

Федеральное агентство по образованию

---

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Санкт-Петербургский государственный технологический институт  
(Технический университет)

---

Кафедра теоретических основ химического машиностроения

# **ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Часть I.

Теоретическая механика.  
Теория механизмов и машин

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2009

Федеральное агентство по образованию

---

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Санкт-Петербургский государственный технологический институт  
(Технический университет)

---

Кафедра теоретических основ химического машиностроения

Н.А.МАРЦУЛЕВИЧ, Е.Г.МАТЮШИН, В.В.ФЕДОТОВ,  
А.Н.ЛУЦКО, М.Д.ТЕЛЕПНЕВ

# **ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Часть I.

Теоретическая механика.  
Теория механизмов и машин

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2009

Марцулевич Н.А., Матюшин Е.Г., Федотов В.В., Луцко А.Н., Телепнев М.Д. Техническая механика, Часть I. Теоретическая механика, Теория механизмов и машин: Учебное пособие / Под ред. проф. Н.А.Марцулевича. – СПб. СПбГТИ (ТУ), 2009. - 330 с.

Материал учебного пособия полностью соответствует содержанию государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования по направлениям подготовки дипломированных специалистов по специальности 220701 «Менеджмент высоких технологий», а также по направлениям подготовки бакалавров 150600 «Материаловедение и технологии новых материалов» и 150400 «Технологические машины и оборудование». Отдельные главы пособия могут быть использованы при курсовом проектировании по дисциплине «Теория механизмов и машин» студентами, обучающимися по специальностям 240801 «Машины и аппараты химических производств», 270101 «Механическое оборудование и технологические комплексы предприятий строительных материалов, изделий и конструкций», 240706 «Автоматизированное производство химических предприятий».

В пособие включены варианты контрольных заданий по основным разделам курса «Техническая механика», которые будут полезны как при проведении практических занятий, так и при проведении индивидуальных контрольных мероприятий.

#### Рецензенты:

С.М.Бауэр, доктор физико-математических наук, профессор кафедры гидроупругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского университета, член Национального Комитета по механике.

О.Г.Агошков, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой стрелково-пушечного, артиллерийского и ракетного вооружений Балтийского Государственного Технического Университета им. Д.Ф.Устинова («ВОЕНМЕХ»).

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии общеинженерного отделения СПбГТИ (ТУ) 17 сентября 2009 года (протокол № 1).

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
----------	---

### *Теоретическая механика*

#### Глава 1. Статика

1.1. Основные понятия и аксиомы статики	10
1.2. Виды связей и вызываемые ими реакции	12
1.3. Плоская система сходящихся сил	15
1.4. Пары сил на плоскости	17
1.5. Условия равновесия произвольной системы сил на плоскости	19
1.6. Пространственная система сил	22
1.7. Условия равновесия пространственной системы сил	24
1.8. Силы трения	25
1.9. Контрольные вопросы	27

#### Глава 2. Кинематика

2.1. Способы задания движения точки	29
2.2. Скорость и ускорение движущейся точки	30
2.3. Поступательное и вращательное движение твердого тела	36
2.4. Плоскопараллельное движение твердого тела	40
2.5. Скорость и ускорение точки при сложном движении	44
2.6. Определение параметров движения при работе типовых механизмов	48
2.7. Сферическое движение и движение свободного твердого тела	52
2.8. Контрольные вопросы	53

#### Глава 3. Динамика

3.1. Основные понятия и аксиомы динамики	55
3.2. Дифференциальное уравнение движения материальной точки	56
3.3. Принцип Даламбера. Силы инерции	59
3.4. Центр масс механической системы	60
3.5. Количество движения материальной точки и механической системы	63
3.6. Моменты инерции механической системы	65
3.7. Момент количества движения материальной точки и механической системы	67
3.8. Дифференциальное уравнение плоского движения твердого тела	71
3.9. Работа и мощность механических сил	72
3.10. Кинетическая энергия материальной точки и	

механической системы	76
3.11. Динамика простейших колебательных систем	81
3.12. Контрольные вопросы	85

### *Теория механизмов и машин*

Глава 4. Основные понятия теории механизмов и машин	
4.1. Составные части механизмов	87
4.2. Основные типы плоских механизмов	93
4.3. Структурная формула плоской кинематической цепи	95
4.4. Последовательность структурного анализа механизма	101
4.5. Контрольные вопросы	102
Глава 5. Кинематический анализ плоских рычажных механизмов	
5.1. Основные задачи и методы кинематического анализа	103
5.2. Графо-аналитический метод кинематического анализа (метод планов)	104
5.3. Кинематический анализ шарнирного четырехзвенника	112
5.4. Аналитический метод кинематического анализа	117
5.5. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма	123
5.6. Контрольные вопросы	126
Глава 6. Силовой (кинетостатический) анализ плоских рычажных механизмов	
6.1. Задачи силового анализа. Характеристика сил, действующих на звенья механизма	128
6.2. Расчет сил инерции отдельных звеньев	131
6.3. Определение реакций в кинематических парах	132
6.4. Кинетостатика ведущего звена механизма	139
6.5. Определение уравновешивающей силы (уравновешивающего момента) по методу Жуковского	141
6.6. Контрольные вопросы	145
Глава 7. Трение в механизмах и машинах	
7.1. Виды трения	146
7.2. Определение силы сухого и полусухого трения скольжения	148
7.3. Определение потерь на трение в низших кинематических парах рычажных механизмов	150
7.4. Трение качения в высших кинематических парах	154
7.5. Трение в подшипниках качения	156
7.6. Трение в передачах с фрикционными колесами	159
7.7. Трение в ременных передачах	162
7.8. Контрольные вопросы	165

Глава 8. Анализ движения механизмов	
8.1. Работа сил, действующих на звенья механизма	167
8.2. Уравнение движения механизма в форме интеграла энергии (уравнение кинетической энергии)	169
8.3. Простейшие динамические модели плоских рычажных механизмов. Приведение сил и масс	170
8.4. Определение приведенной силы и приведенного момента сил по теореме Жуковского	177
8.5. Дифференциальное уравнение движения механизма	178
8.6. Режимы движения механизмов	180
8.7. Коэффициент полезного действия отдельных механизмов	183
8.8. Законы передачи сил и моментов в механизмах	189
8.9. Интегрирование дифференциального уравнения движения механизма	191
8.10. Подбор маховика и определение угловой скорости ведущего звена механизма с маховиком	194
8.11. Контрольные вопросы	201
Глава 9. Синтез рычажных механизмов	
9.1. Основные типы задач синтеза механизмов	203
9.2. Условие существования кривошипа в шарнирном четырехзвенном механизме	204
9.3. Проектирование кривошипно-коромыслового четырехзвенника	206
9.4. Проектирование кривошипно-ползунного механизма	209
9.5. Уравновешивание механизмов	210
9.6. Контрольные вопросы	217
Глава 10. Механические передачи	
10.1. Классификация и основные характеристики механических передач	218
10.2. Воспроизведение движения между звеньями механизма передачи методом взаимного обкатывания центроид	221
10.3. Основная теорема зацепления	224
10.4. Эвольвентное зацепление и его свойства	227
10.5. Элементы эвольвентного зубчатого колеса	232
10.6. Способы изготовления зубчатых колес и их сравнительная оценка	235
10.7. Явление подрезания профилей зубьев	242
10.8. Условия сборки передач и их классификация	244
10.9. Дуга зацепления и коэффициент перекрытия	250
10.10. Проверка профилей на взаимное внедрение	257
10.11. Коэффициент скольжения зубьев	260

10.12. Порядок проектирование зубчатых передач	264
10.13. Цилиндрические зубчатые передачи с косозубыми колесами	270
10.14. Конические передачи	273
10.15. Червячные передачи	280
10.16. Контрольные вопросы	284
Глава 11. Кулачковые механизмы	
11.1. Виды кулачковых механизмов, их структурные и геометрические параметры	285
11.2. Силовой анализ кулачковых механизмов	292
11.3. Проектирование кулачкового механизма	298
11.4. Контрольные вопросы	311
Глава 12. Варианты контрольных заданий, методика и примеры их решения	
Контрольная работа № 1. Статика	312
Контрольная работа № 2. Кинематика	313
Контрольная работа № 3. Динамика	316
Контрольная работа № 4. Кинематический анализ плоского рычажного механизма	320
Контрольная работа № 5. Кинетостатический анализ плоского рычажного механизма	324
Контрольная работа № 6. Динамический анализ плоского рычажного механизма	327
Контрольная работа № 6. Динамический анализ плоского рычажного механизма	328
Литература	329

## Введение

Механикой называют область науки, которая изучает простейшую форму движения материальных тел – механическую. Под механическим движением понимают перемещение тел или их отдельных частей во времени из одного положения пространства в другое. При этом причиной движения может быть взаимодействие как с другими телами, так и с физическими полями (например, гравитационными, электрическими). Механика рассматривает множество самых различных объектов, начиная от небесных тел и заканчивая элементарными частицами. Применительно к технике объектами механики являются различные технические устройства, характерные для той или иной сферы производства.

В химических, нефтехимических и биотехнологических производствах основными объектами являются рабочие среды, участвующие в технологических процессах, и оборудование, в котором эти процессы реализуются. Движение рабочих сред и его влияние на эффективность процессов изучается в дисциплине «Процессы и аппараты». Поведение элементов оборудования при проведении технологических процессов является предметом изучения курса «Технической механики».

Курс «Технической механики» включает четыре больших раздела. Первый – «Теоретическая механика» - посвящен общим вопросам механического движения твердого недеформируемого тела или системы тел. Здесь устанавливаются основные закономерности движения таких тел под действием заданных сил без учета свойств материалов, из которых состоят указанные тела.

Второй раздел курса – «Теория механизмов и машин» - рассматривает приложение закономерностей «Теоретической механики» к изучению особых механических систем, называемых механизмами. Этот раздел представляет собой непосредственный шаг в направлении изучения технологического оборудования, поскольку механизмы являются основой технологических машин и аппаратов, регистрирующих приборов, рабочих органов управляющих элементов, механических приспособлений и т. д.

В третьем разделе пособия – «Сопротивление материалов» - излагаются важнейшие положения анализа прочности и жесткости инженерных конструкций. Таким образом, делается еще один шаг в направлении изучения поведения элементов реального технологического оборудования, которое изготовлено из материалов, имеющих ограниченную прочность и испытывающих деформацию в той или иной степени. В этом разделе даются основы инженерных методов расчета элементов конструкций с целью обеспечения их работоспособности.

Наконец, четвертый раздел – «Детали машин» - включает материал, посвященный вопросам расчета и конструирования деталей и узлов технологического оборудования, а также выбора их типовых элементов на основе действующих государственных и отраслевых стандартов.

Все разделы курса «Техническая механика» тесно связаны между собой. Их объединяет не только общий объект исследования (химико-технологическое оборудование), но и единые методология и цель. Последняя состоит в формировании у студента фундамента профессиональной квалификации будущего специалиста в области безопасной эксплуатации химической аппаратуры. Поэтому «Техническая механика» является базовой общепрофессиональной учебной дисциплиной, входящей в государственные образовательные стандарты всех специальностей химико-технологического и биотехнологического профиля.

Содержание и логика построения курса «Техническая механика» вытекают из круга основных вопросов, которыми должен владеть современный инженер химик-технолог как лицо, ответственное за работоспособность химического оборудования и его безопасную эксплуатацию. Большая часть этих вопросов связана с особенностями объектов химической и биотехнологической промышленности, отличающимися их от технических устройств в других сферах человеческой деятельности. Работе химико-технологических установок присущи тяжелые режимы функционирования, обусловленные переработкой больших масс агрессивных веществ в условиях высоких температур и давлений. В результате оборудование испытывает продолжительные нагрузки механической, физико-химической и химической природы. При этом техническая диагностика и контроль состояния аппаратуры сильно затруднены, так что весь срок ее эксплуатации проходит, как правило, при отсутствии полной информации о техническом состоянии оборудования.

Нельзя не учитывать и того обстоятельства, что объекты химических и биохимических производств несут в себе высокую потенциальную опасность, вызванную целым комплексом поражающих факторов: отравление и заражение химически опасными веществами, тепловое излучение, воздействие взрывных волн. Поэтому практически любая установка может послужить источником техногенной аварии различного масштаба. Более того, даже нормальная работа химических предприятий из-за несовершенства технологии сопряжена со значительным загрязнением окружающей среды. Недостаточная надежность химических производств чревата также огромными экономическими потерями, обусловленными простым дорогостоящим оборудованием, затратами на его ремонт, низким качеством получаемых продуктов.

Из сказанного становится понятным, насколько важно современному инженеру-технологу владеть всеми вопросами, связанными с причинами возникновения отказов аппаратуры различного назначения. В свою очередь, причины отказов непосредственно связаны с критериями работоспособности оборудования (прочностью, герметичностью, износостойкостью и т. п.). Потеря работоспособности может быть обусловлена действием механических нагрузок на элементы оборудования и его узлы, условиями его функционирования, свойствами материалов, из которых оно изготовлено, свойствами рабочих сред, продолжительностью эксплуатации. Следовательно, технолог должен уметь анализировать влияние этих факторов на элементы оборудования и его узлы с точки зрения возможности отказа. Изложение основ такого анализа и является непосредственной задачей курса «Техническая механика».

Настоящее учебное пособие состоит из двух частей. Первая часть включает разделы «Теоретическая механика» и «Теория механизмов и машин», вторая часть – разделы «Сопротивление материалов» и «Детали машин». Именно так построены учебные планы по «Технической механике» для большинства специальностей и направлений подготовки. Изучению этой дисциплины в указанных учебных планах отводится два семестра, в одном из которых рассматривается материал, вошедший в первую часть пособия, а в другом – материал, вошедший во вторую часть пособия.

После изложения теоретического материала в конце каждой главы пособия приведены контрольные вопросы, позволяющие студентам лучше усвоить материал, сориентироваться в степени важности отдельных положений и проверить свои знания.

Уровень усвоения материала студенты должны подтвердить выполнением шести контрольных работ по каждой части курса, защита которых является необходимым условием допуска к экзамену. В пособие включены варианты заданий к ним, таблицы исходных данных, а также подробно разобранные примеры выполнения заданий. В конце пособия приведен список основной и дополнительной литературы, с помощью которой студенты могут более глубоко усвоить материал курса «Техническая механика».

# Теоретическая механика

## Глава 1. Статика

### 1.1. Основные понятия и аксиомы статики

Любое материальное тело под действием сил может находиться либо в состоянии покоя, либо совершать определенное движение. Каждое из этих состояний в механике называется **кинематическим состоянием тела**. Изменение кинематического состояния означает изменение характера движения тела, в том числе нарушение состояния покоя или, наоборот, его достижение.

Изменение кинематического состояния механической системы (в частности, твердого тела) происходит вследствие действия на нее сил со стороны других тел или физических полей. Поэтому **силу** можно рассматривать как меру механического действия одного материального тела на другое. Сила характеризуется численным значением, точкой приложения и линией действия. Следовательно, сила – величина векторная. Совокупность нескольких сил  $\{\mathbf{F}_i\}_n$  называется **системой сил** (векторные величины, в отличие от скалярных, обозначаются жирными буквами).

Две системы сил  $\{\mathbf{F}_i\}_n$  и  $\{\mathbf{Q}_i\}_m$  называются **эквивалентными**, если при замене одной из них на другую кинематическое состояние свободного тела не изменится. Для эквивалентных систем сил используется обозначение:

$$\{\mathbf{F}_i\}_n \sim \{\mathbf{Q}_i\}_m.$$

Одна сила  $\mathbf{R}$ , эквивалентная некоторой системе сил  $\{\mathbf{F}_i\}_n$ , называется ее **равнодействующей**:

$$\mathbf{R} \sim \{\mathbf{F}_i\}_n.$$

Если система сил  $\{\mathbf{F}_i\}_n$  эквивалентна нулевой силе, то она называется **уравновешенной**. Уравновешенная система сил не меняет кинематического состояния тела. В частности, если оно находилось в состоянии равновесия, то после приложения уравновешенной системы сил состояние равновесия не будет нарушено.

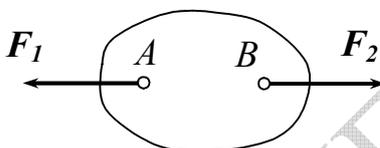
Основные задачи статики как раздела механики состоят в изложении методов преобразования одних систем сил в другие, им эквивалентные, а также в установлении условий, которым должны удовлетворять системы сил, чтобы они были уравновешенными. Указанные условия можно рассматривать как условия равновесия

материального тела, если до приложения к нему сил оно находилось в состоянии покоя.

Все силы по отношению к данной механической системе делятся на внешние и внутренние. **Внешними** называются силы, которые действуют на точки данной механической системы со стороны тел или точек, не входящих в эту систему. **Внутренними** силами называются силы взаимодействия точек самой системы.

Основные положения статики выводятся из нескольких простых и наглядных аксиом, справедливость которых подтверждена опытом.

**Аксиома 1.** Система из двух сил, действующих на тело, является уравновешенной в том случае, если эти силы имеют общую линию действия, равны по величине и направлены в противоположные стороны.



Рисунок

Используя ранее введенное обозначение, для системы сил, изображенной на рис. 1.1, можно написать:

$$\{F_1, F_2\} \sim 0, \text{ если } F_1 = F_2.$$

Из первой аксиомы следует, что система из одиночной силы не может быть уравновешенной.

**Аксиома 2.** Две системы сил, отличающиеся друг от друга на уравновешенную систему сил, эквивалентны.

Согласно этой аксиоме действие любой системы сил на твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

**Аксиома 3.** Система двух сил, приложенных в одной точке, имеет равнодействующую, равную их векторной сумме и приложенную в той же точке.

Из векторной алгебры известно, что сумма двух векторов может быть представлена диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах как на его сторонах. Следовательно, равнодействующая  $R$  двух сил  $F_1$  и  $F_2$  может быть получена с помощью несложного построения (рис. 1.2), а ее величина по теореме косинусов равна:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}, \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  – угол между силами.

Следует подчеркнуть, что аксиома 3 справедлива для сил, линии действия которых пересекаются. Если это не так, то силы могут не иметь равнодействующей.

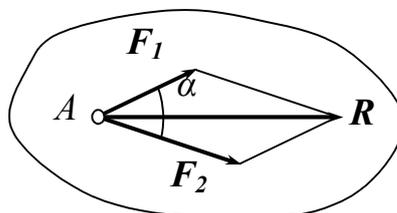


Рисунок  
1 2

**Аксиома 4.** При взаимодействии двух тел они действуют друг на друга с силами, равными по модулю, имеющими общую линию действия и направленными по ней в противоположные стороны.

В отличие от аксиомы 1 в этой аксиоме речь идет о двух силах, приложенных к разным телам. Поэтому силы взаимодействия двух тел не составляют уравновешенную систему. С другой стороны, внутренние силы, действующие между отдельными точками одной и той же механической системы, всегда уравновешивают друг друга.

**Аксиома 5.** Равновесие деформируемого тела не изменится, если оно станет абсолютно твердым.

Последнюю аксиому часто называют принципом отвердевания. Она позволяет рассматривать деформируемые тела, находящиеся в равновесии, как абсолютно твердые. Следовательно, все результаты, полученные в статике, могут быть использованы при анализе конструкций, деформации которых нельзя не учитывать.

Шестая аксиома статики будет сформулирована после введения ряда необходимых понятий.

## 1.2. Виды связей и вызываемые ими реакции

Движение элементов химического оборудования, как правило, не может быть произвольным. Соседние с ними элементы ограничивают их перемещение в некоторых направлениях, что сказывается на характере их возможного движения. Тела, ограничивающие перемещение рассматриваемого элемента, называются **связями**, а силы, за счет которых связи препятствуют его перемещению в определенном направлении, называются **реакциями связей**.

Таким образом, на любое материальное тело со стороны других тел могут действовать два рода сил. К первому относятся силы, способные привести в движение первоначально покоящееся тело.

Они называются **активными**. Активные силы не зависят от величины и направления действия других сил.

Ко второму роду сил относятся реакции связей. Они называются **пассивными**. Пассивные силы возникают лишь тогда, когда под действием активных сил тело оказывает давление на связь. Согласно аксиоме 4 реакция связи будет равна по величине такому давлению и направлена в противоположную сторону. Следовательно, пассивные силы зависят не только от характера связи, но и от величины и направления активных сил.

Одна из важнейших задач статики – определение реакций связей, наложенных на механическую систему при равновесии. Их величина необходима для расчета внутренних усилий в конструкционном материале элементов технологического оборудования, а также непосредственно участвует при расчете опор, фундаментов, подвесок, кронштейнов и т. д.

Определение реакций связей основано на **принципе освобождаемости**, который составляет содержание еще одной аксиомы механики.

**Аксиома 6.** *Всякое тело, на перемещения которого наложены ограничения, можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить связи, а их действие заменить соответствующими реакциями связей.*

Для правильного применения принципа освобождаемости необходимо четко различать характер различных связей. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы связей и их реакции, учитывая, что последние всегда направлены в сторону, противоположную направлению недопустимого перемещения.

1. *Гладкая поверхность.* Поверхность называется гладкой, если движение по ней происходит без трения. Связь этого типа исключает перемещение тела вдоль внутренней нормали к поверхности в данной точке. Поэтому реакция связи будет направлена вдоль внешней нормали и приложена в точке касания тела и поверхности (рис. 1.3).

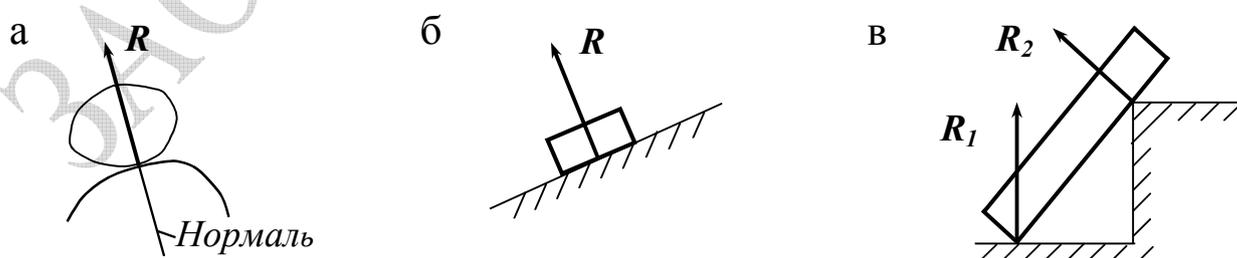


Рисунок 1.3

В случае угловой опоры (угловая точка нормали не имеет) реакция направлена по нормали к поверхности тела в точке соприкосновения с углом.

2. *Гибкая нерастяжимая невесомая нить.* Этот вид связи моделирует ограничения на перемещения тел, которые закреплены канатами, тросами и т. п. Реакция всегда направлена вдоль нити к точке ее закрепления (рис. 1.4).

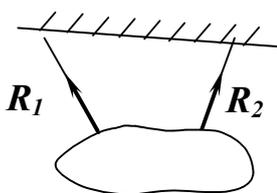


Рисунок 1.4

3. *Шарнирно-подвижная опора.* Так же как и гладкая поверхность, эта связь допускает движение тела по касательной, но препятствует перемещению как по внутренней, так и по внешней нормали к опорной поверхности. Поэтому реакция направлена перпендикулярно к ней. На практике такой тип связи реализуется при использовании опор с катками. Возможность свободного перемещения вдоль поверхности отражена в принятых для шарнирно-подвижных опор обозначениях (рис. 1.5, а, б).

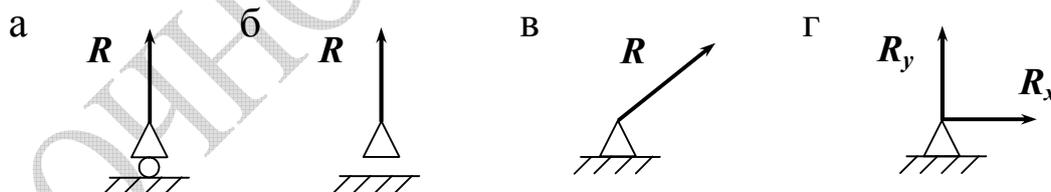


Рисунок 1.5

4. *Шарнирно-неподвижная опора.* Этот тип связи, в отличие от предыдущей, исключает и перемещение по касательной к опорной поверхности. Реакция связи имеет неизвестное направление. Ее удобно разложить на две составляющие: по касательной и по нормали к опорной поверхности (рис. 1.5, в, г). При этом направление и величина реакции связи определяются через обе составляющие в соответствии с аксиомой 3 и формулой (1.1).

5. *Опорный стержень.* Опорным стержнем называется связь, моделируемая прямолинейным невесомым стержнем, на концах которого имеются шарниры. Шарнир, как известно, допускает свободный поворот тел вокруг оси этого шарнира. Поэтому на концы опорного стержня действуют только две силы, которые согласно аксиоме 1 имеют общую линию действия. Следовательно, реакция опорного стержня направлена по его оси.

6. *Жесткая заделка.* Такой тип связи накладывает наибольшее количество ограничений на перемещение некоторых точек тела. Жесткая заделка исключает возможность любых линейных перемещений, а также поворот вокруг опорных точек. Возникающие в жесткой заделке реакции показаны на рис. 1.6.

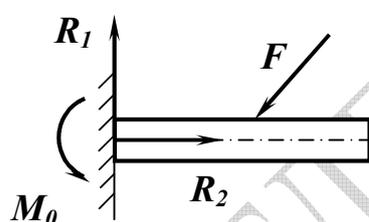


Рисунок 1.6

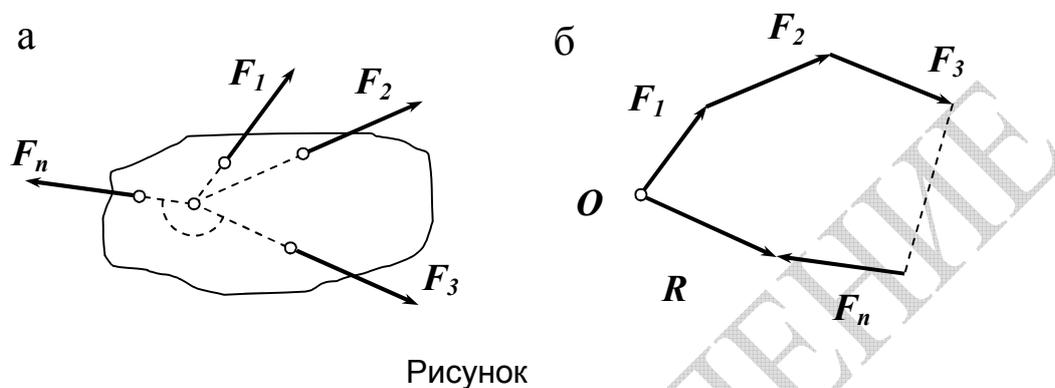
### 1.3. Плоская система сходящихся сил

Анализ систем сил целесообразно начать с наиболее простых случаев. Одним из них является **плоская система сил**, которая состоит из сил, линии действия которых лежат в одной плоскости. Если к тому же их линии действия пересекаются в одной точке, то силы называются **сходящимися**. Для двух сходящихся сил справедлива аксиома 3. Она допускает обобщение на любое число сил: если линии действия сил  $F_1, F_2 \dots F_n$  сходятся в одной точке, то их равнодействующая  $R$  равна векторной сумме всех сил:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (1.2)$$

В некоторых задачах удобно находить равнодействующую системы сходящихся сил графически. В этом случае каждый вектор силы, начиная со второго, откладывается из конца предыдущего (рис. 1.7). Затем строится вектор, начало которого совпадает с началом вектора первой силы, а конец - с концом вектора последней силы. Полученный

вектор и будет равнодействующей сил  $F_1, F_2 \dots F_n$ . Построенный таким образом многоугольник называется **силовым многоугольником**. В определенных случаях силовой многоугольник может оказаться замкнутым. Следовательно, система сил в этом случае эквивалентна нулевой силе, т. е. является уравновешенной.



Векторное равенство (1.2) может быть записано в проекциях на оси декартовой системы координат. Тогда условие уравновешенности плоской системы сходящихся сил может быть сформулировано в одной из трех форм.

1. В векторной форме:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0 \quad (1.3)$$

2. В графической форме: силовой многоугольник должен быть замкнут.

3. В аналитической форме: сумма проекций всех сил на каждую из осей декартовой системы координат должна быть равна нулю

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (1.4)$$

Как отмечалось ранее, для тел, находящихся в равновесии под действием системы сил, сформулированные условия являются также условиями равновесия этих тел. Условия 1. – 3. легко обобщаются на пространственную систему сходящихся сил. В этом случае к равенствам (1.4) следует добавить еще одно, отражающее требование обращения в нуль суммы проекций всех сил на ось Oz.

#### 1.4. Пары сил на плоскости

Силы могут сообщать телам не только поступательное, но и вращательное движение. Вращательное воздействие силы определяется величиной момента этой силы относительно центра вращения. **Моментом  $M_C(\mathbf{F})$  силы  $\mathbf{F}$**  относительно некоторой точки  $C$  называется произведение величины этой силы  $F$  на расстояние  $h$  от точки  $C$  до линии действия силы (рис. 1.8). При этом величина момента  $M_C(\mathbf{F}) = \pm F \cdot h$  берется со знаком плюс, если сила стремится повернуть тело против часовой стрелки (как на рисунке), и со знаком минус – в противном случае.

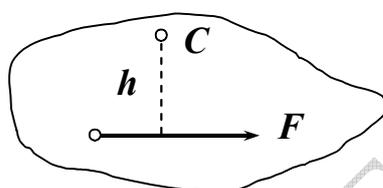


Рисунок 1.8

Расстояние  $h$  называется **плечом силы  $\mathbf{F}$**  относительно точки  $C$ . Плечо силы не изменится, если точка приложения силы будет перемещаться вдоль линии ее действия. Поэтому величина момента  $M_C(\mathbf{F})$  не зависит от того, где выбрана точка приложения силы на линии ее действия.

Если имеется система сходящихся сил  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \dots \mathbf{F}_n$ , и сила  $\mathbf{R}$  является их равнодействующей, то справедливо следующее важное соотношение:

$$M_C(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^n M_C(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n F_i h_i, \quad (1.5)$$

т.е. *момент равнодействующей силы относительно некоторой точки равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно той же точки.* Это утверждение носит название теоремы Вариньона. Она справедлива и для пространственных систем сил, которые будут рассмотрены позднее.

Теорема Вариньона позволяет изучить вопрос о сложении параллельных сил. Пусть  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  - две параллельные одинаково направленные силы. Выберем на плоскости между линиями действия сил некоторую точку, обладающую следующим свойством: расстояния от нее до линий действия сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  обратно пропорциональны модулям сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ . Тогда, согласно (1.5), момент равнодействующей

$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$  относительно этой точки будет равен нулю. Указанная точка называется **центром параллельных сил**. Следовательно, *линия действия равнодействующей двух параллельных одинаково направленных сил проходит через центр параллельных сил*. Правило сложения двух параллельных сил можно обобщить на любое их число. В частности, если распределенная нагрузка  $q$  (н/м) действует на некотором участке длиной  $a$  и постоянна на нем, то равнодействующая будет равна  $q \cdot a$  и приложена к середине участка действия нагрузки.

Если силы  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  параллельны, противоположно направлены и различны по величине, то центр параллельных сил будет находиться за линией действия большей силы и обладать тем же свойством. В этом случае равнодействующая также проходит через центр параллельных сил и равна разности их модулей.

Момент может создавать не только одиночная сила, но и две особым образом заданные силы – пара сил. **Парой сил** называется система из двух равных по модулю, противоположно направленных параллельных сил (рис. 1.9). Как следует из аксиомы 1, такая система сил не может быть уравновешенной. Кроме того, она не имеет равнодействующей. Поэтому пара сил представляет собой особую меру механического взаимодействия и является отдельным объектом изучения механики. В самом деле, если отдельная сила может сообщать телу одновременно и поступательное и вращательное движение, то пара сил – только вращательное.

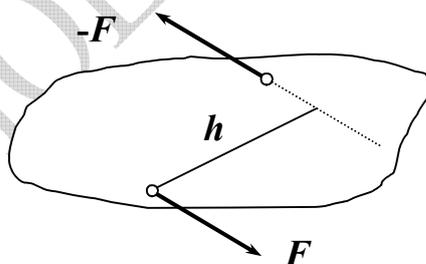


Рисунок 1.9

Плоскость, в которой лежат силы, составляющие пару, называется **плоскостью действия пары**, а расстояние между линиями действия сил  $h$  – **плечом пары**. **Моментом пары**  $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$  называется вектор  $\mathbf{M}$ , перпендикулярный плоскости действия пары и направленный так, что силы стремятся повернуть тело против часовой стрелки, если смотреть со стороны вектора  $\mathbf{M}$ . Модуль этого вектора  $M = F h$ . Следовательно, момент пары равен по величине моменту одной из сил относительно любой точки, лежащей на линии действия другой силы, составляющей пару.

В отличие от вектора силы, момент пары – вектор свободный. Он не зависит от линии действия сил. Поэтому пару можно переносить в любое другое положение в плоскости ее действия. Более того, величина момента пары не изменится, если ее перенести на параллельную плоскость. Следовательно, момент пары можно перенести параллельно самому себе в любую точку тела, к которому она приложена.

Если на тело действуют несколько пар с моментами  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$ , то, так же как и отдельные силы их можно складывать по правилам сложения векторов. Пара, эквивалентная системе пар, действующих в одной плоскости, будет иметь момент  $\mathbf{M}$ , модуль которого равен:

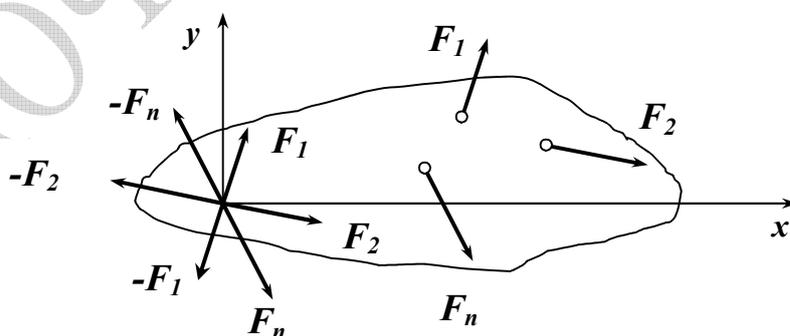
$$M = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n F_i h_i, \quad (1.6)$$

где знак каждого слагаемого определяется направлением вращения соответствующей пары.

При равновесии тела правая часть соотношения (1.6) должна обращаться в нуль.

### 1.5. Условия равновесия произвольной системы сил на плоскости

Как уже отмечалось, важнейшими задачами статики является преобразование заданных систем сил в другие, им эквивалентные, но более простые, а также установление условий, которым должны удовлетворять системы сил, чтобы они были уравновешенными. Рассмотрим обе эти задачи применительно к системе сил  $\{\mathbf{F}_i\}_n$ , вектора которых лежат в одной плоскости (рис. 1.10).



Рисунок

В некоторой точке 0 плоскости приложим систему двух сил  $\{\mathbf{F}_1, -\mathbf{F}_1\}$ , эквивалентную согласно аксиоме 1 нулевой силе. Тогда в точке 0 получим силу  $\mathbf{F}_1$ , перенесенную из точки А параллельно самой себе, и

пару сил, состоящую из силы -  $F_1$ , приложенной в точке 0, и силы  $F_1$ , приложенной в точке А. Следовательно, действие силы  $F_1$  на тело не изменится, если ее линию действия перенести параллельно самой себе, присоединив при этом пару сил  $\{F_1, -F_1\}$  с плечом, равным расстоянию, на которое перенесена линия действия силы.

Точно так же поступим с другими силами, входящими в исходную систему  $\{F_{ij}\}_n$ . В результате получим систему сходящихся сил, действующих в точке 0, и систему пар с моментами  $M_i = F_i h_i$ . Согласно (1.2) силы будут иметь равнодействующую силу  $R$ , а пары – равнодействующую пару с моментом  $M_0$ , определяемым соотношением (1.6). Другими словами, исходной системе сил эквивалентна система, состоящая из силы  $R$  и пары сил с моментом  $M_0$ :  $\{F_{ij}\}_n \sim \{R, M_0\}$ .

Таким образом, произвольную систему сил, действующих в одной плоскости, можно заменить одной силой, приложенной в некоторой точке плоскости и равной векторной сумме всех сил, и парой сил с моментом, равным алгебраической сумме моментов присоединенных пар. Точку 0 называют **центром приведения**, вектор  $R$  – **главным вектором** системы сил  $\{F_{ij}\}_n$ , а момент  $M_0$  – **главным моментом** системы сил. Из приведенного выше рассуждения следует, что значение главного вектора не зависит, а значение главного момента зависит от выбора центра приведения.

При равновесии одновременно выполняются условия:

$$R = 0 \text{ и } M_0 = 0, \quad (1.7)$$

которые называются **механическими условиями равновесия произвольной плоской системы сил**. В проекциях на оси декартовой системы координат векторные равенства (1.7) примут вид:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{i0} = 0 \quad (1.8)$$

В силу произвольности выбора системы координат и центра приведения равенства (1.8) означают, что для равновесия любой системы сил, действующих в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на две взаимно перпендикулярные оси равнялась нулю, и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно некоторой точки также равнялась нулю.

Условия равновесия плоской системы сил можно сформулировать в форме отличной от (1.8), а именно: составить одно уравнение для проекций сил на некоторую ось и два уравнения для моментов

относительно двух точек А и В. В этом случае условия равновесия будут иметь вид:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \quad (1.9)$$

Условия равновесия можно сформулировать также в виде трех уравнений для моментов относительно трех точек, не лежащих на одной прямой. В любом случае число независимых уравнений равновесия для плоской системы сил будет равно трем.

В качестве примера использования условий равновесия рассмотрим задачу о нахождении реакций связей для рамы (рамой называется стержневая система, образованная прямолинейными стержнями, жестко связанными между собой), изображенной на рис. 1.11. Пусть величина внешних нагрузок известна: сосредоточенная сила  $F = 30$  кН; пара сил с моментом  $M = 80$  кН·м; распределенная нагрузка  $q = 20$  кН/м. Длина стержня  $AB = 4$  м; стержни  $BC = CD = 1$  м.

Решение. Поскольку рама находится в равновесии, для системы сил, действующих на нее, должны выполняться условия равновесия в любой из приведенных выше форм. Воспользуемся формой (1.9). Запишем уравнения равновесия по силам в проекции на горизонтальное направление и уравнения равновесия по моментам

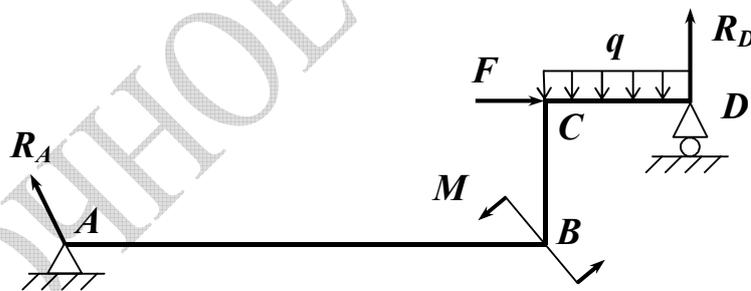


Рисунок 1.11

относительно точек А и D, разложив неизвестную реакцию  $R_A$  на горизонтальную и вертикальную составляющие  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$  соответственно:

$$R_{Ax} - F = 0; \quad 5 \cdot R_D + M - F \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 4,5 = 0; \quad M + q \cdot 1 \cdot 0,5 - 5 \cdot R_{Ay} - R_{Ax} \cdot 1 = 0.$$

Из первого уравнения:  $R_{Ax} = 30$  кН; из второго уравнения:  $R_D = 8$  кН; из третьего уравнения:  $R_{Ay} = 12$  кН. Полную величину равнодействующей

R найдем по формуле (2.1):  $R = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} \approx 32,3 \text{ кН}$ . Направление реакции шарнирно-неподвижной опоры определим через угол  $\alpha$  между R и вертикалью:  $\sin \alpha = R_{Ax} / R = 0,928$ . Следовательно,  $\alpha = 68^\circ$ .

### 1.6. Пространственная система сил

Система сил называется **пространственной**, если линии их действия расположены в пространстве произвольным образом. Для пространственных систем сил остаются справедливыми все те положения, которые были сформулированы для плоской системы сил. Так, равнодействующая сходящихся сил в трехмерном случае определяется формулой (1.2).

Условие уравниваемости пространственной системы сходящихся сил может быть сформулировано в одной из трех форм: в векторной форме:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0;$$

в графической форме: силовой многоугольник должен быть замкнут; в аналитической форме: сумма проекций всех сил на каждую из осей декартовой системы координат должна быть равна нулю

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0.$$

Момент силы относительно точки в трехмерном случае определяется несколько сложнее. Именно, **момент  $\mathbf{M}_C(\mathbf{F})$  силы  $\mathbf{F}$  относительно некоторой точки C** равен векторному произведению радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из точки C в точку приложения силы, на силу  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{M}_C(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.10)$$

В соответствии с правилами векторного произведения момент  $\mathbf{M}_C(\mathbf{F})$  представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат вектора  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$ , и направленный так, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, если смотреть со стороны вектора  $\mathbf{M}_C(\mathbf{F})$ . Модуль момента силы равен:

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = r F \sin \alpha = h F \quad (1.11)$$

где  $h = r \sin \alpha$  - расстояние от точки  $C$  до линии действия силы  $\mathbf{F}$ ,  $\alpha$  - угол между радиус-вектором и силой (рис. 1.12). Оно, как и в плоском случае, называется **плечом силы**. Плечо силы не изменится, если точка приложения силы будет перемещаться вдоль линии ее действия. Поэтому величина момента  $\mathbf{M}_C(\mathbf{F})$  не зависит от того, где выбрана точка приложения силы.

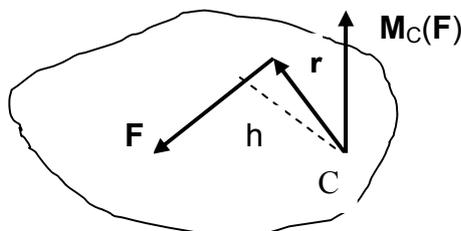


Рисунок  
1.12

Из формулы (1.11) видно, что момент силы относительно точки равен нулю в двух случаях: либо, когда сила равна нулю, либо, когда точка  $C$  лежит на линии действия силы.

**Теорема Вариньона** для пространственной системы сил имеет более общую форму, чем соотношение (1.5) для плоской системы сил: *если произвольная пространственная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно некоторой точки равен векторной сумме моментов всех сил системы относительно той же точки.*

Как известно из аналитической геометрии, векторное произведение (1.10) может быть записано через определитель

$$\mathbf{M}_A(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\mathbf{i} - (xF_z - zF_x)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k}, \quad (1.12)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  - орты декартовой системы координат с центром в точке  $A$ ;  $x, y, z$  - проекции радиус-вектора;  $F_x, F_y, F_z$  - проекции силы на соответствующие координатные оси. Равенство (1.12) можно рассматривать как разложение вектора  $\mathbf{M}_C(\mathbf{F})$  по осям координат. Следовательно, каждый сомножитель перед единичным ортом представляет собой проекцию вектора  $\mathbf{M}_C(\mathbf{F})$  на соответствующую ось.

**Моментом  $M_m(\mathbf{F})$  силы  $\mathbf{F}$  относительно некоторой оси  $m$**  называется скалярная величина, равная проекции на ось  $m$  момента силы  $\mathbf{F}$  относительно какой-либо точки, взятой на этой оси. Для вычисления момента силы относительно оси удобно воспользоваться

следующим несложным построением: сначала провести плоскость перпендикулярную оси  $m$  и найти точку их пересечения, затем спроектировать силу на эту плоскость. Момент проекции относительно точки пересечения и будет равен моменту силы  $\mathbf{F}$  относительно оси  $m$ . Правило знака для момента  $M_m(\mathbf{F})$  такое же как и при вычислении момента силы относительно точки.

