)$ и $M(x)$.

Определяем пределы изменения текущей координаты X_2 сечения II-II, поместив теперь начало координат в $(\cdot) B$ – начало второго участка.

$$0 \leq x_2 \leq l.$$

Записываем выражения для определения внутренних силовых факторов на II участке:

$$\left. \begin{aligned} Q(x_2) &= -R_B + qx_2 \\ M(x_2) &= R_B x_2 - \frac{qx_2^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

На втором участке изменение внутренней поперечной силы описывается линейной функцией. Внутренний изгибающий момент на этом участке изменяется по параболическому закону.

Примечание. При составлении функций $Q(x)$ и $M(x)$ необходимо руководствоваться правилом знаков для поперечных сил $Q(x)$ и изгибающих моментов $M(x)$. Для удобства запоминания можно пользоваться схемой, приведенной на рис. 16.

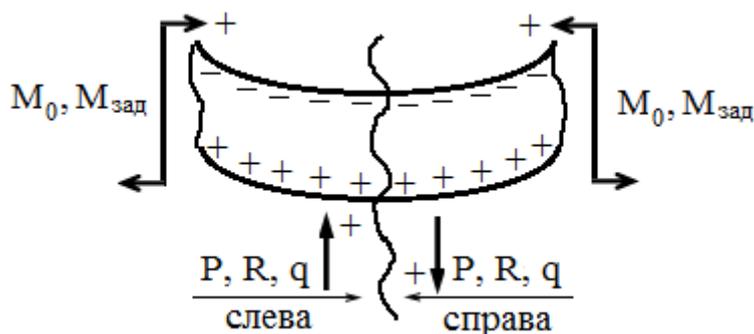


Рис. 16

4. Построение эюр $Q(x)$ и $M(x)$

Эпюры $Q(x)$ и $M(x)$ – это графическое изображение записанных выше функций (3) и (4). Порядок построения эюр $Q(x)$, $M(x)$:

- вычерчиваем балку в масштабе (рис. 17);
- наносим горизонтальные линии $O-O$, так называемые базовые линии эюр, определяющие координаты сечений балки;
- по вертикальной оси выбираем масштаб для нанесения значений поперечных сил Q и изгибающих моментов M (масштабы могут не совпадать);
- в выбранных координатах $Q(x)$ и $M(x)$ указываем положительные и отрицательные области значений Q и M . На эюре $M(x)$ *положительные* значения моментов будем откладывать ниже нулевой линии, *отрицательные* – выше. Такое правило знаков удобно для рассмотрения в дальнейшем положения изогнутой оси балки. Для эюры $Q(x)$ принимаем традиционное расположение положительной и отрицательной областей;

- строим графически функции $Q(x)$ и $M(x)$ по участкам, задаваясь различными значениями аргумента X в пределах каждого участка.

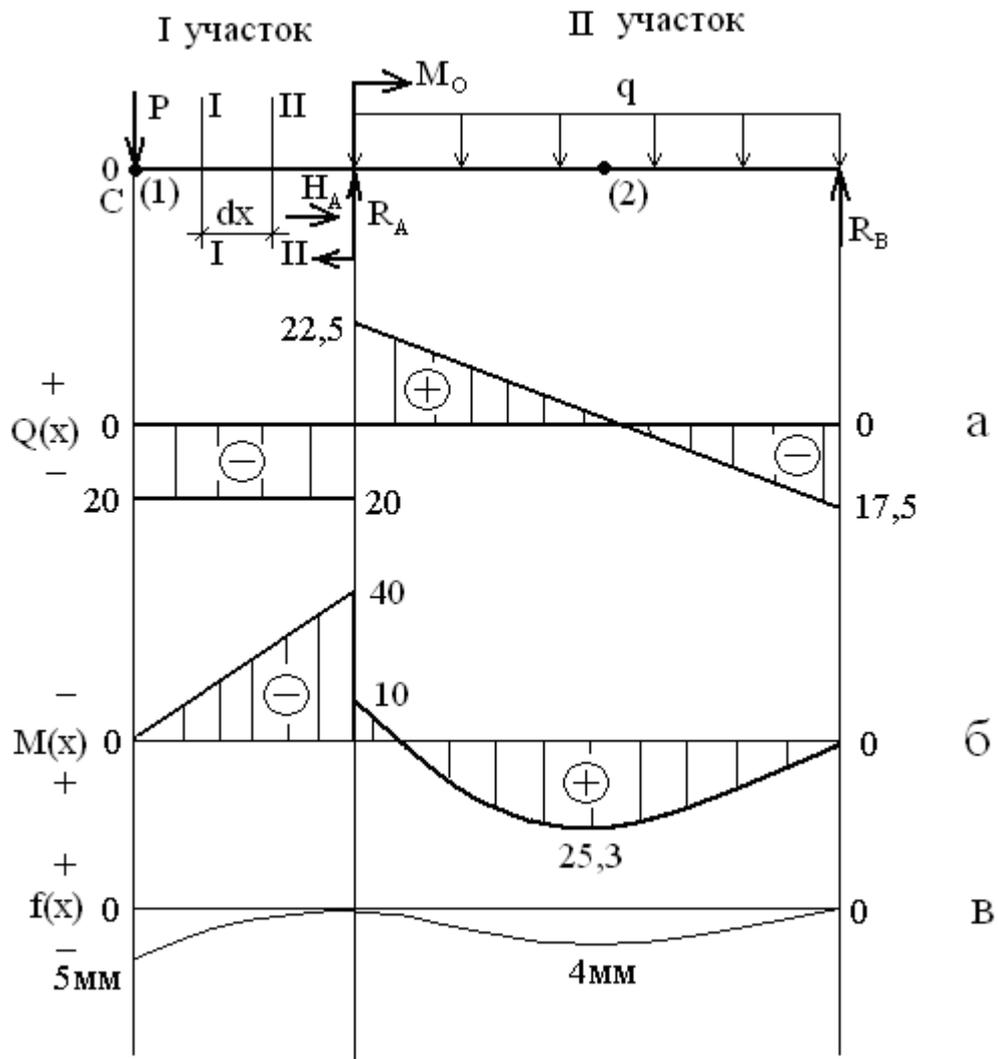


Рис. 17

При проверке правильности построения эпюр $Q(x)$ и $M(x)$ следует использовать дифференциальную зависимость между интенсивностью распределённой нагрузки q и внутренними силовыми факторами $Q(x)$ и $M(x)$ (см. зависимости 5.3 и 5.4 в § 5.1.3).

1-й участок (CA)

На заданной схеме участок CA свободен от распределённой нагрузки q , т. е. $q = 0$, т. е. приращение ординаты $\Delta Q(x)$ на первом участке равно нулю, т. е. функция $Q(x)$ на этом участке – прямая (см. эпюру $Q(x)$ на рис. 17, а).

В свою очередь приращение ординаты $M(x)$ на первом участке $\Delta M(x)$ равно площади эпюры $Q(x)$ на этом участке, т. е. -40 кН·м (см. эпюру $M(x)$ на рис. 17, б).

2-й участок (AB)

На заданной схеме участок AB загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = const = 10$ кН/м. Производная от функции $Q(x)$ есть q , т. е. функция $Q(x_3)$ на этом участке представляет собой линейную функцию – наклонную прямую.

Свяжем характер изменения функции $M(x)$ с функцией $Q(x)$ на интервале AB . $Q(x)$ – линейная функция есть производная функции $M(x)$. Следовательно, функция, описывающая изменение моментов – функция второго порядка (парабола) с вершиной (экстремумом) в точке пересечения функции $Q(x)$ с осью X , т. е. при $Q(x_3) = 0$.

Чтобы найти координату точки экстремума X_3 , необходимо записать (из 4) выражение $Q(X_3) = 0$ и вычислить X_3 , м:

$$-R_B + qx_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{R_B}{q} = \frac{17,5}{10} = 1,75. \quad (5)$$

Подставив значение $X_3 = 1,75$ в выражение $M(x)$ (4), получаем значение экстремальной точки параболы ($M_3 = 25,3$ кН·м).

Для проверки правильности построения эпюр также полезно руководствоваться следующими «признаками правильности построения эпюр»:

- если на балке в каких-то сечениях действует сосредоточенная сила (P), то на эпюре сил $Q(x)$ в этом сечении наблюдается *скачок*; величина скачка будет равна величине этой силы, направление скачка также соответствует направлению сосредоточенной силы;

- если на балке в каких-то сечениях действует сосредоточенный изгибающий момент ($M_{заделки}, M_0$), то на эпюре моментов $M(x)$ в этом сечении он отразится скачком; величина скачка будет равна величине приложенного момента, направление скачка также соответствует направлению этого момента;

- с учетом дифференциальной зависимости между $q, Q(x), M(x)$:

- если на каком-то участке балки действует равномерно распределенная нагрузка q , то на этом участке эпюры $Q(x)$ наблюдается наклонная прямая, а на эпюре $M(x)$ – парабола;

- если на эпюре $Q(x)$ наклонная прямая пересекает нулевую линию, т. е. проходит через 0 ($Q(x) = 0$) – на эпюре $M(x)$ в этом сечении – экстремум;

- если на каком-то участке балки отсутствует распределенная нагрузка, то на эпюре $Q(x)$ наблюдается горизонтальная прямая, т. е. $Q(x) = const$, а на эпюре $M(x)$ – наклонная прямая.

5. Определение опасных сечений балки

Из построенных эпюр (рис. 17, а, б) определяем опасные сечения балки.

В задаче опасным сечением балки является сечение A , так как в этом сечении наблюдается наибольшее по абсолютной величине значение внутреннего изгибающего момента M_A , и внутренней поперечной силы Q_A :

$$|M_A|_{max} = 40 \text{ кН};$$

$$|Q_A|_{max} = 22,5 \text{ кН.}$$

Примечание. В данном примере в одном и том же сечении $|Q_{max}|$ и $|M_{max}|$ совпадают. Не обязательно Q_{max} и M_{max} будут наблюдаться в одном сечении.

6. Подбор двутаврового сечения балки (номера двутавра – № I)

При подборе сечения балки в большинстве случаев пользуются условием прочности по нормальным напряжениям (5.9) § 5.2, так как в редких случаях τ_{max} будут иметь опасные значения, близкие к $[\tau]$. Поэтому записываем условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{|M(x)|^{max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Из условия прочности вычислим значение осевого момента сопротивления W_z при условии, что для материала балки – стали $[\sigma]_{стали} = 160 \text{ МПа}$:

$$W_z \geq \frac{|M(x)|^{max}}{[\sigma]}; \quad (6)$$

$$W_z \geq \frac{40 \text{ кНм}}{160 \text{ МПа}} \geq \frac{40 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{160 \cdot 10^6 \text{ Па}} \geq 0,250 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \geq 250 \text{ см}^3. \quad (7)$$

Из таблицы сортамента (ГОСТ 8239-53) находим ближайшее большее значение осевого момента сопротивления W_z для балок двутаврового сечения.

$W_z = 251 \text{ см}^3$ – это значение соответствует двутавру № 22а.

Выписываем все необходимые характеристики выбранного сечения из таблицы сортамента для двутавра № 22а:

$h = 220 \text{ мм}$, высота профиля

$b = 120 \text{ мм}$

$d = 5,3 \text{ мм}$

$t = 8,8 \text{ мм}$

$J_z = 2760 \text{ см}^4$

$W_z = 251 \text{ см}^3$

$S_z = 141 \text{ см}^3$

Вычерчиваем в масштабе двутавровый профиль № 22а (рис. 18).