Момент силы относительно оси равен нулю тогда, когда сила  $\mathbf{F}$  лежит в одной плоскости с осью  $m$ . В самом деле, в этом случае либо проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю (сила  $\mathbf{F}$  параллельна оси  $m$ ), либо линия действия проекции силы проходит через точку пересечения указанной плоскости и оси.

Из определения момента силы относительно оси следует, что множители перед единичными ортами в формуле (1.12) равны моментам силы  $\mathbf{F}$  относительно осей декартовых координат:

$$M_x(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y; \quad M_y(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z; \quad M_z(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x. \quad (1.13)$$

Эти формулы позволяют вычислить моменты силы относительно координатных осей, если известны координаты точки приложения силы и ее проекции на оси координат.

Пара сил для трехмерного случая определяется также как и для плоского случая. Однако, плоскость действия пары и, следовательно, вектор ее момента могут быть ориентированы в пространстве произвольным образом. Отсюда следует, что две пары сил будут эквивалентны, если векторы их моментов равны друг другу. Следовательно, пару сил можно переносить в пространстве произвольным образом, оставляя плоскость ее действия параллельной самой себе.

Если к телу приложены несколько пар сил с моментами  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$ , то момент равнодействующей пары равен векторной сумме моментов всех пар:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i \quad (1.14)$$

### 1.7. Условия равновесия пространственной системы сил

В общем случае на тело может действовать система сил  $\{\mathbf{F}_i\}_n$ , произвольно расположенных в пространстве. Как и в случае плоской системы сил, эту систему сил можно привести к некоторому центру приведения  $O$ , т. е. действие системы сил  $\{\mathbf{F}_i\}_n$  можно заменить на эквивалентное действие одной силы  $\mathbf{R}$  (главного вектора системы сил), приложенной в центре приведения, и пары с моментом  $\mathbf{M}_0$

(главного момента системы сил). При этом главный вектор и главный момент определяются векторными равенствами:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i; \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) \quad (1.15)$$

Равенства (1.15) позволяют сформулировать условия эквивалентности двух систем сил  $\{\mathbf{F}_i\}_n$  и  $\{\mathbf{Q}_i\}_m$ . Если главные векторы и главные моменты двух систем сил соответственно равны, то эти системы эквивалентны. В частности, для того чтобы система сил  $\{\mathbf{F}_i\}_n$  была уравновешенной необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два векторные равенства:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad (1.16)$$

Их называют **механическими условиями равновесия свободного твердого тела в векторной форме**. С учетом соотношений (1.15) геометрическая интерпретация равенств (1.16) означает, что многоугольник сил и многоугольник моментов сил при равновесии свободного твердого тела должны быть замкнутыми.

В проекциях на оси декартовой системы координат равенства (1.16) дадут шесть соотношений вида:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{Ox}(\mathbf{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{Oy}(\mathbf{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{Oz}(\mathbf{F}_i) = 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

В силу произвольности выбора системы координат эти соотношения означают, что в случае равновесия свободного твердого тела алгебраическая сумма проекций всех сил, действующих на него, на три взаимно перпендикулярные оси равна нулю (первые три равенства), а также алгебраическая сумма моментов всех сил относительно этих же осей равна нулю (другие три равенства).

## 1.8. Силы трения

Силы трения – одни из самых распространенных сил в природе и технике. При работе машин и механизмов их, как правило, нельзя не учитывать. Они могут играть положительную роль (например, во фрикционных передачах), но чаще всего их влияние носит отрицательный характер и связано с потерями полезной энергии.

Различают **трение скольжения** и **трение качения**, природа которых различна. Трение скольжения проявляется в виде сопротивления относительному перемещению соприкасающихся тел при наличии сдвигающей силы  $P$  (см. рис. 1.13). При этом реакция  $R$  отклоняется от нормали в отличие от реакции гладкой поверхности (рис. 1.3). Появляется ненулевая касательная составляющая реакции опоры  $F_{тр}$ , которая называется силой трения. Из уравнения равновесия следует, что сила трения равна сдвигающей силе по величине и противоположна ей по направлению. При увеличении сдвигающей силы будет увеличиваться и сила трения. Однако при достижении силой  $P$  некоторого значения равновесие тела нарушится и начнется его скольжение по поверхности.

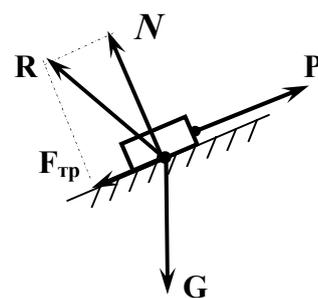


Рисунок 1.13

В момент нарушения равновесия сила трения  $F_{тр}$  будет иметь наибольшее значение, которое называется **силой трения покоя**. Опыт показывает, что она пропорциональна нормальной составляющей  $N$  опорной реакции:

$$F_{тр} = f N . \quad (1.18)$$

Коэффициент пропорциональности  $f$  называется **коэффициентом трения скольжения**. Его величина зависит от степени шероховатости контактирующих поверхностей, от материалов тела и поверхности, а также от физических свойств соприкасающихся тел. В каждом конкретном случае он определяется экспериментально.

Трение качения проявляется в виде сопротивления перекачиванию округленного тела по поверхности и связано с другими физическими причинами. Опытным путем нетрудно установить, что, если к центру цилиндра весом  $G$ , лежащему на горизонтальной поверхности, приложить небольшую по величине силу  $P$ , то цилиндр останется неподвижным. Упрощенно это можно объяснить следующим образом. Опорная поверхность под действием веса цилиндра деформируется (на рис. 1.14 деформации показаны в сильно преувеличенном виде). Реакция опорной поверхности смещается на некоторое расстояние  $a$  от вертикали, проходящей через центр цилиндра. Вертикальная составляющая реакции равна весу цилиндра  $G$ , а горизонтальная

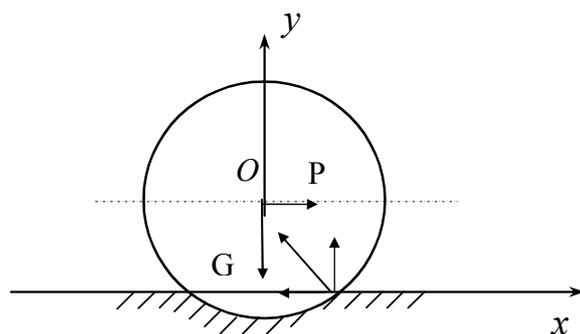


Рисунок 1.14

составляющая – величине перекатывающей силы  $P$ . Таким образом, цилиндр находится в равновесии под действие двух пар.

Уравнение равновесия, составленное при максимальном значении перекатывающей силы  $P_{\max}$  (на пороге равновесия), позволяет для последней получить:

$$P_{\max} = \frac{a}{R} G, \quad (1.19)$$

где  $R$  – радиус цилиндра. Если  $P < P_{\max}$ , цилиндр остается неподвижным. При  $P > P_{\max}$  цилиндр начнет движение. Величину  $a$  смещения в сторону движения точки приложения реакции называют плечом силы трения качения или **коэффициентом трения качения**. Она зависит от упругих свойств материалов перекатывающихся тел, прижимающей силы (в рассмотренном случае веса цилиндра), относительной угловой скорости тел.

Безразмерная величина  $a / R$  в соотношении (1.19), как правило, значительно меньше коэффициента трения скольжения  $f$  в (1.18). Поэтому в технических устройствах для уменьшения сопротивления и снижения потерь энергии на трение стремятся заменить трение скольжения трением качения с помощью подшипников, катков, колес, роликов и т. д.

### 1.9. Контрольные вопросы

1. Какие системы сил называются эквивалентными?
2. Что такое равнодействующая системы сил?
3. Какие системы сил называются уравновешенными?
4. В чем состоят основные задачи статики?
5. В чем различие между внешними и внутренними силами, действующими на точки механической системы?
6. Сформулируйте основные аксиомы статики.
7. В чем состоит принцип отвердевания?
8. Какие силы называются активными, а какие пассивными?
9. Перечислите типы связей. Какие реакции они вызывают?
10. В чем различие связей, моделируемых гладкой поверхностью и шарнирно-подвижной опорой?
11. Какие силы называются сходящимися?
12. Как строится силовой многоугольник?
13. Сформулируйте условия уравновешенности плоской системы сходящихся сил.
14. Что такое момент силы относительно точки?
15. Что такое момент силы относительно оси?

16. Сформулируйте теорему Вариньона для плоской системы сил.
17. Что такое главный вектор и главный момент системы сил?
18. Чему равна равнодействующая параллельных сил и как найти ее линию действия?
19. Сформулируйте условия равновесия пространственной системы сил.
20. Что такое пара сил и какое воздействие на твердые тела она оказывает?
21. Почему момент пары сил является свободным вектором?
22. Как найти пару сил, эквивалентную системе пар?
23. Чем отличается трение скольжения от трения качения? Какова физическая природа того и другого?
24. Что такое коэффициент трения скольжения и от чего он зависит?
25. Что такое коэффициент трения качения? От каких факторов зависит его величина?

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

## Глава 2. Кинематика

### 2.1 Способы задания движения точки

При движении тела все его точки совершают определенные перемещения в пространстве. Поэтому анализ движения тела целесообразно начать с изучения движения отдельной точки. Задать движение точки означает указать такой способ, с помощью которого можно точно указать ее положение в любой момент времени в некоторой заранее выбранной системе координат. Существует три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

При **векторном способе задания движения** положение точки  $M$  в пространстве задается радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , начало которого в любой момент времени  $\tau$  совпадает с началом системы координат, а конец – с точкой  $M$ . Таким образом, векторное уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau) \quad (2.1)$$

однозначно определяет местоположение точки  $M$  в произвольный момент времени. С течением времени конец вектора  $\mathbf{r}(\tau)$  описывает в пространстве некоторую непрерывную линию, которая называется **траекторией** точки  $M$ . Следовательно, *траектория представляет собой геометрическое место точек пространства, через которые последовательно проходит точка  $M$ .*

При **координатном способе задания движения** положение точки  $M$  определяется тремя координатами (например, декартовыми), которые, также как и радиус-вектор  $\mathbf{r}(\tau)$ , являются функциями времени:

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau) \quad (2.2)$$

Нетрудно видеть, что способы задания движения точки (2.1) и (2.2) связаны между собой, поскольку проекциями радиус-вектора на оси координат являются координаты конца вектора  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r}(\tau) = x(\tau) \mathbf{i} + y(\tau) \mathbf{j} + z(\tau) \mathbf{k}, \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные орты декартовой системы координат.

**Естественный способ задания движения** точки используется тогда, когда траектория ее движения заранее известна. В этом случае на траектории выбирается некоторая фиксированная точка  $O$  (начало отсчета) и положительное направление от точки  $O$  вдоль траектории. Тогда положение точки  $M$  будет однозначно определено длиной дуги  $s$

по траектории от начала отсчета  $O$  – **дуговой координатой**. Ее величина при движении точки  $M$  будет функцией времени:

$$s = s(\tau) \quad (2.4)$$

Следует различать величину пройденного пути от значения дуговой координаты. Разница между этими понятиями очевидна, например, при движении точки по замкнутой кривой.

## 2.2. Скорость и ускорение движущейся точки

Основными кинематическими характеристиками движения являются скорость и ускорение. При различных способах задания движения они вычисляются по разному.

По своему физическому смыслу скорость является мерой изменения во времени положения точки. Пусть точка  $M$  движется по криволинейной траектории (рис. 2.1), а ее положение в моменты времени  $\tau$  и  $\tau_1$  определяется радиус- векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$ .

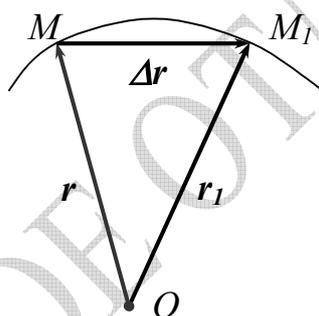


Рисунок 2.1

Изменение положения точки  $M$  за промежуток времени  $\Delta\tau = \tau_1 - \tau$  характеризуется вектором  $\Delta\mathbf{r}$ . Отношение  $\mathbf{V}_{\text{cp}} = \Delta\mathbf{r} / \Delta\tau$  представляет собой среднюю за промежуток  $\Delta\tau$  скорость точки  $M$ . Очевидно, что вектор  $\mathbf{V}_{\text{cp}}$  направлен по секущей  $MM_1$ . В пределе при  $\Delta\tau \rightarrow 0$  точка  $M_1$  будет неограниченно приближаться к точке  $M$ , секущая  $MM_1$  займет положение касательной к траектории в точке  $M$ , а вектор  $\mathbf{V}_{\text{cp}}$  будет равен мгновенному значению скорости точки  $\mathbf{V}$  в момент времени  $\tau$ :

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \quad (2.5)$$

Таким образом, *скорость точки в данный момент времени при векторном способе задания ее движения равна производной от*

радиус-вектора по времени и направлена по касательной к траектории движения.

Для того чтобы получить скорость точки при координатном способе задания движения воспользуемся соотношением (2.3). Дифференцирование его по времени в соответствии с (2.5) для скорости точки М дает:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} \mathbf{i} + \frac{dy}{d\tau} \mathbf{j} + \frac{dz}{d\tau} \mathbf{k} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}. \quad (2.6)$$

Следовательно, проекции вектора скорости точки на координатные оси могут быть получены путем дифференцирования зависимостей (2.2) по времени. Тогда модуль вектора скорости равен:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (2.7)$$

а его направление задается углами, которые образует вектор скорости с осями координат. Косинусы этих углов (направляющие косинусы) определяются с помощью формул:

$$\cos(\mathbf{V}, x) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\mathbf{V}, y) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\mathbf{V}, z) = \frac{V_z}{V}. \quad (2.8)$$

При естественном способе задания движения точки каждому значению дуговой координаты  $s$  соответствует определенное положение радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Другими словами, радиус-вектор точки является функцией дуговой координаты, которая в свою очередь, согласно (2.4), зависит от времени. Это значит, что векторная величина  $\mathbf{r}$  может рассматриваться как сложная функция  $\tau$ :  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(\tau))$ . Правила дифференцирования сложной функции позволяют записать:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\tau}$$

С помощью рис. 2.1 нетрудно понять, чему равен первый сомножитель, который является пределом отношения  $\Delta \mathbf{r} / \Delta s$ . В этом отношении знаменатель представляет собой длину дуги от точки М до точки М<sub>1</sub>. Когда последняя неограниченно приближается к точке М, длина дуги  $\Delta s$  неограниченно приближается к длине вектора  $\Delta \mathbf{r}$ . Следовательно, в пределе получится единичный вектор, который, как отмечалось выше, направлен вдоль касательной к траектории движения в точке М. Обозначим единичный вектор касательной через  $\mathbf{m}$ . Тогда на основании предыдущего равенства справедливо соотношение:

$$\mathbf{V} = \frac{ds}{d\tau} \mathbf{m} = V \mathbf{m} \quad (2.9)$$

Из полученного соотношения следует, что при естественном способе задания движения модуль скорости  $V$  равен производной от дуговой координаты по времени, а вектор  $\mathbf{V}$  направлен по касательной в сторону движения точки.

Мерой изменения во времени величины и направления скорости служит ускорение точки. Следовательно, при векторном способе задания движения ускорение  $\mathbf{W}$  определяется равенством:

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} \quad (2.10)$$

С учетом (2.3) и (2.6) проекции ускорения на оси декартовой системы координат вычисляются по формулам:

$$W_x = \frac{dV_x}{d\tau} = \frac{d^2x}{d\tau^2}; \quad W_y = \frac{dV_y}{d\tau} = \frac{d^2y}{d\tau^2}; \quad W_z = \frac{dV_z}{d\tau} = \frac{d^2z}{d\tau^2} \quad (2.11)$$

Модуль вектора ускорения и его направление можно найти с помощью соотношений, аналогичных (2.7) и (2.8):

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \quad (2.12)$$

$$\cos(\mathbf{W}, x) = \frac{W_x}{W}, \quad \cos(\mathbf{W}, y) = \frac{W_y}{W}, \quad \cos(\mathbf{W}, z) = \frac{W_z}{W} \quad (2.13)$$

Преыдущие соотношения позволяют вычислить ускорение точки при векторном и координатном способах задания ее движения. При естественном способе скорость определяется выражением (2.9). Тогда для ускорения можно записать:

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{ds}{d\tau} \mathbf{m} \right) = \frac{d^2s}{d\tau^2} \mathbf{m} + \frac{ds}{d\tau} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{d\tau}. \quad (2.14)$$

Здесь учтено, что при движении точки по криволинейной траектории с течением времени меняются оба сомножителя в скобках. Производная  $d\mathbf{m} / d\tau$  характеризует скорость изменения направления единичного вектора касательной  $\mathbf{m}$ , проведенной к траектории в точке  $M$  при ее движении, т. е. при изменении дуговой координаты  $s$ . Ее можно записать в виде:

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{m}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\tau} = \frac{d\mathbf{m}}{ds} v$$

В дифференциальной геометрии доказывается, что вектор  $d\mathbf{m}/ds$  направлен вдоль внутренней нормали  $\mathbf{n}$  к кривой, а его длина обратно пропорциональна локальному радиусу кривизны  $\rho$ . С учетом сказанного равенство (2.14) примет вид:

$$\mathbf{W} = \frac{d^2s}{d\tau^2} \mathbf{m} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 \mathbf{n} = \mathbf{W}_m + \mathbf{W}_n \quad (2.15)$$

Следовательно, при естественном способе задания движения точки ее ускорение может быть найдено как сумма двух векторов. Один вектор  $\mathbf{W}_m$  направлен вдоль касательной  $\mathbf{m}$  к траектории движения (рис. 2.2), его величина определяется быстротой изменения

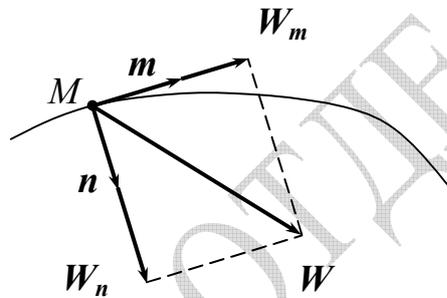


Рисунок 2.2

модуля скорости точки М:

$$\mathbf{W}_m = \frac{dV}{d\tau} = \frac{d^2s}{d\tau^2} \quad (2.16)$$

Вектор  $\mathbf{W}_m$  называется **касательным ускорением**. Касательное ускорение существует при неравномерном криволинейном движении, направлено по касательной к траектории при ускоренном движении (в сторону положительного отсчета дуговой координаты) и в обратном направлении – при замедленном.

Другой вектор  $\mathbf{W}_n$  направлен по нормали  $\mathbf{n}$  к траектории в сторону ее вогнутости (рис. 2.2), его величина определяется быстротой изменения направления скорости движения точки. Вектор  $\mathbf{W}_n$  называется **нормальным ускорением**. Величина нормального ускорения всегда положительна и равна:

$$W_n = \frac{1}{\rho} \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 = \frac{V^2}{\rho} \quad (2.17)$$

Модуль полного ускорения  $W$  может быть найден через величины касательного и нормального ускорений:

$$W = \sqrt{W_m^2 + W_n^2} \quad (2.18)$$

Соотношения (2.16) и (2.17) позволяют проанализировать некоторые частные случаи движения точки. Так, если траекторией движения точки служит прямая линия, то радиус кривизны  $\rho = \infty$ , и нормальное ускорение, согласно (2.17), равно нулю. В этом случае полное ускорение совпадает с касательным. При этом если направления векторов скорости и ускорения совпадают, то движение точки ускоренное, если их направления противоположны, то – замедленное.

При **равномерном** движении модуль скорости точки  $V = \frac{ds}{d\tau} = \text{const.}$  Поэтому, согласно (2.16) касательное ускорение равно нулю, и полное ускорение совпадает с нормальным. Интегрирование последнего равенства позволяет получить уравнение равномерного движения:

$$s = V \tau + s_0, \quad (2.19)$$

которое определяет величину дуговой координаты в любой момент времени. Объединяя оба рассмотренных случая, приходим к равномерному прямолинейному движению, при котором и касательное, и нормальное ускорения отсутствуют.

Наконец, при равнопеременном движении точки величина ее касательного ускорения постоянна:  $W_m = \text{const.}$  Дважды интегрируя соотношение (2.16) можно получить закон изменения скорости и дуговой координаты при этом типе движения:

$$V = W_m \tau + V_0; \quad s = 0,5 W_m \tau^2 + V_0 \tau + s_0 \quad (2.20)$$

В качестве примера использования приведенных соотношений рассмотрим следующую задачу. При работе механизма, изображенного на рис. 2.3, кривошип ОС равномерно вращается вокруг шарнира О. Ползуны В и D перемещаются по направляющим, роль которых на рисунке выполняют оси координат Ох и Оу. На шатуне ВD находится точка М, совершающая в плоскости Оху движение, заданное уравнениями:

$$x = a \cos k\tau; \quad y = b \sin k\tau.$$

Требуется найти траекторию движения точки М, ее скорость и ускорение в те моменты времени, когда она пересекает ось Оу.

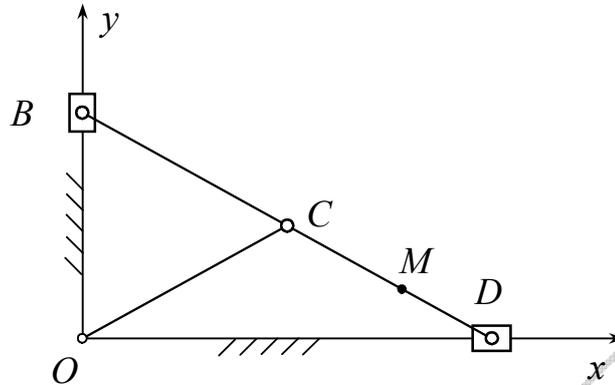


Рисунок 2.3

Для нахождения траектории исключим время из уравнений движения точки М. Разделим первое уравнение на  $a$ , второе уравнение на  $b$  и воспользуемся тригонометрическим тождеством:  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ . В результате получим соотношение, связывающее координаты точки М в произвольный момент времени:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Полученное уравнение, как известно, является уравнением эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  и с центром в начале координат. Таким образом, траекторией любой точки на шатуне служат эллипсы. Поэтому механизм, изображенный на рис. 2.3, называется эллипсограф.

Найдем моменты времени, когда точка М пересекает ось Оу. Для точек на этой оси  $x = 0$ . Приравнявая первое уравнение движения к нулю, получаем:  $\tau_i = (\pi / 2 + \pi i) / k$ .

Проекции скорости на координатные оси определим, дифференцируя уравнения движения точки М по времени:

$$V_x = \frac{dx}{d\tau} = -ak \sin k\tau; \quad V_y = \frac{dy}{d\tau} = bk \cos k\tau.$$

В моменты времени, соответствующие переходу точки через ось Оу, проекция скорости  $V_x = -ak$  для четных значений  $i$ ,  $V_x = ak$  для нечетных  $i$ . Проекция  $V_y = 0$  в обоих случаях. Следовательно, вектор скорости точки М в эти моменты времени параллелен оси Ох.

Ускорение точки определим, дифференцируя выражения для проекций скорости по времени:

$$W_x = \frac{dV_x}{d\tau} = \frac{d^2x}{d\tau^2} = -ak^2 \cos k\tau; \quad W_y = \frac{dV_y}{d\tau} = \frac{d^2y}{d\tau^2} = -bk^2 \sin k\tau.$$

В моменты времени, соответствующие переходу точки через ось  $Oy$ , проекция  $W_x = 0$ , а проекция  $W_y = -bk^2$  для четных значений  $i$ ,  $W_y = bk^2$  для нечетных  $i$ . Следовательно, в указанные моменты времени ускорение направлено к центру эллипса по главной нормали к траектории движения точки  $M$ .

### 2.3. Поступательное и вращательное движение твердого тела

**Поступательным движением твердого тела** называется такое движение, при котором любая прямая, связанная с телом, перемещается в пространстве, оставаясь параллельной самой себе. Другими словами, при поступательном движении отсутствуют какие-либо повороты тела. Покажем, что при таком характере движения все точки тела двигаются по идентичным траекториям, в каждый момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения.

Выберем в движущемся теле две произвольные точки  $A$  и  $B$  (рис. 2.4). Их положение определяется радиус-векторами  $r_A$  и  $r_B$ , которые меняются с течением времени. Пусть  $r$  – вектор с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$ .

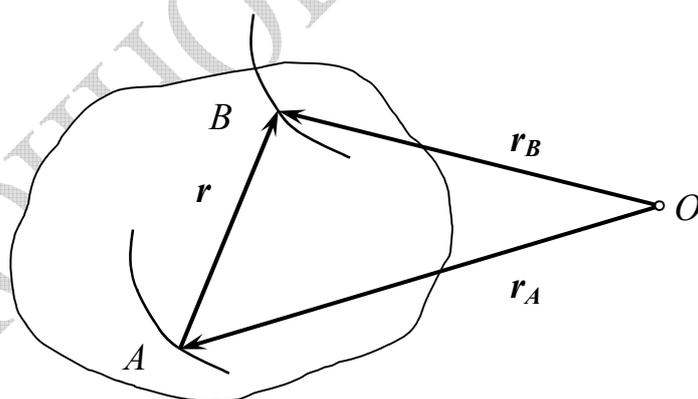


Рисунок 2.4

Векторы  $r_A$ ,  $r_B$  и  $r$  в любой момент времени связаны соотношением:  $r_B = r + r_A$ . Если тело движется поступательно, то, согласно определению,  $r = \text{const}$ . С учетом этого продифференцируем векторное равенство по времени:

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} + \frac{d\mathbf{r}_A}{d\tau} \quad \text{или} \quad \mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A, \quad \text{т.к.} \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{0}$$

т. е. скорости точек А и В одинаковы как по величине, так и по направлению в любой момент времени. Дифференцируя вторично, убеждаемся, что и ускорения точек также одинаковы. Следовательно, поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной из его точек. Другими словами, кинематика поступательного движения твердого тела сводится к кинематике точки. Поэтому все положения подразделов 2.1 и 2.2 применимы для описания этого типа движения тела.

Еще одним простейшим типом движения твердого тела является **вращательное движение**. При вращательном движении все точки тела, лежащие на некоторой прямой, остаются неподвижными во все время движения. Указанная прямая называется **осью вращения**. Точки тела, не лежащие на оси вращения, движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, по окружностям с центром на оси. Их положение в произвольный момент времени однозначно определяется **углом  $\varphi$  поворота тела** относительно некоторой фиксированной неподвижной плоскости, проходящей через ось вращения. Угол поворота принято считать положительным, если вращение происходит против часовой стрелки, и отрицательным – в противном случае. При вращении угол поворота тела меняется во времени:

$$\varphi = \varphi(\tau) \quad (2.21)$$

Это уравнение служит **уравнением вращательного движения** твердого тела.

Кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловая скорость и ускорение. **Угловой скоростью  $\omega$**  называется вектор, лежащий на оси вращения. Модуль этого вектора, характеризует быстроту изменения угла поворота во времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (2.22)$$

Направление вектора угловой скорости выбирается так, чтобы вращение происходило против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\omega$ . Единица измерения угловой скорости – радиан в секунду (рад / с или с<sup>-1</sup>). В технике часто используется другая единица измерения – обороты в минуту  $n$  (об / мин). Их связывает простое соотношение:  $\omega = \pi n / 30$ .

**Угловое ускорение**  $\varepsilon$  также изображается вектором, лежащим на оси вращения. Модуль вектора  $\varepsilon$  характеризует быстроту изменения угловой скорости во времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} \quad (2.23)$$

Направление вектора углового ускорения  $\varepsilon$  совпадает с направлением вектора угловой скорости  $\omega$ , если движение тела ускоренное, и противоположно ему, если движение замедленное. Верно и обратное утверждение.

В зависимости от значений кинематических характеристик  $\varepsilon$  и  $\omega$  различают следующие частные случаи вращательного движения твердого тела.

При **равномерном вращательном движении** угловое ускорение  $\varepsilon = 0$ . Тогда, согласно (2.23), движение происходит с постоянной угловой скоростью:  $\omega = \text{const}$ . Интегрирование (2.22) приводит к уравнению равномерного вращательного движения тела:  $\varphi(\tau) = \varphi_0 + \omega \tau$ .

При **равнопеременном вращательном движении** угловое ускорение  $\varepsilon = \text{const}$ . Дважды интегрируя (2.23), приходим к уравнению равнопеременного вращательного движения:  $\varphi(\tau) = \varphi_0 + \omega_0 \tau + 0,5 \varepsilon \tau^2$ . В приведенных формулах через  $\varphi_0$  и  $\omega_0$  обозначены значения угла поворота и угловой скорости при  $\tau = 0$ .

Угловая скорость и угловое ускорение являются кинематическими характеристиками тела в целом, а не его отдельных точек. Для того чтобы найти скорости и ускорения конкретных точек при вращательном движении, необходимо применить положения предыдущего параграфа.

Траектория любой точки тела при его вращении представляет собой окружность, которая лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Центр окружности находится на оси, а ее радиус равен расстоянию от оси до данной точки. Поскольку траектория точки известна, целесообразно применить естественный способ задания ее движения. Дуговую координату  $s$  будем отсчитывать вдоль дуги окружности в направлении положительного изменения угла поворота. Тогда угол поворота  $\varphi$  и дуговая координата связаны между собой известным соотношением:  $s = R\varphi$ . Согласно (2.9), модуль скорости точки равен:

$$V = \frac{ds}{d\tau} = R \frac{d\varphi}{d\tau} = R\omega \quad (2.24)$$

*т. е. величина скорости точек вращающегося тела пропорциональна их расстояниям до оси вращения и угловой*

скорости. Направление вектора скорости совпадает с направлением касательной к окружности – траектории точки.

Ускорение точки при естественном способе задания движения в соответствии с (2.15) является суммой двух ускорений: касательного и нормального. Величина касательного ускорения определяется формулой (2.16). Для рассматриваемого кругового движения точки она равна:

$$W_m = \frac{dV}{d\tau} = \frac{d^2s}{d\tau^2} = R \frac{d\omega}{d\tau} = R\varepsilon \quad (2.25)$$

Величину нормального ускорения можно найти с помощью соотношения (2.17). Для рассматриваемого случая она равна:

$$W_n = \frac{1}{\rho} \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 = \frac{V^2}{R} = R\omega^2 \quad (2.26)$$

Модуль полного ускорения найдем, используя (2.18):

$$W = \sqrt{W_m^2 + W_n^2} = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\omega^4} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (2.27)$$

Выведенные формулы допускают более общую запись с помощью операций векторной алгебры. Поместим начало координат в произвольную точку оси вращения (рис. 2.5). Тогда положение некоторой точки М вращающегося тела определяется радиус-вектором  $r$ . Модуль радиус-вектора  $r$  и расстояние точки М до оси

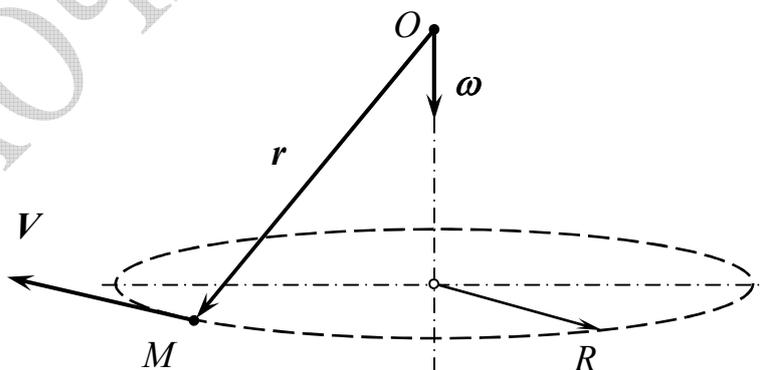


Рисунок 2.5

связаны простым соотношением:  $R = r \sin(\hat{r}, \hat{\omega})$ . С учетом (2.24) для модуля скорости точки М получим выражение:  $V = \omega r \sin(\hat{r}, \hat{\omega})$ , из которого следует, что вектор  $\mathbf{V}$  является векторным произведением векторов  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  (рис. 2.5):

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.28)$$

Полученная формула носит название формулы Эйлера. Она позволяет определить скорость любой точки вращающегося тела и поэтому играет важнейшую роль в кинематике.

Дифференцирование равенства (2.28) по времени с учетом свойств векторного произведения и соотношений (2.5), (2.10), (2.15) и (2.23) позволяет записать:

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}. \quad (2.29)$$

Сравнение полученного соотношения с (2.15) показывает, что первое слагаемое представляет собой касательное ускорение  $\mathbf{W}_m$ , а второе – нормальное  $\mathbf{W}_n$ . Таким образом, при вращательном движении тела проекции полного ускорения его точек на направления касательной к траектории и нормали в общем случае определяются с помощью следующих формул:

$$\mathbf{W}_m = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}; \quad \mathbf{W}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (2.30)$$

Касательное ускорение иногда называют вращательным, а нормальное ускорение – центростремительным. Полное ускорение точки в соответствии с (2.15) равно сумме векторов  $\mathbf{W}_m$  и  $\mathbf{W}_n$ .

#### 2.4. Плоскопараллельное движение твердого тела

Следующим по сложности после поступательного и вращательного движения твердого тела является плоскопараллельное движение. **Плоскопараллельным** (или **плоским**) движением называется движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. При таком характере движения тела *его количественное описание сводится к описанию движения одного сечения тела, параллельного указанной неподвижной плоскости*. Это сечение обычно называют **плоской фигурой**. Следовательно, для того чтобы получить кинематические характеристики при плоскопараллельном движении тела достаточно рассмотреть скорости и ускорения точек плоской фигуры при ее движении в собственной плоскости.

Пусть на плоской фигуре зафиксирована некоторая точка  $P$  – полюс (рис. 2.6). Положение этой точки в неподвижной системе координат  $Oxy$  однозначно определяется ее координатами  $x_P$  и  $y_P$  – координатами полюса. Координаты других точек плоской фигуры будут зависеть как от положения полюса  $P$ , так и от угла поворота  $\varphi$  плоской фигуры вокруг полюса. При движении тела все три величины  $x_P$ ,  $y_P$  и  $\varphi$  являются функциями времени:

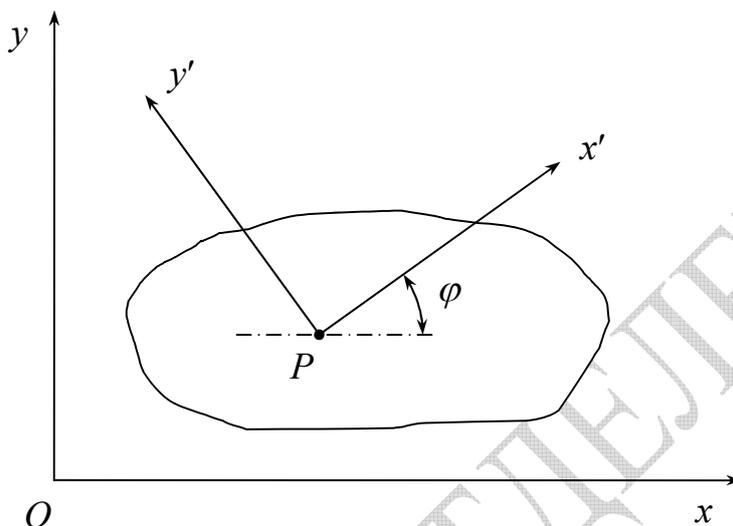


Рисунок 2.6

$$x_P = x_P(\tau); \quad y_P = y_P(\tau); \quad \varphi = \varphi(\tau) \quad (2.31)$$

Эти зависимости называются **уравнениями плоскопараллельного движения**. Они показывают, что плоское движение представляет собой наложение двух одновременно происходящих уже рассмотренных ранее движений тела: поступательного и вращательного. Следовательно, основными кинематическими характеристиками при этом типе движения являются скорость и ускорение полюса  $P$  (поступательная часть движения) и угловая скорость и угловое ускорение тела (вращательная часть движения). Причем первые две характеристики зависят от выбора полюса, а две вторые от выбора полюса не зависят.

Пусть уравнения (2.31) заданы. Выведем соотношения, позволяющие определить скорость произвольной точки  $M$  плоской фигуры. Положению точки  $M$  в некоторый момент времени отвечает радиус-вектор  $\mathbf{r}_M$  в неподвижной системе координат  $Oxy$ , положению полюса  $P$  отвечает радиус-вектор  $\mathbf{r}_P$ . Оба радиус-вектора при движении тела могут меняться как по величине, так и по направлению. Точки  $P$  и  $M$  соединим вектором  $\mathbf{r}_{MP}$  с началом в полюсе  $P$  и концом в точке  $M$ . Поскольку расстояние между точками  $M$  и  $P$  фиксировано,

вектор  $\mathbf{r}_{MP}$  при движении плоской фигуры может меняться во времени только по направлению, т. е. положение точки  $M$  относительно полюса  $P$  может измениться только за счет вращения плоской фигуры.

В любой момент времени будет выполняться векторное равенство:

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_{MP}$$

Дифференцирование этого равенства по времени позволяет записать:

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_P + \mathbf{V}_{MP} \quad (2.32)$$

т. е. скорость любой точки твердого тела при плоскопараллельном движении равна векторной сумме скорости полюса и скорости, которую имеет эта точка в относительном вращении вокруг полюса.

Направление и величина вектора  $\mathbf{V}_{MP}$  определяются по соотношениям для вращательного движения: направление скорости  $\mathbf{V}_{MP}$  в любой момент времени перпендикулярно отрезку  $MP$  по ходу вращения плоской фигуры, а модуль скорости  $\mathbf{V}_{MP}$  равен произведению угловой скорости и длины отрезка  $MP$ .

Оказывается, что в каждый момент времени одна из точек плоской фигуры имеет скорость равную нулю. Эта точка называется **мгновенным центром скоростей**. Пусть, например, в некоторый момент времени плоская фигура имеет угловую скорость  $\omega$ , а одна из ее точек – точка  $A$  – скорость  $\mathbf{V}_A$ . Через точку  $A$  проведем луч, перпендикулярный вектору  $\mathbf{V}_A$ , и на этом луче выберем точку  $B$ , отстоящую от точки  $A$  на расстоянии  $|AB| = V_A / \omega$  (рис. 2.7).

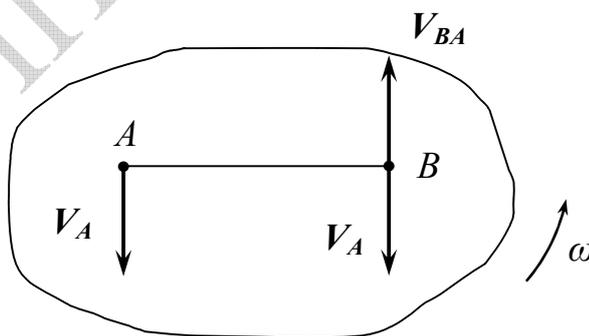


Рисунок 2.7

Применим теперь для точки  $B$  соотношение (2.32), взяв в качестве полюса точку  $A$ :

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{BA} .$$

Скорость  $V_{BA}$  точки  $B$ , обусловленная вращением плоской фигуры, равна по модулю  $|AB| \omega = V_A$  и направлена в противоположную сторону. Следовательно, правая часть предыдущего векторного равенства обращается в нуль, а точка  $B$  в данный момент времени является мгновенным центром скоростей.

Приведенное несложное построение позволяет сделать несколько важных выводов. Во-первых, мгновенными центрами скоростей в различные моменты времени служат разные точки плоской фигуры. Во-вторых, мгновенный центр скоростей может находиться в некоторой точке пространства за пределами твердого тела. Наконец, в-третьих, возможны случаи, когда в какой-то момент времени угловая скорость плоской фигуры равна нулю. При этом мгновенный центр скоростей оказывается удаленным в бесконечность. Эти случаи соответствуют так называемому мгновенному поступательному движению, когда скорости всех точек тела в данный момент времени векторно равны, т. е. равны по величине и направлению.

Если в качестве полюса выбрать мгновенный центр скоростей, то первое слагаемое в (2.32) обратится в нуль. Следовательно, скорость любой точки тела будет определяться только скоростью ее вращательного движения вокруг мгновенного центра скоростей. Величина скорости будет пропорциональна расстоянию от данной точки до мгновенного центра скоростей, а ее направление будет перпендикулярно линии, соединяющей точку и центр скоростей.

В силу очевидной важности понятия мгновенного центра скоростей рассмотрим несколько способов определения его местонахождения.

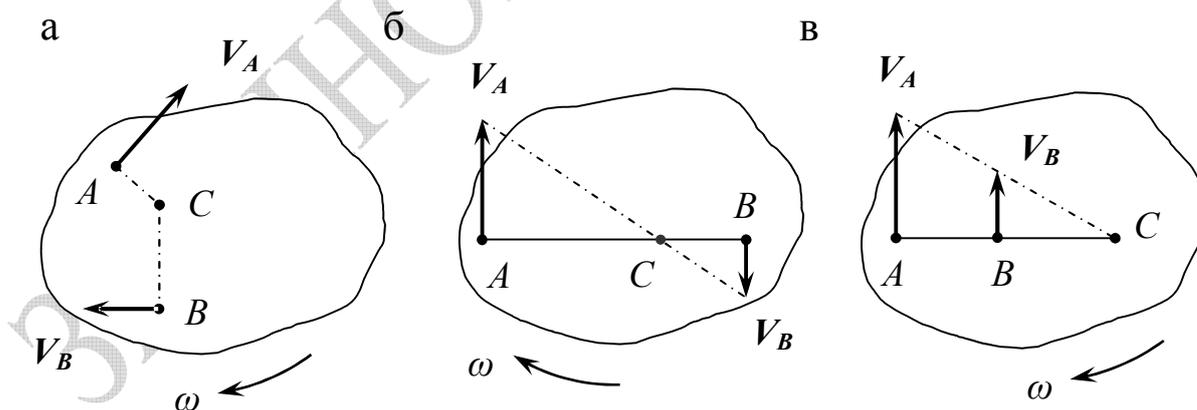


Рисунок 2.8

Если в некоторый момент времени известны угловая скорость вращения плоской фигуры и скорость одной из точек, то положение мгновенного центра скоростей  $C$  в этот момент времени можно найти с помощью построения, проведенного при доказательстве его существования.

Если известны направления скоростей двух точек А и В и они не параллельны друг другу, то положение центра скоростей С определяется пересечением перпендикуляров, восстановленных к скоростям в этих точках (рис. 2.8). В случае если скорости в точках А и В известны и параллельны, необходимо выполнить несложные построения, показанные на рис. 2.8. Случай  $\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A$  соответствует мгновенному поступательному движению.

Для вывода соотношения, позволяющего найти ускорение точек при плоскопараллельном движении тела, необходимо продифференцировать равенство (2.32) по времени:

$$\frac{d\mathbf{V}_M}{d\tau} = \frac{d\mathbf{V}_P}{d\tau} + \frac{d\mathbf{V}_{MP}}{d\tau}.$$

В левой части равенства стоит ускорение  $\mathbf{W}_M$  рассматриваемой точки М, которое представляет собой сумму ускорения полюса  $\mathbf{W}_P$  в поступательной части движения плоской фигуры (первое слагаемое правой части) и ускорения  $\mathbf{W}_{MP}$  точки М во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса Р (второе слагаемое):  $\mathbf{W}_M = \mathbf{W}_P + \mathbf{W}_{MP}$ . Ускорение  $\mathbf{W}_P$  находится с помощью соотношений, полученных при рассмотрении поступательного движения твердого тела, а ускорение  $\mathbf{W}_{MP}$  равно векторной сумме касательного и нормального ускорений во вращательном движении вокруг полюса (формулы (2.25) и (2.26)).