7. Построение эпюр распределения нормальных, касательных, главных напряжений по высоте сечения балки

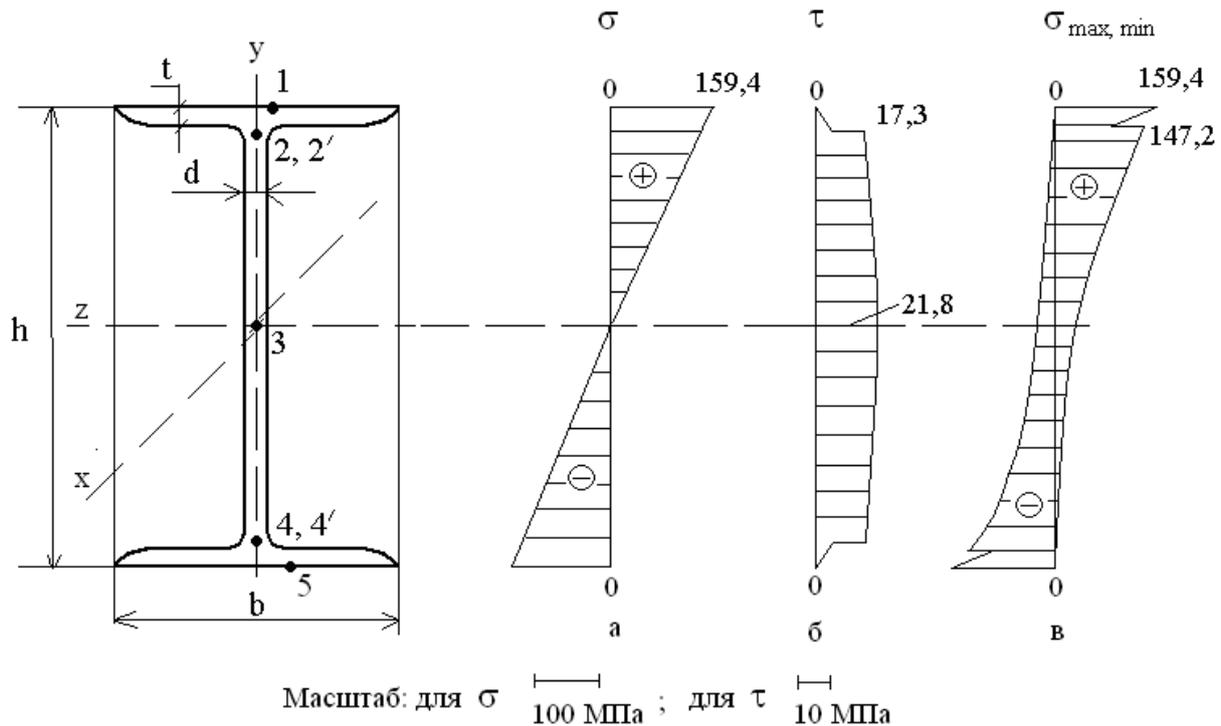


Рис. 18. Графики (эпюры) изменения нормальных (а), касательных (б) и главных (в) напряжений по высоте сечения двутавровой балки

На рис. 18, а показана эпюра распределения нормальных напряжений по высоте сечения балки, это графическое представление зависимости, описываемой формулой $\sigma = \frac{|M(x)|}{J_z} y$. Для построения $\sigma(y)$ достаточно определить значения σ_{\max} . Определяем значение σ_{\max} с учётом значения осевого момента сопротивления $W_z = 251 \text{ см}^3$:

$$\sigma_{\max} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,251 \cdot 10^{-3}} \approx 159,4 \text{ МПа} . \quad (8)$$

Отметить, что величина $\sigma_{\max} < [\sigma]$.

Откладываем полученные значения $\pm \sigma_{\max}$ на эпюре нормальных напряжений в наиболее удалённых от оси z точках двутавра. Так как наибольшее значение внутреннего изгибающего момента имеет отрицательное значение ($M_{\max} = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}$), верхняя от нейтральной оси z часть двутавра подвергается растягивающим (положительным) усилиям, нижняя – сжимающим (отрицательным). Это отражено и на эпюре $\sigma(y)$.

Для построения эпюры распределения касательных напряжений в сечении балки применим формулу Журавского:

$$\tau = \frac{|Q(x)| \cdot S_z^{omc}}{J_z \cdot b(y)}.$$

Определим τ в характерных точках сечения балки 1, 2, 2', 3, 4, 4', 5.

Примечание. Все вычисления рекомендуется проводить в системе измерений СИ (Н и м).

Для упрощения вычислений определяем величину k , не зависящую от положения точек в сечении, н/м⁴:

$$k = \frac{|Q(x)|}{J_z} = const = \frac{22,5кН}{2760см^4} = \frac{22,5 \cdot 10^3 Н}{2760 \cdot 10^{-8} м^4} = 0,0082 \cdot 10^{11}; \quad (9)$$

$$\tau = \frac{k \cdot S_z^{omc}}{b(y)} = 0,0082 \cdot 10^{11} \cdot \frac{S_z^{omc}}{b(y)}. \quad (10)$$

Таким образом, для расчёта касательных напряжений в указанных точках в формуле Журавского следует менять лишь значение величин: S_z^{omc} – статического момента площади отсеченной части сечения на уровне точки, в которой определяем τ ; $b(y)$, м – ширину сечения на уровне точки, в которой определяем τ . В указанных точках сечения балки 1, 2, 2', 3, 4, 4', 5 определим значения касательных напряжений.

В точках 1 и 5, расположенных на крайних границах полков:

$S_z^{omc} = 0$, так как на уровне точек 1 и 1' отсеченная часть отсутствует.

$\tau_{1,5} = 0$.

В точках 2, 4, расположенных на границах полков, примыкающих к узкой части двутавра:

$$S_z^{omc(полки)} = F_{полки} \cdot y_c,$$

где $F_{полки}$ – площадь полки:

$$F_{полки} = b \cdot t = 120 \cdot 10^{-3} \cdot 8,8 \cdot 10^{-3} = 1056 \cdot 10^{-6} м^2.$$

$$y_c = \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = \left(\frac{220}{2} - \frac{8,8}{2} \right) = 110 - 4,4 = 105,6 мм = 105,6 \cdot 10^{-3} м,$$

y_c – расстояние от центра тяжести полки до нейтральной оси z .

$$S_z^{omc(полки)} = 1056 \cdot 10^{-6} \cdot 105,6 \cdot 10^{-3} = 111513,6 \cdot 10^{-9} м^3.$$

$b(y) = 120 \cdot 10^{-3} м$ – ширина полков.

$$\tau_2 = \frac{0,0082 \cdot 10^{11} \cdot 111513,6 \cdot 10^{-9}}{120 \cdot 10^{-3}} = \frac{0,82 \cdot 111513,6 \cdot 10^3}{120} =$$

$$= \frac{820 \cdot 111513,6}{120} Па = \frac{820 \cdot 0,112}{120} МПа = 0,76 МПа.$$

$$\tau_4 = \tau_2 = 0,76 МПа.$$

В точках 2' и 4', расположенных под полками на узкой части двутавра:

$$S_z^{отс(полки)} = 111513,6 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3.$$

$$b(y) = d = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

$$\begin{aligned} \tau_{2'} &= \frac{0,0082 \cdot 10^{11} \cdot 111513,6 \cdot 10^{-9}}{5,3 \cdot 10^{-3}} = \frac{0,82 \cdot 111513,6 \cdot 10^3}{5,3} = \\ &= \frac{820 \cdot 111513,6}{5,3} \text{ Па} = \frac{820 \cdot 0,112}{5,3} \text{ МПа} = 17,32 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

$$\tau_{4'} = \tau_{2'} = 17,32 \text{ МПа}.$$

В точке 3, расположенной на нейтральной оси z:

$S_z^{отс} = S_z$ – статический момент половины площади сечения;

$S_z^{отс} = 141 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ (из таблицы сортамента);

$b(y) = d = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ – ширина узкой части двутаврового сечения;

$$\begin{aligned} \tau_3 &= \frac{0,0082 \cdot 10^{11} \cdot 141 \cdot 10^{-6}}{5,3 \cdot 10^{-3}} = \frac{820 \cdot 141 \cdot 10^3}{5,3} \text{ Па} = \frac{0,82 \cdot 141}{5,3} \text{ МПа} = \\ &= 21,82 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Строим в масштабе эпюру распределения касательных напряжений по высоте двутаврового сечения (рис. 18, б).

Из построенных эпюр σ и τ следует, что нормальные напряжения имеют максимальные значения в точках, наиболее удалённых от нейтральной оси (точках 1, 5), максимальные касательные напряжения – в точках, расположенных на нейтральной оси z (точка 3).

Как было указано выше, значение σ_{\max} существенно превышает значение τ_{\max} .

Примечание. Для подбора балки прямоугольного сечения, имеющего размеры b и h , полученное из условия прочности (5.9) числовое значение для W_z приравнивают к значению $W_z = \frac{bh^2}{6}$. В условии задачи задаётся соотношение между высотой сечения h и шириной b , например, $h = 2b$. Учитывая это соотношение, подбираем размеры балки прямоугольного сечения h и b из условия прочности.

Для полной проверки прочности балки определяют главные напряжения в опасном сечении, величина которых имеет экстремальные значения \max и \min . Затем, используя одну из теорий прочности, сравнивают значения этих напряжений с допускаемым напряжением $[\sigma]$.

Для построения эпюр распределения главных напряжений в сечении балки вычисляем значения σ_{\max} для точек 1, 2, 4, 5 (принадлежащих полке), 2', 3, 4' (принадлежащих стенке):

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad (11)$$

Составим *табл. 1* значений σ_{\max} в этих точках:

Т а б л и ц а 1

Точка	σ , МПа	τ , МПа	σ_{\max}
1	159,40	0	159,40
2 (полке)	145,20	0,76	145,24
2' (стенке)	145,20	17,32	147,24
3	0	21,82	21,82
4 (полке)	-145,20	0,76	≈ 0
4' (стенке)	-145,20	17,32	2,04
5	-159,40	0	0

Примечание. Значения σ и τ берем с построенных эпюр (*рис. 18, а, 17, б*).

Для этих же точек вычислим σ_{\min} :

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad (12)$$

Составим *табл. 2* значений σ_{\min} в этих точках:

Т а б л и ц а 2

Точка	σ , МПа	τ , МПа	σ_{\min}
1	159,40	0	0
2 (полке)	145,20	0,76	≈ 0
2' (стенке)	145,20	17,32	-2,04
3	0	21,82	-21,82
4 (полке)	-145,20	0,76	-145,24
4' (стенке)	-145,20	17,32	-147,24
5	-159,40	0	-159,40

По полученным значениям σ_{\max} и σ_{\min} строим эпюру распределения главных напряжений по высоте сечения (*рис. 18, в*).

8. Определение линейных перемещений сечений балки и построение изогнутой оси

Для решения поставленной задачи найдем линейные перемещения (\cdot) 1 и (\cdot) 2 (*рис. 14*).

Примечание. Поместив начало координат в $(\cdot) C$, мы вынуждены будем определять начальные параметры f_0 и V_0 , т. е. f_C и V_C , которые не равны нулю.

Рациональнее повернуть балку на 180° (рис. 19) так, чтобы левое крайнее сечение балки B находилось на опоре. При этом линейное (вертикальное) перемещение $f_B = f_0 = 0$.

Из условий закрепления балки, надо определить только $V_0 = V_B$:

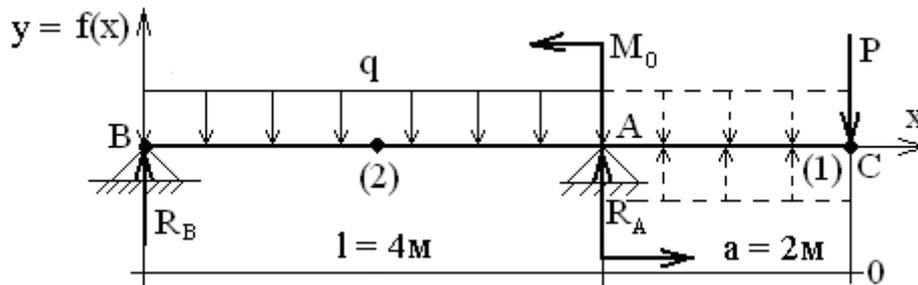


Рис. 19

- 1) разбиваем балку на два участка: BA – I участок, AC – II участок;
- 2) записываем функцию $M(x)$ поместив начало координат в $(\cdot) B$.

$$M(x) = R_B x - \frac{qx^2}{2} \Big|_I + R_A (x-4) - M_0 (x-4)^0 + \frac{q(x-4)^2}{2} \Big|_{II} . \quad (13)$$

Записываем функцию углов поворота $V(x)$, проинтегрировав выражение (13):

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{R_B x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} \Big|_I + \frac{R_A (x-4)^2}{2} - \frac{M_0 (x-4)^1}{1} + \frac{q(x-4)^3}{6} \Big|_{II} \right]; \quad (14)$$

3) записываем функцию линейных перемещений $f(x)$, проинтегрировав выражение (14):

$$f(x) = f_0 + V_0 \cdot x + \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{R_B x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} \Big|_I + \frac{R_A (x-4)^3}{6} - \frac{M_0 (x-4)^2}{2} + \frac{q(x-4)^4}{24} \Big|_{II} \right]; \quad (15)$$

4) записываем условия равенства нулю линейных перемещений на опорах B и A .

$$\left. \begin{aligned} f_{(x=0)} = f_B = 0 \\ f_{(x=4m)} = f_A = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Из этих условий определяем начальные параметры f_0 и V_0 . Используя первое условие, определяем: $f_0 = 0$.