## 2.5. Скорость и ускорение точки при сложном движении

До сих пор рассматривались кинематические характеристики движения только в неподвижной системе координат. Однако зачастую возникает необходимость определить характеристики движения отдельных точек твердого тела в системе координат, которая сама перемещается относительно неподвижной системы координат. Еще одна важная задача – установить связь между кинематическими характеристиками движения точки (траекториями, скоростями и ускорениями) в подвижной и неподвижной системах координат.

Пусть имеются две системы координат: неподвижная  $Oxyz$  и подвижная  $O_1x_1y_1z_1$ . Движение точки М относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$  называется ее **абсолютным движением**. Соответственно говорят о скорости  $\mathbf{V}_a$  и ускорении  $\mathbf{W}_a$  в абсолютном движении. Движение точки М относительно подвижной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  носит название **относительного движения**, а скорость  $\mathbf{V}_r$  и ускорение  $\mathbf{W}_r$  в относительном движении называются относительной скоростью и относительным ускорением. Движение подвижной системы координат относительно неподвижной называется **переносным движением**. Для количественной характеристики переносного движения используются понятия **переносной скорости**

$V_e$  и переносного ускорения  $W_e$ . По определению это скорость и ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает точка  $M$ .

Для лучшего понимания введенных понятий рассмотрим качение без скольжения колеса по полотну дороги (рис. 2.9). Точка  $M$  обода колеса в системе координат  $O_1x_1y_1$ , связанной с колесом, движется по окружности. Это движение является относительным. Переносным

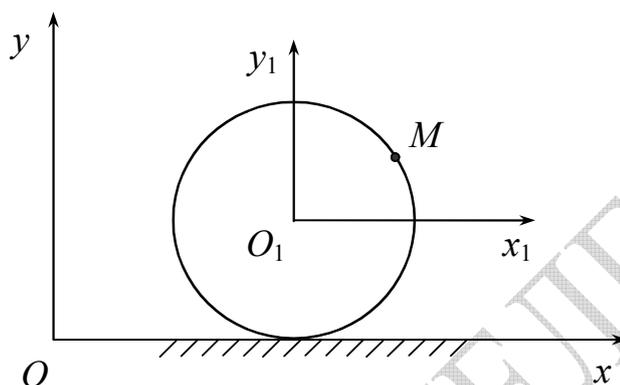


Рисунок 2.9

движением (движением подвижной системы координат относительно неподвижной) в этом примере является поступательное движение. В самом деле, точка подвижной системы координат, которая совпадает в данный момент времени с точкой  $M$ , будет двигаться прямолинейно параллельно оси  $Ox$  вместе с центром колеса. В неподвижной системе координат точка  $M$  будет совершать сложное движение, траекторией которого будет циклоида.

Из приведенного примера видно, что абсолютное движение точки можно рассматривать как наложение двух или более движений, которые, как правило, являются более простыми для изучения. Поэтому важно знать связь между кинематическими характеристиками абсолютного, переносного и относительного движений, чтобы по известным кинематическим характеристикам последних найти кинематические характеристики абсолютного движения.

Для установления такой связи рассмотрим две системы координат: неподвижную  $Oxyz$  и подвижную  $O_1x_1y_1z_1$ . Пусть  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки  $M$  в неподвижной системе координат, а  $\rho$  – радиус-вектор этой же точки в подвижной системе координат. В любой момент времени указанные вектора связаны соотношением:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \rho$$

где  $\mathbf{r}_0$  – радиус-вектор начала подвижной системы координат в системе координат  $Oxyz$ . Продифференцируем это равенство по времени:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau} + \frac{d\mathbf{\rho}}{d\tau}. \quad (2.33)$$

Производная в левой части равенства, согласно (2.5), представляет собой скорость точки  $M$  в неподвижной системе координат – ее абсолютную скорость  $\mathbf{V}_a$ . Первое слагаемое правой части – скорость начала  $O_1$  подвижной системы координат в системе координат  $Oxyz$ .

Вычислим производную  $\frac{d\mathbf{\rho}}{d\tau}$ . Пусть  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные орты подвижной системы координат, а  $x_1, y_1, z_1$  – координаты точки  $M$  в этой же системе. Тогда  $\mathbf{\rho} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}$ , причем во времени меняются не только координаты  $x_1, y_1, z_1$ , но и положение единичных ортов. Учитывая это, можно записать:

$$\frac{d\mathbf{\rho}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) = \frac{dx_1}{d\tau} \mathbf{i} + \frac{dy_1}{d\tau} \mathbf{j} + \frac{dz_1}{d\tau} \mathbf{k} + x_1 \frac{d\mathbf{i}}{d\tau} + y_1 \frac{d\mathbf{j}}{d\tau} + z_1 \frac{d\mathbf{k}}{d\tau}.$$

Первые три слагаемых, согласно (2.6), представляют собой относительную скорость  $\mathbf{V}_r$  точки  $M$ , т. е. ее скорость в подвижной системе координат.

Для того чтобы раскрыть смысл других трех слагаемых, рассмотрим, например, производную  $\frac{d\mathbf{i}}{d\tau}$ . Единичный орт  $\mathbf{i}$  может меняться только по направлению вследствие вращения подвижной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  вокруг точки  $O_1$  с некоторой угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . Применим формулу (2.28) к точке, совпадающей с концом орта  $\mathbf{i}$ . Скорость движения конца вектора  $\mathbf{i}$  при вращении подвижной системы координат будет:  $\frac{d\mathbf{i}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}$ . Аналогично  $\frac{d\mathbf{j}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}$  и  $\frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$ . Тогда с учетом свойств векторного произведения для последних трех слагаемых в предыдущем равенства имеем:

$$x_1 \frac{d\mathbf{i}}{d\tau} + y_1 \frac{d\mathbf{j}}{d\tau} + z_1 \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = x_1 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} + y_1 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} + z_1 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \times (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\rho}.$$

Следовательно, 
$$\frac{d\mathbf{\rho}}{d\tau} = \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\rho}.$$

Возвращаясь к равенству (2.33) и учитывая полученные соотношения, можем записать:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{V}_a = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{V}_r. \quad (2.34)$$

Первые два слагаемых представляют собой скорость точки подвижной системы координат, которая в данный момент совпадает точка М, - переносную скорость  $\mathbf{V}_e$ . Эта скорость складывается из скорости полюса  $\mathbf{V}_0$  (за него следует принять начало координат  $O_1$ ) и линейной скорости  $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$  при вращении относительно начала  $O_1$ . Таким образом, справедливо утверждение: *абсолютная скорость точки равна векторной сумме ее переносной и относительной скоростей*

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r \quad (2.35)$$

Это утверждение носит название **теоремы о сложении скоростей**. Она имеет важное значение при анализе работы различных типов механизмов. При этом необходимо помнить, что в абсолютном и относительном движениях точка описывает разные траектории, и векторы скоростей  $\mathbf{V}_a$  и  $\mathbf{V}_r$  направлены по касательным к соответствующей траектории.

Перейдем к установлению связи между ускорениями при сложном движении. Вторичное дифференцирование векторного равенства (2.33) по времени приведет к следующему соотношению между ускорениями:

$$\mathbf{W}_a = \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_r + \mathbf{W}_{cor} \quad (2.36)$$

Здесь  $\mathbf{W}_a$  – абсолютное ускорение точки М по отношению к неподвижной системе координат. Переносное ускорение  $\mathbf{W}_e$  представляет собой ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает точка М. Оно вычисляется как производная по времени от переносной скорости:

$$\mathbf{W}_e = \frac{d\mathbf{V}_e}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (\mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \quad (2.37)$$

Относительное ускорение  $\mathbf{W}_r$  точки М определяется через производную от относительной скорости:

$$\mathbf{W}_r = \frac{d\mathbf{V}_r}{d\tau} = \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} \mathbf{k} \quad (2.38)$$

Третье слагаемое в (2.36) называется кориолисовым ускорением. Оно отражает изменение переносной скорости в результате относительного перемещения точки М, а также возможное изменение относительной скорости из-за переносного движения подвижной системы координат. Величина кориолисова ускорения определяется соотношением:

$$\mathbf{w}_{cor} = 2 \left( \frac{dx_1}{d\tau} \frac{di}{d\tau} + \frac{dy_1}{d\tau} \frac{dj}{d\tau} + \frac{dz_1}{d\tau} \frac{dk}{d\tau} \right) = 2\omega \times \mathbf{V}_r \quad (2.39)$$

Отсюда видно, что кориолисово ускорение равно нулю в том случае, когда переносное движение является поступательным ( $\omega = 0$ ), либо когда относительное движение отсутствует ( $V_r = 0$ ), либо когда точка М движется параллельно оси вращения подвижной системы координат ( $\omega \parallel \mathbf{V}_r$ ). Направление кориолисова ускорения находится по обычным правилам для векторного произведения.

Соотношение (2.36) носит название **теоремы о сложении ускорений**. Оно также как и теорема о сложении скоростей широко используется при анализе работы механизмов.

## 2.6. Определение параметров движения при работе типовых механизмов

Полученные в предыдущих подразделах соотношения лежат в основе кинематического анализа многих механизмов, которые используются в технологическом оборудовании. Под **механизмом** в общем случае понимают систему тел, предназначенных для преобразования движения одного или нескольких твердых тел в заданное движение других твердых тел. Назначение механизмов – получить в результате преобразования такое движение, которое обеспечивает выполнение механизмом заданных технологических функций.

Задачи кинематического анализа сводятся, главным образом, к определению кинематических характеристик, к которым относятся:

- перемещения звеньев механизма и траектории их отдельных точек;
- линейные скорости отдельных точек и угловые скорости звеньев;
- линейные ускорения этих точек и угловые ускорения звеньев.

Данные по перемещениям и траекториям движения звеньев используются при проектировании оборудования, например, для того, чтобы исключить столкновение движущихся деталей. Значения скоростей и ускорений различных точек и звеньев используются при силовом расчете механизмов, при определении развиваемой или потребляемой мощности, при проведении динамического анализа машины с учетом возникающих при ее работе сил инерции.

Для иллюстрации основных положений кинематики применительно к решению задач кинематического анализа рассмотрим работу двух наиболее простых механизмов: кривошипно-ползунного и кулисного. На рис. 2.10 приведена схема простейшего кривошипно-ползунного механизма, предназначенного для преобразования вращательного движения кривошипа  $OA$  в поступательное движение ползуна  $B$ . Звено  $AB$  (шатун) совершает сложное плоскопараллельное движение. Пусть

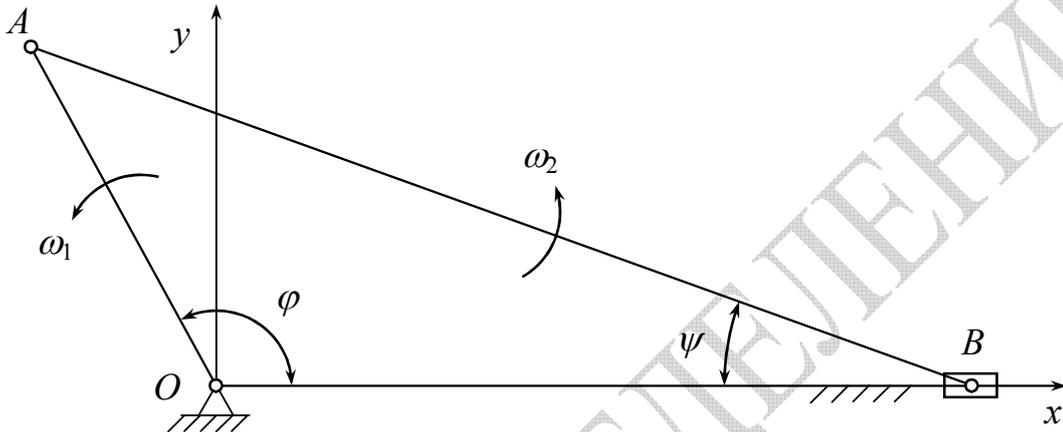


Рисунок 2.10

заданы длины звеньев  $OA$  и  $AB$  и угловая скорость  $\omega_1$  кривошипа. Требуется найти скорость движения ползуна.

Введем систему декартовых координат, совместив ее начало с шарнирной точкой  $O$ . Обозначим угол  $AOB$  через  $\varphi$ , а угол  $ABO$  через  $\psi$ . Согласно (2.21) уравнение вращательного движения кривошипа имеет вид:  $\varphi = \omega_1 \tau$  (начальный угол  $\varphi_0$  положим равным нулю). Ордината точки  $A$  может быть выражена двумя способами:

$$y_A = OA \sin\varphi = AB \sin\psi.$$

Отсюда  $\sin\psi = OA/AB \sin\varphi = \lambda \sin\varphi$ , где  $\lambda = OA/AB$ . Траектория ползуна  $B$  известна заранее. Он перемещается прямолинейно вдоль оси  $Ox$ . Поэтому применим естественный способ задания движения, приняв за дуговую координату  $s$  расстояние от шарнира  $O$  до ползуна  $B$ . Тогда из рис. 2.10 видно, что величину  $s$  можно представить следующим образом:

$$s = OA \cos\varphi + AB \cos\psi.$$

Выразим теперь  $\cos\psi$  через угол  $\varphi$ :

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} .$$

Следовательно, зависимость дуговой координаты  $s$  от времени имеет вид:

$$s(\tau) = OA \cos \omega_1 \tau + AB \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega_1 \tau} .$$

Согласно (2.9) скорость движения ползуна будет равна производной от дуговой координаты по времени:

$$V_B = \frac{ds}{d\tau} = -OA\omega_1 \left[ \sin \omega_1 \tau + \frac{\lambda \sin \omega_1 \tau \cos \omega_1 \tau}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega_1 \tau}} \right] .$$

Полученное выражение показывает, что скорость ползуна зависит от времени довольно сложным образом. Анализ этого выражения позволяет найти амплитуду движения ползуна, ограничения на возможные размеры звеньев механизма, величину ускорения ползуна в любой момент времени.

В качестве еще одного примера рассмотрим работу кулисного механизма с качающейся кулисой  $BC$  (рис. 2.11). При заданной угловой

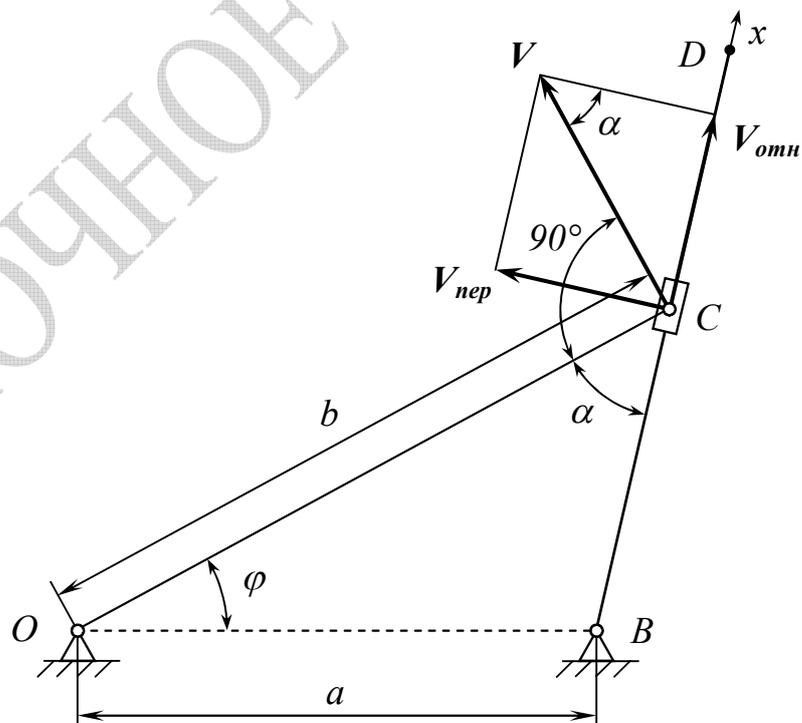


Рисунок 2.11

скорости  $\omega$  кривошипа ОС и длинах звеньев требуется определить скорость движения кулисного камня С вдоль кулисы.

Введем подвижную систему координат, жестко связанную с кулисой ВС. Тогда движение кулисного камня в этой системе координат в соответствии с определениями подраздела 2.5. будет являться относительным. Обозначим ее через  $V_{\text{отн}}$ . Она будет направлена вдоль кулисы ВС (см. рис. 2.11) и именно ее необходимо определить. Движение кулисного камня относительно неподвижных опор О и В является абсолютным. Абсолютное движение кулисного камня будет вращательным, поскольку точка С во все время движения находится на расстоянии  $b$  от шарнира О. Поэтому вектор абсолютной скорости  $V$  направлен перпендикулярно кривошипу ОС, а его абсолютная величина равна  $b \omega$ . Переносным движением в данном случае служит вращательное движение подвижной системы координат вокруг шарнира В. Следовательно, вектор переносной скорости  $V_{\text{пер}}$  будет перпендикулярен кулисе ВС.

Воспользуемся теоремой о сложении скоростей (2.35). В данном случае параллелограмм скоростей будет представлять собой прямоугольник (см. рис. 2.11.). Поэтому абсолютные значения скоростей  $V$  и  $V_{\text{отн}}$  будут связаны соотношением:

$$V_{\text{отн}} = V \sin \alpha = b \omega \sin \alpha.$$

Угол  $\alpha$  с помощью тригонометрических равенств выразим через угол  $\varphi = \omega\tau$ . По теореме синусов для треугольника ОВС имеем:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(\pi - \varphi - \alpha)} = \frac{b}{\sin(\varphi + \alpha)}.$$

Отсюда, раскрывая формулу для синуса суммы двух углов, нетрудно найти  $\text{ctg} \alpha$ :

$$\text{ctg} \alpha = \left( \frac{b}{a} - \cos \omega\tau \right) / \sin \varphi.$$

Используя связь между  $\sin \alpha$  и  $\text{ctg} \alpha$ , окончательно получаем:

$$V_{\text{отн}} = b \omega \sin \omega\tau \left[ 1 - \frac{2b}{a} \cos \omega\tau + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]^{-0,5}$$

## 2.7. Сферическое движение и движение свободного твердого тела

В подразделах 2.3. и 2.4. были рассмотрены поступательное, вращательное и плоскопараллельное движение твердого тела. При указанных типах движения на перемещения точек тела наложены определенные ограничения. Чем меньше таких ограничений, тем больше возможных перемещений имеют точки твердого тела, и тем сложнее количественное описание характеристик движения.

Более сложным типом движения, чем вышеперечисленные, является **сферическое**. *Сферическим называется такое движение твердого тела, при котором одна из его точек во все время движения остается неподвижной.* При таком ограничении остальные точки тела движутся по сферическим поверхностям. Нетрудно увидеть определенную аналогию между вращательным и сферическим движениями. Если при вращательном движении положение тела однозначно определяется углом поворота относительно некоторой неподвижной плоскости, то при сферическом движении положение тела также определяется угловыми величинами, но уже тремя.

Пусть имеется две системы координат: одна неподвижная  $Oxyz$  и вторая подвижная  $Ox_1y_1z_1$ , которая связана с телом и перемещается вместе с ним. Совместим начало координат обеих систем с неподвижной точкой твердого тела. Плоскости  $Oxy$  и  $Ox_1y_1$  пересекаются по некоторой прямой, называемой линией узлов. При движении тела положение линии узлов будет меняться. Угол  $\psi$  между линией узлов и осью  $Ox$  называется **углом прецессии**. Угол  $\varphi$ , который составляют линия узлов и ось  $Ox_1$  носит название **угла собственного вращения**. Наконец, угол  $\theta$  между осями  $Oz$  и  $Oz_1$  называется **углом нутации**. В процессе движения тела все три угла являются функциями времени:

$$\psi = \psi(\tau), \quad \varphi = \varphi(\tau), \quad \theta = \theta(\tau) \quad (2.40)$$

Эти зависимости называются **уравнениями сферического движения тела**.

Если твердое тело совершает сферическое движение, то в каждый момент времени существует прямая, точки которой в данный момент времени неподвижны. Эта прямая называется **мгновенной осью вращения**. Она является в определенной степени аналогом мгновенного центра скоростей при плоскопараллельном движении. С течением времени положение мгновенной оси вращения меняется как в пространстве, так и по отношению к телу. При этом сферическое движение можно рассматривать как поворот тела в данный момент времени вокруг мгновенной оси вращения с некоторой угловой скоростью  $\omega$ . Тогда скорость любой точки тела может быть

определена по формулам для вращательного движения. Однако, в отличие от вращательного движения при сферическом движении вектор  $\omega$  является переменным по направлению. Поэтому вектор углового ускорения  $\varepsilon$ , которое равно производной по времени от угловой скорости, не лежит на одной прямой с вектором  $\omega$ .

Еще более сложным случаем движения твердого тела является движение свободного тела. При его количественном описании одну из точек тела принимают за полюс  $C$  (так же как это делалось при описании плоскопараллельного движения). Тогда движение свободного тела можно рассматривать как одновременно происходящие два движения: поступательное движение вместе с полюсом  $C$  и сферическое движение вокруг полюса. Следовательно, уравнениями движения свободного твердого тела будут:

$$\begin{aligned}x_C &= x_C(\tau), & y_C &= y_C(\tau), & z_C &= z_C(\tau) \\ \psi &= \psi(\tau), & \varphi &= \varphi(\tau), & \theta &= \theta(\tau)\end{aligned}\tag{2.41}$$

Основными кинематическими характеристиками тела при его свободном движении являются скорость  $\mathbf{V}_C$  и ускорение  $\mathbf{W}_C$  полюса, а также угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  тела. Тогда скорость любой точки тела равна векторной сумме скорости полюса и скорости, которую имеет эта точка в относительном движении тела вокруг полюса. Аналогично может быть определено ускорение любой точки тела при его свободном движении.

## 2.8. Контрольные вопросы

1. Что изучает кинематика?
2. Какие существуют способы задания движения точки?
3. В чем состоит естественный способ задания движения точки?
4. Как определяется скорость движения точки при всех трех способах задания ее движения?
5. Что такое касательное ускорение и что оно характеризует?
6. Что такое нормальное ускорение и что оно характеризует?
7. Дайте определение поступательного движения твердого тела. Почему при поступательном движении достаточно знать кинематические характеристики одной из точек твердого тела?
8. Назовите кинематические характеристики вращательного движения твердого тела.
9. Как определить скорость и ускорение произвольной точки тела при вращательном движении?
10. Что такое плоскопараллельное движение твердого тела?
11. Напишите уравнения плоскопараллельного движения.

12.Чему равна скорость любой точки при плоскопараллельном движении?

13.Что такое мгновенный центр скоростей?

14.Когда говорят о сложном движении точки?

15.Дайте определение абсолютного, относительного и переносного движения.

16.Что утверждает теорема о сложении скоростей в сложном движении точки?

17.Что такое кориолисово ускорение? Каков его физический смысл?

18.Что утверждает теорема о сложении ускорений при сложном движении точки?

19.Дайте определение сферического движения и движения свободного твердого тела.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

## Глава 3. Динамика

### 3.1. Основные понятия и аксиомы динамики

Механическое движение материальных тел вызывается действием на них сил той или иной природы. В двух предыдущих главах причина движения (силы) и следствие (движение механических систем) рассматривались по отдельности. В динамике обе стороны одного и того же явления – поведения механических систем под действием сил – рассматриваются одновременно. Главная цель динамики – установить количественные соотношения между параметрами движения и характеристиками сил. Используя такие соотношения можно решать два рода задач. Во-первых, при заданном движении механической системы определять силы, вызывающие это движение (первая задача динамики). Во-вторых, наоборот, при заданных силах находить характер и параметры движения механической системы, которое они вызовут (вторая задача динамики).

Также как и статика, динамика исходит из нескольких подтвержденных опытом и наблюдениями положений (аксиом).

**Аксиома 1.** *Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.* Эту аксиому называют еще законом инерции или первым законом Ньютона. Она содержит, наверное, самое абстрактное понятие механики – понятие изолированной материальной точки, в котором сочетаются сразу две идеализации: изолированность и материальная точка. Первое предполагает полное отсутствие каких-либо силовых воздействий (чего в реальных условиях никогда не бывает), под вторым понимается точка, обладающая массой.

Смысл аксиомы 1 достаточно прост: если на материальную точку не действуют никакие силы, то вектор ее скорости остается неизменным.

**Аксиома 2.** *Сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, которое пропорционально этой силе.* Эту аксиому обычно называют основным законом механики или вторым законом Ньютона. В символьной форме она имеет вид:

$$m \mathbf{W} = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $m$  между ускорением  $\mathbf{W}$  и силой  $\mathbf{F}$  называется массой материальной точки. В аксиоме 2 она выступает в качестве меры инерционности, т. е. способности материального тела противодействовать изменению своего кинематического состояния под действием силы. Единицей измерения массы является 1 кг. Тогда уравнение (3.1) задает и единицу измерения силы, которая называется ньютоном (Н):  $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг м / с}^2$ .

Если на точку действует система сил, то под  $\mathbf{F}$  в уравнении (3.1) следует понимать их равнодействующую. Если на точку наложены связи (например, в виде гибкой нерастяжимой нити), то в соответствии с принципом освобождения от связей (аксиома 6 статики) в правую часть уравнения следует добавить реакции связей.

**Аксиома 3.** *Силы взаимодействия движущихся тел всегда направлены по одной прямой противоположно друг другу и равны по модулю.* Эту аксиому называют также принципом равенства действия и противодействия или третьим законом Ньютона. Она обобщает аксиому 4 статики на движущиеся тела.

**Аксиома 4.** *Ускорение, сообщаемое материальному телу при одновременном действии на него нескольких сил, равно векторной сумме ускорений, которые сообщила бы каждая сила по отдельности.* Другое название этой аксиомы – принцип независимости действия сил. Она широко применяется при анализе напряжений и деформаций в конструкционных материалах.

### 3.2. Дифференциальное уравнение движения материальной точки

С учетом различных способов задания движения точки уравнение (3.1) может быть записано в разных формах. Если движение точки задано векторным способом (2.1), то ее ускорение выражается равенством (2.10), а уравнение движения (3.1) примет вид:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \mathbf{F} \quad (3.2)$$

Сила  $\mathbf{F}$  в общем случае может зависеть от координат, времени и скорости точки. Уравнение (3.2) называют **дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме.**

При координатном способе задания движения точки (2.2) векторное уравнение (3.2) в проекциях на оси декартовой системы координат распадется на три уравнения:

$$m \frac{d^2 x}{d\tau^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{d\tau^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{d\tau^2} = F_z \quad (3.3)$$

Здесь  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$  – проекции силы, действующей на материальную точку, на координатные оси;  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  и  $z(\tau)$  – координаты точки в данный момент времени.

Уравнение (3.2) можно спроектировать на направления касательной и нормали к траектории движения точки. С учетом выражений (2.16) и (2.17) для касательного и нормального ускорений получим:

$$m \frac{dV}{d\tau} = m \frac{d^2s}{d\tau^2} = F_m, \quad m \frac{V^2}{\rho} = F_n \quad (3.4)$$

Здесь  $F_m$  и  $F_n$  – проекции действующей на точку силы на касательную и нормаль к траектории ее движения.

Уравнения (3.3) и (3.4) называются **дифференциальными уравнениями движения материальной точки в декартовых и естественных осях** соответственно. Вместе с уравнением (3.2) они лежат в основе решения обеих задач динамики точки. При решении первой задачи динамики движение точки задано одним из способов. Тогда действующая на точку сила находится с помощью соответствующего дифференциального уравнения путем двукратного дифференцирования закона движения. В частности, если движение точки задано естественным способом (2.4), то явный вид зависимости дуговой координаты  $s$  от времени  $\tau$  известен. В этом случае проекция на касательную к траектории  $F_m$  действующей на точку силы находится по первому соотношению (3.4), а проекция этой силы на нормаль  $F_n$  – по второму соотношению:

$$F_n = \frac{m}{\rho} \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2.$$

Полная величина силы  $F$  определяется ее проекциями:

$$F = \sqrt{F_m^2 + F_n^2},$$

а ее направление – углом  $\alpha$  между силой и касательной к траектории в данной точке:

$$\cos \alpha = F_m / F.$$

Вторая задача динамики является обратной к первой. Она заключается в определении закона движения точки под действием заданных сил. Пусть, например, требуется найти закон движения материальной точки массой  $m$ , находящейся под действием упругой силы  $F$ . Сила упругости пропорциональна расстоянию  $x$  до некоторой фиксированной точки  $O$ . Примем точку  $O$  за начало координат, а прямую, вдоль которой будет двигаться рассматриваемая точка, – за ось координат  $Ox$ . Тогда, согласно (3.3), движение точки описывается уравнением:

$$m \frac{d^2 x}{d\tau^2} = -cx \quad (3.5)$$

Коэффициент пропорциональности  $c$  называют коэффициентом жесткости, знак минус указывает на то, что сила упругости всегда направлена к началу координат, где бы не находилась движущаяся точка. Такая ситуация имеет место, например, при работе пружин.

Уравнение движения (3.5) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно координаты точки  $x(\tau)$ :

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{c}{m} x = 0$$

Из курса математики известно, что его общим решением является функция:

$$x(\tau) = B_1 \cos \sqrt{\frac{c}{m}} \tau + B_2 \sin \sqrt{\frac{c}{m}} \tau, \quad (3.6)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  – постоянные интегрирования. Их значения определяются из начальных условий. Предположим, что в начальный момент времени  $\tau = 0$  точка имела скорость  $V_0$  и находилась в положении  $x_0$ . Полагая в равенстве (3.6)  $\tau = 0$ , получим:  $B_1 = x_0$ . Скорость точки в произвольный момент времени равна:

$$V = \frac{dx}{d\tau} = -B_1 \sqrt{\frac{c}{m}} \sin \sqrt{\frac{c}{m}} \tau + B_2 \sqrt{\frac{c}{m}} \cos \sqrt{\frac{c}{m}} \tau.$$

При  $\tau = 0$  находим:  $B_2 = V_0 \sqrt{\frac{c}{m}}$ . Таким образом, значения констант  $B_1$  и  $B_2$  зависят как от характеристик системы (масса  $m$  и жесткость  $c$ ), так и от начальных условий. Пользуясь известным тригонометрическим равенством для комбинации синуса и косинуса закон движения точки (3.6) можно записать в более простом для анализа виде:

$$x(\tau) = A \sin \left( \sqrt{\frac{c}{m}} \tau + \beta \right) \quad (3.7)$$

Отсюда видно, что точка под действием упругой силы будет совершать периодические движения (колебания) относительно начала

координат. Сомножитель  $A$ , равный  $\sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ , называется амплитудой колебаний, угол  $\beta$ , равный  $\arcsin \frac{B_1}{A}$ , носит название начальной фазы.

Период колебаний  $T$ , т. е. промежуток времени, в течение которого рассматриваемая точка проходит одно и то же положение в одинаковом направлении, равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (3.8)$$

Закон движения (3.7) описывает незатухающие колебания, которых в реальных ситуациях не наблюдается. Противоречие с реальностью возникает из-за того, что уравнение движения (3.5) не содержит сил сопротивления, которые в действительности всегда существуют (силы трения, силы сопротивления среды).

Приведенный пример показывает, что вторая задача динамики сводится к интегрированию дифференциальных уравнений движения с учетом известных значений скорости и координаты точки в некоторый (начальный) момент времени.

### 3.3. Принцип Даламбера. Силы инерции.

Как уже отмечалось в комментарии к аксиоме 2, если на точку наложены связи, то в правую часть уравнения движения (3.1) входит сумма активных (задаваемых) сил и реакции связей:

$$m \mathbf{W} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \quad (3.9)$$

Перенесем все слагаемые в правую часть равенства:

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + (-m \mathbf{W}) = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

Величина  $\Phi = -m \mathbf{W}$  называется **силой инерции**. Используя ее, можно уравнение движения (3.10) записать в форме уравнения равновесия (1.3):

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \Phi = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Это векторное равенство составляет содержание **принципа Даламбера**: *силы инерции уравновешивает активные силы и реакции связей*.

Сила инерции тем больше, чем больше ускорение и масса движущегося тела. Она направлена в сторону, противоположную

ускорению. Следовательно, если движение ускоренное, то сила инерции направлена в сторону, противоположную движению. Если движение замедленное, то сила инерции направлена по движению. Понятие силы инерции позволяет формально свести решение задач динамики к решению задач статики. Такой подход, основанный на принципе Даламбера, используется в кинестатике при анализе работы механизмов и машин.

Вычисление составляющих силы инерции при различных способах задания движения точки не вызывает трудностей. В частности, при естественном способе задания движения касательная (тангенциальная) составляющая  $\Phi_m$  силы инерции определяется соотношением:

$$\Phi_m = -m W_m = -m \frac{d^2 s}{d\tau^2},$$

а нормальная составляющая (центробежная) силы инерции  $\Phi_n$  – соотношением:

$$\Phi_n = -m W_n = -\frac{m}{\rho} \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2.$$

Если точка принадлежит телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\varepsilon$ , то составляющие силы инерции будут:

$$\Phi_m = -m r \varepsilon; \quad \Phi_n = -m r \omega^2.$$

Здесь использованы выражения (2.25) и (2.26) для касательного и нормального ускорения точек вращающегося тела.

### 3.4. Центр масс механической системы

Получим теперь уравнение движения, аналогичное уравнению (3.1), но уже для механической системы. Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $N$  точек, которые обладают в общем случае различной массой. Обозначим массу точки с номером  $i$  через  $m_i$ , а радиус-вектор этой точки - через  $r_i$ . **Массой механической системы**  $m$  называется сумма масс всех ее точек:

$$m = \sum_{i=1}^N m_i \quad (3.12)$$

Под **центром масс механической системы** понимают геометрическую точку  $C$ , радиус-вектор которой находится с помощью соотношения:

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i . \quad (3.13)$$

Полученное векторное равенство в проекциях на оси декартовой системы координат распадается на три скалярных соотношения для координат центра масс:

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i x_i \quad y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i y_i \quad z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i z_i . \quad (3.14)$$

Если механическая система (в частности, твердое тело) находится в поле силы тяжести, то ее центр масс совпадает с центром тяжести, и формулы (3.14) позволяют найти его местоположение. Однако для твердого тела суммирование в правых частях равенств должно быть заменено интегрированием по его объему.

Дифференцируя эти равенства по времени можно установить связь между скоростями  $\mathbf{V}_i$  всех точек механической системы и скоростью ее центра масс  $\mathbf{V}_C$ :

$$\mathbf{V}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V}_i \quad (3.15)$$

Повторное дифференцирование приведет к соотношению между ускорениями точек  $\mathbf{W}_i$  и ускорением центра масс  $\mathbf{W}_C$ :

$$\mathbf{W}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{W}_i \quad (3.16)$$

Таким образом, движение центра масс механической системы зависит от характера движения каждой ее точки. В свою очередь, движение точек системы происходит под действием сил. При анализе сил отмечалось (глава 1), что часть сил является внешними по отношению к механической системе, другие силы действуют внутри системы между ее отдельными точками. С учетом этого запишем уравнение (3.1) для каждой точки механической системы:

$$m_i \mathbf{W}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{P}_i , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

где  $\mathbf{F}_i$  и  $\mathbf{P}_i$  – равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на  $i$ -ю точку. Просуммируем левые и правые части всех  $N$  уравнений:

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{W}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i$$

Из статики известно, что главный вектор внутренних сил  $\sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i$  любой механической системы равен нулю. Тогда с учетом (3.16) получим уравнение:

$$m \mathbf{W}_C = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (3.17)$$

Следовательно, произведение полной массы механической системы на ускорение центра ее масс равно главному вектору всех внешних сил, действующих на точки механической системы. Сравнение полученного уравнения с аксиомой 2 позволяет сделать вывод: *центр масс механической системы движется как свободная материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложена сила, равная главному вектору внешних, действующих на точки системы.*

В проекциях на оси декартовой системы координат векторному уравнению (3.17) соответствуют три уравнения в скалярной форме:

$$m \frac{d^2 x_C}{d\tau^2} = \sum_{i=1}^N F_{ix}, \quad m \frac{d^2 y_C}{d\tau^2} = \sum_{i=1}^N F_{iy}, \quad m \frac{d^2 z_C}{d\tau^2} = \sum_{i=1}^N F_{iz}. \quad (3.18)$$

Здесь  $F_{ix}$ ,  $F_{iy}$  и  $F_{iz}$  – проекции на оси координат внешних сил, действующих на точку системы с номером  $i$ . Уравнения (3.18) называются **дифференциальными уравнениями движения центра масс**. В случае поступательного движения твердого тела эти уравнения достаточны для его полного описания. В самом деле, в разделе, посвященном кинематике, отмечалось, что описание поступательного движения сводится к описанию движения одной его точки. В динамике в качестве такой точки выбирается центр масс. Поэтому уравнения (3.18) часто называются **дифференциальными уравнениями поступательного движения твердого тела**. Из них, в частности, следует, что если главный вектор внешних сил равен нулю

во все время движения, то центр масс механической системы будет находиться в покое или двигаться равномерно и прямолинейно.

Еще один важный вывод, вытекающий из уравнений движения (3.18) состоит в следующем: *внутренние силы, действующие между отдельными элементами механической системы (твердого тела), не могут изменить движения центра масс.*

### 3.5. Количество движения материальной точки и механической системы

**Количеством движения материальной точки** называют векторную величину, равную произведению массы точки на ее скорость:  $m_i \mathbf{V}_i$ . Единицей измерения количества движения служит кг·м / с. **Количеством движения механической системы  $\mathbf{K}$**  называют векторную сумму количества движения всех точек, составляющих систему:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V}_i \quad (3.19)$$

Правую часть этого равенства, согласно (3.15), можно заменить на произведение  $m\mathbf{V}_C$ . Следовательно, количество движения механической системы (в частности, твердого тела) равно произведению ее массы на скорость центра масс:  $\mathbf{K} = m \mathbf{V}_C$ . Отсюда видно, что *количество движения является мерой поступательной части движения тела.* Мерой вращательной части движения являются другие характеристики, которые будут рассмотрены ниже.

Продифференцируем обе части равенства (3.19) по времени. С учетом (3.17) имеем:

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V}_i = \frac{d}{d\tau} (m\mathbf{V}_C) = m\mathbf{W}_C = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (3.20)$$

Это равенство составляет содержание теоремы об изменении количества движения механической системы: *производная по времени от количества движения системы равна главному вектору внешних сил, действующих на систему.*

Сформулированная теорема широко применяется при анализе движения не только твердых тел, но и газообразных и жидких сред. Она остается справедливой при движении тел переменной массы (например, при реактивном движении).

Из теоремы об изменении количества движения вытекает, что измениться оно может только в результате действия сил. Способность силы воздействовать на тело характеризуется ее импульсом. В общем

случае импульс  $\mathbf{S}$  силы  $\mathbf{F}$  за промежуток времени от 0 до  $\tau$  определяется соотношением:

$$\mathbf{S} = \int_0^{\tau} \mathbf{F} d\tau$$

Если сила не меняется во времени, то импульс, который она передает телу, равен произведению силы на время воздействия:  $\mathbf{F} \cdot \tau$ . Размерность импульса силы  $[\mathbf{S}] = \text{Н} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}$ . Она совпадает с размерностью количества движения. Следовательно, эти физические величины взаимосвязаны. Конкретный вид такой связи вытекает из теоремы об изменении количества движения (3.20).

Проинтегрируем обе части указанного равенства по времени в пределах от 0 до  $\tau$ :

$$\int_0^{\tau} \frac{d\mathbf{K}}{d\tau} d\tau = \int_0^{\tau} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\tau$$

Свойства определенного интеграла после несложных преобразований позволяют записать:

$$\mathbf{K}(\tau) - \mathbf{K}(0) = \sum_{i=1}^N \int_0^{\tau} \mathbf{F}_i d\tau = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i, \quad (3.21)$$

т.е. *приращение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно векторной сумме импульсов всех внешних сил, действующих на систему, за тот же промежуток времени*. Поскольку сумма сил, входящая в соотношение (3.20), эквивалентна главному вектору, предыдущая формулировка может быть заменена следующей: *приращение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно импульсу главного вектора внешних сил за тот же промежуток времени*. Обе формулировки составляют содержание теоремы импульсов.

Из теоремы вытекает несколько важных следствий. Во-первых, *внутренние силы не могут изменить количества движения механической системы*. Во-вторых, *если главный вектор внешних сил равен нулю в течение некоторого промежутка времени, то количество движения системы будет постоянным в течение этого промежутка*. Наконец, в-третьих, *если проекция главного вектора внешних сил на какое-нибудь направления равна нулю, то проекция количества движения на это направление будет оставаться*

постоянной во все время движения системы. Приведенные следствия широко используются при решении задач механики.

### 3.6. Моменты инерции механической системы

Как уже отмечалось, количество движения является мерой поступательной составляющей движения и не может служить характеристикой движения для вращающихся тел. Действительно, рассмотрим тело, которое вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс. Тогда  $\mathbf{V}_C = 0$ , и количество движения  $\mathbf{K} = 0$  в силу  $\mathbf{K} = m \mathbf{V}_C$ .

Точно так же обстоит дело с массой тела. Если для поступательного движения она служит мерой инертности тела, то для вращательного движения эту роль играют другие характеристики. Они носят название моментов инерции.

Пусть имеются материальная точка массой  $m$  и некоторая неподвижная ось. **Моментом инерции** материальной точки относительно некоторой оси называется скалярная величина, равная произведению массы точки на квадрат расстояния от точки до оси. Например, для материальной точки, изображенной на рис. 3.1, момент

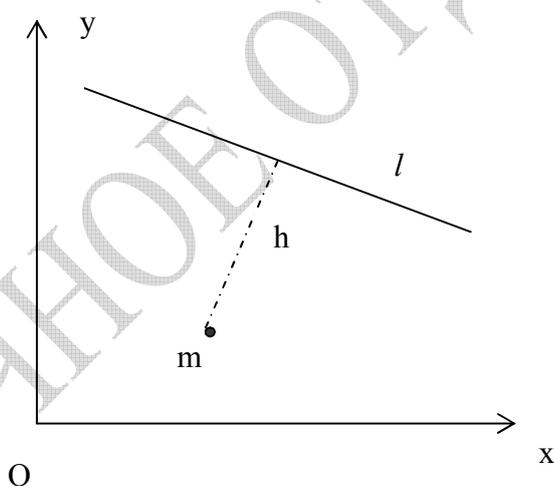


Рисунок 3.1

инерции относительно оси  $Ox$  равен  $J_x = m y^2$ , относительно оси  $Oy$  –  $J_y = m x^2$ , относительно оси  $l$  –  $J_l = m h^2$  ( $x$  и  $y$  – координаты точки). Единицы измерения осевых моментов  $[J] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$ . Из определения момента инерции следует, что он не может быть отрицательным.

Понятие момента инерции материальной точки несложно обобщить на общий случай механической системы, состоящей из  $N$  материальных точек. Момент инерции системы равен сумме моментов инерции ее отдельных точек:

$$J_I = \sum_{i=1}^N m_i h_i^2 \quad (3.22)$$

где  $m_i$  - масса точки с номером  $i$ ,  $h_i$  - расстояние этой точки до оси  $I$ .

Свойство аддитивности момента инерции позволяет распространить это понятие на твердое тело произвольной формы. Если разбить весь объем, занятый телом, на бесконечно малые элементы, то каждый такой элемент можно рассматривать как материальную точку массой  $dm$ . Момент инерции одного такого элемента, например, относительно оси  $Ox$  декартовой системы координат по определению равен  $(y^2 + z^2) \cdot dm$ . Тогда момент инерции всего тела может быть получен в результате интегрирования этой величины по всему объему  $V$ :

$$J_x = \int_V (y^2 + z^2) dm = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV \quad (3.23)$$

Здесь масса элементарного объема тела выражена через плотность материала  $\rho$ :  $dm = \rho dV$ .