Для определения V_0 используем второе условие. Сечение A принадлежит первому участку, поэтому записываем функцию $f(x)$ для I участка и полагаем её равной нулю в сечение A , т. е. при значении координаты $x = 4$ м.

$$f(x) = V_0 x + \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{R_B x^3}{6} - \frac{q x^4}{24} \right]. \quad (17)$$

$$f(x=4\text{ м}) = 0 = V_0 \cdot 4 + \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{R_B \cdot 4^3}{6} - \frac{q \cdot 4^4}{24} \right]; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} V_0 &= -\frac{1}{4EJ_z} \left[\frac{R_B \cdot 4^3}{6} - \frac{q \cdot 4^4}{24} \right] = -\frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2760 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{17,5 \cdot 10^3 \cdot 64}{6} - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 256}{24} \right) = \\ &= -\frac{10^3 \cdot 10^8}{8 \cdot 10^{11} \cdot 2760} (186,67 - 106,67) = -\frac{1}{276}. \\ V_0 &= -\frac{1}{276}; \end{aligned} \quad (19)$$

5) вычисляем линейное перемещение (\cdot) 1 (сечение C).

Сечение C принадлежит II участку, координата сечения $x = 6$ м.

Записываем функцию $f(x)$ с определенными выше значениями начальных параметров, подставляя координату $x = 6$ м:

$$\begin{aligned} f_{(\cdot)1(x=6\text{ м})} &= -\frac{1 \cdot 6}{276} + \frac{1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2760 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{17,5 \cdot 6^3}{6} - \frac{10 \cdot 6^4}{24} + \frac{42,5 \cdot 2^3}{6} - \frac{30 \cdot 2^2}{2} + \frac{10 \cdot 2^4}{24} \right) = \\ &= -0,022 + \frac{93,34}{5520} = -0,022 + 0,017 = -0,005\text{ м} = -5\text{ мм}; \end{aligned}$$

б) вычисляем линейное перемещение (\cdot) 2 (точка середины пролета AB).

Точка 2 принадлежит I участку, ее координата $x = 2$ м.

$$\begin{aligned} f_{(\cdot)2(x=2\text{ м})} &= -\frac{1 \cdot 2}{276} + \frac{1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2760 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{17,5 \cdot 2^3}{6} - \frac{10 \cdot 2^4}{24} \right) = \\ &= -0,007 + \frac{1}{5520} (23,33 - 6,67) = -0,007 + 0,003 = -0,004\text{ м} = -4\text{ мм}. \end{aligned}$$

Знак (-) при вычислении V_0, f_1, f_2 указывает на то, что сечение B при изгибе поворачивается по часовой стрелке, сечения 1 и 2 перемещаются вниз от оси x;

7) строим в масштабе изогнутую ось под эпюрой изгибающих моментов (рис. 17, в). Для построения изогнутой оси балки используем нулевые значения прогибов на опорах A и B и вычисленные прогибы сечений 1 и 2;

8) удобно сопоставить очертание эпюры $M(x)$ и изогнутой оси балки, ориентируясь на знак кривизны: на участке балки с отрицательным моментом кривизна отрицательная; с положительным моментом кривизна положительная.

Варианты тестовых заданий для самоконтроля

Тест № 1. Тема растяжение (сжатие)

1. Свойство материала сопротивляться разрушению называется _____

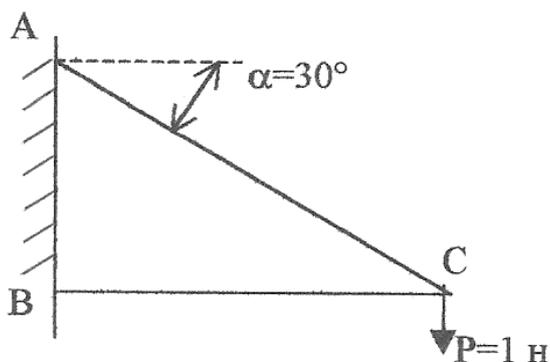
1	прочностью
2	упругостью
3	жесткостью
4	твердостью
5	пластичностью

2. Укажите символ, имеющий размерность Па

1	Δl
2	P
3	σ_T
4	μ
5	N

3. Определите N_{AC}

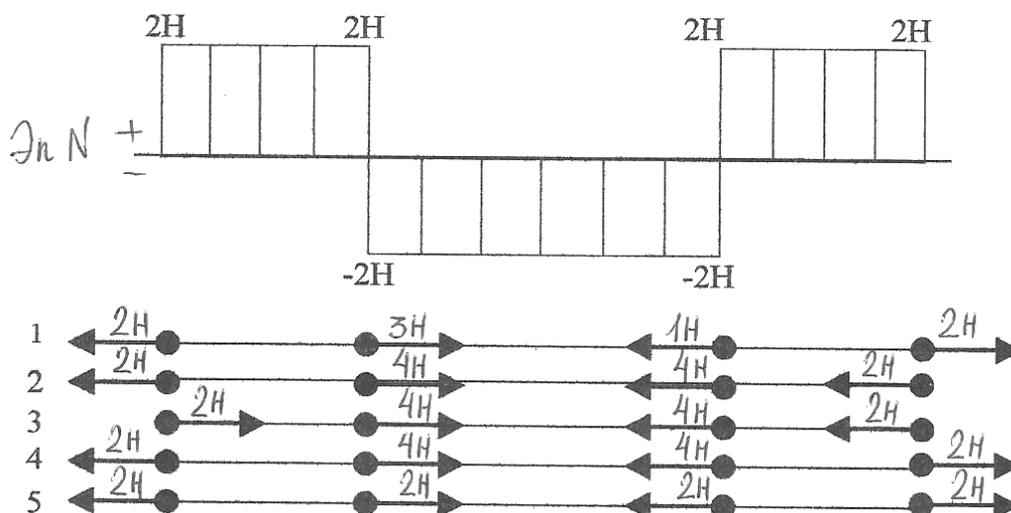
1	0
2	1
3	4
4	2
5	3



4. Нагрузка, медленно растущая во времени, называется _____
нагрузкой.