Аналогично могут быть записаны моменты инерции тела относительно осей  $Oy$  и  $Oz$ :

$$J_y = \int_V (x^2 + z^2) dm = \int_V (x^2 + z^2) \rho dV \quad (3.24)$$

$$J_z = \int_V (y^2 + x^2) dm = \int_V (y^2 + x^2) \rho dV \quad (3.25)$$

В качестве примера использования приведенных формул вычислим момент инерции прямоугольной пластины, изображенной на рис. 3.2. Пусть  $m$  – масса пластины,  $h$  - ее длина,  $b$  – ширина,  $a$  – толщина. Тогда объем пластины  $V = hba$ , а масса единицы объема равна  $m / hba$ . Определим сначала момент инерции  $J_z$  относительно

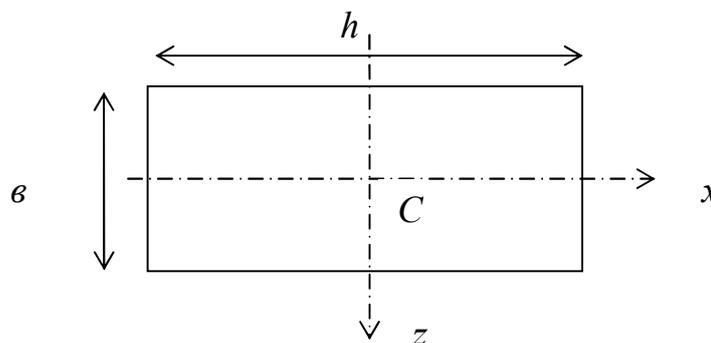


Рисунок 3.2

оси Oz, проходящей через центр тяжести пластины С (рис. 3.2). Воспользуемся формулой (3.25). Выделим бесконечно малый элемент пластины, ограниченный координатами x, x + dx и z, z + dz. Его объем равен  $adxdz$ , а масса  $dm$ :

$$dm = \frac{m}{h\varepsilon} adxdz = \frac{mdxdz}{h\varepsilon}$$

С учетом того, что координата  $y = 0$ , интегрирование в формуле (3.25) сведется к интегрированию по координатам x и z в пределах их изменения:

$$J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm = \frac{m}{h\varepsilon} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{+\frac{\varepsilon}{2}} dz \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} x^2 dx = \frac{mh^2}{12}$$

Аналогично может быть получено выражение для момента инерции  $J_x$  относительно оси Ox. Оно равно  $J_x = m\varepsilon^2 / 12$ .

Из приведенного примера видно, что величина момента инерции относительно некоторой оси зависит от квадрата поперечного по отношению к данной оси размера тела. Кроме того, она зависит от положения оси, относительно которой вычисляется момент инерции. С помощью аналогичных вычислений можно показать, что момент инерции относительно оси Oz' параллельной Oz и отстоящей от нее на расстоянии  $p$  равен:  $J_{z'} = J_z + mp^2$ . Отсюда следует, что, зная значение момента инерции тела относительно некоторой оси, нетрудно определить его значение относительно любой оси, параллельной данной. Другой вывод, который может быть сделан: *момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс (или центр тяжести), является наименьшим из всех моментов инерции относительно осей, параллельных ей.*

### 3.7. Момент количества движения материальной точки и механической системы

При анализе сил, действующих на твердое тело, отмечалось, что вращательный эффект силы определяется ее моментом относительно некоторой точки или оси. Величина момента силы в общем случае находится по формуле (1.10) как векторное произведение радиус-вектора, проведенного в точку приложения силы, на вектор самой силы:  $\mathbf{M}(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Точно так же для количественного описания вращательного движения служит особая характеристика - **момент количества движения**. Она определяется аналогично понятию

момента силы, а именно: *моментом количества движения  $M_O(mV)$  материальной точки относительно некоторой центра  $O$  называется векторное произведение:*

$$M_O(mV) = r \times mV \quad (3.26)$$

Направление вектора  $M_O(mV)$  определяется по обычным правилам для векторного произведения. Единицей измерения момента количества движения служит  $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ .

**Моментом количества движения механической системы** (или **кинетическим моментом**) называется векторная сумма моментов количества движения всех точек, составляющих систему:

$$L_O = \sum_{i=1}^N M_O(m_i V_i) = \sum_{i=1}^N r \times m_i V_i \quad (3.27)$$

Здесь моменты количества движения всех материальных точек, составляющих систему, вычисляются относительно одного и того же центра  $O$ . В том случае, когда механическая система представляет собой твердое тело, суммирование в формуле (3.27) заменяется на интегрирование по всему объему тела.

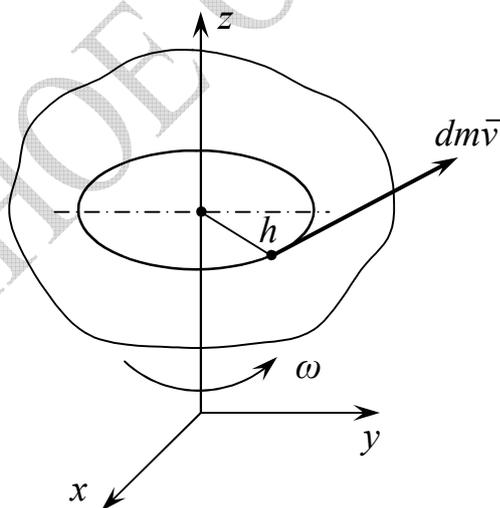


Рисунок 3.3

Рассмотрим, как связаны кинематические характеристики вращающегося тела и его момент количества движения. Пусть твердое тело вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг неподвижной оси  $Oz$  (рис. 3.3). Выделим в теле бесконечно малый элемент массой  $dm$ , находящийся на расстоянии  $h$  от оси вращения:  $h = \sqrt{x^2 + y^2}$ , где

$x$  и  $y$  – координаты выделенного элемента. Траекторией его движения является окружность с центром на оси вращения. Скорость движения элемента направлена по касательной к траектории, а ее величина равна  $\omega h$ . Так что вектор количества движения направлен также по касательной к траектории, и величина его равна  $dm\omega\sqrt{x^2 + y^2}$ . Момент количества движения выделенного элемента относительно оси  $Oz$  равен его моменту количества движения относительно любой точки на этой оси (так же как в случае момента силы относительно оси). В качестве такой точки возьмем точку пересечения оси  $Oz$  и плоскости движения рассматриваемого элемента (рис. 3.3). Тогда плечом вектора количества движения служит величина  $h$ , а момент количества движения равен:

$$dL_z = dm\omega h\sqrt{x^2 + y^2} = dm\omega(x^2 + y^2).$$

Момент количества движения всего тела получим путем интегрирования этого выражения по его объему:

$$L_z = \int_V \omega(x^2 + y^2)dm = \omega \int_V (x^2 + y^2)dm = \omega J_z \quad (3.28)$$

Здесь использовано соотношение (3.25) для момента инерции твердого тела. Таким образом, *кинетический момент вращающегося тела равен произведению угловой скорости вращения на момент инерции тела относительно оси вращения.*

Нетрудно увидеть аналогию между количественными характеристиками поступательного и вращательного движения. При поступательном движении количество движения механической системы определяется по формуле:  $\mathbf{K} = m \mathbf{V}_C$ . При вращательном движении аналогом этой формулы служит соотношение (3.28):  $L_z = J_z\omega$ . Следовательно, кинетический момент  $L_z$  является аналогом количества движения  $\mathbf{K}$ , т. е. служит мерой вращательного движения. При этом мерой инерционности является момент инерции  $J_z$ .

Выясним, что может быть причиной изменения момента количества движения. Сначала рассмотрим движение одной материальной точки. Оно подчиняется уравнению (3.1):  $m \mathbf{W} = \mathbf{F}$ , где  $\mathbf{F}$  – равнодействующая всех сил, действующих на точку. Умножим векторно левую и правую части уравнения движения на радиус-вектор точки относительно некоторого центра  $O$ :

$$\mathbf{r} \times m \mathbf{W} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.29)$$

Справа от знака равенства стоит момент силы относительно точки  $O$ :  $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Левая часть равенства может быть преобразована следующим образом:

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{W} = \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{V})}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\mathbf{r} \times m\mathbf{V}) - \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \times m\mathbf{V}$$

Здесь использованы свойства производной и векторного произведения двух векторов. В последнем слагаемом  $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{V}$ .

Следовательно, векторно перемножаются два параллельных вектора. Такое произведение, как известно из курса математики, равно нулю. Произведение  $\mathbf{r} \times m\mathbf{V}$ , согласно (3.26), представляет собой момент количества движения материальной точки  $\mathbf{M}_O(m\mathbf{V})$  относительно центра  $O$ . В результате из предыдущего вытекает уравнение:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{M}_O(m\mathbf{V}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}), \quad (3.30)$$

которое показывает, что *причиной изменения момента количества движения материальной точки является вращательный эффект действующих на нее сил*. Уравнение (3.30) устанавливает количественную сторону этой связи.

В механической системе, состоящей из  $N$  точек, для каждой из них можно составить уравнение (3.30):

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{M}_O(m_i \mathbf{V}_i) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Просуммируем левые и правые части всех этих уравнений. Сумма левых частей, согласно (3.27), может быть представлена в виде:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{d\tau} \mathbf{M}_O(m_i \mathbf{V}_i) = \frac{d}{d\tau} \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_O(m_i \mathbf{V}_i) = \frac{d\mathbf{L}_O}{d\tau}$$

В правой части в результате суммирования уравнений получим сумму моментов всех сил (главный момент), действующих на точки механической системы. При этом сумма слагаемых, включающих внутренние силы, будет равна нулю. Действительно, каждой силе, действующей внутри механической системы, соответствует равная по величине и противоположная по направлению сила (аксиома 3). Поэтому моменты этих двух сил будут уравновешивать друг друга. В итоге получаем уравнение:

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{d\tau} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) \quad (3.31)$$

Полученное уравнение представляет собой символьную запись **теоремы об изменении кинетического момента**: производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторой точки равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы, относительно той же точки. Сформулированная теорема является основной при изучении вращательного движения твердых тел.

Для вращающегося вокруг оси Oz тела, согласно (3.28), кинетический момент равен:  $L_z = \omega J_z$ . Если во время вращения форма тела не меняется, то момент инерции  $J_z = \text{const}$ , и уравнение (3.31) в этом случае примет вид:

$$J_z \frac{d\omega}{d\tau} = \sum_j M_z(\mathbf{F}_j) \quad (3.32)$$

Полученное уравнение называется **дифференциальным уравнением вращательного движения твердого тела**. В его правой части суммирование ведется по всем силам, действующим на тело.

Используя обозначение для углового ускорения  $\varepsilon = \frac{d\omega}{d\tau}$ , предыдущее уравнение можно записать в форме аналогичной уравнению (3.17), описывающему поступательное движение твердого тела:  $J_z \varepsilon = \sum_j M_z(\mathbf{F}_j)$ .

### 3.8. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела

Из кинематики известно (подраздел 2.4.), что плоскопараллельное движение твердого тела представляет собой наложение поступательного и вращательного движений. Оно полностью описывается тремя уравнениями (2.31), два из которых задают движение полюса, а третье характеризует вращение тела вокруг полюса. В динамике при составлении уравнений плоского движения в качестве полюса всегда выбирается центр масс тела С. Такой выбор объясняется тем, что центр масс является единственной подвижной точкой, для которой теорема об изменении кинетического момента (3.31) имеет такой же вид, как и для неподвижной точки.

При выбранном полюсе поступательная часть движения подчиняется векторному уравнению (3.17), которое в проекциях на оси

декартовой системы координат равносильно двум скалярным уравнениям:

$$m \frac{d^2 x_c}{d\tau^2} = \sum_j F_{jx}, \quad m \frac{d^2 y_c}{d\tau^2} = \sum_j F_{jy} \quad (3.33)$$

Здесь  $F_{jx}$  и  $F_{jy}$  – проекции на координатные оси внешних сил, действующих на тело,  $x_c$  и  $y_c$  – координаты центра масс (в поле сил тяжести – центра тяжести) тела.

Вращательная часть движения тела подчиняется векторному уравнению (3.31), проецируя которое на ось Oz, перпендикулярную плоскости движения тела и проходящую через его центр масс получим:

$$J_{zc} \frac{d\omega}{d\tau} = J_{zc} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \sum_j M_{zc}(\mathbf{F}_j) \quad (3.34)$$

Здесь моменты инерции и моменты внешних сил вычисляются относительно оси Oz.

Уравнения (3.33) и (3.34) называются **дифференциальными уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела**.

#### 4.9. Работа и мощность механических сил

Эффект действия сил на механические системы не ограничивается изменением их количества движения или кинетического момента. Другие характеристики сил – мощность и работа. **Мощность силы N** при ее действии на механическую систему определяется скалярным произведением силы на скорость точки ее приложения:

$$N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = FV \cos(\mathbf{F}, \mathbf{V}) \quad (3.35)$$

Если известны проекции силы и скорости на оси декартовой системы координат, то выражение для мощности силы можно представить в виде:

$$N = F_x V_x + F_y V_y + F_z V_z = F_x \frac{dx}{d\tau} + F_y \frac{dy}{d\tau} + F_z \frac{dz}{d\tau} \quad (3.36)$$

Здесь  $x$ ,  $y$  и  $z$  – координаты точки приложения силы.

Из предыдущих выражений следует, что мощность силы положительна, если угол между вектором силы и скорости острый. В этом случае сила оказывает разгоняющий эффект на твердое тело.

Наоборот, если угол между силой и скоростью тупой, то сила оказывает на тело замедляющее воздействие, и мощность силы отрицательна. Наконец, если сила перпендикулярна направлению скорости, то мощность силы равна нулю. Сила не имеет мощности и тогда, когда она приложена к неподвижной точке ( $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ). Размерностью мощностью, как это следует из ее определения, является ватт:  $\text{Н} \cdot \text{м} / \text{с} = \text{Вт}$ . Мощность является характеристикой силы в текущий момент времени.

Работа в отличие от мощности представляет собой интегральную характеристику силы, определяющую ее воздействие на тело в течение некоторого промежутка времени. **Работой силы  $A$**  за промежуток времени от  $\tau_1$  до  $\tau_2$  называется величина:

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} N d\tau \quad (3.37)$$

Если мощность в течение указанного промежутка времени остается постоянной, то работа силы равна произведению мощности на величину промежутка времени:  $A = N (\tau_2 - \tau_1)$ . Отсюда следует, что единицей измерения работы является джоуль:  $\text{Вт} \cdot \text{с} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$ . Работа, как и мощность, может принимать положительные, отрицательные, а также нулевые значения.

Рассмотрим бесконечно малый промежуток времени  $d\tau$ . За этот промежуток сила совершит работу, равную  $dA = N d\tau$ . Используя соотношение (3.35) можем записать:  $dA = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} d\tau$ . Заменим теперь вектор скорости с помощью соотношения (2.6). Тогда для элементарной работы  $dA$  получим выражение  $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Величина работы за промежуток времени от  $\tau_1$  до  $\tau_2$  может быть получена с помощью интегрирования элементарной работы:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.38)$$

Здесь  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  – радиусы-векторы точки приложения силы в моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответственно.

Выражение (3.38) для вычисления величины работы удобно использовать тогда, когда характер движения тела не известен, и мощность силы в каждый момент времени не может быть подсчитана. При этом зависимость силы  $\mathbf{F}$  от положения точки, к которой она приложена должна быть задана. В частности, если сила постоянна, а движение тела происходит по прямой, то работа определяется по следующей формуле, вытекающей из (3.38):

$$A = F s \cos (\mathbf{F}, \hat{\mathbf{V}}) \quad (3.39)$$

где  $s$  – пройденный телом путь.

Рассмотрим несколько примеров вычисления работы сил, которые часто встречаются при функционировании технологического оборудования.

**Работа силы тяжести.** Пусть тело массой  $m$  перемещается в поле силы тяжести. При этом на него действует направленная вертикально вниз постоянная по величине сила равная  $mg$  ( $g$  – ускорение свободного падения). Если  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  – радиусы-векторы, характеризующие положение центра тяжести тела в начальном и в конечном положении, то из соотношения (3.38) следует:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

Вектор  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$  соединяет начальное и конечное положение центра тяжести тела (рис. 3.4). Скалярное произведение этого вектора на вектор ускорения свободного падения  $\mathbf{g}$  равно перепаду высот  $h$  между начальным и конечным положением тела. Поэтому величина работы силы тяжести может быть представлена в виде:

$$A = \pm mgh \quad (3.40)$$

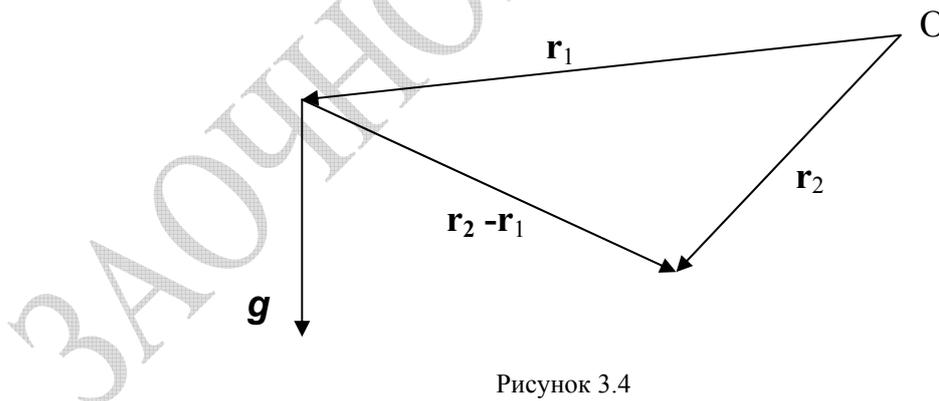


Рисунок 3.4

Знак «+» в полученном выражении (работа положительна) берется тогда, когда угол между векторами  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$  и  $\mathbf{g}$  острый, т. е. тело под действием силы тяжести движется вниз. Работа отрицательна (в выражении (3.40) выбирается знак «-»), если тело движется вверх, преодолевая действие силы тяжести.

**Работа сил во вращательном движении.** Пусть сила  $\mathbf{F}$  действует на твердое тело, которое вращается вокруг оси  $Oz$  с угловой

скоростью  $\omega$ . Вектор скорости  $\mathbf{V}$  точки приложения силы направлен по касательной к траектории в сторону движения точки, а по величине он равен  $\omega h$ , где на сей раз  $h$  – расстояние от точки приложения силы до оси вращения. В определении мощности (3.35) произведение  $F \cos(\mathbf{F}, \hat{\mathbf{V}})$  есть не что иное, как проекция силы  $\mathbf{F}$  на направление касательной  $F_m$ . Следовательно, величину мощности при вращательном движении определяет только касательная составляющая силы. При этом мощность равна:  $N = F_m \omega h$ . Но произведение  $F_m h$  равно моменту силы  $\mathbf{F}$  относительно оси Oz. Поэтому мощность может быть вычислена с помощью формулы:

$$N = \pm M_z(\mathbf{F})\omega \quad (3.41)$$

Знак в этом выражении выбирается в зависимости от того, является ли сила разгоняющей или замедляющей.

Если на тело действует не одиночная сила, а пара сил с моментом  $M$ , то выражение (3.41) сохранит свой вид, только вместо момента силы  $M_z(F)$  следует подставить момент пары  $M$ .

По известной мощности работу силы за промежуток времени от  $\tau_1$  до  $\tau_2$  можно найти по формуле (3.37):

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} N d\tau = \pm \int_{\tau_1}^{\tau_2} M_z(\mathbf{F})\omega d\tau = \pm \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\mathbf{F})d\varphi \quad (3.42)$$

Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – значения угла поворота тела, соответствующие моментам времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Если во время вращения момент силы остается постоянным, то предыдущая формула упрощается:

$$A = \pm M_z(\mathbf{F})(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm M_z(\mathbf{F})\Delta\varphi, \quad (3.43)$$

т. е. *работа крутящего момента равна произведению его величины на угол поворота*. Знак выбирается из тех же соображений, что и в соотношении (3.41).

**Работа силы упругости.** Как уже отмечалось, сила упругости пропорциональна расстоянию  $x$  до некоторой фиксированной точки  $O$  (обычно она соответствует положению упругого элемента в недеформированном состоянии):  $F = -cx$ . Пусть в момент времени  $\tau_1$  упругий элемент занимал положение  $x_1$ , а в момент времени  $\tau_2$  – положение  $x_2$ . Воспользуемся формулой (3.38). В рассматриваемом случае она примет вид:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (-cx) dx = -c(x_2^2 - x_1^2)/2 = c(x_1^2 - x_2^2)/2 \quad (3.44)$$

Таким образом, работа силы упругости пропорциональна коэффициенту жесткости и разности квадратов координат начального и конечного положения упругого элемента. Если упругий элемент удаляется от нейтрального недеформированного положения ( $|x_2| > |x_1|$ ), то работа силы упругости отрицательна. В противном случае – положительна.

### 3.10. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы

Понятие механической энергии является одним из центральных понятий механики. Из курса физики известно, что энергия может существовать в различных видах. Для движущихся механических систем основной вид энергии – кинетическая энергия.

**Кинетическая энергия  $T$  материальной точки**, обладающей массой  $m$  и скоростью  $V$ , равна:

$$T = \frac{mV^2}{2} \quad (3.45)$$

**Кинетическая энергия механической системы**, состоящей из  $N$  материальных точек, равна сумме их кинетических энергий:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i V_i^2}{2} \quad (3.46)$$

Из определения кинетической энергии следует, что ее размерностью является джоуль:  $\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$ . Кроме того, в отличие от работы она не может быть отрицательной.

Для твердых тел последнюю сумму следует заменить интегрированием по всему объему тела  $D$ :

$$T = \int_D \frac{V^2}{2} dm = \int_D \rho \frac{V^2}{2} dD \quad (3.47)$$

Здесь  $\rho$  - плотность (масса единицы объема) вещества, из которого состоит твердое тело.

Приведенные общие формулы для расчета кинетической энергии существенно упрощаются для типовых видов движения твердого тела. Так, при поступательном движении, как известно из кинематики, все точки тела обладают одинаковой скоростью. Поэтому функция, стоящая под знаком интеграла в (3.47), постоянна и может быть вынесена за знак интегрирования. Оставшийся интеграл равен объему тела. Следовательно, величина кинетической энергии при поступательном движении тела может быть рассчитана по формуле:

$$T = \rho \frac{V^2}{2} \int_D dD = \rho D \frac{V^2}{2} = m \frac{V^2}{2} = m \frac{V_C^2}{2} \quad (3.48)$$

Здесь учтено, что произведение плотности на объем тела равно его массе, а в качестве скорости использована скорость центра масс тела, поскольку она такая же, как и скорость любой другой точки. Таким образом, при поступательном движении тела его кинетическая энергия рассчитывается по формуле аналогичной формуле (3.45) для кинетической энергии материальной точки.

Рассмотрим теперь вращательное движение твердого тела (рис. 3.3). Бесконечно малый элемент, находящийся на расстоянии  $h = \sqrt{x^2 + y^2}$  от оси вращения, имеет скорость, равную  $\omega h$ . Тогда, согласно (3.47), имеем:

$$T = \int_D \frac{V^2}{2} dm = \int_D \frac{\omega^2 h^2}{2} dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_D (x^2 + y^2) dm = \frac{J_z \omega^2}{2}, \quad (3.49)$$

где использовано выражение (3.25) для момента инерции тела относительно оси вращения. Полученное соотношение показывает, что при поступательном и вращательном движениях кинетическая энергия тела вычисляется схожим образом (формулы (3.48) и (3.49)). Аналогия, отмеченная при анализе количественных характеристик поступательного и вращательного движений, сохраняется и здесь.

При плоскопараллельном движении твердого тела его полная кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного и кинетической энергии вращательного движения вокруг полюса. Если в качестве полюса вновь выбрать центр масс твердого тела, то для вычисления полной кинетической энергии при этом виде движения следует объединить соотношения (3.48) и (3.49):

$$T = m \frac{V_C^2}{2} + \frac{J_z \omega^2}{2} \quad (3.50)$$

Здесь  $J_z$  – момент инерции твердого тела относительно оси перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс.

Выясним теперь, за счет чего может измениться величина кинетической энергии механической системы. Для этого рассмотрим сначала одну материальную точку. Движение материальной точки подчиняется уравнению (3.1):  $m \mathbf{W} = \mathbf{F}$ , где  $\mathbf{F}$  – равнодействующая всех сил, действующих на точку. Домножим обе части этого уравнения скалярно на вектор скорости точки:

$$m \mathbf{W} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}.$$

Правая часть полученного равенства, согласно (3.35), равна мощности  $N$  сил, действующих на точку. Левая часть может быть преобразована следующим образом:

$$m \mathbf{W} \cdot \mathbf{V} = m \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{mV^2}{2} \right) = \frac{dT}{d\tau}$$

Следовательно, производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна алгебраической сумме мощностей всех сил, действующих на точку (или мощности их равнодействующей):

$$\frac{dT}{d\tau} = N \quad (3.51)$$

В случае механической системы, состоящей из  $n$  материальных точек, предыдущее утверждение справедливо для каждой из точек:

$$\frac{dT_i}{d\tau} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Просуммируем левые и правые части всех этих равенств. Тогда слева, согласно (3.46), получим полную кинетическую энергию механической системы, а справа – сумму мощностей всех действующих в системе сил:

$$\frac{dT}{d\tau} = \sum_{i=1}^n N_i \quad (3.52)$$

Следовательно, производная по времени от кинетической энергии механической системы равна алгебраической сумме мощностей

всех сил, действующих в системе. Это означает, что скорость изменения кинетической энергии определяется величиной мощности всех сил, вызывающих движение.

Соотношение (3.52) справедливо для данного момента времени. Если требуется установить, насколько изменилась кинетическая энергия тела за некоторый конечный промежуток времени от  $\tau_1$  до  $\tau_2$ , то предыдущее равенство нужно проинтегрировать по времени в пределах указанного промежутка:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dT}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^n N_i d\tau$$

В правой части этого соотношения, согласно (3.37), получим алгебраическую сумму работ всех действующих на тело сил, а в левой части – изменение полной кинетической энергии тела за промежуток времени ( $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ):  $\Delta T = T(\tau_2) - T(\tau_1)$ . Таким образом, *изменение кинетической энергии механической системы за некоторый конечный промежуток времени равно алгебраической сумме работ всех сил*:

$$T(\tau_2) - T(\tau_1) = \sum_j A_j \quad (3.53)$$

Сформулированное утверждение является одним из наиболее важных в механике, поскольку оно справедливо для любого вида движения твердого тела.

В качестве иллюстрации эффективности использования энергетического подхода рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется определить силу натяжения каната подъемной машины в начальный момент подъема груза, когда он приходит в движение из состояния покоя (рис. 3.5). Будем считать известными массу груза  $m$ ,

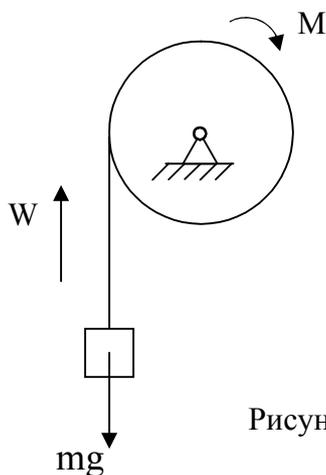


Рисунок 3.5

момент инерции барабана  $J$  и его радиус  $R$ , а также величину вращающего момента  $M$ , приложенного к подъемному барабану.

Решение. Полная кинетическая энергия системы «барабан-груз» в любой момент времени складывается из кинетической энергии груза и кинетической энергии барабана. Груз движется поступательно, его кинетическая энергия определяется соотношением (3.48). Кинетическая энергия вращающегося барабана вычисляется с помощью формулы (3.49). Следовательно, полная кинетическая энергия  $T$  системы равна:

$$T = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{1}{2} \left( m + \frac{J}{R^2} \right) V^2$$

Здесь использовано соотношение (2.24), связывающее линейную скорость  $V$  при вращательном движении с угловой скоростью  $\omega$ .

Воспользуемся равенством (3.52) для скорости изменения кинетической энергии. Левая часть этого равенства в условиях рассматриваемой задачи равна:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{2} \left( m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot 2V \frac{dV}{d\tau} = \left( m + \frac{J}{R^2} \right) VW \quad (3.54)$$

Определим теперь сумму мощностей всех сил, действующих в системе «барабан-груз». К указанным усилиям относятся вес груза, вращающий момент, вес барабана и опорная реакция. Две последние силы мощности не имеют, поскольку приложены к неподвижным точкам. Найдем мощности веса груза и вращающего момента. Вес груза, согласно (3.35), имеет мощность  $N = -mgV$ . Знак минус учитывает то обстоятельство, что сила веса направлена в сторону, противоположную направлению движения. Вращающий момент, согласно (3.41), имеет мощность  $N = M\omega = MV/R$ . Сумма мощностей будет, таким образом, равна:

$$\sum_j N_j = -mgV + \frac{MV}{R} = \left( \frac{M}{R} - mg \right) V.$$

Приравнивая полученный результат и правую часть (3.54), для ускорения груза имеем:

$$W = \left( \frac{M}{R} - mg \right) / \left( m + \frac{J}{R^2} \right).$$

В соответствии с принципом Даламбера (параграф 3.3) натяжение каната равно сумме веса груза и силы инерции:  $(mg + mW) = mg(1 + W/g)$ . Отсюда видно, что влияние силы инерции определяется величиной ускорения груза по сравнению с величиной ускорения свободного падения.

### 3.11. Динамика простейших колебательных систем

Колебательные движения играют огромную роль при эксплуатации химического оборудования. Чаще всего инженер-технолог сталкивается с частным видом колебаний – вибрациями (колебания с малой амплитудой, но большой частотой). С точки зрения работоспособности технологических машин и аппаратов вибрации крайне нежелательны, поскольку оборудование при этом испытывает переменные во времени циклические нагрузки. Большинство конструкционных материалов сопротивляется таким нагрузкам гораздо хуже, чем статическим.

В параграфе 3.2. уже рассматривалось колебательное движение материальной точки, но проведенный анализ был неполным и привел к результату, противоречащему практике. Причина противоречия заключалась в том, что анализ не учитывал сил сопротивления. Любая реальная колебательная система состоит из нескольких обязательных составляющих: упругого элемента, источника вынуждающей силы, инерционного элемента (принципиальная схема простейшей колебательной системы приведена на рис. 3.6). Упругий элемент порождает появление упругой силы  $F_{упр}$ , которая, как уже отмечалось ранее, в любой момент времени направлена в сторону нейтрального недеформированного положения, и величина которой пропорциональна расстоянию до него. Вынуждающая сила  $F(\tau)$  является внешней причиной колебаний. Она, как правило, периодически меняется во времени. Инерционный элемент определяется массой колебательной системы  $m$ . Он вызывает появление сил инерции.

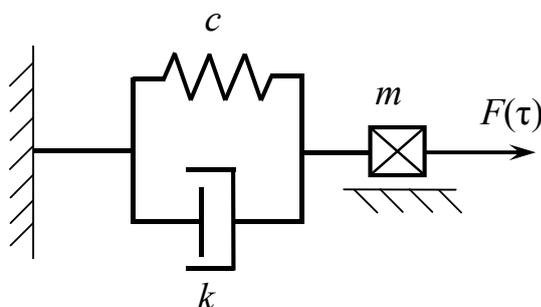


Рисунок 3.6

В реальных колебательных системах, помимо перечисленных сил, всегда существуют силы, препятствующие поддержанию движения. Это силы трения и силы гидравлического сопротивления. Если колебания элементов оборудования особенно нежелательны, то в конструкции вводятся специальные устройства, предназначенные для демпфирования (подавления) колебаний. В любом случае сила сопротивления  $F_{\text{сопр}}$  пропорциональна скорости движения колеблющегося тела и направлена в сторону, противоположную направлению движения.

Приведенные предварительные замечания позволяют перейти к описанию поведения колебательных систем. Основой описания является уравнение движения (3.17), в котором за центр масс принят центр масс колеблющегося тела. Пусть движение происходит в горизонтальном направлении вдоль координатной оси  $Ox$ . Совместим начало координат с положением центра масс при нейтральном состоянии колебательной системы и спроектируем уравнение на координатную ось. При этом проекция силы тяжести инерционного элемента будет равна нулю. В результате получим:

$$m \frac{d^2 x_C}{d\tau^2} = F(\tau) + F_{\text{сопр}} + F_{\text{упр}}$$

Сила сопротивления с учетом сделанных замечаний может быть выражена соотношением:  $F_{\text{сопр}} = k V = -k \frac{dx_C}{d\tau}$  ( $k$  – коэффициент сопротивления), а сила упругости пропорциональна координате  $x$ :  $F_{\text{упр}} = -c x$  ( $c$  – коэффициент упругости или жесткости). Вынуждающая сила при гармоническом характере внешних воздействий может быть аппроксимирована следующим выражением:  $F(\tau) = F_0 \sin \zeta \tau$ , где  $\zeta$  – частота колебаний возмущающей силы. Подставляя все выражения для сил в предыдущее уравнение, получим дифференциальное уравнение, описывающее движение центра масс простейшей колебательной системы:

$$m \frac{d^2 x_C}{d\tau^2} + k \frac{dx_C}{d\tau} + cx_C = F_0 \sin \zeta \tau. \quad (3.55)$$

Это уравнение сводится к уравнению свободных незатухающих колебаний (3.5) при отсутствии вынуждающей силы ( $F_0 = 0$ ) и сопротивления движению ( $k = 0$ ). При этом инерционный элемент будет совершать колебания (3.6) с частотой  $\omega = \sqrt{\frac{m}{c}}$ , которая

называется **собственной частотой колебаний** колебательной системы.

Учет сил сопротивления в уравнении (3.55) в условиях отсутствия вынуждающей силы ( $k \neq 0$ ,  $F_0 = 0$ ) приведет к однородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$m \frac{d^2 x_c}{d\tau^2} + k \frac{dx_c}{d\tau} + cx_c = 0 \quad (3.56)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что общим решением этого уравнения является функция:

$$x_c(\tau) = e^{-\frac{k}{2m}\tau} (A_1 \cos \omega_1 \tau + A_2 \sin \omega_1 \tau) \quad (3.57)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – постоянные интегрирования, значения которых находятся из начальных условий,  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{k}{2m}\right)^2}$  – частота колебаний с учетом сил сопротивления. Функция (3.57) описывает затухающие колебания, поскольку множитель перед скобкой убывает с течением времени. Причем, при  $\tau \rightarrow \infty$  центр масс колеблющегося тела неограниченно приближается к началу координат, т. е. к положению равновесия. При этом чем большей инерционностью обладает колебательная система, тем медленнее происходит затухание колебаний. Таким образом, влияние сил сопротивления проявляется двояко: в смещении частоты колебаний и в их полном подавлении с течением времени.

Рассмотрим теперь наиболее важный для практики случай, когда колебания обусловлены действием вынуждающей силы. Для простоты будем пренебрегать силой сопротивления, поскольку их эффект уже проанализирован. В этом случае общее уравнение (3.55) примет вид:

$$m \frac{d^2 x_c}{d\tau^2} + cx_c = F_0 \sin \zeta \tau \quad (3.58)$$

Из курса математики известно, что общим решением уравнений такого вида является сумма общего решения соответствующего однородного уравнения (с нулевой правой частью) и частного решения неоднородного. Общее решение однородного уравнения получено ранее. Оно задается соотношением (3.6). Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$\dot{x}_c = B \sin \zeta \tau \quad (3.59)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.58), после несложных преобразований убеждаемся, что функция (3.59) будет удовлетворять уравнению, если величина коэффициента  $B$  равна:

$$B = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \zeta^2)}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.58), описывающее закон движения центра масс колебательной системы при вынужденных колебаниях, будет иметь вид:

$$x_c(\tau) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \zeta^2)} \sin \zeta \tau + A_1 \sin \omega \tau + A_2 \cos \omega \tau \quad (3.60)$$

Из полученного решения видно, что вынужденные колебания складываются из двух движений: из **чисто вынужденных колебаний** (первое слагаемое в (3.60)) и из **сопровождающих колебаний** (второе и третье слагаемые). Чисто вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы, в то время как частота сопровождающих колебаний определяется свойствами самой колебательной системы. При совпадении указанных частот множитель в первом слагаемом обращается в бесконечность. В реальности с учетом сил сопротивления это означает, что амплитуда колебаний становится значительно больше, чем при несовпадении частот вынужденных и собственных колебаний. Это явление называется **резонансом**.

Достижение резонанса, как правило, приводит к разрушению механической системы. Поэтому при эксплуатации химического оборудования, когда возникают колебания некоторых его элементов, резонанса пытаются всячески избежать. Это можно сделать с помощью ряда мер, которые непосредственно подсказывает вид решения (3.60). Например, можно снизить амплитуду вынуждающей силы, уменьшив величину  $F_0$ , за счет улучшения балансировки движущихся узлов оборудования. Иногда удается избежать резонанса путем изменения собственной частоты системы. Поскольку

собственная частота равна  $\omega = \sqrt{\frac{m}{c}}$ , это можно сделать, изменив

массу колеблющихся элементов оборудования или жесткость упругих элементов. Еще один путь – установка специальных демпферов, гасящих колебания.

### 3.12. Контрольные вопросы

1. Что изучает динамика ?
2. В чем состоят первая и вторая задачи динамики ?
3. В чем смысл первой аксиомы динамики ?
4. Сформулируйте основной закон механики.
5. Запишите дифференциальное уравнение движения материальной точки.
6. Запишите дифференциальное уравнение движения материальной точки в естественных осях.
7. Что такое сила инерции и от чего зависит ее величина ?
8. Сформулируйте принцип Даламбера. В чем состоит его смысл ?
9. Чему равны нормальная и касательная составляющие силы инерции для вращающегося тела ?
10. Что такое центр масс механической системы ?
11. Как вычисляется скорость и ускорение центра масс ?
12. Запишите дифференциальное уравнение поступательного движения твердого тела.
13. Что такое количество движения механической системы ?
14. Сформулируйте теорему об изменении количества движения механической системы.
15. Как определяется импульс силы за некоторый промежуток времени ?
16. В чем состоит содержание теоремы импульсов ?
17. Могут ли внутренние силы, действующие в механической системе, изменить ее количество движения ?
18. Как определяется момент инерции механической системы и твердого тела относительно некоторой оси ?
19. Что такое момент количества движения механической системы ?
20. Существует ли аналогия между количественными характеристиками поступательного и вращательного движения ?
21. За счет чего может измениться кинетический момент механической системы ?
22. Запишите дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.
23. Запишите дифференциальное уравнение плоскопараллельного движения твердого тела.
24. Как определяется мощность силы ? От чего она зависит ?
25. Как определяется работа силы за некоторый промежуток времени ?
26. Могут ли мощность и работа силы принимать отрицательные значения ?
27. Чему равна работа сил при вращении твердого тела ?
28. Чему равна работа силы тяжести ?
29. Что такое кинетическая энергия механической системы ?

30. Чему равна кинетическая энергия при поступательном движении твердого тела ?
31. Чему равна кинетическая энергия при вращательном движении ?
32. За счет чего может измениться кинетическая энергия механической системы ?
33. Чему равно изменение кинетической энергии механической системы за некоторый промежуток времени ?
34. Какие элементы включает простейшая колебательная система ?
35. Какие силы учитываются при анализе колебательных систем ?
36. Запишите дифференциальное уравнение движения центра масс колебательной системы.
37. Что такое резонанс, в чем он выражается ?

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Глава 4. Основные понятия теории механизмов и машин

4.1. Составные части механизмов

Важнейшей областью применения положений теоретической механики является теория механизмов и машин. В этой дисциплине изучаются кинематические и силовые свойства отдельных типовых механизмов, которые широко применяются в химическом машиностроении.

В общем случае конкретный механизм представляет собой совокупность связанных между собой тел, совершающих определенные движения. Таким образом, в отличие от теоретической механики здесь изучается движение не отдельного единичного абсолютно твердого тела, а системы взаимосвязанных тел. С другой стороны, цели этих дисциплин во многом одинаковы – определение кинематических и динамических характеристик в зависимости от геометрических параметров и действующих на механизмы внешних сил.

Большинство технических устройств включает в себя те или иные механизмы. В современном автомобилестроении, например, широко используются промышленные роботы для выполнения операций штамповки, сварки, окраски. Базовыми элементами таких роботов являются механизмы. Другим типичным примером работы механизмов могут служить манипуляторы – устройства, воспроизводящие движения человеческой руки. В химической аппаратуре механизмы также встречаются весьма часто.

Теория механизмов и машин – наука об общих методах исследования свойств механизмов и машин и проектирования их схем. Она является важнейшей составной частью общепромышленной подготовки студентов и служит необходимой ступенью к освоению курсов по деталям машин и основам расчета и конструирования химического оборудования. Сформулируем важнейшие определения и понятия теории механизмов и машин.

**Механизмом** называют систему тел, предназначенных для преобразования движения одного или нескольких твердых тел в требуемые движения других твердых тел. Под требуемыми движениями понимаются движения с определенными траекториями, кинематическими и динамическими характеристиками, совокупность которых обеспечивает выполнение той или иной технологической операции. По своему функциональному назначению механизмы могут быть исполнительными, передаточными, транспортными для перемещения рабочих сред и питания технологических аппаратов и т. д.

Под твердыми телами, составляющими механизмы, чаще всего понимаются абсолютно твердые тела, так же как и в теоретической механике. Однако в некоторых случаях при анализе механизмов могут рассматриваться деформируемые и даже гибкие тела (например, ремни в ременных передачах). Более того, на практике широко используются механизмы, в которых участвуют жидкие или газообразные среды. Такие механизмы называются гидравлическими или пневматическими соответственно.

**Машиной** называют *устройство, совершающее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации*. В зависимости от того, какой вид преобразования является основным, различают машины технологические, энергетические, транспортные, информационные. В технологических машинах исходные материалы (сырье) преобразуется в промежуточные или конечные продукты. При этом обрабатываемый материал (рабочая среда) может находиться в твердом, жидком или газообразном состоянии. В качестве примеров технологических машин в химической технологии можно указать сепараторы, центрифуги, экструдеры, компрессоры и т. п. В других областях промышленности под понятие технологической машины подпадают металлообрабатывающие станки, прокатные станы, фасовочные и упаковочные машины, ткацкие станки и т. д.

Энергетические машины преобразуют любой вид энергии в механическую энергию и наоборот. Примерами таких машин являются электродвигатели, двигатели внутреннего сгорания, электрогенераторы. К транспортным машинам следует отнести транспортеры, конвейеры, подъемники и другие устройства, которые служат для перемещения рабочих сред или некоторых объектов. Следовательно, к ним также относятся автомобили, тепловозы, самолеты, словом, любые транспортные средства.

Как правило, механизмы являются частью машин и служат для преобразования движения, источником которого служит двигатель. Кроме механизмов, в состав машин могут входить дополнительные устройства для контроля, блокировки и управления. В некоторых случаях в машинах могут отсутствовать механизмы, например, технологические машины, исполнительные органы которых соединены непосредственно с двигателем без промежуточного преобразования параметров его движения.

Механизмы, в свою очередь, также являются составными системами. Все они состоят из отдельных деталей, которые могут быть как подвижными, так и неподвижными. **Звеном механизма** называют *твердое тело, входящее в состав механизма*. При этом звено может состоять из нескольких деталей, т.е. отдельно изготавливаемых частей, не имеющих между собой относительного движения. Например, шатун двигателя представляет собой одно звено, хотя состоит из нескольких деталей. Колесо автомобиля также

является одним звеном, поскольку взаимное расположение его деталей (обода, втулки, крышки, крепежа) не меняется при движении автомобиля.

*Звено, принимаемое за неподвижное, называют **стойкой***. Так, все детали, жестко связанные с корпусом неподвижного технологического аппарата, образуют стойку. Если корпус аппарата перемещается в пространстве (например, барабанный вакуум-фильтр), то указанные детали относительно барабана останутся неподвижными и тоже могут быть приняты в качестве стойки.

Таким образом, любой механизм представляет собой совокупность одного неподвижного звена (стойки) и нескольких подвижных звеньев. Подвижные звенья соединены с неподвижным звеном и друг с другом так, что каждое звено может двигаться относительно других звеньев.

**Входным звеном** (или сокращенно «**входом**») *называют звено, которому сообщается первоначальное движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев. Выходным звеном* (или сокращенно «**выходом**») *называют звено, совершающее движение, которое определяет назначение механизма. Все остальные звенья механизма именуют соединительными или промежуточными.*

Чаще всего механизм имеет один вход и один выход. Входному звену сообщается движение непосредственно от двигателя, выходное звено соединяется с исполнительным органом машины или аппарата. На практике иногда встречаются механизмы, имеющие несколько входов и выходов. К примеру, в механизме автомобильного дифференциала один вход, получающий вращательное движение от двигателя, и два выхода, по одному на каждое из двух ведущих колес.

Положение отдельного звена механизма в произвольный момент времени может быть задано значением некоторых параметров (координат). Часть этих параметров зависит от значения других, поскольку звенья механизма связаны между собой, и положение одного звена определяет положение соседних звеньев. Другую часть параметров можно рассматривать как независимую. Очевидно, что совокупность значений независимых координат будет определять положение всех звеньев механизма.

*Каждая из независимых координат, определяющих положение всех звеньев механизма относительно стойки, называется обобщенной координатой механизма. Тогда число независимых обобщенных координат, которые необходимы для однозначного определения положения всех звеньев механизма относительно стойки, называют числом степеней свободы механизма или подвижностью механизма.*

*Звено, положение которого определяется одной или несколькими обобщенными координатами, носит название начального звена. Если механизм обладает одной степенью свободы, то одному из*

звеньев механизма (начальному звену) можно задать конкретный закон движения, т. е. зависимость обобщенной координаты от времени. Тогда все остальные звенья получат вполне определенные движения, зависящие от закона движения начального звена. Если механизм обладает двумя степенями свободы, то две обобщенные координаты будут полностью определять характер движения всех звеньев механизма и т. д.

Следующие понятия касаются не единичных, а двух соединенных между собой звеньев. Из сказанного выше следует, что способ их соединения допускает относительное движение, которое может носить различный характер. В любом случае *подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называют кинематической парой*. Относительное движение звеньев в кинематической паре может иметь поступательный, вращательный или более сложный характер. Звенья могут соприкасаться по поверхности, по линии, в одной или нескольких точках.

**Элементом кинематической пары** называют *совокупность поверхностей, линий и отдельных точек звена, по которым оно может соприкасаться с другим звеном, образуя с ним кинематическую пару*. При этом к **низшим кинематическим парам** относят такие пары, в которых требуемое относительное движение звеньев может быть получено при постоянном соприкосновении их элементов по поверхности. Если требуемое относительное движение звеньев в паре происходит при постоянном соприкосновении ее элементов только по линии или в отдельных точках, то пару относят к разряду **высших кинематических пар**. Из приведенных определений с очевидностью вытекают несколько практически важных следствий. Во-первых, в низших кинематических парах износ деталей значительно меньше, чем в высших кинематических парах. Зато энергетические потери на трение у первых будут гораздо больше.

Работоспособность и надежность механизмов (а значит, и машин) во многом определяются выбором элементов кинематических пар, поскольку через них передаются усилия от входного звена посредством промежуточных звеньев к выходному звену. Кроме того, вследствие относительного движения звеньев в кинематических парах возникают силы трения. Следовательно, элементы кинематических пар при работе механизма постоянно находятся в напряженном состоянии и одновременно подвергаются износу. Отсюда становится понятным огромное значение правильного выбора геометрической формы и размера элементов кинематических пар, а также конструкционных материалов при изготовлении звеньев и подбора смазки при проектировании механизмов.

Кинематические пары принято классифицировать также по **характеру относительного движения звеньев**, образующих пару. Так, различают поступательные, вращательные, винтовые пары.

Другой способ классификации связан с **числом связей** (ограничений), наложенных на возможные перемещения звеньев. Как известно из теоретической механики, для твердого тела, свободно перемещающегося в пространстве, число степеней свободы равно шести: три возможных поступательных перемещения вдоль неподвижных осей координат и три возможных вращательных перемещения относительно каждой из этих осей. Для каждого из двух звеньев, образующих кинематическую пару, число степеней свободы в их относительном движении всегда меньше шести, поскольку условие постоянного соприкосновения звеньев уменьшает число возможных перемещений, по крайней мере, на единицу.

**Классом кинематической пары** называют число связей, накладываемых кинематической парой на характер относительного движения звеньев, образующих эту пару. Очевидно, класс кинематических пар может принимать значения от 1 до 5. В случае если на звенья наложено 6 связей, то они теряют относительную подвижность, и кинематическая пара приобретает свойства жесткого соединения двух звеньев. Одновременно все кинематические пары можно подразделить по числу степеней свободы звеньев на одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижные. Нетрудно видеть, что степень подвижности  $w$  и класс  $s$  кинематической пары связаны простым соотношением:

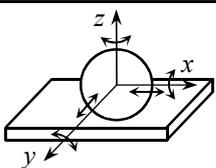
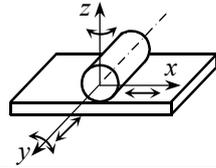
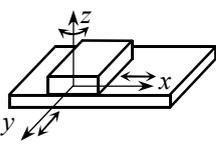
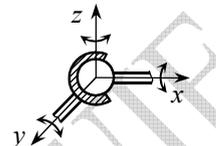
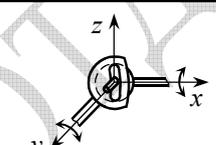
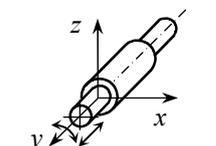
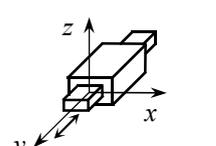
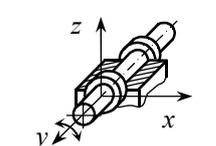
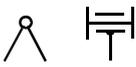
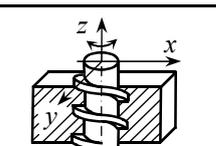
$$s = 6 - w \quad (4.1)$$

В таблице 4.1 приведены наиболее распространенные кинематические пары, их название, класс и условное обозначение.

Система звеньев, связанных между собой кинематическими парами, образует **кинематическую цепь**. Кинематические цепи могут быть простыми и сложными. Под **простой кинематической цепью** понимают такую, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары. В **сложной кинематической цепи**, по крайней мере, одно звено входит более чем в две кинематические цепи. Кинематические цепи делятся также на замкнутые и незамкнутые. В **замкнутой цепи** звенья образуют один или несколько замкнутых контуров. **Незамкнутая цепь** такого контура не образует, и в ней обязательно есть звенья, которые входят только в одну кинематическую пару.

С учетом введенных понятий и определений *механизм можно рассматривать как кинематическую цепь, в которой при заданном движении входного звена относительно стойки движение всех остальных звеньев (включая выходное звено) однозначно определено.*

Таблица 4.1 – Классификация, виды и условные обозначения кинематических пар

Класс пары	Число условий связи	Число степеней свободы	Название пары	Изображение пары	Виды движений	Условное обозначение
1	1	5	Шар – плоскость		ВВВП	
2	2	4	Цилиндр – плоскость		ВВП	
3	3	3	Плоскостная		ВП	
3	3	3	Сферическая		ВВВ	
4	4	2	Сферическая с прорезью и пальцем		ВВ	
4	4	2	Цилиндрическая		ВП	
5	5	1	Поступательная		П	
5	5	1	Вращательная		В	
5	5	1	Винтовая		В	

Примечания: 1 В таблице обозначено: В – вращательное движение; П – поступательное движение. 2 Кроме указанных в таблице могут быть другие виды кинематических пар: а) второго класса – ВВП; б) третьего класса – ВП. 3 Кинематические пары видов: первого класса – ВВП, второго класса – ВП, третьего класса – П, четвертого класса – П не существуют.

Используя понятия кинематических пар и кинематических цепей, можно говорить о **структурной схеме механизма**, под которой понимают *условное графическое изображение механизма, включая стойку, все подвижные звенья, все кинематические пары и их взаимное расположение без использования масштаба*. Структурная схема, таким образом, несет информацию о числе звеньев и характере их соединения друг с другом, числе и классе кинематических пар. Однако на движение промежуточных и выходных звеньев существенное влияние оказывают размеры звеньев и форма их кинематических элементов. Если структурную схему дополнить информацией о размерах каждого звена и форме элементов всех кинематических пар, то говорят о **кинематической схеме механизма**. Ее строят в выбранном масштабе с точным соблюдением формы элементов кинематических пар и размеров всех звеньев, без учета которых невозможно определение положения, скорости и ускорения отдельных точек звеньев механизма. Построение кинематической схемы механизма является первым этапом его изучения.

#### 4.2. Основные типы плоских механизмов

При дальнейшем изложении ограничимся анализом плоских механизмов, которые, с одной стороны, широко используются на практике, а с другой – не требуют сложного математического аппарата при своем изучении. К **плоским механизмам** относятся те, при работе которых все их звенья совершают движение в одной или нескольких параллельных плоскостях. В противном случае механизм называется пространственным.

Особую роль среди плоских механизмов играют рычажные и шарнирные. **Рычажным механизмом** называют механизм, все звенья которого образуют между собой только вращательные и поступательные кинематические пары. В **шарнирных механизмах** все звенья образуют только вращательные кинематические пары.

В зависимости от характера своего движения звенья плоских механизмов носят общепринятые названия. Так, вращающееся звено, совершающее полный оборот вокруг неподвижной оси, называется **кривошипом**. Если некоторое звено при работе механизма вращается вокруг неподвижной оси, но не совершает полного оборота, то оно называется **коромыслом**. **Ползуном** принято называть звено, образующее поступательную кинематическую пару со стойкой. Звено рычажного механизма, образующее со стойкой вращательную или поступательную кинематическую пару и одновременно образующее поступательную пару с другим подвижным звеном, называется **кулисой**. Последнее звено называется либо **камнем**, либо **направляющей**. Камень – звено, имеющее меньшую протяженность элемента поступательной пары, и направляющая –

звено, имеющее большую протяженность элемента поступательной пары.

На рис. 4.1 приведены в качестве примера структурные схемы типовых плоских рычажных и шарнирных механизмов, состоящих из перечисленных выше звеньев. Все представленные механизмы являются четырехзвенными. Кривошипно-ползунный механизм (структурная схема 4.1, а) включает кривошип 1, образующий со стойкой 4 вращательную низшую пару 5-го класса, шатун 2, образующий с соседними звеньями также низшие вращательные пары 5-го класса, и ползун 3, образующий со стойкой низшую поступательную пару также 5-го класса. Ось направляющей  $\alpha\beta$  может проходить ( $l = 0$ ) или не проходить ( $l \neq 0$ ) через ось вращения кривошипа. В первом случае механизм называют центральным, а во втором – дезаксиальным. Кривошипно-ползунный механизм используется всякий раз, когда поступательное движение необходимо преобразовать во вращательное (например, в поршневом двигателе) или наоборот (например, в поршневом компрессоре).

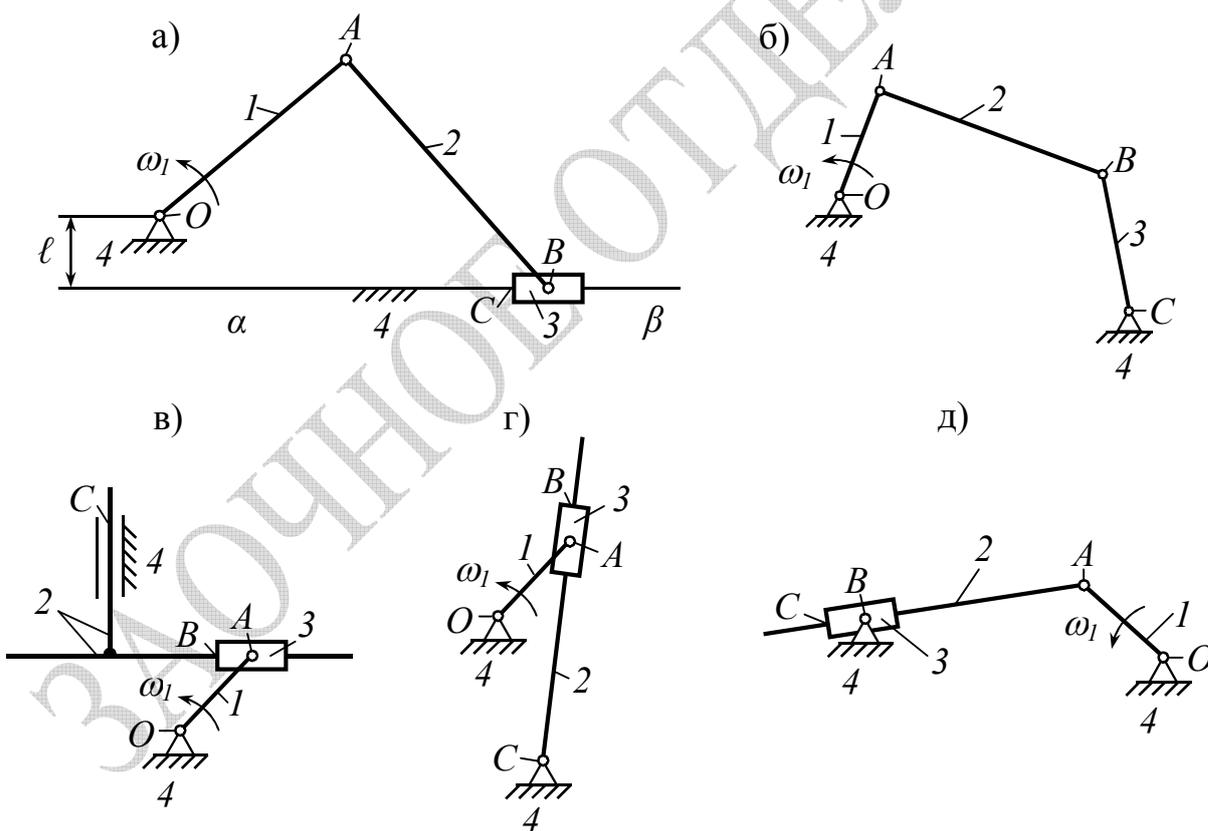


Рисунок 4.1

На рис. 4.1, б представлен шарнирный четырехзвенник, в котором все звенья связаны друг с другом вращательными парами. В зависимости от соотношения между длинами подвижных звеньев звенья 1 и 3 могут быть кривошипами, совершая полный оборот вокруг

опор  $O$  и  $C$  (двухкривошипный механизм) или коромыслами, если полный оборот звеньев не совершается (двухкоромысловый механизм). Возможны случаи, когда одно из вращающихся звеньев делает полный оборот, а другое нет (кривошипно-коромысловый механизм).

На рис. 4.1, в, 4.1, г и 4.1, д приведены структурные схемы кулисных механизмов с различными вариантами движения кулисы. Кулиса 2 может совершать поступательное движение относительно стойки 4 (рис. 4.1, в), образуя поступательные кинематические пары со стойкой 4 и камнем 3. На рис. 4.1, г и 4.1, д изображены структурные схемы механизмов с вращающимися кулисами 2, образующими поступательные кинематические пары с камнем и направляющей соответственно.

### 4.3. Структурная формула плоской кинематической цепи

Структурная схема кинематической цепи позволяет определить значение важнейшей ее характеристики – числа степеней свободы (или ее подвижности). Соотношение для расчета подвижности кинематической цепи называется **структурной формулой**. Выведем ее для произвольной плоской цепи, в которой имеется  $n$  подвижных звеньев.

При плоском движении число степеней свободы любого твердого тела равно трем: два возможных поступательных перемещения вдоль неподвижных осей координат и одно возможное вращательное перемещение в плоскости движения. На каждое звено плоской кинематической цепи может быть наложены либо одна, либо две связи. Следовательно, плоские цепи включают кинематические пары только 5-го и 4-го классов. На звенья, входящие в пару 5-го класса, наложено по две связи, на звенья, входящие в пару 4-го класса, – по одной связи. Если число пар 4-го класса равно  $p_4$ , а число пар 5-го класса равно  $p_5$ , то общее число ограничений на перемещения всех звеньев будет  $p_4 + 2p_5$ . Таким образом, число степеней свободы  $w$  кинематической цепи или механизма (подвижность) с  $n$  подвижными звеньями может быть вычислено по формуле:

$$w = 3n - p_4 - 2p_5 . \quad (4.2)$$

Нетрудно видеть, что все механизмы, приведенные на рис. 4.1, обладают подвижностью равной единице:  $w = 1$ . Действительно, число подвижных звеньев в каждом из механизмов  $n = 3$ , число кинематических пар 4-го класса  $p_4 = 0$ , число кинематических пар 5-го класса  $p_5 = 4$ . Тогда формула (4.2) дает:

$$w = 3 \cdot 3 - 0 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Структурную формулу для плоских кинематических цепей и механизмов (4.2) иногда называют **формулой Чебышева**. Она легко обобщается на случай пространственной кинематической цепи. Если обозначить через  $p_1$  число кинематических пар 1-го класса в пространственной цепи, через  $p_2$  число пар 2-го класса, через  $p_3$  число пар 3-го класса и т. д., то подвижность кинематической цепи, состоящей из  $n$  подвижных звеньев, определяется с помощью соотношения:

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (4.3)$$

Это соотношение принято называть **структурной формулой кинематической цепи общего вида**. В отечественной литературе ее именуют также **формулой Сомова - Малышева**. Структурные формулы (4.2) и (4.3) позволяют легко найти число обобщенных координат плоского или пространственного механизма, необходимое для однозначного определения положения всех звеньев в произвольный момент времени. С помощью этих же формул несложно найти подвижность произвольной кинематической цепи.

Как уже отмечалось, в плоских механизмах могут участвовать кинематические пары только 4-го и 5-го классов. При этом те и другие могут быть как низшими, так и высшими. Оказывается, что высшие пары можно заменять кинематическими цепями или звеньями, входящими в низшие поступательные или вращательные пары 5-го класса. Такая замена, как правило, значительно облегчает изучение структуры и кинематики механизмов. Важно, чтобы **замещающий механизм** был эквивалентен исходному механизму в том смысле, чтобы он обладал той же степенью подвижности, а его звенья совершали бы те же движения относительно друг друга.

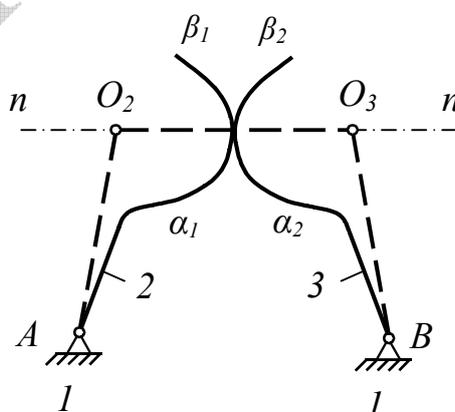


Рисунок 4.2

В качестве примера рассмотрим механизм, приведенный на рис. 4.2. Элементами кинематической пары звеньев 2 и 3 служат кривые

$\alpha_1 \beta_1$  и  $\alpha_2 \beta_2$ , которые в каждый момент времени касаются друг друга в некоторой общей точке. Поэтому кинематическая пара является высшей и относится к 4-му классу. Две другие пары указанных звеньев со стойкой относятся к 5-му классу. Подвижность механизма, очевидно, равна:

$$w = 3n - p_4 - 2p_5 = 3 \cdot 2 - 1 - 2 \cdot 2 = 1.$$

При построении структурной схемы заменяющего механизма проведем нормаль к кривым  $\alpha_1 \beta_1$  и  $\alpha_2 \beta_2$  в точке их касания. На этой нормали будут расположены центры кривизны  $O_2$  и  $O_3$  обеих кривых, которые удалены от соответствующей кривой на расстояние, равное радиусу ее кривизны. Вместо кинематической пары 4-го класса исходного механизма введем фиктивное звено  $O_2O_3$ , а звенья 2 и 3 заменим условными звеньями  $AO_2$  и  $BO_3$ , которые шарнирно соединим со звеном  $O_2O_3$ . В результате получим шарнирный четырехзвенник  $AO_2O_3B$ , включающий 4 кинематические пары 5-го класса и 3 подвижных звена. Его подвижность также равна единице. Действительно,

$$w = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Из курса высшей математики известно, что окружность радиуса, равного радиусу кривизны кривой в некоторой ее точке, и сама кривая имеют в этой точке касание второго порядка. Это значит, что в этой точке равны их первая и вторая производная. Следовательно, одноименные точки исходного и заменяющего механизмов в рассматриваемый момент времени будут иметь одинаковые скорости и ускорения, и кинематические характеристики механизмов будут совпадать. Однако нужно иметь в виду, что в другой момент времени точка касания звеньев 2 и 3 сместится, радиусы кривизны, вообще говоря, изменятся, и размеры звеньев заменяющего механизма станут другими.

Для плоских механизмов, в которых все высшие кинематические пары заменены низшими парами, формула Чебышева упростится и примет вид:

$$w = 3n - 2p_5. \quad (4.2')$$

Особую роль при анализе существующих и проектировании новых механизмов играют минимальные кинематические цепи, имеющие нулевую подвижность. Они представляют собой своего рода элементарную составную часть механизма или **структурную группу**. По определению *структурной группой (группой Ассура)*

называется минимальная кинематическая цепь, число степеней свободы которой относительно элементов ее внешних кинематических пар равно нулю. Принятый в определении термин «минимальная кинематическая цепь» означает, что она не может быть разбита на более простые цепи, обладающие также нулевой подвижностью.

Для иллюстрации определения группы Ассуря рассмотрим шестизвенный рычажный механизм, структурная схема которого представлена на рис. 4.3. Определим подвижность этого механизма. Число подвижных звеньев  $n = 5$ , число кинематических пар 5-го класса  $p_5 = 7$ , кинематические пары 4-го класса отсутствуют. Тогда по формуле (4.2') имеем:

$$w = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

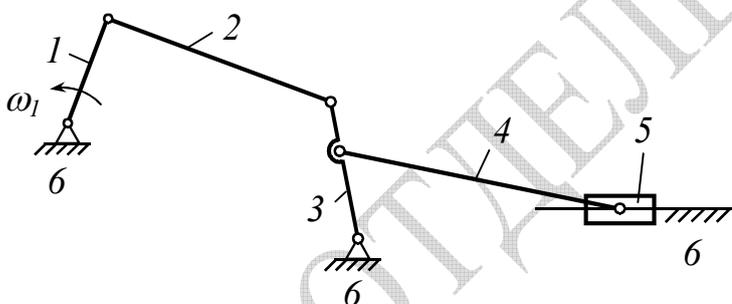


Рисунок 4.3

Для определенности будем считать звено 1 ведущим. Тогда исходный механизм будет состоять из ведущего звена, соединенного со стойкой (базовый механизм), и кинематической цепи, включающей звенья 2, 3, 4 и 5. Подвижность базового механизма равна единице, поскольку ведущее звено имеет одну степень свободы. Но число степеней свободы всего механизма также равно единице. Следовательно, подвижность кинематической цепи, состоящей из звеньев 2, 3, 4 и 5, относительно звеньев, к которым эта цепь присоединяется (звено 1 и стойка 6) равна нулю. Тем не менее, группой Ассуря указанная цепь не будет, так как она распадается на две более простые цепи, обладающие нулевой подвижностью относительно соседних звеньев. Первая такая цепь включает звенья 2 и 3, входящие в три вращательные пары, а вторая – звенья 4 и 5, входящие в две вращательные и одну поступательную пары. С помощью формулы (4.2') нетрудно убедиться, что для обеих цепей  $w = 0$ . В самом деле, при  $n = 2$  и  $p_5 = 3$  получим:

$$w = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Очевидно, что на более простые указанные кинематические цепи не распадаются. Следовательно, обе они представляют собой группы Ассур. Таким образом, механизм на рис. 4.3 может быть разбит на базовый механизм и две структурные группы (рис. 4.4).

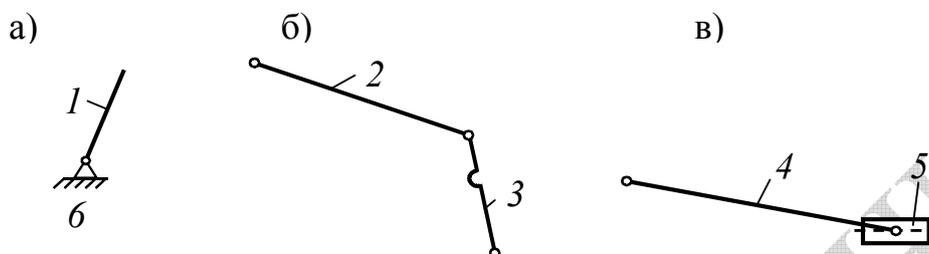


Рисунок 4.4

Разбиение механизмов на структурные группы широко используется при их силовом анализе. Кроме того, синтез новых механизмов также может быть основан на последовательном присоединении к базовому механизму кинематических цепей, составляющих структурные группы. Образование механизмов путем наложения групп Ассур является первым и наиболее важным этапом при проектировании любого механизма. Другие этапы, которые включают выбор конструкционных материалов, конструктивное оформление звеньев и элементов кинематических пар, расчеты на прочность и т. п., практически не могут изменить основные свойства механизма.

Условие отсутствия подвижности у структурных групп плоских механизмов, звенья которых входят пары только 5-го класса, вытекает из соотношения (4.2'):

$$3n - 2p_5 = 0 \quad \text{или} \quad p_5 = 1,5n. \quad (4.4)$$

Полученная простая формула дает связь между количеством звеньев и количеством кинематических пар в группах Ассур. Поскольку число тех и других может быть только целым, то сочетание численных значений  $n$  и  $p_5$  образуют следующие ряды.

$n$	2	4	6	8	...
$p_5$	3	6	9	12	...

На рис. 4.5 приведены примеры структурных групп с числом звеньев  $n = 4$  и числом кинематических пар  $p = 6$ . Структурные группы, как и другие составные части механизмов, делятся на классы. Деление групп на классы необходимо для правильного выбора метода кинематического и силового анализа, характерного для каждого класса структурных групп.

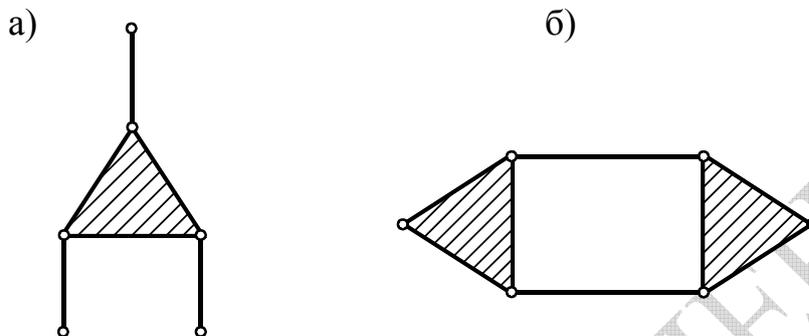


Рисунок 4.5

Группа, включающая два звена и три пары 5-го класса (рис. 4.4, б и 4.4, в), называется **группой II класса** или **двухповодковой группой**. На рис. 4.5 приведены примеры групп III и IV классов соответственно. Вообще класс структурной группы (если он больше второго) определяется числом кинематических пар, входящих в замкнутый контур внутри кинематической цепи.

В заключение параграфа рассмотрим вопрос об **избыточных связях** и **избыточных подвижностях** в механизмах. Он возникает в тех случаях, когда в состав механизма входят связи и степени свободы, никак не влияющие на характер движения и кинематические характеристики звеньев. В этих случаях звенья и кинематические пары, которые включают указанные связи и степени свободы, могут быть исключены из анализа механизма без ущерба для его точности. На рис. 4.6, а приведен пример плоского механизма, обладающего

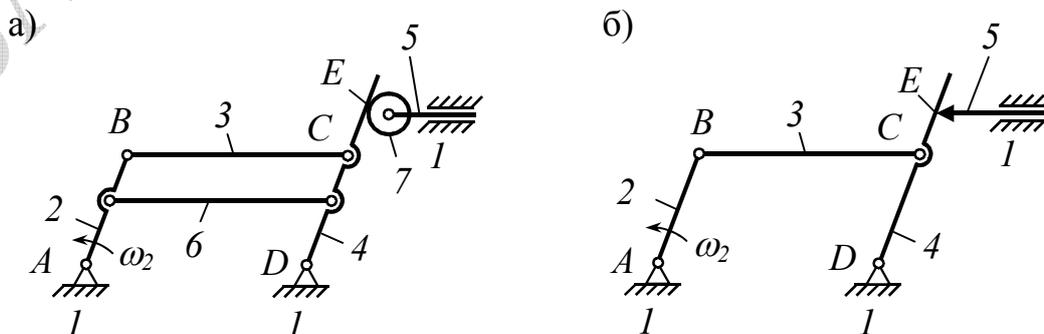


Рисунок 4.6

избыточными связями и избыточными подвижностями. В самом деле, если длины звеньев подобраны таким образом, что при работе механизма звенья 3 и 6 остаются сторонами параллелограмма, то звено 6 не оказывает никакого влияния на характер движения остальных звеньев. Следовательно, оно приносит избыточные связи и может быть удалено, рис. 4.6, б.

В этом же механизме звено 7 приносит избыточную степень свободы – возможность вращения ролика вокруг своей оси. Вращение ролика не оказывает влияния на поступательное движение звена 5. Поэтому ролик 7 может быть удален из механизма без изменения характера движения остальных звеньев, рис. 4.6, б.

Избыточные связи и избыточные подвижности следует исключать на стадии структурного анализа механизма. Те и другие могут быть выявлены путем использования структурных формул.

#### 4.4. Последовательность структурного анализа механизма

Резюмируя вышесказанное, сформулируем содержание и последовательность структурного анализа любого плоского механизма. Структурный анализ включает следующие этапы.

1. Вычерчивается структурная схема механизма, которая позволяет установить взаимосвязи и характер относительного движения всех звеньев механизма. Поскольку положение любого твердого тела при плоскопараллельном движении полностью определяется положением двух его точек, это тело можно условно обозначить отрезком прямой, соединяющей указанные точки. Чтобы число отрезков на структурной схеме, отображающих звенья механизма, было минимальным, на каждом звене выбираются только те точки, которые являются общими со смежными звеньями. Построение структурной схемы следует начинать с нанесения на схему неподвижных элементов кинематических пар, т.е. элементов, принадлежащих стойке. Далее вычерчиваются подвижные звенья, входящие в кинематические пары со стойкой. Затем – смежные с ними звенья и т.д. В результате получают всю кинематическую цепь рассматриваемого механизма.

2. Подсчитывается общее число звеньев, включая стойку. Число подвижных звеньев будет на единицу меньше. При этом не следует учитывать звенья, налагающие избыточные связи.

3. Подсчитывается и устанавливается класс кинематических пар, составляющих механизм, и находится степень подвижности механизма. При вычислении последней не учитываются те типы движений отдельных звеньев, которые вносят в механизм избыточные степени свободы и не влияют на кинематику основных звеньев. На этом этапе выясняется количество независимых обобщенных координат, полностью определяющих положение всех звеньев механизма относительно стойки.

4. Из составленной схемы механизма выделяются отдельные группы Ассура. При этом следует учитывать, что в каждую структурную группу входят только кинематические пары 5-го класса. Поэтому, если в механизме имеются пары 4-го класса, то вначале строится схема заменяющего механизма, из которого затем и выделяются группы Ассура.

#### 4.5. Контрольные вопросы

1. Что изучает теория механизмов и машин?
2. Дайте определение механизма и машины.
3. Что называется звеном и кинематической парой?
4. Какое звено механизма называется стойкой?
5. Какие звенья механизма называются входными и выходными?
6. Что такое обобщенная координата механизма, и как определить число независимых обобщенных координат для конкретного механизма?
7. Как определяется класс кинематических пар, и какие из них называются низшими, а какие высшими?
8. Что представляет собой элемент кинематической пары?
9. Какая взаимосвязь существует между условиями сопряжения и степенью подвижности звеньев в кинематической паре?
10. Какие звенья называются кривошипом, шатуном, коромыслом, кулисой, ползуном?
11. Что такое степень подвижности механизма, и как она подсчитывается для плоских и пространственных механизмов?
12. Какая кинематическая цепь называется структурной группой или группой Ассура?
13. Что такое избыточные связи и избыточные подвижности?
14. Что такое структурная схема механизма, каково ее назначение и как она строится?
15. Запишите структурную формулу для плоских и пространственных механизмов.

## Глава 5. Кинематический анализ плоских рычажных механизмов

### 5.1. Основные задачи и методы кинематического анализа

При кинематическом анализе механизмов основной интерес представляет изучение характера движения звеньев, включая определение скоростей и ускорений их отдельных точек. При этом действующие на звенья силы, вызывающие их движение, не рассматриваются. Подобная ситуация имеет место в разделе «Кинематика» теоретической механики, где движение твердых тел изучается, главным образом, с геометрических позиций.

Важнейшие положения кинематического анализа разобраны в этом разделе на примере двух простых механизмов: кривошипно-ползунного и шарнирного четырехзвенника.

Кинематический анализ механизмов отвлекается от рассмотрения действия всех сил (внешних нагрузок, реакций, сил инерции) на звенья и включает решение следующих задач:

1. Определение положений всех звеньев механизма относительно стойки при заданном положении начального звена.
2. Построение траекторий отдельных точек звеньев (шатунных кривых).
3. Определение линейных скоростей и линейных ускорений отдельных точек звеньев.
4. Определение угловых скоростей и угловых ускорений всех звеньев механизма, совершающих вращательное или плоскопараллельное движение.

В случае, когда механизм имеет одну степень подвижности, все перечисленные величины однозначно определяются положением, скоростью и ускорением одного из звеньев, принятого за начальное звено. Следовательно, они являются функциями одной обобщенной координаты. Если степень подвижности механизма равна двум и более, кинематические параметры звеньев зависят от нескольких обобщенных координат.

Данные по перемещениям и траекториям движения звеньев используются при проектировании, например, для исключения столкновения звеньев, а также для определения габаритов и контуров корпуса работающего механизма. Значения скоростей и ускорений различных точек звеньев механизмов той или иной машины используются при решении задач силового расчета звеньев механизма, определения развиваемой или потребляемой мощности, динамического анализа машины с учетом возникающих при ее работе сил инерции. В целом, из анализа кинематических характеристик делается вывод о целесообразности выбора структурной схемы и размеров всех звеньев.

Исходными данными при решении задач кинематического анализа являются кинематическая схема (т. е. структурная схема с указанием размеров и формы звеньев) и закон движения ведущего звена. В случае вращательного движения ведущего звена закон его движения должен быть выражен зависимостью:

$$\varphi(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \omega(\tau) d\tau + \varphi_0 ,$$

где  $\omega$  - угловая скорость вращения ведущего звена,  $\varphi_0$  – начальное значение угла поворота в момент времени  $\tau_0$  .

Перемещения, скорости и ускорения отдельных точек звеньев определяются в пределах одного цикла работы машины (т.е. за один оборот ведущего звена) для нескольких его положений.

Существует два метода решения перечисленных выше задач кинематического анализа механизмов: **метод планов** и **метод замкнутого векторного контура**. Первый метод носит графо-аналитический характер и связан с геометрическими построениями. В силу этого он достаточно нагляден и сравнительно прост. В то же время полученные с его помощью результаты несут определенную погрешность из-за ограниченной точности графических построений. Поэтому на практике метод планов чаще всего применяют для предварительного определения кинематических свойств механизмов, а также для контроля результатов.

Метод замкнутого векторного контура является полностью аналитическим, т. е. связан с решением алгебраических или дифференциальных уравнений. В силу этого он позволяет получить значения кинематических параметров механизма практически с любой наперед заданной точностью. К недостаткам метода следует отнести отсутствие наглядности и трудоемкость в реализации, которая приводит к необходимости составления объемных алгоритмов и вычислительных программ.

## 5.2. Графо-аналитический метод кинематического анализа (метод планов)

Рассмотрим графо-аналитический метод на примере кинематического анализа широко применяемого на практике кривошипно-ползунного механизма (рис. 5.1, а). Механизм состоит из ведущего звена 1 (кривошипа), вращающегося вокруг неподвижной оси  $O$ , звена 2 (шатуна), входящего во вращательные пары  $A$  и  $B$  со звеньями 1 и 3, и ползуна 3, скользящего вдоль оси  $\alpha\beta$ . Угол поворота  $\varphi_1$  кривошипа относительно стойки 4 является обобщенной координатой механизма. Длины всех звеньев считаются известными.

Все графические построения при использовании метода планов выполняются в заранее выбранном масштабе. Под **масштабным коэффициентом физической величины** понимают отношение численного значения физической величины в свойственных ей единицах измерения к длине отрезка в миллиметрах, изображающего эту физическую величину на чертеже.

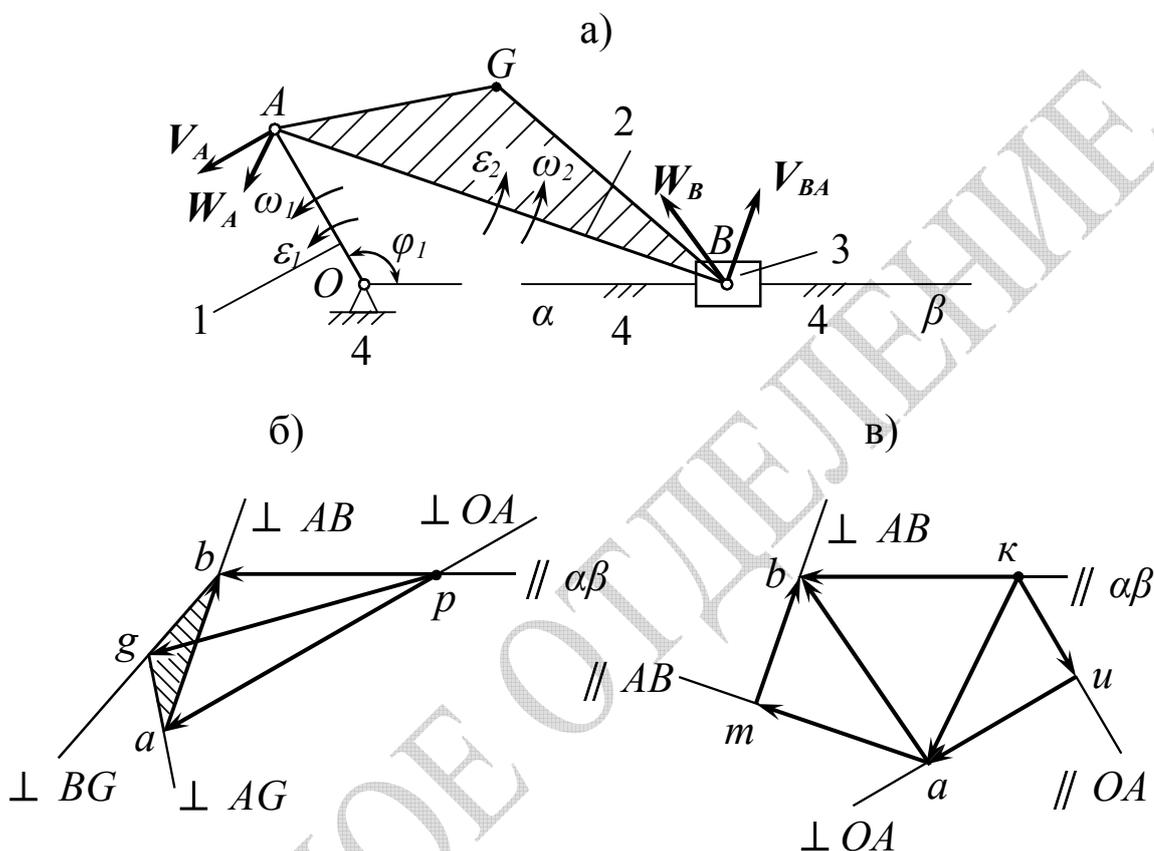


Рисунок 5.1

Первым этапом кинематического анализа механизма является построение плана положений. **Планом положений механизма** называется его условное в выбранном масштабе графическое изображение, включающее стойку, все подвижные звенья, все кинематические пары и их взаимное расположение при заданном положении начального звена, т.е. в некоторый фиксированный момент времени.

При построении плана положений удобно пользоваться методом засечек. Вначале выберем масштабный коэффициент  $\mu_l$  плана положений, который зададим как число метров натуры, соответствующее одному миллиметру на чертеже. Пусть, например,  $OA$  - реальная длина кривошипа в метрах, а  $(OA)$  – длина отрезка в миллиметрах, изображающего кривошип на чертеже. Тогда значение масштабного коэффициента  $\mu_l$  равно:

$$\mu_l = \frac{OA}{(OA)} \left[ \frac{M}{MM} \right].$$

После того как масштабный коэффициент выбран, из произвольной точки  $O$  на чертеже под заданным углом поворота  $\varphi_1$  кривошипа проведем отрезок  $(OA)$  длиной  $OA / \mu_l$ . Затем из точки  $A$  как из центра окружности радиуса  $(AB) = AB / \mu_l$  проведем дугу малой длины (засечку) до пересечения в точке  $B$  с линией  $\alpha\beta$ . Тогда отрезок  $(AB)$  изобразит шатун 2 рассматриваемого механизма, а точка  $B$  будет определять положение центра ползуна 3. Таким образом, построение плана положений сводится к определению положений всех звеньев механизма в зависимости от заданного положения начального звена.

Вторым этапом кинематического анализа является построение плана скоростей (рис. 5.1, б). **План скоростей** звена механизма – это графическое изображение, представляющее собой пучок векторов с единым общим началом, которое называется **полюсом плана скоростей**. Величина и направление каждого вектора пучка соответствуют величине и направлению **абсолютной скорости** конкретной точки звена при его заданном положении. Векторы, соединяющие концы векторов пучка, отображают **относительные скорости** точек звена. **Совокупность планов скоростей всех звеньев механизма с общим полюсом называют планом скоростей механизма.**

Масштабный коэффициент плана скоростей  $\mu_v$  удобно соотнести, с величиной скорости точки  $A$  кривошипа:

$$\mu_v = \frac{V_A}{(pa)} = \frac{\omega_1 OA}{(pa)} \left[ \frac{M / c}{MM} \right],$$

где буквой  $p$  обозначен полюс плана скоростей (рис. 5.1, б), а вектор  $(pa)$  отображает величину и направление абсолютной скорости точки  $A$ . Длина отрезка  $(pa)$ , а, значит, и значение масштабного коэффициента  $\mu_v$  выбирается из соображений удобства вычислений и построений. Направление отрезка  $(pa)$  совпадает с направлением скорости точки  $A$ , которое перпендикулярно отрезку  $OA$  на плане положений (рис. 5.1, а).

Для определения абсолютной скорости точки  $B$  воспользуемся теоремой сложения скоростей в переносном и относительном движении (см. параграф 2.5). В самом деле, движение точки  $B$  может быть разложено на переносное поступательное движение шатуна со скоростью  $V_A$  точки  $A$  и относительное вращательное движение

шатуна вокруг точки А. В векторной форме для абсолютной скорости  $\mathbf{V}_B$  точки В имеем:

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{BA} . \quad (5.1)$$

Здесь  $\mathbf{V}_{BA}$  – скорость точки В при вращательном движении шатуна относительно точки А. Она направлена перпендикулярно отрезку АВ на плане положений. В свою очередь абсолютная скорость точки В будет направлена вдоль направляющей  $\alpha\beta$ .