1	повторно-переменной
2	статической
3	ударной
4	динамической
5	распределенной

5. Определите схему нагрузки, соответствующей эпюре N

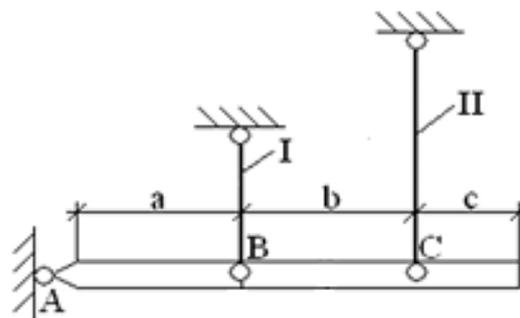


6. Найдите форму записи закона Гука

1	$\varepsilon = \frac{P}{E}$
2	$\frac{N}{l} = \varepsilon$
3	$\sigma = \frac{N}{E}$
4	$\sigma = \varepsilon N$
5	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

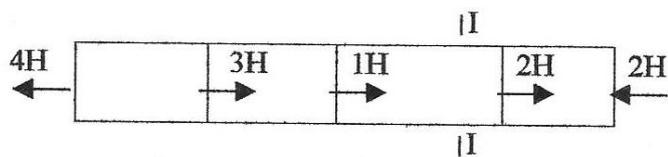
7. Для случая, изображенного на рисунке, степень статической неопределенности составляет _____.

1	0
2	3
3	1
4	2
5	4



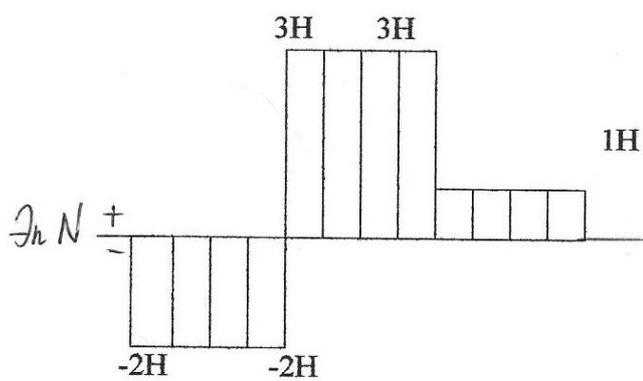
8. Определите N в сечении I-I

1	2Н
2	-4Н
3	3Н
4	-2Н
5	0Н



9. Выберите правильные форму записи и ответ при определении площади F , $[\sigma] = 100 \text{ Па}$

1	$F \geq \frac{ N }{[\sigma]} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$
2	$F = \frac{ N }{[\sigma]} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$
3	$F \leq \frac{ N }{[\sigma]} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$
4	$F \geq \frac{ N }{[\sigma]} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$
5	$F \leq \frac{ N }{[\sigma]} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$



10. Механика материалов и конструкций – это наука о _____
элементов конструкций

1	прочности, жесткости и однородности
2	прочности, жесткости и устойчивости
3	жесткости, устойчивости и пластичности
4	прочности, устойчивости и сплошности
5	однородности, сплошности и устойчивости

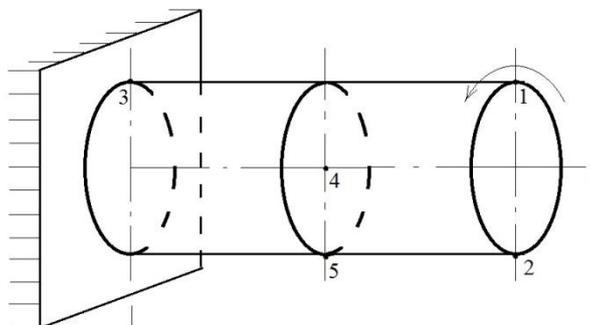
Тест № 2. Тема кручение

1. Деформация кручения – такой вид нагружено-деформированного состояния, при котором ...

1	нагрузка прикладывается параллельно основанию тела
2	линия действия сил, приложенных к стержню, совпадает с его продольной осью x
3	деформирование вала создаётся в результате приложения пар сил в плоскостях, нормальных к его оси
4	пары сил располагаются в плоскости, продольной оси стержня
5	на конструкцию действует распределенная нагрузка

2. Какая точка испытывает наименьшее напряжение?

1	T.1
2	T.2
3	T.3
4	T.4
5	T.5

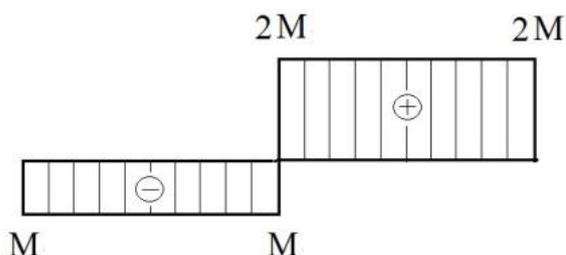


3. Как обозначается крутящий момент?

1	$M_{кр}$
2	$M_{скр}$
3	$M_{и}$
4	I_p
5	W_p

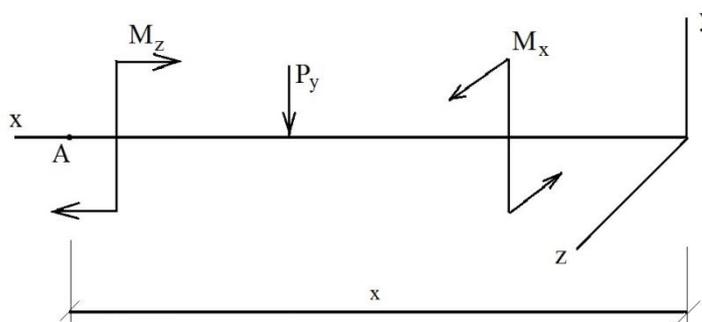
4. Выберите расчетное усилие для проверки прочности

1	0
2	M
3	$2M$
4	$3M$
5	$-M$



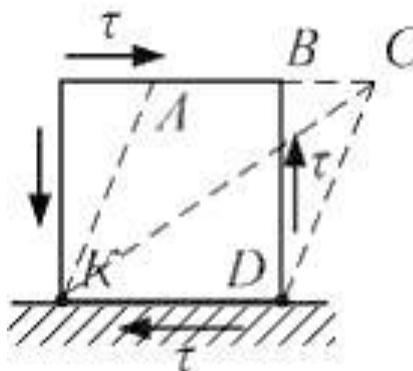
5. По какой формуле вычисляется крутящий момент?