Построение плана скоростей для звена 2 основано на векторном уравнении (5.1). Проведем через полюс  $p$  прямую, параллельную  $\alpha\beta$  на плане положений (рис. 5.1, а). Вектор, соответствующий абсолютной скорости  $\mathbf{V}_B$ , должен лежать на этой прямой и начинаться в полюсе  $p$ . Через точку  $a$  проведем прямую, перпендикулярную АВ на плане положений. Эта прямая будет задавать направление вектора относительной скорости  $\mathbf{V}_{BA}$ . Пересечение указанных прямых даст точку  $b$  на плане скоростей. Соединив точки  $p$  и  $b$ , получим отрезок  $(pb)$ , изображающий абсолютную скорость точки В. Ее численное значение равно произведению длины отрезка  $(pb)$  на масштабный коэффициент:

$$V_B = (pb) \mu_v .$$

Относительную скорость  $\mathbf{V}_{BA}$  определим, измерив длину отрезка  $(ab)$  на плане скоростей:

$$V_{BA} = (ab) \mu_v .$$

Направления векторов на плане скоростей выбираются в соответствии с векторным равенством (5.1).

Величину угловой скорости  $\omega_2$  шатуна 2 найдем по известной формуле для вращательного движения:

$$\bar{\omega}_2 = \frac{V_{BA}}{BA} \quad (5.2)$$

Направление угловой скорости шатуна определим следующим образом. Мысленно перенесем параллельно самому себе вектор  $(ab)$  на плане скоростей, изображающий относительную скорость  $\mathbf{V}_{BA}$ , на план положений, поместив его начало в точке В (рис. 5.1, а). Наблюдая за движением звена 2 из точки А, видим, что вращение шатуна в его относительном движении совершается против часовой стрелки. Направление угловой скорости принято обозначать в виде стрелки (см. формулу (5.2)) над численным значением скорости.

При определении линейных скоростей произвольных точек звена удобно использовать **теорему подобия для плана скоростей звена**: *отрезки прямых, соединяющие точки звена на плане положений механизма, и отрезки прямых, соединяющие концы векторов скоростей этих точек на плане скоростей, образуют подобные плоские фигуры со сходственным расположением вершин*. При этом плоская фигура на плане скоростей оказывается повернутой относительно плоской фигуры на плане положений на  $90^0$ .

На практике теорему подобия чаще всего применяют в том случае, когда известны векторы абсолютных скоростей двух точек звена (например, его концов) механизма, а требуется определить абсолютную скорость третьей точки. В качестве плоской фигуры, о которой идет речь в формулировке теоремы, обычно выбирается треугольник.

Покажем справедливость теоремы подобия на примере кривошипно-ползунного механизма, изображенного на рис. 5.1, а. Выберем точку G на шатуне, не лежащую на прямой АВ. Соединив эту точку с точками А и В, получим треугольник AGB. Очевидно, этот прием никак не скажется на приведенные выше рассуждения при построении плана скоростей. Длины отрезков (pa) и (pb) с учетом масштабного коэффициента позволяют найти численные значения абсолютных скоростей  $V_A$  и  $V_B$  точек А и В шатуна. Пусть требуется найти скорость  $V_G$  точки G.

Выбирая в качестве полюса точку А по теореме сложения скоростей можем записать:

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{GA} \quad (5.3)$$

где  $\mathbf{V}_{GA}$  - вектор скорости точки G в ее относительном вращательном движении по отношению к точке А.

Выбирая в качестве полюса точку В для той же скорости  $\mathbf{V}_G$  имеем:

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{GB} \quad (5.4)$$

где  $\mathbf{V}_{GB}$  – вектор скорости точки G в ее относительном вращательном движении вокруг точки В. Приравнивая правые части векторных равенств (5.3) и (5.4), получаем:

$$\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{GA} = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{GB} \quad (5.5)$$

На плане скоростей обеим частям этого векторного равенства будет соответствовать отрезок (pg), изображающий абсолютную скорость точки G звена 2. Треугольник *agb* на плане скоростей (см. рис. 5.1, б) подобен треугольнику AGB на плане положений (рис. 5.1, а), как треугольники с взаимно перпендикулярными сторонами. В самом деле

отрезок  $ab \perp AB$ ,  $bg \perp BG$ ,  $ag \perp AG$ . Таким образом, теорему подобия можно считать доказанной.

Используя теорему подобия, нетрудно определить абсолютную скорость точки G. Для этого на плане скоростей нужно построить треугольник подобный треугольнику AGB на плане положений, повернув его на  $90^\circ$ . Затем измерить длину отрезка  $(pg)$  и умножить ее на масштабный коэффициент:  $V_G = (pg) \mu_v$ .

Перейдем теперь к построению плана ускорений кривошипно-ползунного механизма (рис. 5.1, в). **Планом ускорений** называют графическое построение, представляющее собой плоский пучок векторов с единым общим началом (**полюсом плана ускорений**), каждый вектор которого изображает **абсолютное ускорение** соответствующей точки звена для его заданного положения. При этом векторы, соединяющие концы векторов пучка, изображают **относительные ускорения** соответствующих точек звена.

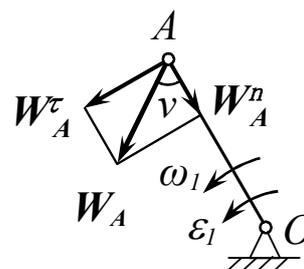
Совокупность планов ускорений всех звеньев механизма с общим полюсом называют **планом ускорений механизма**. План ускорений также как и планы положений и скоростей, строится с использованием масштабного коэффициента  $\mu_w$ . Величину этого коэффициента определим аналогично коэффициентам  $\mu_l$  и  $\mu_v$ , связав численное значение абсолютного ускорения  $W_A$  точки A с длиной отображающего это ускорение отрезка:

$$\mu_w = \frac{W_A}{(ka)} \left[ \frac{m / c^2}{мм} \right],$$

где через  $k$  обозначен полюс плана ускорений, отрезок  $(ka)$  своей величиной и направлением соответствует вектору абсолютного ускорения точки A. Длина отрезка  $(ka)$  выбирается произвольно, исходя из удобства построений.

Согласно соотношениям (2.15) при вращательном движении твердого тела абсолютное ускорение представляет собой сумму двух ускорений: нормального  $W_n$  (центростремительного) и  $W_\tau$  касательного (тангенциального). Применительно к точке A кривошипа, вращающегося относительно точки O с

угловой скоростью  $\omega_1$  и угловым ускорением  $\varepsilon_1$  (рис. 5.2), величина нормального ускорения  $W_A^n$  и касательного ускорений  $W_A^\tau$  равны:



$$W_A^n = \omega^2 OA = \frac{V_A^2}{OA}, \quad (5.6)$$

Рисунок 5.2

$$W_A^\tau = \varepsilon OA. \quad (5.7)$$

Угол  $\nu$  между вектором  $\mathbf{W}_A$  абсолютного ускорения точки А и кривошипом  $OA$  на плане положений, очевидно, равен:

$$\nu = \arctg \left( \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2} \right). \quad (5.8)$$

Для определения абсолютного ускорения точки В воспользуемся теоремой сложения ускорений в переносном и относительном движениях (формула (2.36)). При этом следует учесть, что кориолисово ускорение при плоскопараллельном движении отсутствует. Таким образом, абсолютное ускорение  $\mathbf{W}_B$  точки В можно представить в виде следующей векторной суммы:

$$\mathbf{W}_B = \mathbf{W}_A + \mathbf{W}_{BA} = \mathbf{W}_A + \mathbf{W}_{BA}^n + \mathbf{W}_{BA}^\tau \quad (5.9)$$

Здесь  $\mathbf{W}_{BA}$  – относительное ускорение точки В в ее относительном вращательном движении вокруг полюса – точки А. Также как и ускорение  $\mathbf{W}_A$  оно может быть разложено на нормальную и касательную составляющие:

$$W_{BA}^n = \omega_2^2 BA = \frac{V_{BA}^2}{BA}, \quad (5.10)$$

$$W_{BA}^\tau = \varepsilon_2 BA, \quad (5.11)$$

где  $\omega_2$  и  $\varepsilon_2$  – угловая скорость и угловое ускорение шатуна 2 (рис. 5.1, а).

Построим план ускорений шатуна (см. рис. 5.1, в), используя векторное уравнение (5.9). Из точки  $k$ , взятой за полюс плана ускорений, параллельно  $OA$  на плане положений проведем отрезок  $(ku)$ , изображающий нормальную составляющую абсолютного ускорения точки А. Длина этого отрезка с учетом (5.6) определяется соотношением:

$$(ku) = \frac{W_A^n}{\mu_W} = \frac{\omega_1^2 OA}{\mu_W} = \frac{V_A^2}{OA \mu_W}. \quad (5.12)$$

Из полученной точки  $u$  перпендикулярно  $OA$  проведем отрезок  $(ua)$ , изображающий касательную составляющую ускорения точки А. Его длина с учетом (5.7) будет:

$$(ua) = \frac{W_A^\tau}{\mu_W} = \frac{\varepsilon OA}{\mu_W}. \quad (5.13)$$

Отрезок  $(ka)$ , соединяющий полюс  $k$  и точку  $a$  на плане ускорений, будет соответствовать абсолютному ускорению точки  $A$  кривошипа. Длина отрезка  $(ka)$  выражается через длины отрезков  $(ku)$  и  $(ua)$ :

$$(ka) = \sqrt{(ku)^2 + (ua)^2}. \quad (5.14)$$

Перейдем к определению ускорения точки  $B$  ползуна. Для этого из точки  $a$  на плане ускорений параллельно шатуну 2 проведем в направлении точки  $A$  на плане положений отрезок  $(am)$ , длину которого определим с помощью соотношения:

$$(am) = \frac{W_{BA}^n}{\mu_W} = \frac{\omega_2^2 BA}{\mu_W} = \frac{V_{BA}^2}{BA \mu_W}. \quad (5.15)$$

Очевидно, что построенный отрезок изображает нормальную составляющую относительного ускорения точки  $B$  шатуна.

Теперь из точки  $m$  проведем прямую, перпендикулярную отрезку  $AB$  на плане положений. Указанная прямая задает направление тангенциальной составляющей относительного ускорения точки  $B$ . С другой стороны, направление абсолютного ускорения точки  $B$  также известно, поскольку ползун механизма перемещается вдоль линии  $\alpha\beta$ . Следовательно, отрезок, изображающий абсолютное ускорение точки  $B$  на плане ускорений, будет параллелен линии  $\alpha\beta$ , а его начало будет совпадать с полюсом  $k$ . Точку пересечения прямых, задающих направления тангенциальной составляющей относительного ускорения и абсолютного ускорения точки  $B$ , обозначим как точку  $b$  плана ускорений (рис. 5.1, в). Отрезок  $(kb)$  представляет собой отображение абсолютного ускорения точки  $B$  ползуна. Численное значение ускорения определяется через масштабный коэффициент:

$$W_B = (kb) \mu_W. \quad (5.16)$$

Значения относительного ускорения  $W_{BA}$  и его тангенциальной составляющей находятся аналогично через длины соответствующих отрезков:

$$W_{BA} = (ab) \mu_W, \quad W_{BA}^\tau = (mb) \mu_W. \quad (5.17)$$

Направления векторов на плане ускорений выбираются в соответствии с векторным уравнением (5.9).

Величина углового ускорения шатуна определяется из соотношения (5.11):

$$\vec{\varepsilon}_2 = \frac{W_{BA}^\tau}{BA} . \quad (5.18)$$

Для определения его направления необходимо мысленно перенести вектор  $(mb)$ , изображающий ускорение  $W_{BA}^\tau$ , на план положений, не меняя его направления и разместив его начало в точке В. Наблюдая за движением звена 2 из точки А, выбранной в качестве полюса, видим, что в рассмотренном случае ускорение  $\varepsilon_2$  направлено против часовой стрелки. В формуле (5.18) это обстоятельство отражено стрелкой над символом ускорения, направленной соответствующим образом.

### 5.3. Кинематический анализ шарнирного четырехзвенника

Применим теперь метод планов к другому часто встречающемуся механизму – шарнирному четырехзвеннику (рис. 4.1, б). Пусть задана кинематическая схема механизма, в котором ведущим звеном является кривошип 1, вращающийся с угловой скоростью  $\omega_1$  и угловым ускорением  $\varepsilon_1$  (рис. 5.3, а).

Построим вначале план положений механизма для некоторого значения обобщенной координаты  $\varphi_1$ . Зададимся масштабным коэффициентом  $\mu_l$  плана положений. В качестве указанного коэффициента примем отношение:

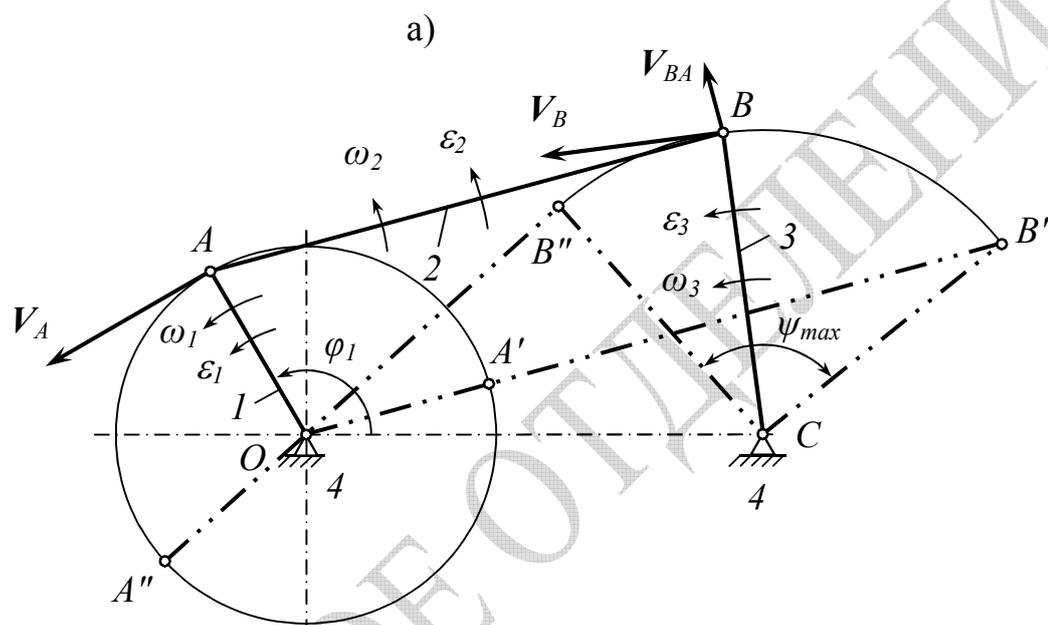
$$\mu_l = \frac{OA}{(OA)} \left[ \frac{M}{MM} \right],$$

в котором  $OA$  – длина кривошипа в метрах,  $(OA)$  – длина отрезка в миллиметрах, изображающего кривошип на чертеже.

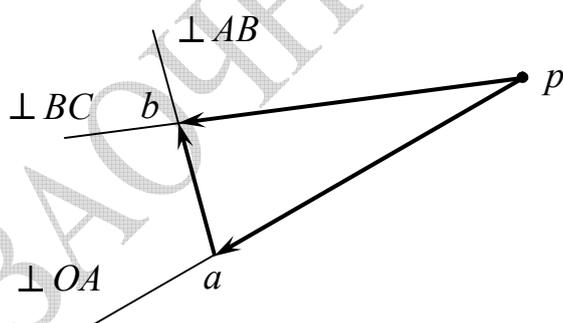
Из произвольной точки  $O$  проведем под заданным углом  $\varphi_1$  поворота кривошипа отрезок  $(OA)$ . Затем на расстоянии  $(CO) = CO / \mu_l$  изобразим шарнирно-неподвижную опору с центром в точке  $C$  (см. рис. 5.3, а). Из точки  $C$  как из центра проведем дугу окружности (засечку) радиусом  $(BC) = BC / \mu_l$ . Такую же засечку, но радиусом  $(AB) = AB / \mu_l$  проведем из  $A$ . Точка  $B$  пересечения засечек изобразит положение шарнирного соединения шатуна 2 и коромысла 3 механизма. Соединив точку  $B$  отрезками прямой с точками  $A$  и  $C$ , изобразим шатун и коромысло соответственно. Таким образом, план

положений механизма шарнирного четырехзвенника для фиксированного значения обобщенной координаты построен (рис. 5.3, а).

На плане положений удобно нанести траектории точек А и В при работе механизма, а также крайние положения коромысла, при которых шатун и кривошип лежат на одной и той же прямой. Крайние положения коромысла определяют размах его вращательного движения  $\psi_{max}$  и точки В' и В'', в которых меняется направление движения шарнира В.



б)



в)

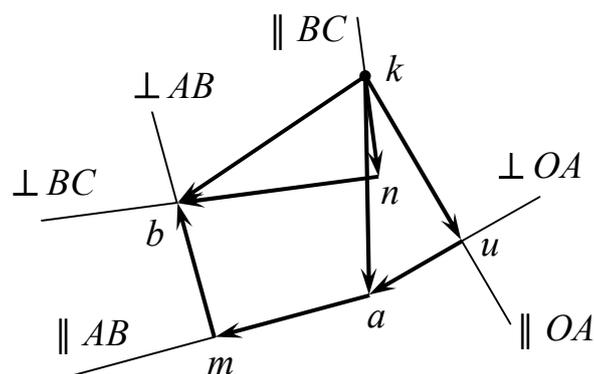


Рисунок 5.3

Перейдем к построению плана скоростей (рис. 5.3, б). Определим вначале масштабный коэффициент плана скоростей как отношение

$$\mu_v = \frac{V_A}{(pa)} = \frac{\omega_1 OA}{(pa)} \left[ \frac{м / с}{мм} \right],$$

в котором через  $p$  обозначен полюс плана скоростей, отрезком  $(pa)$  – вектор абсолютной скорости точки  $A$  механизма. Величина этого вектора, очевидно, равна  $\omega_1 \cdot OA$ , а его направление перпендикулярно отрезку  $(OA)$  на плане положений. Выбрав на чертеже некоторую точку в качестве полюса, поместим в нее начало вектора  $(pa)$ .

Для определения абсолютной скорости  $V_B$  точки  $B$  воспользуемся теоремой сложения скоростей в переносном и относительном движениях: абсолютная скорость некоторой точки тела при его сложном движении равна векторной сумме скоростей в переносном и относительном движениях. В рассматриваемом случае переносным является поступательное движение шатуна 2 со скоростью  $V_A$ , относительным – вращательное движение шатуна относительно точки  $A$  со скоростью  $V_{BA}$ , направленной перпендикулярно отрезку  $AB$  на плане положений. Поэтому указанные скорости подчиняются векторному уравнению:

$$V_B = V_A + V_{BA}.$$

Дальнейшее построение плана скоростей исходит из этого уравнения. Из точки  $a$  проведем прямую, перпендикулярную отрезку  $AB$  на плане положений. Эта прямая задает направление относительной скорости  $V_{BA}$ , как скорости при вращательном движении шатуна относительно точки  $A$ . Теперь через полюс  $p$  проведем прямую, перпендикулярную отрезку  $BC$  на плане положений. Эта прямая задает направление абсолютной скорости  $V_B$  точки  $B$ . Точку пересечения двух прямых обозначим через  $b$ . Соединив эту точку с полюсом  $p$  и точкой  $A$ , получим два отрезка  $(pb)$  и  $(ab)$ , длины которых позволяют найти численное значение скоростей  $V_B$  и  $V_{BA}$ :  $V_B = (pb) \mu_v$  и  $V_{BA} = (ab) \mu_v$ . Направления векторов  $V_B$  и  $V_{BA}$  на плане скоростей расставим в соответствии с приведенным выше векторным уравнением (рис. 5.3, б).

Величину  $\omega_2$  угловой скорости шатуна 2 найдем, используя соотношение:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{BA}. \quad (5.19)$$

Ее направление определим следующим образом. Мысленно перенесем параллельно самому себе вектор  $(ab)$  на плане скоростей, изображающий относительную скорость  $V_{BA}$ , на план положений, поместив его начало в точку  $B$ . Наблюдая затем за движением шатуна

из точки А, видим, что рассматриваемый случай соответствует направлению  $\omega_2$  против часовой стрелки. Этот факт отражен в предыдущей формуле стрелкой над символом или численным значением угловой скорости.

Величину и направление угловой скорости коромысла 3 найдем аналогичным образом по значению скорости точки В и направлению вектора ( $pb$ ) на плане скоростей:

$$\vec{\omega}_3 = \frac{V_B}{BC} \cdot \quad (5.20)$$

Направления угловых скоростей звеньев механизма, а также линейных скоростей шарнирных точек А и В зафиксируем на плане положений (рис. 5.3, а).

Перейдем к построению плана ускорений шарнирного четырехзвенника (рис. 5.3, в). Его построение во многом схоже с построением, проведенным в подразделе 5.2 для кривошипно-шатунного механизма. Отметим на чертеже полюс  $k$  плана ускорений и проведем вектор ( $ku$ ), изображающий нормальную составляющую  $\mathbf{W}_A^n$  абсолютного ускорения точки А. Величина вектора  $\mathbf{W}_A^n$  определяется формулой (5.6) так же, как и при вращении кривошипа в кривошипно-ползунном механизме. Длину вектора ( $ku$ ) выберем произвольно из соображений удобства построений. Тогда масштабный коэффициент  $\mu_W$  плана ускорений будет равен:

$$\mu_W = \frac{W_A^n}{(ku)} = \frac{\omega_1^2 OA}{(ku)} \left[ \frac{м / с^2}{мм} \right].$$

Из точки  $u$  в направлении, перпендикулярном вектору ( $ku$ ), отложим вектор  $(ua) = \frac{W_A^\tau}{\mu_W} = \frac{\varepsilon OA}{\mu_W}$ , изображающий тангенциальную составляющую  $\mathbf{W}_A^\tau$  абсолютного ускорения  $\mathbf{W}_A$ . Соединив теперь полюс  $k$  с точкой  $a$ , получим вектор ( $ka$ ), изображающий на плане ускорений полное ускорение точки А.

При определении вектора абсолютного ускорения точки В учтем, что она одновременно принадлежит шатуну 2 и коромыслу 3. С одной стороны, в соответствии с теоремой о сложении ускорений в переносном и относительном движениях для точки В как точки шатуна имеем:

$$\mathbf{W}_B = \mathbf{W}_A + \mathbf{W}_{BA} = \mathbf{W}_A + \mathbf{W}_{BA}^n + \mathbf{W}_{BA}^\tau.$$

С другой стороны, поскольку точка В принадлежит коромыслу, ее полное ускорение представляет собой векторную сумму нормального и тангенциального ускорений:

$$\mathbf{W}_B = \mathbf{W}_B^n + \mathbf{W}_B^\tau .$$

Приравняв правые части этих векторных уравнений, приходим к следующему соотношению:

$$\mathbf{W}_A + \mathbf{W}_{BA}^n + \mathbf{W}_{BA}^\tau = \mathbf{W}_B^n + \mathbf{W}_B^\tau . \quad (5.21)$$

Полученное уравнение позволяет завершить построение плана ускорений. Из точки *a* на плане ускорений отложим вектор (*am*), изображающий нормальную составляющую  $\mathbf{W}_{BA}^n$  относительного ускорения точки В. Модуль этого вектора равен:

$$(am) = \frac{\mathbf{W}_{BA}^n}{\mu_W} = \frac{\omega_2^2 AB}{\mu_W} , \quad (5.22)$$

где угловая скорость шатуна определяется соотношением (5.19). Направление вектора (*am*) должно совпадать с направлением вектора  $\mathbf{W}_{BA}^n$ : от точки В на плане положений к точке А. Затем из полученной точки *m* на плане ускорений проведем прямую перпендикулярную АВ на плане положений. Указанная прямая задает направление тангенциальной составляющей  $\mathbf{W}_{BA}^\tau$  относительного ускорения  $\mathbf{W}_{BA}$ . Однако величина вектора  $\mathbf{W}_{BA}^\tau$  пока не известна. Найдем ее.

Для этого из полюса *k* отложим вектор (*kn*), изображающий нормальную составляющую  $\mathbf{W}_B^n$  абсолютного ускорения точки В механизма. Вектор (*kn*), очевидно, параллелен коромыслу ВС, направлен от точки В к точке С, а его величина равна:

$$(kn) = \frac{\mathbf{W}_B^n}{\mu_W} = \frac{\omega_3^2 BC}{\mu_W} . \quad (5.23)$$

Из конца этого вектора (точки *n*) проведем прямую перпендикулярную ВС на плане положений. Вдоль нее направлен вектор тангенциальной составляющей  $\mathbf{W}_B^\tau$  абсолютного ускорения точки В механизма. Точку пересечения двух прямых, одна из которых определяет направление вектора  $\mathbf{W}_{BA}^\tau$ , а другая – вектора  $\mathbf{W}_B^\tau$ , обозначим через *b* (рис. 5.3, в). Тогда отрезок (*kb*) изобразит абсолютное ускорение точки В, величина

которого может быть вычислена по измеренной длине отрезка:  $W_B = (kb) \mu_W$ . Направление вектора  $(nb)$ , изображающего ускорение  $\mathbf{W}_B^\tau = (nb) \mu_W$ , и направление вектора  $(am)$ , изображающего ускорение  $\mathbf{W}_{BA}^\tau = (am) \mu_W$ , проставим исходя из векторного уравнения (5.21). Полное относительное ускорение  $\mathbf{W}_{BA}$  на плане отобразится вектором  $(ab)$ , а его величина равна:  $W_{BA} = (ab) \mu_W$ .

Для завершения кинематического анализа шарнирного четырехзвенника определим величину и направление угловых ускорений шатуна и коромысла. Величина углового ускорения шатуна связана с тангенциальной составляющей  $\mathbf{W}_{BA}^\tau$  посредством соотношения (5.18):

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{W_{BA}^\tau}{BA} . \quad (5.24)$$

Направление ускорения  $\varepsilon_2$  найдем следующим образом. Мысленно перенесем вектор  $(mb)$  на плане ускорений, изображающий  $\mathbf{W}_{BA}^\tau$ , на план положений, поместив его начало в точке В. Наблюдая за относительным вращательным движением звена 2 из точки А, видим, что угловое ускорение  $\varepsilon_2$  направлено против часовой стрелки. Это обстоятельство отражено с помощью стрелки над символом ускорения в формуле (5.24).

Величину углового ускорения коромысла 3 найдем аналогично:

$$\bar{\varepsilon}_3 = \frac{W_B^\tau}{BC} . \quad (5.25)$$

Для определения направления ускорения  $\varepsilon_3$  мысленно перенесем параллельно самому себе вектор  $(nb)$  на плане ускорений, изображающий тангенциальную составляющую  $\mathbf{W}_B^\tau$  абсолютного ускорения точки В, на план положений, совместив его начало с точкой В. Наблюдая за вращательным движением коромысла вокруг точки С, видим что его движение происходит также против часовой стрелки. Направление стрелки над символом ускорения в формуле (5.25) отражает реальное направление ускорения звена 3.

Таким образом, кинематические характеристики всех звеньев механизма шарнирного четырехзвенника определены.

#### 5.4. Аналитический метод кинематического анализа

Существо аналитического метода состоит в нахождении линейных и угловых координат, скоростей и ускорений звеньев и их

отдельных точек в виде аналитических выражений. При этом исходными данными также являются кинематическая схема механизма, размеры звеньев и зависимость обобщенных координат от времени. Для аналитического исследования плоских механизмов удобно использовать метод векторных контуров. Общий алгоритм этого метода можно представить следующим образом:

- кинематическую схему изучаемого механизма помещают в декартову систему координат  $Oxy$  так, чтобы начало координат совпадало с осью вращения ведущего звена;
- замкнутые кинематические цепи механизма представляют в виде векторных контуров, заменяя векторами подвижные и неподвижные звенья и выбирая длины векторов равными длинам звеньев;
- отмечают угол  $\varphi$ , соответствующий заданному положению ведущего звена, отсчитывая величину угла в направлении против часовой стрелки от оси  $Ox$ ;
- составляют векторное уравнение замкнутого контура;
- проектируя векторное уравнение на оси декартовой системы координат, получают аналитические выражения для расчета перемещений всех звеньев;
- дифференцированием по времени полученных скалярных уравнений приходят к зависимостям для расчета проекций скоростей и ускорений.

Реализуем изложенный алгоритм аналитического метода кинематического анализа на примере шарнирного четырехзвенника (рис. 5.4).

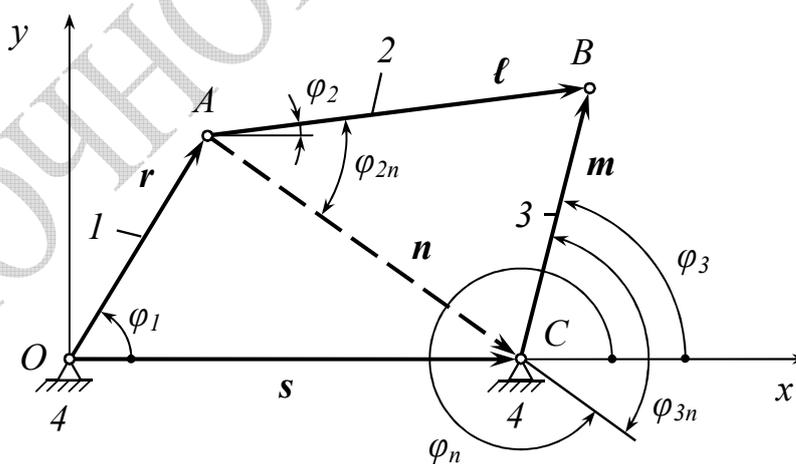


Рисунок 5.4

Введем систему декартовых координат с началом в точке  $O$ . В качестве обобщенной координаты примем угол поворота кривошипа 1 относительно стойки 4. На схеме четырехзвенника заменим звенья, включая стойку, векторами  $r$ ,  $l$ ,  $m$  и  $s$ . Для удобства последующих

вычислений введем вектор  $n$ , соединяющий шарниры А и С. В результате получим два векторных контура: ОАС и АВС. Направления векторов могут отличаться от приведенных на рис. 5.4, что скажется лишь на знаках при слагаемых векторных уравнений.

Для контура ОАС можно записать следующее векторное равенство:

$$r + n = s. \quad (5.26)$$

Для контура АВС аналогичное равенство имеет вид:

$$n + m = l. \quad (5.27)$$

Заметим, что длина вектора  $n$ , называемого базовым, является переменной при работе механизма, в то время как длины остальных векторов в равенствах (5.26) и (5.27) постоянны и заданы. Для определения направления и модуля базового вектора спроектируем первое из векторных равенств на координатные оси. Проекция на ось Ох дает:

$$r \cos \varphi_1 + n \cos \varphi_n = s \quad (5.28)$$

Проектируя на ось Оу, получим:

$$r \sin \varphi_1 + n \sin \varphi_n = 0. \quad (5.29)$$

Исключим из последних двух равенств модуль базового вектора. В результате придем к соотношению для определения угла  $\varphi_n$ , задающего положение вектора  $n$  относительно стойки:

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{r \sin \varphi_1}{r \cos \varphi_1 - s}. \quad (5.30)$$

Знак правой части в этом соотношении определяет четверть круга, в котором расположен угол  $\varphi_n$ .

Длину вектора  $n$  можно найти, выразив ее, например, из равенства (5.28):

$$n = \sqrt{(r \cos \varphi_1 - s)^2 + (r \sin \varphi_1)^2}. \quad (5.31)$$

Итак, длина и направление базового вектора полностью определяются положением ведущего звена, задаваемым обобщенной координатой  $\varphi_1$ .

Обозначим теперь через  $\varphi_{2n}$  и  $\varphi_{3n}$  (рис. 5.4) углы наклона векторов  $l$  и  $m$  к направлению вектора  $n$  соответственно. Тогда для треугольника ABC, используя теорему косинусов и формулы приведения, можно записать:

$$l^2 = m^2 + n^2 + 2 m n \cos \varphi_{3n},$$

$$m^2 = l^2 + n^2 - 2 l n \cos \varphi_{2n}.$$

Отсюда нетрудно найти углы  $\varphi_{2n}$  и  $\varphi_{3n}$  между звеньями 2 и 3 и направлением вектора  $n$ :

$$\varphi_{2n} = \arccos\left(\frac{l^2 + n^2 - m^2}{2 n l}\right),$$

$$\varphi_{3n} = \arccos\left(\frac{l^2 - n^2 - m^2}{2 m n}\right).$$

(5.32)

Углы  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ , однозначно определяющие положение этих звеньев относительно стойки, равны:

$$\varphi_2 = \varphi_{2n} - (2\pi - \varphi_n) = \varphi_{2n} + \varphi_n - 2\pi$$

(5.33)

$$\varphi_3 = \varphi_{3n} - (2\pi - \varphi_n) = \varphi_{3n} + \varphi_n - 2\pi.$$

Полученные соотношения позволяют установить положение всех звеньев четырехзвенника в любой момент времени.

Для нахождения угловых скоростей и ускорений звеньев 2 и 3 запишем для контура OABCO следующее векторное равенство:

$$\mathbf{r} + \mathbf{l} = \mathbf{s} + \mathbf{m}.$$

В проекциях на оси  $Ox$  и  $Oy$  это равенство равносильно двум скалярным соотношениям:

$$r \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2 = s + m \cos \varphi_3,$$

(5.34)

$$r \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2 = m \sin \varphi_3.$$

Продифференцируем первое соотношение по обобщенной координате  $\varphi_1$ , учитывая, что оба угла  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  в силу (5.31), (5.32) и (5.33) являются функциями этой переменной:

$$-r \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -m \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}.$$

Производные  $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$  и  $\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$  имеют ясный физический смысл. В самом деле, в соответствии с определением угловой скорости можем записать:

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{\frac{d\varphi_2}{d\tau}}{\frac{d\varphi_1}{d\tau}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \frac{\frac{d\varphi_3}{d\tau}}{\frac{d\varphi_1}{d\tau}} = \frac{\omega_3}{\omega_1}.$$

Таким образом, указанные производные представляют собой отношение угловых скоростей звеньев 2 и 3 к угловой скорости ведущего звена. Эти величины называются **передаточными отношениями**. Они позволяют определить угловые скорости звеньев 2 и 3 по заданной угловой скорости  $\omega_1$ . Поэтому производные  $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$  и  $\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$  называют также **аналогами угловых скоростей**  $\omega_2$  и  $\omega_3$  соответственно.

Вводя обозначения  $U_{21} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$  и  $U_{31} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$ , предыдущее уравнение запишем в виде:

$$r \sin \varphi_1 + U_{21} l \sin \varphi_2 = U_{31} m \sin \varphi_3. \quad (5.35)$$

При повороте координатных осей на угол  $\varphi_2$  в уравнении (5.35) исчезает второе слагаемое, а при повороте на угол  $\varphi_3$  обращается в нуль правая часть этого уравнения. В результате получаем:

$$r \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = U_{31} m \sin(\varphi_3 - \varphi_2),$$

$$r \sin(\varphi_1 - \varphi_3) = -U_{21} l \sin(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Отсюда определяются аналоги угловых скоростей звеньев 2 и 3:

$$U_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{r \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l \sin(\varphi_2 - \varphi_3)},$$

$$U_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{r \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{m \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \quad (5.36)$$

Для определения угловых ускорений  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  необходимо продифференцировать уравнение (5.35) по обобщенной координате  $\varphi_1$ :

$$r \cos \varphi_1 + U'_{21} l \sin \varphi_2 + U_{21}^2 l \cos \varphi_2 = U'_{31} m \sin \varphi_3 + U_{31}^2 m \cos \varphi_3.$$

Аналогами угловых ускорений служат величины  $U'_{21} = \frac{dU_{21}}{d\varphi_1}$  и  $U'_{31} = \frac{dU_{31}}{d\varphi_1}$ .

Также как и для аналогов угловых скоростей, аналоги угловых ускорений можно определить из предыдущего уравнения с помощью последовательного поворота системы координат на углы  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ . В результате получим:

$$r \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + U_{21}^2 l = U'_{31} m \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + U_{31}^2 m \cos(\varphi_3 - \varphi_2),$$

$$r \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + U'_{21} l \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + U_{21}^2 l \cos(\varphi_2 - \varphi_3) = U'_{31} m$$

и окончательно для аналогов угловых ускорений звеньев 2 и 3:

$$U'_{21} = \frac{U_{31}^2 m - U_{21}^2 l \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - r \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{l \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}, \quad (5.37)$$

$$U'_{31} = \frac{U_{21}^2 l - U_{31}^2 m \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + r \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{m \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \quad (5.38)$$

Истинные значения угловых скоростей и ускорений звеньев 2 и 3 будут равны:

$$\omega_2 = U_{21} \omega_1, \quad \omega_3 = U_{31} \omega_1, \quad (5.39)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d(U_{21} \omega_1)}{dt} = \omega_1 \frac{dU_{21}}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + U_{21} \frac{d\omega_1}{dt} = U'_{21} \omega_1^2 + U_{21} \varepsilon_1, \quad (5.40)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d(U_{31} \omega_1)}{dt} = \omega_1 \frac{dU_{31}}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + U_{31} \frac{d\omega_1}{dt} = U'_{31} \omega_1^2 + U_{31} \varepsilon_1.$$

При  $\omega_1 = \text{const}$  ( $\varepsilon_1 = 0$ ) выражения для определения  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  упрощаются.

Линейные скорости и ускорения шарнирных точек А и В (см. рис. 5.4) соответственно равны:

$$V_A = \omega_1 r, \quad W_A = \omega_1^2 r,$$

(5.41)

$$V_B = \omega_3 m, \quad W_B = m\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}.$$

Направления линейных скоростей и ускорений определяются известными направлениями величин  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  и  $\varepsilon_3$ .

Совокупность полученных соотношений позволяет точно вычислить кинематические характеристики любой точки всех звеньев рассматриваемого шарнирного четырехзвенника. Метод замкнутых контуров может быть применен и для анализа других типов механизмов. Однако достаточно очевидно, что трудоемкость вычислений будет быстро возрастать с увеличением числа звеньев и усложнения структуры механизмов.

### 5.5. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма

Применим метод замкнутых контуров к кинематическому анализу кривошипно-ползунного механизма, кинематическая схема которого приведена на рис. 5.5. Он отличается от механизма на рис. 5.1 только формой звена 2, что никак не сказывается на характере движения сходственных точек двух механизмов.

Будем считать известными длину  $r$  кривошипа 1, длину  $l$  шатуна 2 и закон движения кривошипа  $\varphi_1(\tau)$ . Для простоты рассмотрим работу механизма при вращении кривошипа с постоянной угловой скоростью:

$\frac{d\varphi}{d\tau} = \omega = const$ . Введем декартовую систему координат, совместив ось  $Ox$  с линией движения ползуна, а начало координат – с осью вращения кривошипа. Длина отрезка  $s = OB$  характеризует поступательное перемещение ползуна 3 относительно стойки 4, а угловая координата  $\beta$  – поворот шатуна 2.

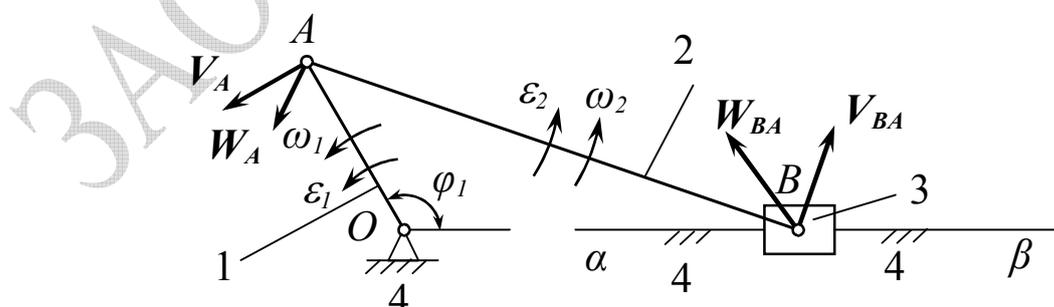


Рисунок 5.5

В результате решения требуется определить аналитические выражения для линейных и угловых координат ползуна и шатуна,

угловую скорость и ускорение шатуна, а также линейную скорость и ускорение ползуна. С учетом введенных обозначений указанные аналитические выражения должны быть представлены в виде

функций:  $s = s(\varphi)$ ,  $\beta = \beta(\varphi)$ ,  $\frac{ds(\varphi)}{d\tau}$ ,  $\frac{d\beta(\varphi)}{d\tau}$ ,  $\frac{d^2s(\varphi)}{d\tau^2}$ ,  $\frac{d^2\beta(\varphi)}{d\tau^2}$ .

Как и при анализе шарнирного четырехзвенника, введем замкнутый векторный контур  $r$ ,  $l$ ,  $s$ , повторяющий замкнутую кинематическую цепь механизма. Введенные вектора удовлетворяют очевидному равенству:

$$\mathbf{r} + \mathbf{l} + \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad (5.42)$$

которое в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oy$  дает два скалярных соотношения:

$$r \cos \varphi + l \cos \beta = s, \quad (5.43)$$

$$r \sin \varphi - l \sin \beta = 0. \quad (5.44)$$

Для треугольника  $OAB$  в силу теоремы синусов справедливо следующее соотношение между его углами и длинами сторон:

$$\frac{l}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin \beta} \quad \text{откуда} \quad \sin \beta = \frac{r}{l} \sin \varphi.$$

Используя это соотношение для угла  $\beta$ , характеризующего положение шатуна относительно стойки, можем записать:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \quad (5.45)$$

$$\beta = \beta(\varphi) = \arccos \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}, \quad (5.46)$$

где  $\lambda = r/l$  характеризует отношение длин кривошипа и шатуна.

Для получения явной зависимости  $s = s(\varphi)$ , определяющей положение ползуна в произвольный момент времени, подставим выражение (5.45) в соотношение (5.43). В результате получим аналитическое выражение в форме:

$$s = s(\varphi) = r \cos \varphi + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}. \quad (5.47)$$

С целью получения аналитического выражения для угловой скорости шатуна  $\frac{d\beta(\varphi)}{d\tau}$  продифференцируем по времени левую и правую части (5.44):

$$r\omega \cos \varphi = l \cos \beta \frac{d\beta}{d\tau} . \quad (5.48)$$

Подставляя сюда найденное ранее выражение (5.45), получим расчетное соотношение для определения угловой скорости звена 2:

$$\frac{d\beta(\varphi)}{d\tau} = \frac{\lambda\omega \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} . \quad (5.49)$$

Определим теперь скорость поступательного движения ползуна  $\frac{ds(\varphi)}{d\tau}$  относительно стойки как функцию положения ведущего звена. Для этого продифференцируем по времени левую и правую части соотношения (5.43):

$$\frac{ds(\varphi)}{d\tau} = -r\omega \sin \varphi - l \sin \beta \frac{d\beta}{d\tau}$$

или с учетом (5.44) и (5.49)

$$\frac{ds(\varphi)}{d\tau} = -r\omega \sin \varphi - \frac{l\lambda^2\omega \sin 2\varphi}{2\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} . \quad (5.50)$$

Полученные зависимости (5.49) и (5.50) несут полную информацию о характере движения шатуна и ползуна при вращении кривошипа. С их помощью можно определить скорость указанных звеньев в произвольный момент времени, крайние положения ползуна, когда его скорость обращается в нуль, максимальные скорости звеньев и т.д.

Перейдем к определению аналитических зависимостей для ускорений звеньев 2 и 3. Для определения углового ускорения шатуна  $\frac{d^2\beta(\varphi)}{d\tau^2}$  продифференцируем по времени левую и правую части равенства (5.48):

$$-r\omega^2 \sin \varphi = -l \left( \frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 \sin \beta + l \cos \beta \frac{d^2 \beta}{d\tau^2}.$$

Выражая отсюда производную  $\frac{d^2 \beta(\varphi)}{d\tau^2}$  с учетом (5.44), (5.345) и (5.50) в результате получаем:

$$\frac{d^2 \beta(\varphi)}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \left[ -\lambda \omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{\lambda^3 \omega^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \right]. \quad (5.51)$$

Наконец, для нахождения ускорения шатуна как функции положения кривошипа продифференцируем по времени соотношение (5.50). После аналогичных выкладок придем к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{s}(\varphi)}{d\tau^2} = & -r\omega^2 \cos \varphi - \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \left[ -\lambda \omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{\lambda^3 \omega^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \right] - \\ & - \frac{l\lambda^2 \omega^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Таким образом, поставленная цель - определение аналитических выражений для линейных и угловых координат ползуна и шатуна, для угловой скорости и ускорения шатуна, а также для линейной скорости и ускорения ползуна - достигнута. Громоздкость полученных выражений и отсутствие наглядности иногда затрудняют проведение кинематического анализа механизмов. Поэтому наиболее целесообразно при кинематическом анализе использовать оба метода: метод планов и метод замкнутого векторного контура. Как уже отмечалось, оба метода дополняют друг друга и в совокупности снижают вероятность ошибок при анализе механизмов.

## 5.6. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачи кинематического анализа механизмов.
2. Какие методы кинематического анализа Вы знаете? В чем состоят их достоинства и недостатки?
3. Что такое масштабный коэффициент?

4. Что такое план положений механизма?
5. Как построить планы положений механизма, соответствующие крайним положениям выходного звена механизма?
6. Что такое план скоростей механизма?
7. Как, исходя из построенного плана скоростей механизма, определить величину и направление угловой скорости шатуна?
8. Как с помощью плана скоростей механизма определить вектор линейной скорости произвольной точки некоторого звена механизма?
9. Что такое план ускорений механизма?
10. Как, исходя из построенного плана ускорений механизма, определить величину и направление углового ускорения шатуна?
11. Каковы основные свойства плана скоростей?
12. Сформулируйте основные свойства плана ускорений.

## Глава 6. Силовой (кинетостатический) анализ плоских рычажных механизмов

### 6.1. Задачи силового анализа. Характеристика сил, действующих на звенья механизма

При работе механизмов в их кинематических парах возникают силы взаимодействия между звеньями. Определение этих сил является необходимым условием для последующего расчета отдельных звеньев на прочность, жесткость, долговечность и другим критериям работоспособности. Постановка задачи определения реактивных усилий в кинематических парах, а также изложение методов ее решения составляет содержание настоящей главы.

Механизмы являются важнейшими составными частями большинства технологических машин. В процессе работы механизмы связаны и взаимодействуют с внешними по отношению к ним объектами: двигателем, рабочими средами, внешней средой. Мерой такого взаимодействия служат внешние (активные) силы, к которым относятся силы полезного (технологического) сопротивления, движущие силы (т.е. силы, источником которых служит двигатель), силы тяжести звеньев, силы вредного сопротивления (т.е. силы сопротивления внешней среды и силы трения в кинематических парах).

Помимо перечисленных сил, на движение звеньев оказывают влияние силы инерции, являющиеся результатом неравномерного движения звеньев. Силы инерции в современных машинах могут быть весьма значительными. Наконец, внутри механизма – в его кинематических парах возникают реактивные силы, которые также необходимо учитывать при анализе движения отдельных звеньев. Из всей совокупности сил, под действием которых происходит движение звеньев, часть сил задана (например, сила полезного сопротивления), другая часть сил может быть легко подсчитана (например, сила тяжести звеньев), оставшаяся часть сил (например, реакции в кинематических парах) может быть определена только методами силового анализа.

Силовой анализ представляет собой решение первой (прямой) задачи динамики применительно ко всем звеньям, составляющим механизм. Другими словами, характер движения и кинематические характеристики всех звеньев должны быть заданы, а в результате силового анализа следует найти реактивные усилия во всех кинематических парах механизма, а также (в большинстве случаев) внешнюю силу или внешний момент, приложенные к начальному звену, которые обеспечивают заданный закон его движения. Эти величины называются **уравновешивающей силой** и **уравновешивающим силовым моментом**. Уравновешивающая сила

(или уравнивающий момент) определяется на заключительном этапе силового анализа исходя из условия, что она является уравнивающей силой (уравнивающим моментом) для сил полезного сопротивления, сил тяжести, сил инерции при заданном законе движения.

Реактивные усилия в кинематических парах в отношении всего механизма являются внутренними усилиями. Однако в отношении отдельных звеньев они служат внешними силами, действие которых совместно с действием сил тяжести, центробежных и, возможно, других массовых сил полностью определяют движение звеньев. Следовательно, нахождение реакций в кинематических парах следует рассматривать как необходимый этап при расчете звеньев на прочность с разработкой их рациональных конструктивных форм и размеров. Расчет величины уравнивающей силы или уравнивающего момента также является обязательным условием для подбора привода, обеспечивающего нормальную работу рабочего органа машины.

Обобщая сказанное, можно следующим образом сформулировать задачи силового анализа плоских рычажных механизмов:

- определение сил реакций в кинематических парах;
- нахождение уравнивающего силового момента или уравнивающей силы на ведущем звене.

Силы, действующие на звенья механизма, имеют различную физическую природу и оказывают разное влияние на его работу. Силы, которые совершают положительную работу, называются **движущими силами**. Они стремятся ускорить движение ведущего звена. Совершаемую движущими силами работу называют **затрачиваемой работой**.

Силы, приложенные к звеньям механизма и совершающие отрицательную работу, называются **силами сопротивления**. Эти силы стремятся замедлить движение ведущего звена. В свою очередь силы сопротивления делятся на силы **полезного сопротивления** и силы **вредного сопротивления**. Работа первых затрачивается на выполнение того технологического процесса, для которого предназначен данный механизм. Сила полезного сопротивления приложена к выходному звену, например, со стороны обрабатываемой среды. Она всегда направлена противоположно движению этого звена. Обычно сила полезного сопротивления является функцией перемещения выходного звена, определяется на основе технологических расчетов, задается аналитически, графически или таблично.

Работа сил вредного сопротивления затрачивается на преодоление сил трения или сил сопротивления внешней среды. Сопротивление среды учитывается при расчете высокоскоростных механизмов или при расчете механизмов, работающих в жидкой среде. Силы трения в

кинематических парах появляются под действием реактивных сил. Во многих расчетах силы трения учитываются через КПД механизма или машины. В некоторых случаях ими пренебрегают.

Особую роль при движении звеньев механизмов играют силы инерции. При работе быстроходных машин эти силы зачастую превышают все остальные. Как известно из теоретической механики, величина сил инерции пропорциональна ускорению тела и его массе. Направление силы инерции противоположно направлению ускорения. Учет сил инерции при силовом расчете механизмов основан на принципе Даламбера (см. подраздел 3.3), согласно которому *любое движущееся ускоренно материальное тело можно условно рассматривать находящимся в состоянии динамического равновесия, если ко всем действующим на него силам (включая реакции связей) добавить силы инерции*. Достоинство использования принципа Даламбера при силовом анализе механизмов заключается в том, что решение задачи динамики сводится к решению более простой задачи статики.

Применительно к силовому расчету механизмов принцип Даламбера позволяет составить уравнения равновесия системы сил для каждого из звеньев: сумма всех сил, приложенных к звену, плюс возникающие в процессе ускоренного движения силы инерции равна нулю. Силовой расчет звеньев механизмов с учетом сил инерции получил название **кинетостатического расчета**.

Рассмотрим действие сил в кинематических парах, пренебрегая пока что силами вредного сопротивления (силами трения). Как уже отмечалось ранее, плоские рычажные механизмы могут содержать только пары V и IV классов. С другой стороны, как отмечалось в разделе 4, любой механизм с парами V и IV классов может быть заменен эквивалентным ему механизмом, содержащим пары только V класса. Поэтому при анализе действующих в кинематических парах сил достаточно ограничиться парами V класса. Для плоских механизмов это вращательные и поступательные пары.

Во вращательной паре при отсутствии трения результирующая реактивная сила (сила взаимодействия звеньев) направлена нормально к поверхности соприкосновения звеньев (см. подраздел 1.2). Следовательно, в любой момент времени она проходит через центр шарнира. Однако ее величина и линия действия заранее неизвестны.

В поступательной паре при отсутствии трения результирующая реактивная сила направлена перпендикулярно к линии относительного движения звеньев, а величина и точка приложения реакции остаются неизвестными. Следовательно, для любой пары число неизвестных при определении реакций равно двум.

Пусть имеется кинематическая цепь, содержащая  $n$  подвижных звеньев и  $p_5$  низших кинематических пар (пар V класса). Каждое звено

в плоском рычажном механизме совершает плоскопараллельное движение. Для него можно записать 3 уравнения равновесия. Для всех звеньев рассматриваемой кинематической цепи число уравнений равновесия будет равно  $3n$ , а число неизвестных, которые необходимо найти, составит величину  $2p_5$ . Поэтому условием статической определимости кинематической цепи будет равенство:

$$3n = 2p_5 \quad \text{или} \quad 3n - 2p_5 = 0. \quad (6.1)$$

Но это условие равносильно тому, что рассматриваемая кинематическая цепь является группой Ассура (см. подраздел 4.3). Таким образом, любая группа Ассура представляет собой статически определимую систему.

Отсюда вытекает целесообразная последовательность силового расчета механизмов, которая заключается в определении реактивных усилий в кинематических парах отдельных структурных групп. Однако в отличие от кинематического анализа силовой расчет начинается с одной из крайних групп Ассура и заканчивается силовым расчетом ведущего звена. При этом анализ может быть проведен двумя методами: аналитическим и графоаналитическим. Здесь рассматривается второй из указанных методов с помощью построения планов сил и так называемого рычага Жуковского.

Исходными данными для силового анализа механизма служат планы положений, скоростей и ускорений, закон изменения силы полезного сопротивления. Дополнительно вычисляются силы тяжести, силы и моменты сил инерции всех звеньев.

## 6.2. Расчет сил инерции отдельных звеньев

Применение принципа Даламбера при силовом анализе рычажных механизмов предполагает введение в уравнения динамического равновесия сил инерции в дополнение к внешним силам и силам реакций связей. Силы инерции, как известно, противодействуют ускорению материальных тел, являясь проявлением одного из фундаментальных физических свойств материи – ее инерционности. Они пропорциональны величине ускорения и степени инерционности, которая характеризуется массой тела при поступательном движении и моментом инерции – при вращательном движении.

Поскольку различные точки некоторого звена при плоскопараллельном движении в общем случае имеют разные ускорения, то и элементарные силы инерции в различных участках этого звена также будут отличаться. Вся совокупность элементарных сил инерции, действующих на звено с номером  $i$ , может быть сведена к главному вектору сил инерции  $\Phi_{ui}$ , приложенному в центре масс  $S$  звена, и паре сил инерции с моментом  $M_{\Phi i}$ , направленному

противоположно угловому ускорению звена  $\varepsilon_i$ . Величины  $\Phi_{ui}$  и  $M_{\Phi i}$  определяются соотношениями (см. подраздел 3.3):

$$\Phi_{ui} = -m_i \mathbf{W}_{Si}, \quad (6.2)$$

$$M_{\Phi i} = -J_{Si} \varepsilon_i. \quad (6.3)$$

Здесь  $m_i$  – масса звена;  $\mathbf{W}_{Si}$  – вектор полного ускорения его центра масс;  $J_{Si}$  – момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения звеньев механизма. Главный вектор  $\Phi_{ui}$  и главный момент  $M_{\Phi i}$  сил инерции количественно отражают эффект ускоренного движения звена и должны входить в уравнения динамического равновесия.

В некоторых частных случаях движения звена соотношения (6.2) и (6.3) допускают упрощения. Если звено движется поступательно с некоторой переменной скоростью, то угловое ускорение звена равно нулю, и система сил инерции приводится к одной результирующей силе (формула (6.2)), приложенной в центре масс  $S$  звена и направленной противоположно ускорению  $\mathbf{W}_{Si}$ .

Если звено вращается вокруг оси, не проходящей через его центр масс, то вся совокупность сил инерции, как и в случае плоскопараллельного движения, может быть сведена к результирующей силе и моменту, вычисляемым с помощью формул (6.2) и (6.3). При равномерном вращательном движении звена  $\varepsilon_i = 0$ , так что для учета силового эффекта ускоренного движения достаточно одной силы  $\Phi_{ui}$ . В том случае, когда центр вращения совпадает с центром масс звена (такое звено называют уравновешенным), ускорение центра масс  $\mathbf{W}_{Si}$  отсутствует, и система сил инерции приводится к паре сил, момент которой вычисляется с помощью формулы (6.3).

### 6.3. Определение реакций в кинематических парах

Рассмотрим задачу определения реактивных усилий в кинематических парах плоских рычажных механизмов на примере шестизвенного рычажного механизма, изображенного на рис. 6.1, а. Аналогичный механизм уже рассматривался в подразделе 4.3 при анализе структуры плоских механизмов. Он состоит из базового механизма (звенья 1 и 6) и двух групп Ассур. Первая включает звенья 2 и 3, а вторая – звенья 4 и 5.

Кинетостатический анализ проводится с использованием результатов структурного и кинематического анализа. Следовательно, исходными данными для силового анализа являются планы положений, скоростей и ускорений механизма или аналитические

выражения для кинематических характеристик всех звеньев в виде их зависимостей от обобщенной координаты ведущего звена. Кроме того, считаются известными размеры и форма звеньев, а также конструкционный материал, из которого они изготовлены. Последние данные позволяют найти местоположение центра масс каждого звена, его вес и момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

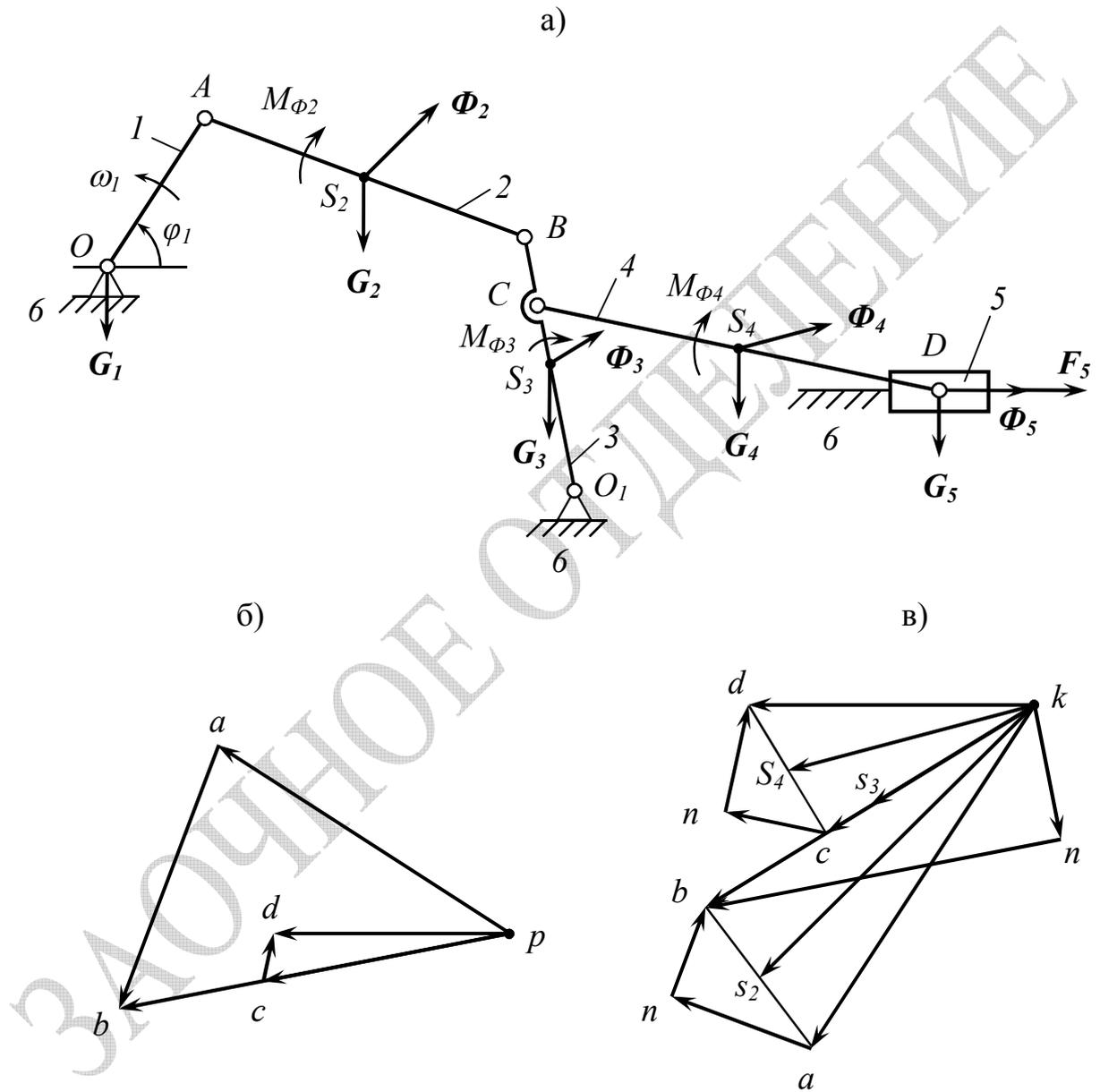


Рисунок 6.1

Для рассматриваемого шестизвенника будем считать, что центры масс всех звеньев, за исключением кривошипа 1, лежат на середине отрезков, соединяющих центры шарниров звеньев (точки  $s_2, s_3,$  и  $s_4$  на рис. 6.1, а), а центр масс ползуна 5 совпадает с шарниром D. План скоростей и план ускорений, построенные методами, которые

изложены в предыдущем разделе, для данного механизма имеют вид, представленный на рис. 6.1, б и рис. 6.1, в.

Перечислим силы, приложенные к звеньям механизма, пренебрегая пока что силами трения в кинематических парах. На ползун 5 действует сила полезного сопротивления  $F_5$ , за счет которой непосредственно реализуется назначение механизма по проведению технологического процесса. Сила  $F_5$  направлена противоположно скорости движения ползуна. Кроме того, к ползуну приложена сила его веса  $G_5$  и сила инерции  $\Phi_5$ , направленная противоположно ускорению точки D.

К шатуну 4 приложена сила его веса  $G_4$ , сила инерции  $\Phi_4$  в точке  $s_4$ , направленная противоположно ускорению этой точки, а также пара сил инерции с моментом  $M_{\Phi 4}$ , направленным противоположно угловому ускорению  $\varepsilon_4$  шатуна. К коромыслу 3 приложен такой же набор сил: сила веса  $G_3$ , сила инерции  $\Phi_3$ , действующая в центре масс  $s_3$ , и пара сил с моментом  $M_{\Phi 3}$ . Наконец, на шатун 2 действуют усилия  $G_2$ ,  $\Phi_2$  и  $M_{\Phi 2}$  того же характера.

Под действием перечисленных сил в местах соприкосновения элементов кинематических пар возникают силы реакции. Обозначим реактивные усилия через  $R$  с соответствующими индексами. Например, через  $R_{1-2}$  обозначим величину силы давления, с которым звено 1 воздействуют на звено 2. Порядок силового расчета, как уже отмечалось, является обратным порядку кинематического анализа, т.е. расчет начинается со структурной группы, включающей выходное звено, и заканчивается расчетом входного звена. Поэтому расчет рассматриваемого механизма начинается с группы Ассура, включающей шатун 4 и ползун 5 (рис. 6.2, а).

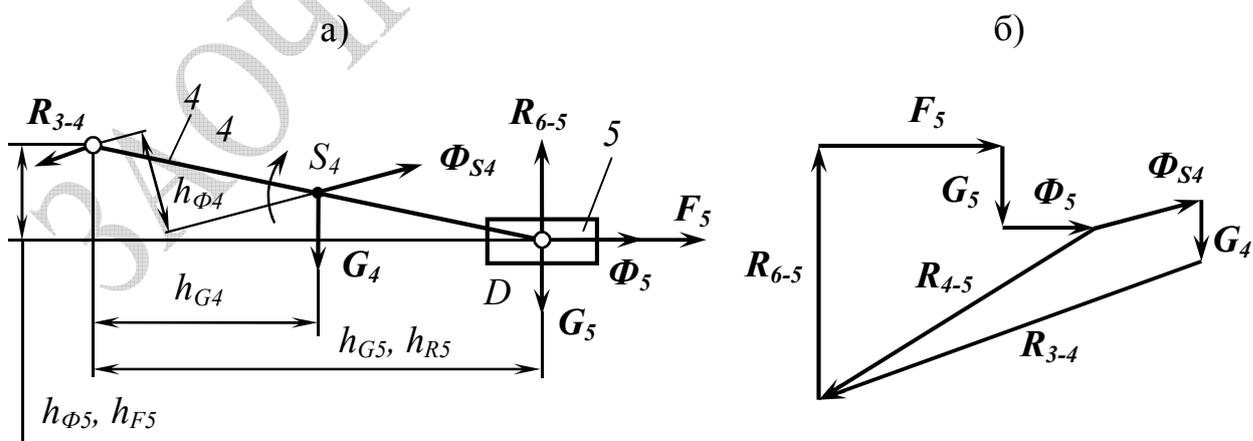


Рисунок 6.2

На звенья выделенной структурной группы помимо сил, перечисленных выше, действуют реактивные усилия  $R_{6-5}$  и  $R_{3-4}$ . Реакция  $R_{6-5}$  отражает силовое воздействие стойки на ползун. В отсутствие трения она направлена перпендикулярно направляющей ползуна, а линия ее действия проходит через точку D. Последнее вытекает из условия уравнивания моментов системы сходящихся сил (1.3). Реакция  $R_{3-4}$  отражает силовое взаимодействие между шатуном и коромыслом. Ее направление заранее неизвестно, а линия действия реакции  $R_{3-4}$  проходит через точку C. Составим уравнение равновесия по моментам всех сил, действующих на звенья групп, относительно точки C. С учетом обозначений и выбранных направлений действия сил на рис. 6.2, а имеем:

$$R_{6-5} h_{6-5} - G_5 h_{6-5} + F_5 h_{\Phi_5} + \Phi_5 h_{\Phi_5} - M_{\Phi_4} + \Phi_4 h_{\Phi_4} - G_4 h_{G_4} = 0. \quad (6.4)$$

Численные значения сил инерции  $\Phi_4$  и  $\Phi_5$  в этом соотношении, а также момент сил инерции  $M_{\Phi_4}$  вычисляются по результатам кинематического анализа. Сила полезного сопротивления  $F_5$ , а также вес шатуна  $G_4$  и ползуна  $G_5$  заданы. Величины плеч указанных сил относительно точки C определяются с помощью построенного плана положений. Например, плечо силы инерции шатуна равно:

$$h_{\Phi_4} = (h_{\Phi_4}) \mu_l,$$

где  $(h_{\Phi_4})$  - расстояние от линии действия силы  $\Phi_4$  на плане положений до точки C,  $\mu_l$  - масштабный коэффициент плана положений механизма.

Единственной неизвестной величиной в соотношении (6.4) является искомая реакция  $R_{6-5}$ . Решая его относительно этой неизвестной, получаем следующее выражение для ее вычисления:

$$R_{6-5} = \frac{G_5 h_{6-5} - F_5 h_{\Phi_5} - \Phi_5 h_{\Phi_5} + M_{\Phi_4} - \Phi_4 h_{\Phi_4} + G_4 h_{G_4}}{h_{6-5}}. \quad (6.5)$$

Если значение  $R_{6-5}$  при вычислении получится отрицательным, то принятое на рис. 6.2, а направление этой реакции следует заменить на противоположное.

Для определения реакции  $R_{3-4}$  запишем уравнение равновесия по силам для выделенной группы Ассур в векторной форме. При этом слагаемые в уравнении целесообразно разместить в определенной последовательности: сначала записать силы, действующие на одно звено, а затем - силы, действующие на другое:

$$\mathbf{R}_{6-5} + \mathbf{F}_5 + \mathbf{G}_5 + \mathbf{\Phi}_5 + \mathbf{\Phi}_4 + \mathbf{G}_4 + \mathbf{R}_{3-4} = \mathbf{0}. \quad (6.6)$$

В этом уравнении величина и направление всех сил, за исключением реакции  $R_{3-4}$ , известны. Определим ее графическим способом. В главе «Статика» отмечалось, что плоская система сил эквивалентна нулевой силе в том случае, если силовой многоугольник является замкнутым. Верно и обратное. Следовательно, для выполнения равенства (6.6) необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на силах, которые входят в равенство (6.6), был замкнутым.

После выбора масштабного коэффициента  $\mu_F$  плана сил, с учетом величины и направления каждой силы строится векторный силовой многоугольник в порядке, соответствующем последовательности слагаемых в (6.6). Такой силовой многоугольник представлен на рис. 6.2, б. Тогда вектор, соединяющий конец вектора  $G_4$  с началом вектора  $R_{6-5}$ , определит величину и направление искомой реакции  $R_{3-4}$ .

Точно так же может быть найдена реактивная сила  $R_{4-5}$ , отражающая силовое взаимодействие шатуна и ползуна. Уравнение равновесия для звена 5 запишется в виде:

$$R_{6-5} + F_5 + G_5 + \Phi_5 + R_{4-5} = 0. \quad (6.7)$$

Соединяя в уже построенном силовом многоугольнике (рис. 6.2, б) конец вектора  $\Phi_5$  с началом вектора  $R_{6-5}$ , получим величину и направление реакции  $R_{4-5}$ . Таким образом, все реакции в кинематических парах группы Ассур, включающей звенья 4 и 5, найдены.

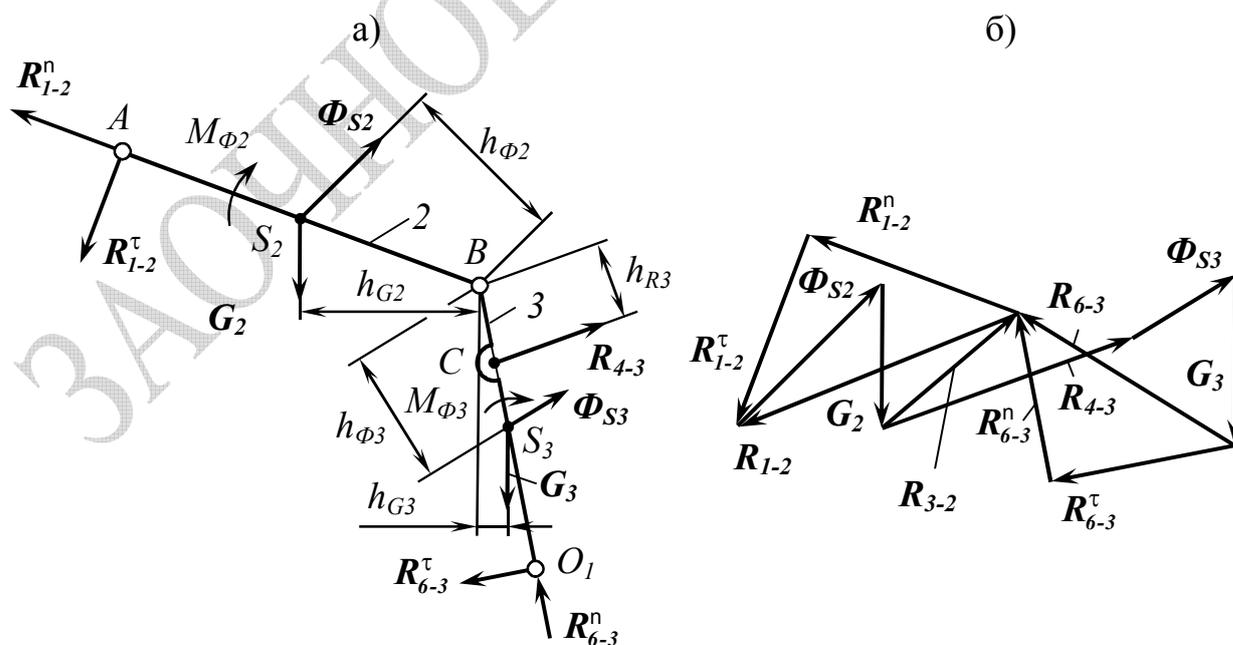


Рисунок 6.3

Определим теперь реакции в кинематических парах группы Ассур, включающей звенья 2 и 3 (рис. 6.3, а). Все силы, действующие на звенья в этой группе, по результатам кинематического анализа могут быть вычислены по величине и направлению. Неизвестными являются реакции  $R_{1-2}$  и  $R_{6-3}$ , отражающие силовое взаимодействие шатуна 2 с ведущим звеном и коромысла 3 со стойкой. Реакция  $R_{4-3}$  равна по величине уже найденной реактивной силе  $R_{3-4}$  и противоположна ей по направлению.

Разложим каждую из неизвестных реакций  $R_{1-2}$  и  $R_{6-3}$  на две составляющих. Одну составляющую направим вдоль оси соответствующего звена (индекс  $n$ ), а другую – перпендикулярно оси (индекс  $\tau$ ). В результате имеем два векторных равенства:

$$\begin{aligned} R_{1-2} &= R_{1-2}^n + R_{1-2}^\tau \\ R_{6-3} &= R_{6-3}^n + R_{6-3}^\tau. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Составляющие реакций  $R_{1-2}^\tau$  и  $R_{6-3}^\tau$ , перпендикулярные оси звеньев, нетрудно найти, составив для каждого звена группы уравнение равновесия по моментам сил относительно точки В. Действительно, для звена 2 имеем:

$$R_{1-2}^\tau h_{AB} - \Phi_2 h_{\Phi_2} - M_2 + G_2 h_{G_2} = 0.$$

Здесь через величинами  $h$  обозначены плечи соответствующих сил, а знаки перед слагаемыми выбраны, исходя из направлений моментов сил, указанных на рис. 6.3, а. Значения плеч находятся из плана положений механизма. Из последнего равенства выразим  $R_{1-2}^\tau$ :

$$R_{1-2}^\tau = \frac{\Phi_2 h_{\Phi_2} + M_2 - G_2 h_{G_2}}{h_{AB}}. \quad (6.9)$$

Аналогично для звена 3 уравнение равновесия можно записать в виде:

$$R_{6-3}^\tau h_{BO_1} - \Phi_3 h_{\Phi_3} - R_{4-3} h_{4-3} + G_3 h_{G_3} + M_3 = 0.$$

В этом уравнении единственной неизвестной величиной является реакция  $R_{6-3}^\tau$ , поскольку длины плеч всех сил могут быть вычислены с помощью плана положений механизма. Решая уравнение относительно  $R_{6-3}^\tau$ , получаем:

$$R_{6-3}^{\tau} = \frac{\Phi_3 h_{\Phi_3} + R_{4-3} h_{4-3} - G_3 h_{G_3} - M_3}{h_{BO_1}}. \quad (6.10)$$

При вычислении составляющих  $R_{1-2}^{\tau}$  и  $R_{6-3}^{\tau}$  полных реакций по формулам (6.9) и (6.10) их значения могут получиться отрицательными. Это означает, что направление реальных реактивных усилий является противоположным первоначально выбранным. Поэтому на плане сил отрицательные реакции следует направить в противоположную сторону.

Для того чтобы определить составляющие  $R_{1-2}^n$  и  $R_{6-3}^n$  поступим следующим образом. Запишем в векторной форме уравнение равновесия сил, действующих на всю рассматриваемую группу (рис. 6.3, а), придерживаясь последовательности слагаемых, о которой говорилось выше:

$$\mathbf{R}_{1-2}^n + \mathbf{R}_{1-2}^{\tau} + \mathbf{\Phi}_2 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{R}_{4-3} + \mathbf{\Phi}_3 + \mathbf{G}_3 + \mathbf{R}_{6-3}^{\tau} + \mathbf{R}_{6-3}^n = \mathbf{0}. \quad (6.11)$$

В этом уравнении величина и направление всех векторов уже определены за исключением первого и последнего. Относительно векторов  $\mathbf{R}_{1-2}^n$  и  $\mathbf{R}_{6-3}^n$  известны только их направление (вдоль звена 2 и вдоль звена 3 соответственно). Величина этих векторов может быть найдена из построения плана сил, входящих в уравнение (6.11).

Предварительно выбирается масштаб плана сил. Затем из произвольной точки чертежа последовательно откладываются все известные вектора сил, начиная с  $\mathbf{R}_{1-2}^{\tau}$  и заканчивая  $\mathbf{R}_{6-3}^{\tau}$  (рис. 6.3, б). Через начало вектора  $\mathbf{R}_{1-2}^{\tau}$  параллельно отрезку АВ на плане положений проводится прямая, которая задает, очевидно, направление вектора  $\mathbf{R}_{1-2}^n$ . Такая же прямая, но параллельная отрезку ВО<sub>1</sub>, проводится через конец вектора  $\mathbf{R}_{6-3}^{\tau}$ . Эта прямая будет задавать направление вектора  $\mathbf{R}_{6-3}^n$ . Пересечение указанных прямых определяет величины отрезков, изображающих в выбранном масштабе искомые вектора  $\mathbf{R}_{1-2}^n$  и  $\mathbf{R}_{6-3}^n$ .

Если теперь сложить вектора  $\mathbf{R}_{1-2}^n$  и  $\mathbf{R}_{1-2}^{\tau}$ , соединяя на плане сил начало первого вектора с концом второго (рис. 6.3, б), то получим полную реакцию  $\mathbf{R}_{1-2}$  в кинематической паре А. Аналогично можно найти реакцию  $\mathbf{R}_{6-3}$  в кинематической паре О<sub>1</sub>.

До сих пор в построениях не участвовала реакция в шарнире В. Для нахождения этой реакции составим уравнение равновесия сил, действующих на звено 2. При этом мысленно отбросим звено 3, а его

воздействие заменим искомой реактивной силой  $\mathbf{R}_{3-2}$ . Тогда указанное уравнение может быть записано в виде:

$$\mathbf{R}_{1-2} + \mathbf{G}_2 + \mathbf{R}_{3-2} = \mathbf{0}. \quad (6.12)$$

Теперь воспользуемся уже построенным планом сил (рис. 6.3, б). Силовой многоугольник, соответствующий уравнению (6.12), получим, соединяя начало вектора  $\mathbf{R}_{1-2}$  с концом вектора  $\mathbf{G}_2$ . Полученный отрезок с учетом масштаба плана сил изображает реактивную силу  $\mathbf{R}_{3-2}$ .

Рассмотренный пример определения реактивных усилий иллюстрирует методику их отыскания в кинематических парах структурных групп. Указанная методика может быть использована для силового анализа механизмов с любым сочетанием вращательных и поступательных пар. Однако кинетостатический расчет ведущего звена представляет собой отдельную задачу.

#### 6.4. Кинетостатика ведущего звена механизма

Движение ведущего звена механизма, как уже отмечалось, обеспечивается движущей силой, приложенной к этому звену со стороны двигателя. В случае использования электродвигателя к механизму прикладывается движущий момент (всегда направленный в направлении вращения кривошипа). Величины движущей силы или движущего момента неизвестны. Они определяются на заключительном этапе силового анализа из условия, что движущая сила и движущий момент обеспечивают заданный закон движения ведущего звена, уравновешивая всю совокупность полезных сил, сил сопротивления, тяжести и инерции, действующих на звенья механизма.

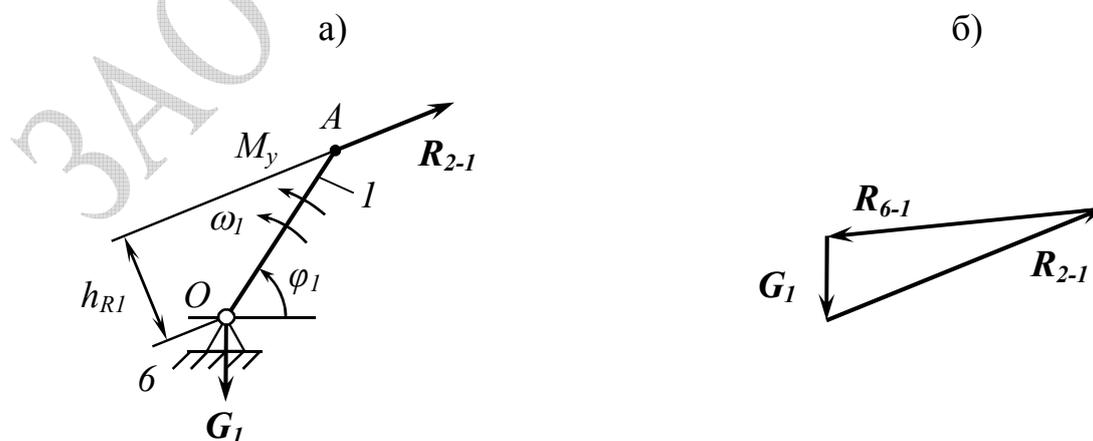


Рисунок 6.4

На кривошип в точке А со стороны звена 2 действует реактивная сила, которая с точностью до знака совпадает с реакцией  $R_{1-2}$ :  $R_{2-1} = -R_{1-2}$ . Величина и направление последней известны по результатам предыдущего расчета. Кроме того, к центру масс кривошипа приложен его вес. В большинстве механизмов центр масс кривошипа лежит на оси его вращения (точка О на рис. 6.4, а). Этому добиваются специальными конструктивными решениями для того, чтобы избежать дополнительного динамического давления от центробежной силы инерции на вращающиеся детали и элементы подшипников. При этом равен нулю главный вектор сил инерции  $\Phi_1$ . Однако момент пары сил инерции  $M_{\Phi_1} = -J_1 \varepsilon_1$  при отличном от нуля угловом ускорении кривошипа учитываться должен.

Таким образом, при силовом расчете ведущего звена следует учитывать реакцию  $R_{2-1}$ , силу тяжести  $G_1$  и реакцию  $R_{6-1}$  на ведущее звено со стороны стойки. Система перечисленных сил для вращающегося кривошипа находится в равновесии, если кривошип вращается равномерно. Следовательно, они удовлетворяют следующему векторному уравнению:

$$R_{2-1} + G_1 + R_{6-1} = 0. \quad (6.13)$$

Согласно этому уравнению в выбранном масштабе на плане сил откладывают вектора двух первых сил (рис. 6.4, б). Тогда замыкающий вектор, соединяющий конец вектора  $R_{2-1}$  и начало вектора  $G_1$ , изобразит реакцию  $R_{6-1}$ .

Для определения уравновешивающего момента  $M_y$  составим уравнение моментов всех сил относительно точки О (рис. 6.4, а):

$$R_{2-1} h_{R1} - M_{\Phi_1} - M_y = 0. \quad (6.14)$$

Плечо реакции  $R_{2-1}$  относительно точки О находится из плана положений механизма. Тогда для величины уравновешивающего момента получаем:

$$M_y = R_{2-1} h_{R1} - M_{\Phi_1}. \quad (6.15)$$

Если окажется, что  $M_y < 0$ , то направление уравновешивающего момента следует заменить на обратное по сравнению с выбранным. В случае равномерного движения кривошипа ( $\varepsilon = 0$ ) момент сил инерции отсутствует, и выражение (6.15) упрощается.

По найденной величине уравновешивающего момента  $M_y$  для некоторого положения механизма нетрудно определить мгновенное значение мощности  $N$ , которую необходимо затратить двигателю на преодоление действующих сил и обеспечения движения начального звена:

$$N = \frac{M_y \omega_1}{\eta}, \quad (6.16)$$

где  $\eta$  – коэффициент полезного действия механизма. Для механизмов, применяемых в химическом оборудовании, КПД лежит в пределах  $0,8 \div 0,85$ .

Если направление вращения кривошипа не совпадает с направлением уравнивающего момента, то это означает, что механизм в данный момент времени движется по инерции, и мощность двигателя не расходуется.

#### 6.5. Определение уравнивающей силы (уравнивающего момента) по методу Жуковского

В тех случаях, когда определять силы реакции во всех кинематических парах не нужно (например, при расчете мощности привода), уравнивающую силу (или уравнивающий момент) можно найти без построения плана сил более простым методом. Этот метод основан на следующей теореме: *если какой-либо механизм с подвижностью, равной единице, находится под действием приложенных к нему сил в равновесии, то в равновесии будет находиться и повернутый на  $90^\circ$  план скоростей, рассматриваемый как рычаг с опорой в полюсе плана скоростей и нагруженный теми же силами, приложенными в соответствующих точках этого плана.*

Очевидно, что формулировка теоремы предполагает использование принципа Даламбера. Следовательно, речь в теореме идет о равновесии системы сил, включая силы инерции, приложенные к звеньям механизма. Применение указанной теоремы к силовому анализу плоских рычажных механизмов заключается в следующем. Все силы, действующие на звенья механизма, переносятся без изменения их величины и направления в одноименные точки плана скоростей, повернутого на  $90^\circ$ . Далее составляется уравнение равновесия по моментам всех перенесенных сил относительно полюса плана скоростей. С геометрической точки зрения это уравнение можно рассматривать как условие равновесия некоторого **рычага** («рычага» Жуковского) с опорой в полюсе. Единственным неизвестным в уравнении будет уравнивающий момент или момент уравнивающей силы, что позволяет определить их величину.

Этот метод получил название **метода Жуковского** по имени ученого, который его разработал. Проиллюстрируем использование метода Жуковского на примере шарнирного четырехзвенного механизма, схема которого приведена на рис. 6.5, а. Нетрудно видеть,

что указанный механизм обладает одной степенью свободы. Поэтому к нему применима теорема Жуковского.

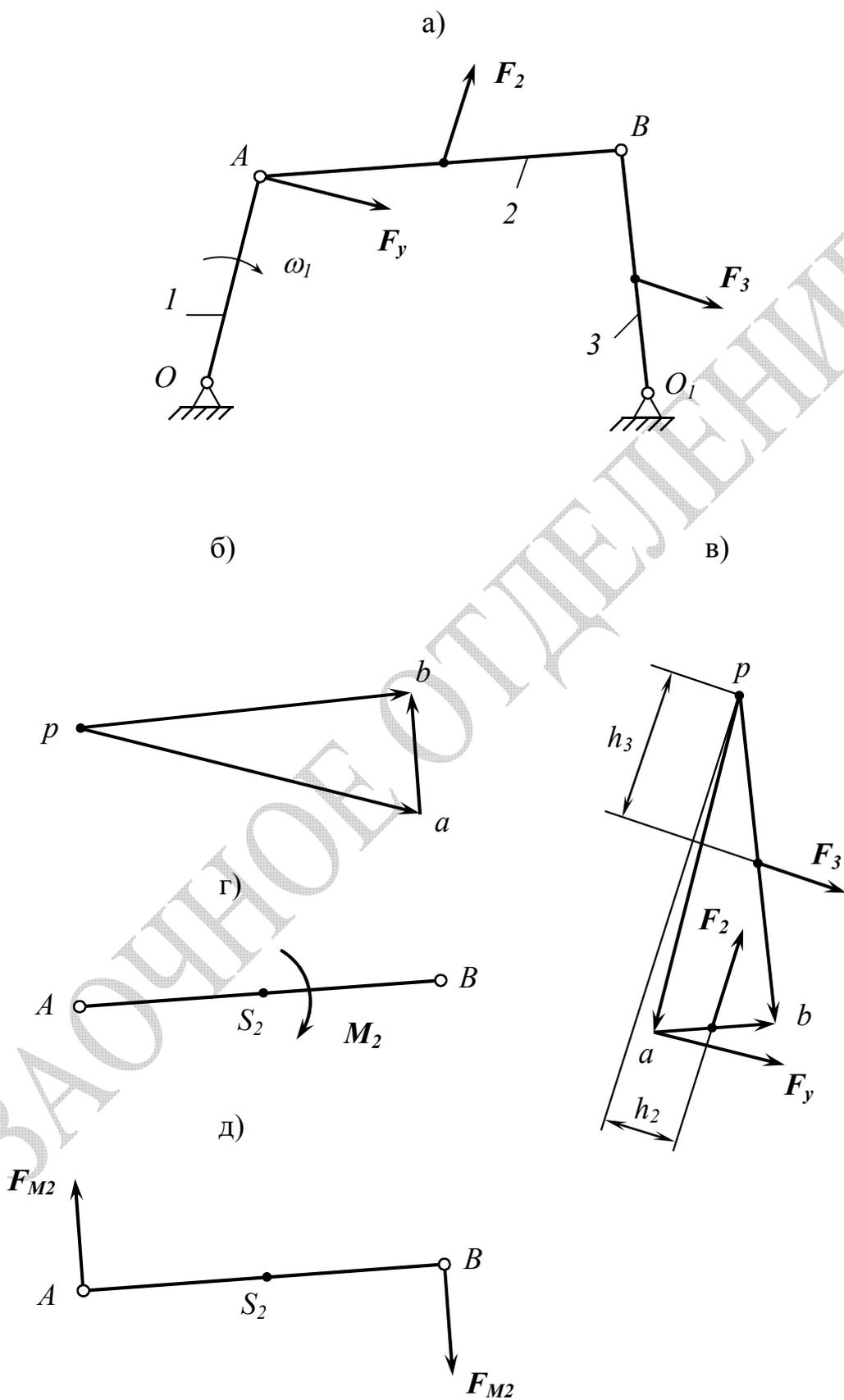


Рисунок 6.5

Пусть звенья 2 и 3 механизма нагружены заданными силами  $F_2$  и  $F_3$ , которые являются равнодействующими внешних сил и сил инерции. Требуется определить уравнивающую силу  $F_y$ , приложенную в точке А. В данном случае, очевидно, не имеет значения, что необходимо найти: уравнивающую силу или уравнивающий момент. Они связаны простым соотношением:  $M_y = F_y \cdot OA$ .