1	$\sum_1^n M_{iz}^{\text{лев.часть}} =$
2	$\sum_1^n M_{ix}^{\text{лев.часть}} =$
3	$\sum_1^n M_{iy}^{\text{лев.часть}} =$
4	$\sum_1^n y_i^{\text{лев.часть}} =$
5	$\sum_1^n x_i^{\text{лев.часть}} =$



6. Напряженное состояние «чистый сдвиг» показано на рисунке. Штриховыми линиями показан характер деформации. Углом сдвига называется угол ...

1	<i>BDC</i>
2	<i>BCD</i>
3	<i>KAB</i>
4	<i>ACK</i>
5	<i>AKD</i>



7. Найти запись закона Гука при сдвиге $\tau =$

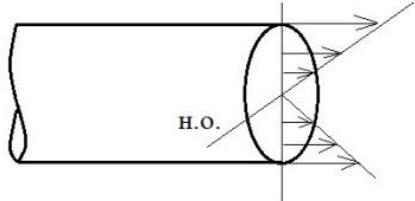
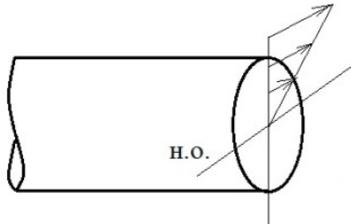
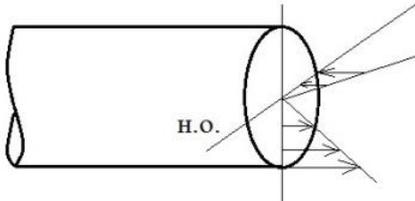
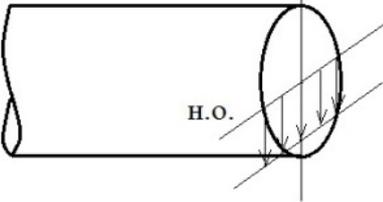
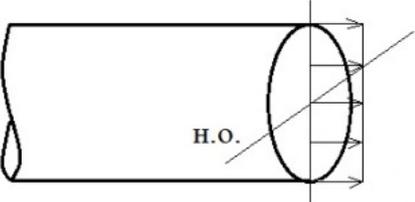
1	$= \frac{M \cdot l}{G \cdot I_p}$
2	$= E \varepsilon$
3	$= \frac{Nl}{EF}$
4	$= \frac{M_k}{W_p}$
5	$= G \gamma$

8. Какая нагрузка соответствует условию прочности данного стержня?

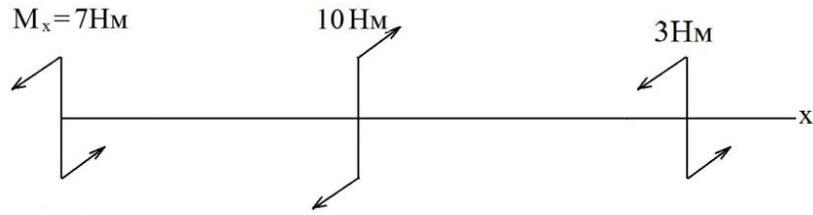
$$\tau^{max} \left(\frac{M_K}{W_P} \right)^{опасное} = \frac{2M}{0,2d^3} \leq [\tau]$$

1	
2	
3	
4	
5	

9. Какая эпюра напряжений соответствует скручиваемому стержню?

1	
2	
3	
4	
5	

10. Найдите эпюру крутящих моментов, которая соответствует заданной нагрузке



1	
2	
3	
4	
5	

Тест № 3. Тема изгиб

1. Что означает зависимость $W = J/z_{\max}$

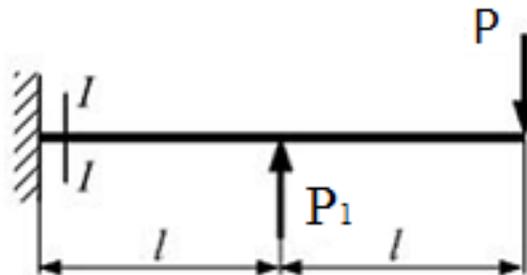
1	напряжение при косом изгибе
2	момент сопротивления
3	центробежный момент инерции
4	момент по 1 теории прочности при кручении с изгибом
5	осевые моменты инерции кольцевого (трубчатого) сечения

2. Что означает зависимость $J_p = 0,1d^4$

1	экваториальный осевой момент
2	полярный момент инерции
3	осевые моменты инерции кольцевого (трубчатого) сечения
4	осевой момент сопротивления
5	напряжение при косом изгибе

3. Консольная балка длиной $2l$ нагружена силами P_1 и P . Сечение I–I расположено бесконечно близко в заделке. Изгибающий момент в сечении I–I равен нулю, если значение силы P_1 равно ...

1	0,5P
2	P
3	3P
4	2P
5	0



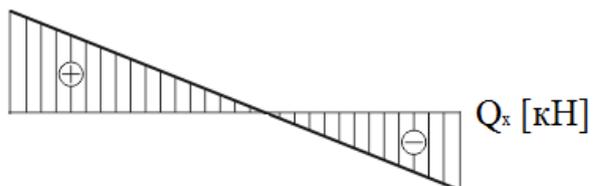
4. Сколько реакций имеет шарнирно-неподвижная опора балки?

1	1
2	2
3	3
4	0
5	4

5. Укажите символ, обозначающий изгибающий момент

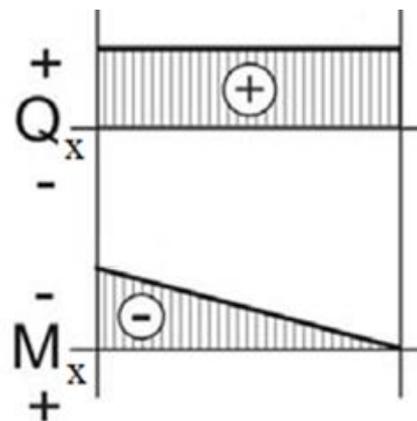
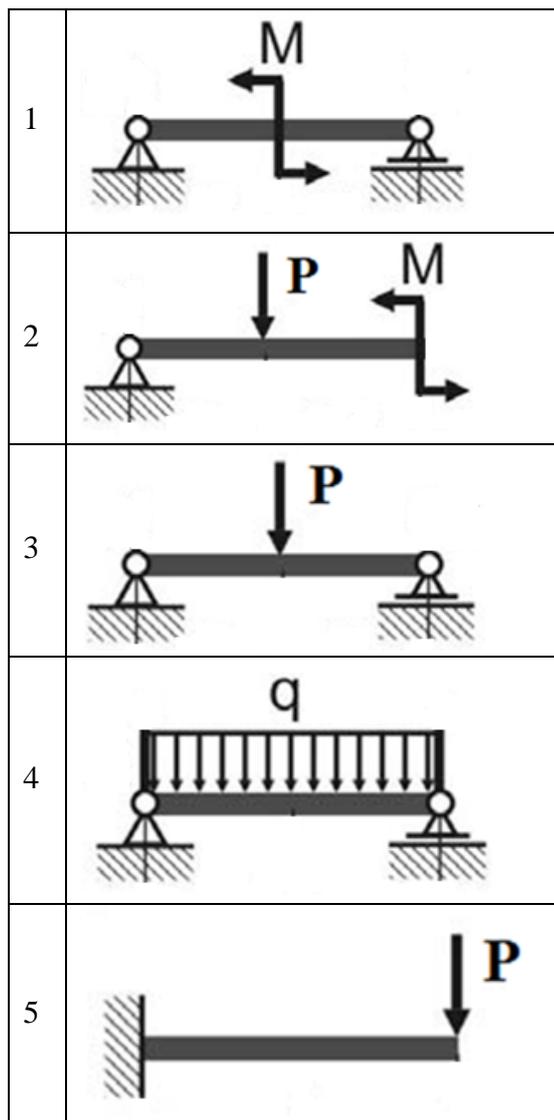
1	Q_x
2	E
3	M_x
4	σ
5	μ

6. Определите характер эпюры M_x , если эпюра Q_x имеет вид



1	
2	
3	
4	
5	

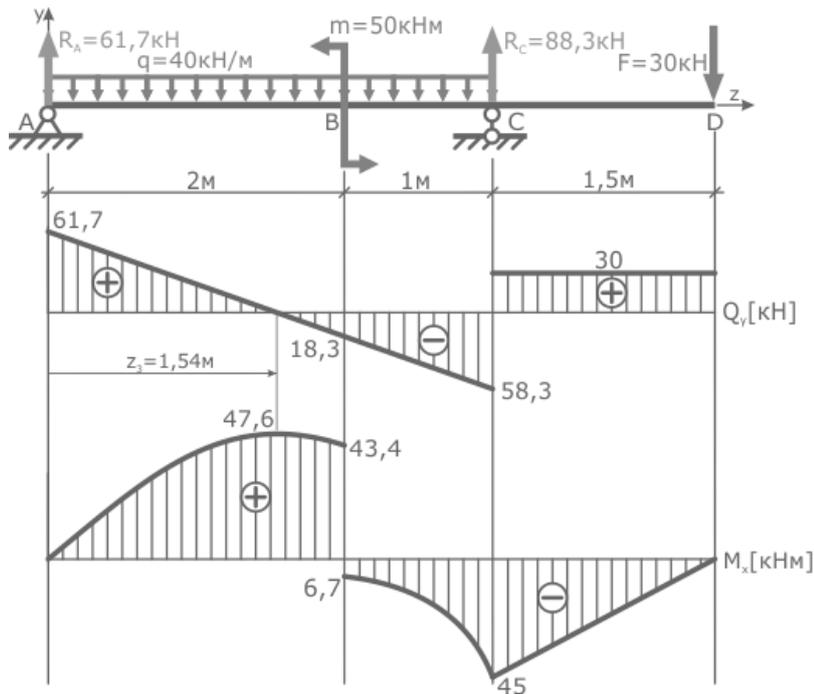
7. Определите схему загрузки, соответствующей эпюрам Q_x и M_x



8. Нагрузка, действующая на участке определённой длины, называется _____ нагрузкой

1	изгибающей
2	статической
3	ударной
4	динамической
5	распределенной

9. Выберите правильную форму записи и ответ для подбора сечения двутавра, $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$



1	$W \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \geq 476 \text{ см}^3$
2	$W \geq \frac{Q_{max}}{[\sigma]} \geq 617 \text{ см}^3$
3	$W \geq \frac{Q_{max}}{[\sigma]} \geq 883 \text{ см}^3$
4	$W = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = 476 \text{ см}^3$
5	$W \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \geq 500 \text{ см}^3$

10. В механике материалов и конструкций основным методом расчета на прочность является метод расчета по ...

1	допускаемым напряжениям
2	разрушающим нагрузкам
3	предельным состояниям
4	деформациям

Ответы к тестовым заданиям

Номер вопроса	Тест 1	Тест 2	Тест 3
1	1	3	2
2	3	4	2
3	2	1	4
4	2	3	2
5	4	2	3
6	5	1	4
7	3	5	5
8	5	5	5
9	4	2	1
10	2	4	1

Учебное издание

**Цобкалло Екатерина Сергеевна
Васильева Валерия Владиславовна
Москалюк Ольга Андреевна**

**МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ.
Учебное пособие к выполнению
контрольных заданий**

Издательский редактор Т. Н. Козлова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=2020158, по паролю.
– Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 24.08.2020 г. Рег. № 158/20.

ФГБОУВО «СПбГУПТД»
Юридический и почтовый адрес:
191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18.
<http://sutd.ru/>