Для применения теоремы, прежде всего, следует построить план скоростей. Для рассматриваемого механизма он приведен на рис. 6.5, б. Далее в соответствии с формулировкой теоремы Жуковского построенный план скоростей поворачивается на  $90^\circ$  и в точках плана, соответствующих одноименным точкам звеньев механизма, прикладываются векторы заданных и искомой сил (рис. 6.5, в). Тогда условие равновесия рычага относительно полюса  $p$  может быть записано в виде:

$$M_p(F_2) + M_p(F_3) + M_p(F_y) = 0 \quad (6.17)$$

или, используя измеренные длины плеч входящих в это соотношение сил, имеем:

$$F_y \cdot ap + F_3 \cdot h_3 + F_2 \cdot h_2 = 0. \quad (6.18)$$

Откуда для уравнивающей силы получаем:

$$F_y = -\frac{F_2 h_2 + F_3 h_3}{ap}. \quad (6.19)$$

Если на какое-либо звено механизма, помимо сил, действует момент, то при использовании метода Жуковского он заменяется парой сил, момент которой равен действующему моменту. Например, если на звено 2 действует момент  $M_2$  (рис. 6.5, г), то его следует заменить парой сил  $\{F_{M2}, -F_{M2}\}$ , где  $F_{M2} = M_2 / AB$  (рис. 6.5, д). Далее к механизму применяется уравнение (6.17), в котором наряду с другими заданными силами участвуют и силы  $F_{M2}$  и  $-F_{M2}$ .

Мгновенная мощность привода при найденной величине уравнивающей силы может быть определена по формуле:

$$N = F_y \cdot OA \cdot \omega_1 = F_y \cdot V_A. \quad (6.20)$$

Таким образом, с помощью теоремы Жуковского можно определить уравнивающую силу (или уравнивающий момент), не проводя силового расчета всего механизма.

Из теоремы Жуковского вытекает несколько важных следствий, из которых одно будет использоваться в главе 8 при анализе движения механизмов. Его целесообразно также сформулировать в форме теоремы. Если силу  $F_i$ , приложенную к какой-либо точке  $i$ -го звена механизма, перенести параллельно самой себе в одноименную точку повернутого на  $90^\circ$  плана скоростей  $i$ -го звена, то момент этой силы относительно полюса повернутого плана будет пропорционален мощности, развиваемой этой силой:

$$N_i = \mu_V M_P (F_i) \quad (6.21)$$

При этом коэффициентом пропорциональности будет служить масштабный коэффициент плана скоростей.

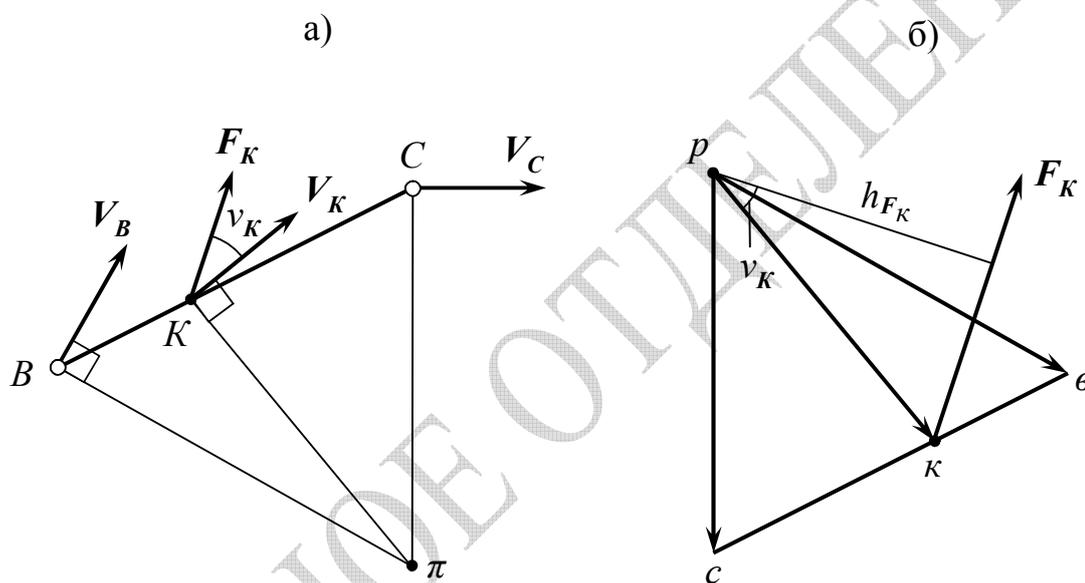


Рисунок 6.6

В силу важности сформулированной теоремы докажем ее. Пусть в результате кинематического анализа известны направление и величина скорости точек  $B$  и  $C$  некоторого звена  $BC$  механизма (рис. 6.6, а). Найдем мгновенный центр скоростей  $\Pi$  звена, восстановив перпендикуляры к векторам  $V_B$  и  $V_C$ . Используя масштабный коэффициент плана скоростей  $\mu_V$ , построим повернутый на  $90^\circ$  план скоростей звена  $BC$  (рис. 6.6, б). Вектор силы  $F_K$ , приложенный в точке  $K$  звена  $BC$ , перенесем параллельно самому себе в одноименную точку  $k$  на повернутом плане скоростей.

Мощность, развиваемая силой  $F_K$ , равна, как известно, скалярному произведению вектора этой силы на вектор скорости  $V_K$  точки приложения силы:

$$N_k = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{V}_k = F_k V_k \cos \nu_k = F_k (pk) \mu_V \cos \nu_k, \quad (6.22)$$

где  $\nu_k$  – угол между векторами  $\mathbf{F}_k$  и  $\mathbf{V}_k$ ,  $(pk)$  – длина отрезка на плане скоростей, соответствующая скорости точки  $K$ . С другой стороны «момент» силы  $\mathbf{F}_k$  относительно полюса  $p$  повернутого на  $90^\circ$  плана скоростей будет равен:

$$M_p(\mathbf{F}_k) = F_k h_{Fk} = F_k (pk) \cos \nu_k. \quad (6.23)$$

где  $h_{Fk}$  – «плечо» силы  $\mathbf{F}_k$  на «рычаге» Жуковского, т.е. расстояние от линии действия этой силы до полюса  $p$ .

Сопоставляя формулы (6.22) и (6.23), приходим к соотношению (6.21).

### 6.6. Контрольные вопросы

1. Какие задачи решаются при силовом анализе рычажных механизмов?
2. Какие силы действуют на звенья механизма?
3. Как определяются силы инерции для звеньев, совершающих различные типы движения?
4. К чему приводятся силы инерции отдельных точек звена, если за точку приведения принят цент масс звена?
5. Каким образом определяется точка приложения результирующей силы инерции для звеньев, совершающих сложное движение?
6. Почему при силовом анализе механизм разбивается на группы Ассур?
7. Сформулируйте принцип Даламбера. В чем заключается существо метода кинетостатики?
8. Каков порядок силового расчета группы Ассур?
9. Как определяется реакция в среднем шарнире группы Ассур?
10. Каков порядок силового расчета ведущего звена базового механизма?
11. Что называется уравнивающей силой (уравнивающим моментом)? Поясните физический смысл уравнивающей силы.
12. Сформулируйте теорему Н.Е. Жуковского о жестком рычаге?
13. Каков порядок определения уравнивающей силы с помощью «рычага» Жуковского?

## Глава 7. Трение в механизмах и машинах

### 7.1. Виды трения

Трение представляет собой универсальное явление, поскольку оно сказывается на работе практически всех механизмов и машин. В подразделе 1.8 кратко рассматривался вопрос о силах трения. Однако никаких количественных оценок, позволяющих обоснованно учесть трение при расчете конкретных механизмов, сделано не было. В настоящей главе влияние и учет сил трения анализируются для различных кинематических пар плоских рычажных механизмов и механических передач, основанных на передаче движения за счет сил трения.

По своей природе трение отражает довольно сложные процессы, происходящие на контактных поверхностях двух соприкасающихся тел, при которых возникают силы сопротивления их относительному перемещению. Различают два вида трения: **трение скольжения** и **трение качения**. При трении скольжения одни и те же участки соприкасающейся поверхности одного тела вступают в контакт с различными участками поверхности другого тела. При трении качения различные участки соприкасающейся поверхности одного тела последовательно вступают в контакт с соответствующими участками другого тела. Механизм возникновения силы сопротивления в том и другом случае был кратко рассмотрен в подразделе 1.8. Для количественного расчета сил трения необходимо более подробно проанализировать закономерности, управляющие трением в кинематических парах.

При оценке сил трения следует различать **сухое трение** (трение несмазанных поверхностей) и **жидкостное трение** (трение смазанных поверхностей). Трение при использовании смазки отличается от сухого трения не только величиной возникающих сил сопротивления, но и физическими процессами, происходящими при контакте соприкасающихся тел. Иногда говорят о **полусухом** и **полужидкостном** трении. В первом случае либо большая часть поверхности контакта лишена смазки, либо наиболее выступающие шероховатости одного тела не покрываются слоем смазывающей жидкости и приходят в непосредственное соприкосновение с поверхностью другого тела. При полужидкостном трении доля смазанной жидкостью контактной поверхности преобладает.

Разницу в физических механизмах возникновения сопротивления относительному движению соприкасающихся тел при сухом и жидкостном трении иллюстрирует рис. 7.1. Если рассмотреть при большом увеличении поверхности контактирующих тел, то обнаружится, что они не являются абсолютно гладкими. Степень их неровности (шероховатости) зависит как от материала тела, так и от

качества обработки поверхности, если это поверхности деталей. Трущиеся поверхности тел 1 и 2 при сухом трении изображены на рис. 7.1, а. Пусть к телу 1 приложена некоторая сила  $F$ , которая пытается сдвинуть его относительно тела 2. Элементы шероховатости на поверхности одного тела будут задевать за элементы шероховатости

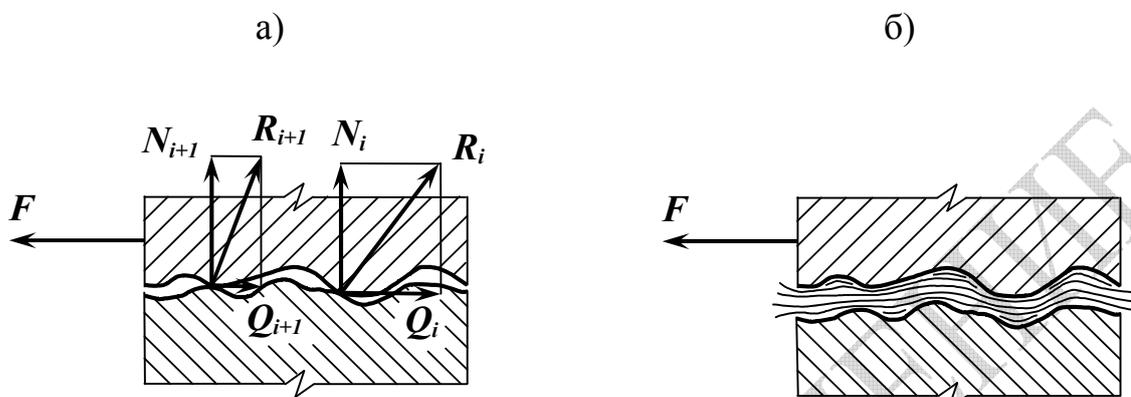


Рисунок 7.1

другого тела. В месте контакта двух таких микровыступов возникнет опорная реакция  $R_i$ , направленная по общей нормали к элементарным площадкам в месте контакта. Реакция  $R_i$  может быть разложена на две составляющие: одну –  $Q_i$ , параллельную направлению возможного движения тела 1, и другую –  $N_i$ , перпендикулярную этому направлению. Совокупное действие составляющих  $N_i$ , возникающих во всех взаимодействующих парах микровыступов, будет уравновешивать силу давления тела 1 на тело 2. Совокупное действие составляющих  $Q_i$  приведет к появлению равнодействующей силы, препятствующей движению тела 1 относительно тела 2. Эту силу принято называть **силой трения**. Вектор силы трения, располагаясь в общей касательной плоскости к поверхностям взаимодействующих тел, всегда направлен в сторону, противоположную относительной скорости этих тел.

С увеличением сдвигающего усилия  $F$  локальные силы  $Q_i$  будут нарастать, возрастет и суммарная сила сопротивления. Выступы на поверхности тел будут деформироваться, причем как в упругой области, так и в области пластических деформаций. Наконец, при достижении некоторого предельного значения силы  $F$  силы сопротивления уже не смогут уравновесить ее: начнется движение тела 1 относительно тела 2. Движение также будет сопровождаться сопротивлением, обусловленным непосредственным взаимодействием неровностей на поверхностях обоих тел.

При жидкостном трении механизм возникновения силы сопротивления относительно перемещению тел совершенно иной. На рис. 7.1, б изображена увеличенная картина вблизи контактирующих поверхностей при жидкостном трении, когда трущиеся поверхности полностью разделены слоем смазки. Трение в этом случае обусловлено вязкими силами, действующими между смазочной жидкостью и поверхностью тел, а также в объеме самой смазки. Величина сил вязкости зависит от свойств смазки, ее температуры и ширины зазора. Как правило, силы трения смазанных поверхностей значительно ниже, чем при сухом трении. Кроме того, при жидкостном трении существенно снижается износ трущихся поверхностей. Однако для обеспечения жидкостного трения требуется выполнение следующих условий:

1. Жидкость, заполняющая зазор между телами, должна в нем постоянно удерживаться.
2. Внутреннее давление в смазке должно уравнивать внешнюю нагрузку.
3. Толщина слоя смазки должна превышать сумму высот наиболее выступающих неровностей на поверхности тел.

Выполнение перечисленных условий связано с усложнением конструкторских решений при проектировании механизма. Например, первое условие будет выполнено, если в зазор между телами постоянно нагнетается смазочная жидкость.

## 7.2. Определение силы сухого и полусухого трения скольжения

Из вышеприведенного краткого анализа физического механизма трения скольжения следует, что величина силы трения может зависеть от множества всевозможных факторов. Сюда следует отнести характер материалов трущихся тел, степень шероховатости контактных поверхностей, наличие на них загрязнений, длительность предварительного неподвижного контакта, величину относительной скорости и т. д. Учет всех этих факторов при инженерных расчетах был бы неоправданно сложным. Поэтому величину силы трения связывают с единственным параметром, который интегрально учитывает все перечисленные факторы. Этот параметр называется коэффициентом трения  $f$ .

Для случая, приведенного на рис. 7.1, а, величина силы трения  $F_{mp}$  удовлетворяет неравенству:

$$F_{mp} \leq f P_{1-2}^n, \quad (7.1)$$

где  $P_{1-2}^n$  - нормальная составляющая силы взаимодействия тел 1 и 2. Она представляет собой равнодействующую сил  $N_i$  всех пар

микровыступов, находящихся в контакте. Неравенство (7.1) показывает, что сила трения может принимать значения от нуля (в отсутствие сдвигающей силы  $F$ ) до максимальной величины, определяемой правой частью неравенства. Следовательно, если сдвигающая сила не превышает величины  $fP_{1-2}^n$ , то она может быть уравновешена силой трения, и тело остается в покое. Как только сдвигающая сила превзойдет величину  $f P_{1-2}^n$ , начнется движение тела 1 относительно тела 2. Опыты показывают, что для выведения тела 1 из состояния покоя требуется сила, несколько большая той, которую приходится преодолевать при последующем равномерном движении. Соответственно различают **трение покоя** (или статическое трение) и **трение движения** (или кинетическое трение). Первое характеризуется **коэффициентом трения покоя**  $f_0$ , второе – **коэффициентом трения движения**  $f$ .

Коэффициенты трения допускают простую геометрическую интерпретацию. Пусть тело 1, неподвижно лежащее на поверхности тела 2, находится под действием нескольких сил, имеющих равнодействующую  $P$  (рис. 7.2). Выясним, при каких условиях оно начнет двигаться. Обозначим угол между направлением силы  $P$  и нормалью  $n - n$  через  $\beta$ . Тогда проекции  $P^n$  и  $P^r$  силы  $P$  на направление нормали и касательной к поверхности могут быть определены по формулам:

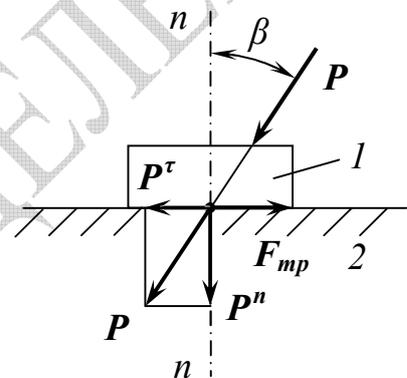


Рисунок 7.2

$$P^n = P \cos \beta, \quad P^r = P \sin \beta. \quad (7.2)$$

Проекция  $P^n$  играет роль нормальной составляющей силы взаимодействия тел 1 и 2, а проекция  $P^r$  - роль сдвигающей силы. Сила трения  $F_{mp}$  согласно (7.1) будет равна:

$$F_{mp} = f_0 P^n = f_0 P \cos \beta. \quad (7.3)$$

При увеличении угла  $\beta$  величина сдвигающего усилия будет возрастать. По достижении этим углом некоторого значения  $\alpha_0$  тело 1 сдвинется с места, поскольку величина сдвигающей силы сравняется с силой трения:  $P^r = F_{mp}$ . Подставляя сюда правые части соотношений (7.2) и (7.3), получим:

$$P \sin \alpha_0 = f_0 P \cos \alpha_0,$$

откуда

$$f_0 = \sin \alpha_0 / \cos \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha_0 . \quad (7.4)$$

Угол  $\alpha_0$  называют **углом трения покоя**. Из приведенного рассуждения ясно, что он представляет собой предельное значение угла между равнодействующей и нормалью  $n - n$ , при котором возможно равновесие. При  $\beta < \alpha_0$  тело 1 покоится относительно тела 2, при  $\beta \geq \alpha_0$  равновесие нарушается. Если менять положение силы  $P$  в пространстве, а свойства контактной поверхности считать одинаковыми в различных направлениях, то область равновесия будет ограничена конусом с углом при вершине  $2\alpha_0$ , который называется **конусом трения покоя**.

Аналогичную геометрическую интерпретацию имеет также и коэффициент трения движения  $f$ . Он численно равен тангенсу **угла трения движения**  $\alpha$ , под которым понимают угол между нормалью к контактной поверхности и направлением равнодействующей действующих на движущееся тело сил. При  $\beta < \alpha$  происходит замедленное движение, при  $\beta > \alpha$  тело 1 движется ускоренно, а при  $\beta = \alpha$  - равномерно относительно тела 2. Угол трения движения меньше по величине, чем угол трения покоя, поскольку  $f < f_0$ .

В справочной технической литературе численные значения коэффициентов трения покоя и трения движения приведены для различных сочетаний материалов, имеющих широкое практическое применение.

### 7.3. Определение потерь на трение в низших кинематических парах рычажных механизмов

Учет сил трения в кинематических парах плоских рычажных механизмов основан на результатах кинетостатического анализа, которые позволяют определить величину и направление реактивных усилий, отражающих силовое взаимодействие отдельных звеньев механизма. Как уже отмечалось, в рычажных механизмах с низшими кинематическими парами могут использоваться только поступательные и вращательные пары. Оценим эффект действия сил трения в сочленениях указанных пар.

Пусть два тела, образующие поступательную пару, перемещаются без ускорения относительно друг друга со скоростью  $V_{\text{отн}}$ . На тело 1 действуют силы  $F$  и  $Q$ , которые являются проекциями равнодействующей  $P$  на касательное и нормальное направление к контактной поверхности (рис. 7.3). Движение тела 1 происходит за счет силы  $F$ , в то время как сила  $Q$  прижимает его к телу 2. Указанная сила вызывает появление реактивной силы  $N = Q$ , действующей на тело 1 и направленной по нормали к поверхности, а также силы трения  $F_{\text{тр}}$ , определяемой равенством (7.3):  $F_{\text{тр}} = f Q$ . Силы  $N$  и  $F_{\text{тр}}$

представляют собой проекции на касательное и нормальное направление полной реакции  $R$  на тело 1 со стороны тела 2. Величину полной реакции определим по формуле (1.1):

$$R = \sqrt{N^2 + F_{mp}^2} = \sqrt{N^2 + f^2 Q^2} = \sqrt{N^2 + tg^2 \alpha N^2} = N \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (7.5)$$

Отсюда следует, что  $N = R \cos \alpha$ , т. е. величины нормальной  $N$  и полной  $R$  реакций связаны между собой как катет и гипотенуза прямоугольного треугольника с углом при вершине, равном углу трения движения  $\alpha$ . Следовательно, для учета силы трения в поступательной кинематической паре при силовом анализе механизма опорная реакция должна быть отклонена от нормали  $n$  –  $n$  к поверхности контакта в сторону, противоположную направлению движения на угол трения  $\alpha$ .

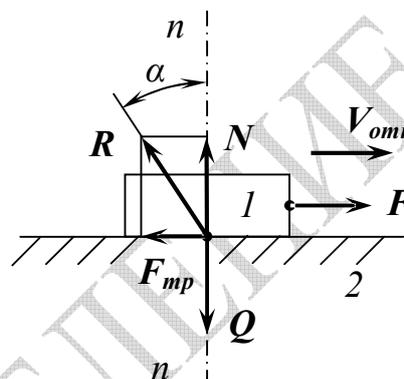


Рисунок 7.3

Кроме того, влияние сил трения на работу механизма может быть учтено посредством оценки суммарной мощности трения. Согласно соотношению (3.35) мощность силы равна скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения. Сила трения  $F_{mp}$  и скорость  $V_{отн}$  направлены противоположно. Следовательно, для мощности  $N_{mp}$  силы трения имеем:

$$N_{mp} = F_{mp} V_{отн} = f Q V_{отн}. \quad (7.6)$$

Рассмотрим теперь, как сказываются силы трения во вращательных кинематических парах. Типичной парой этого типа для плоских механизмов является вал 1, располагающийся в подшипнике скольжения 2, представленный на рис. 7.4. На вал действует радиальная сила  $P$  и внешний момент  $M$ . Пусть вал вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в направлении, указанном на рисунке. Между валом и подшипником всегда имеется небольшой радиальный зазор. За счет сил трения возникает некоторое смещение вала в направлении, противоположном вращению, и соприкосновение элементов кинематической пары оказывается в точке  $A$ , сдвинутой навстречу движению вала. В этой точке возникает реакция  $R$ , которая равна по величине прижимной силе  $P$ , но противоположна ей по направлению. В силу предыдущих соображений реакция  $R$  должна быть отклонена от нормали к поверхности контакта на угол трения  $\alpha$  в сторону противоположную вращению вала (рис. 7.4).

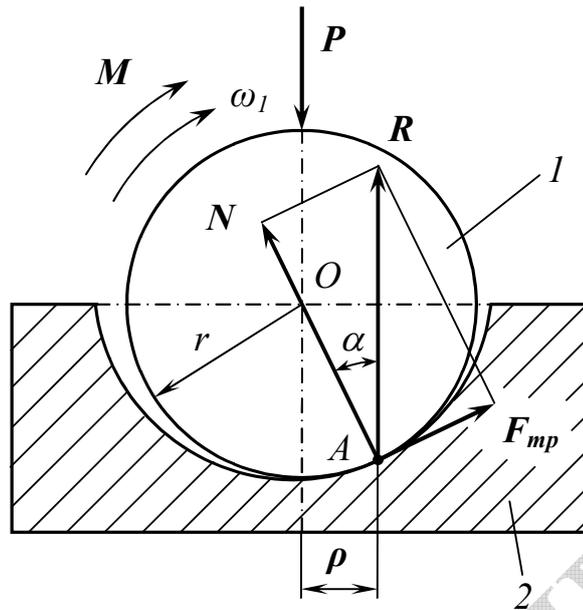


Рисунок 7.4

Проекция полного реактивного усилия  $R$  на направление касательной к поверхности в точке  $A$  даст величину силы трения  $F_{mp}$ , которая может быть связана с коэффициентом трения  $f$  с помощью соотношения:

$$F_{mp} = f N = f R \cos \alpha = f Q \cos \alpha. \quad (7.7)$$

Если  $r$  – радиус вала, то момент  $M_{mp}$  силы трения, уравновешивающий приложенный к валу момент  $M$ , равен:

$$M_{mp} = F_{mp} r = r f Q \cos \alpha = r Q \sin \alpha = R \rho. \quad (7.8)$$

Здесь использована связь между коэффициентом и углом трения:  $f = \operatorname{tg} \alpha$ , а также введено обозначение для расстояния между линиями действия прижимной силы  $Q$  и реактивного усилия  $R$ :  $\rho = r \sin \alpha$ .

Опишем окружность радиуса  $\rho$  с центром в точке  $O$ . Тогда полная реакция  $R$  будет направлена по касательной к этой окружности (рис. 7.5). По аналогии с углом и конусом трения круг радиуса  $\rho$  называется **кругом трения**.

Для конструкционных материалов, используемых в практических целях, углы трения, как правило, малы. Поэтому  $\sin \alpha$  можно с достаточной для инженерных расчетов точностью заменить на  $\operatorname{tg} \alpha$ . Следовательно, соотношение (7.8) для момента силы трения может быть записано в виде:

$$M_{mp} = r Q f'. \quad (7.9)$$

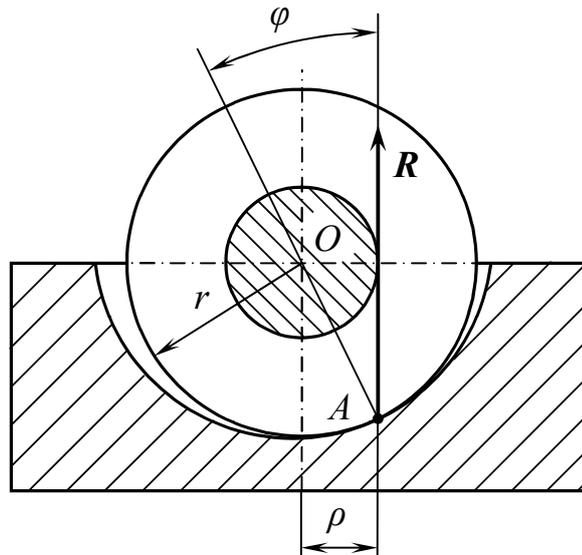


Рисунок 7.5

Коэффициент  $f'$  называют коэффициентом трения во вращательной паре или **приведенным коэффициентом трения**. Он зависит от материалов, состояния соприкасающихся поверхностей и условий их работы. В начальный период эксплуатации (для неприработавшихся поверхностей)  $f' = 1,5 f$ , для приработавшихся поверхностей  $f' = 1,33 f$ , где  $f$  – коэффициент трения плоских трущихся поверхностей из того же материала.

Мощность сил трения для вращательных кинематических пар определяется по формуле:

$$N_{mp} = M_{mp} \omega = r Q f' \omega . \quad (7.10)$$

Полная мгновенная мощность сил трения в механизме может быть получена путем суммирования мощностей, вычисленных для всех кинематических пар. Отношение полной мощности к угловой скорости вращения ведущего звена можно рассматривать как приведенный к этому звену момент сил трения (или приведенную силу трения), который затем следует прибавить к уравнивающему моменту. В этом состоит один из способов учета сил трения при кинестатическом анализе механизмов.

Соотношение между суммарной мощностью сил трения и мощностью уравнивающего момента обычно служит мерой потерь на трение. Количественной характеристикой потерь на трение служит коэффициент потерь  $k_{пот} = N / N_{mp}$ , где мгновенная мощность  $N$  вычисляется через уравнивающий момент с помощью формулы (6.20). Определив коэффициент потерь для нескольких положений механизма, можно найти средний коэффициент потерь,

который, по существу, есть не что иное, как средний коэффициент полезного действия (к. п. д.) рассматриваемого механизма.

#### 7.4. Трение качения в высших кинематических парах

Трение качения возникает в высших кинематических парах при перекатывании одной твердой поверхности по другой. Природа трения качения изучена недостаточно. Данные экспериментальных исследований, а также практическая эксплуатация технических устройств говорят о том, что сопротивление перекатыванию зависит от упругих свойств конструкционных материалов, от кривизны соприкасающихся поверхностей и величины прижимного усилия.

Для пояснения физического механизма появления сопротивления при перекатывании рассмотрим круглое тело (например, цилиндр), находящееся на поверхности другого тела под действием нормальной силы  $P_{1-2}^n$  и вращающего момента  $M$  (рис. 7.6). В области соприкасания тел возникает локальная деформация контактного сжатия, которая приводит к формированию в этой области распределения напряжений в материале обоих тел. Результирующая указанных напряжений представляет собой реакцию  $P_{2-1}^n$  на тело 1 со стороны тела 2. По величине она равна прижимной силе  $P_{1-2}^n$ , а по направлению противоположна ей. Если вращающий момент  $M$  отсутствует, то линии действия сил  $P_{1-2}^n$  и  $P_{2-1}^n$  совпадают. Благодаря действию вращающего момента сила реакции  $P_{2-1}^n$  смещается вправо на величину  $k$ . Смещение линии действия реакции  $P_{2-1}^n$  вызывает появление момента  $M_k$ , который называют **моментом трения качения**:

$$M_k = k P_{2-1}^n. \quad (7.11)$$

Величина  $k$  носит название **коэффициента трения качения**. Он имеет размерность длины, а его численные значения приводятся в справочной литературе.

Перекатывание одного твердого тела по поверхности другого можно объяснить существованием сил сцепления в области их соприкасания (на рис. 7.6 равнодействующая этих сил обозначена через  $F$ ). В самом деле, если бы такие силы отсутствовали, то тело 1 свободно вращалось бы вокруг неподвижного центра  $O$ . Ясно, что от величины сил сцепления зависит, будет ли тело 1 скользить по поверхности тела 2 или перекатываться по ней. Выведем условия, определяющие вид относительного движения тел.

Момент трения  $M_k$  можно также рассматривать как момент пары сил сопротивления, приложенный к телу 1. Такая пара сил представима в виде силы  $F_k$ , действующей в центре тела, и равной ей

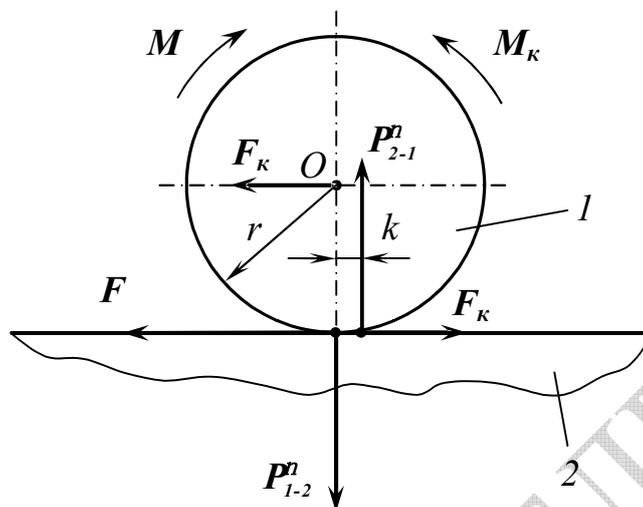


Рисунок 7.6

силы, действующей в точке касания тел 1 и 2 (рис. 7.6). Величина силы  $F_k$ , очевидно, равна  $F_k = M_k / r$ , где  $r$  – радиус кривизны катящегося тела в точке касания. Для того чтобы тело 1 скользило по поверхности тела 2 без перекатывания, необходимо чтобы сила трения скольжения  $F$  была меньше силы сопротивления  $F_k$ :  $F_k > F$ . Выражая  $F$  через коэффициент трения скольжения и учитывая (7.11), приходим к условию чистого скольжения тела 1 по поверхности тела 2:

$$\frac{kP_{2-1}^n}{r} \geq fP_{2-1}^n \quad \text{или} \quad f \leq \frac{k}{r}. \quad (7.12)$$

Следовательно, тело 1 будет скользить по поверхности тела 2 без перекатывания, если коэффициент трения скольжения не будет превосходить величины  $k / r$ . Наоборот, чтобы скольжение отсутствовало, и тело 1 только перекатывалось необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$f \leq \frac{k}{r}. \quad (7.13)$$

На практике условия (7.12) и (7.13) играют важную роль, поскольку оба вида трения широко используются в технике. Условие (7.12) должно безусловно выполняться, например, в тех механических передачах, где движение передается за счет сил трения. Условие

(7.13) обеспечивается там, где необходимо снизить потери на трение за счет применения катков, роликов, подшипников и т. д.

## 7.5. Трение в подшипниках качения

Подшипники качения широко используются в качестве опор валов и осей. Они представляют собой стандартный узел, основными элементами которого являются тела качения (шарики или ролики), установленные между наружным и внутренним кольцами и разделенные между собой сепаратором. Применим соображения, изложенные в предыдущем подразделе, для анализа сил трения в подшипниках этого типа.

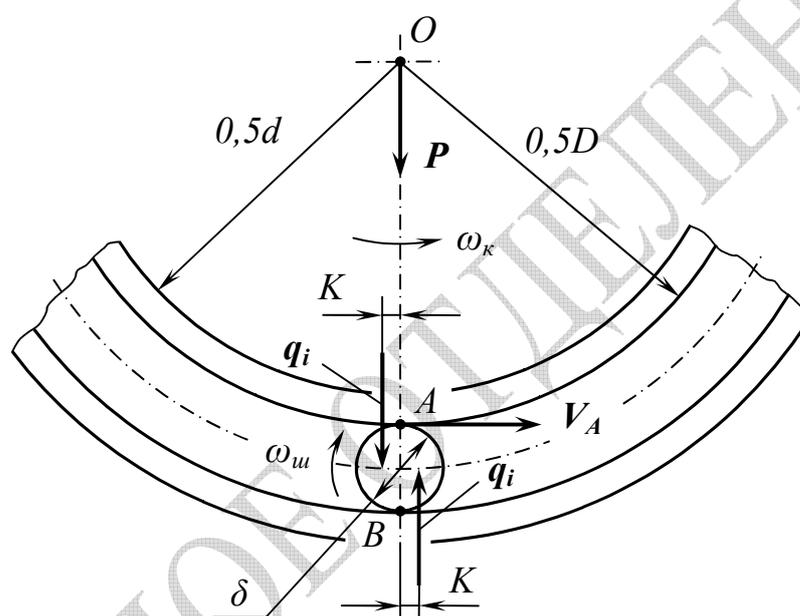


Рисунок 7.7

На рис. 7.7 представлена условная кинематическая схема шарикового подшипника качения. Наружное кольцо (обойма) располагается в расточке отверстия корпуса и является по отношению к нему неподвижным. Внутреннее кольцо обоймы вращается вместе с валом. Действующая на подшипник радиальная нагрузка  $P$  воспринимается телами качения в зоне, ограниченной дугой не более  $180^\circ$ . Распределение этой нагрузки по отдельным телам качения зависит от угла  $\alpha$ , определяющего положение каждого шарика по отношению к линии действия силы  $P$ . Схему распределения радиальной нагрузки по отдельным телам качения иллюстрирует рис. 7.8. Наиболее нагруженным оказывается тело качения, находящееся на линии действия силы  $P$ . По мере отклонения от этой

линии в ту или другую сторону нагрузка, приходящаяся на отдельный шарик, падает. Нетрудно показать, что указанная нагрузка подчиняется простому соотношению:

$$q_i = q_0 \cos (\alpha i), \quad (7.14)$$

где  $q_i$  – нагрузка на тело качение, отстоящее на угол  $(\alpha i)$  от линии действия силы  $P$ ,  $q_0$  – нагрузка на шарик, которому соответствует  $\alpha =$

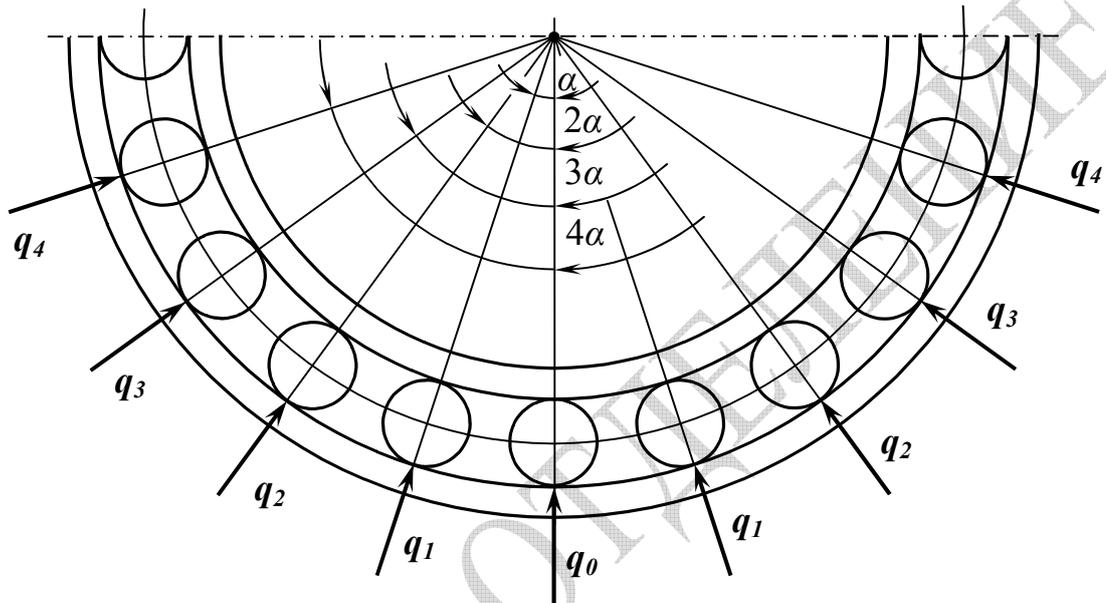


Рисунок 7.8

$= 0$ ,  $i$  – порядковый номер шарика.

Из условия равновесия внутреннего кольца следует, что сумма всех  $q_i$  должна уравнивать силу  $P$ . Для стандартных подшипников это условие приводит к следующей связи между указанными усилиями:

$$\sum_i q_i \approx 1,3P. \quad (7.15)$$

Рассмотрим теперь кинематику элементов подшипника (рис. 7.7). Пусть внутреннее кольцо обоймы вращается по отношению к наружному кольцу с угловой скоростью  $\omega_{об}$ . Скорость вращения шарика по отношению к этому же кольцу обозначим через  $\omega_{ш}$ . Оба эти вращательные движения могут быть сведены к одному, которое

происходит вокруг оси, проходящей через точку В (мгновенный центр скоростей в относительном движении, рис. 7.7), со скоростью  $\omega^*$ :

$$\omega^* = \omega_{об} + \omega_{ш}. \quad (7.16)$$

Если  $D$  и  $\delta$  - диаметры внутреннего кольца и шарика соответственно, то линейную скорость  $V_A$  точки  $A$  можно выразить двумя способами. Как точка, принадлежащая кольцу, она связана с угловой скоростью его вращения:  $V_A = \omega_{об} D / 2$ . Как точка, принадлежащая шарика, она определяется его угловой скоростью:  $V_A = \omega_{ш} \delta$ . Если предположить, что проскальзывание шариков относительно колец отсутствует (случай чистого качения), то оба значения должны совпадать. Следовательно, скорость вращения тел качения и вала связаны соотношением:

$$\omega_{ш} = \omega_{об} D / 2 \delta. \quad (7.17)$$

В силу соображений, изложенных в предыдущем подразделе, нагрузка  $q_i$ , приложенная к шарика с номером  $i$ , смещена на величину коэффициента трения качения  $k$  в сторону, противоположную движению. Произведение  $k q_i$  представляет собой элементарный момент силы трения на каждом шарике. Мощность сил трения для каждого шарика складывается из двух слагаемых, соответствующих трению на внутреннем  $N_{i1}$  и наружном  $N_{i2}$  кольце (трение о сепаратор не учитывается). Мощность силы трения о наружное кольцо определяется угловой скоростью  $\omega_{ш}$  и с учетом выражения (7.17) равна:

$$N_{i2} = k q_i \omega_{ш} = k q_i \omega_{об} \frac{D}{2\delta}. \quad (7.18)$$

Мощность силы трения о внутреннее кольцо определяется угловой скоростью  $\omega^*$  и с учетом выражений (7.16) и (7.17) равна:

$$N_{i1} = k q_i \omega^* = k q_i \omega_{об} \left(1 + \frac{D}{2\delta}\right). \quad (7.19)$$

Тогда мощность сил трения на отдельном теле качения получится суммированием  $N_{i1}$  и  $N_{i2}$ :

$$N_i = N_{i1} + N_{i2} = k q_i \omega_{об} \left(1 + \frac{D}{\delta}\right). \quad (7.20)$$

Полная суммарная мощность сил трения для всех тел качения подшипника с учетом (7.15) будет равна:

$$N = \sum_i N_i = kq_i \omega_{об} \left(1 + \frac{D}{\delta}\right) \sum_i q_i = 1,3Pk\omega_{об} \left(1 + \frac{D}{\delta}\right). \quad (7.21)$$

Полученное соотношение удобно выразить через радиус вала  $r = d / 2$  (см. рис. 7.7). Для этого умножим и поделим соотношение (7.21) на  $r$ . Окончательно для мощности сил трения в отдельном подшипнике получим:

$$N = 2,6 \frac{k}{d} P \left(1 + \frac{D}{\delta}\right) \omega_{об} r. \quad (7.22)$$

Поскольку, согласно (3.41), мощность при вращательном движении определяется произведением момента на угловую скорость, величина

$M_{mp} = 2,6 \frac{k}{d} P \left(1 + \frac{D}{\delta}\right) r$  представляет собой суммарный момент сил трения, возникающий в подшипнике качения. Тогда величину

$f^* = 2,6 \frac{k}{d} \left(1 + \frac{D}{\delta}\right)$  можно рассматривать как приведенный

коэффициент трения качения. Следовательно, для момента сил трения в подшипнике качения справедливо выражение, аналогичное выражению (7.9) для той же величины в подшипнике скольжения:

$$M_{mp} = f^* Pr. \quad (7.23)$$

Приведенный коэффициент трения  $f^*$  уменьшается с увеличением диаметра вала, соответственно уменьшаются и потери на трение. Для стандартных шариковых подшипников этот коэффициент меняется в пределах от 0,001 до 0,004. В то же время для роликовых подшипников диапазон значений коэффициента трения определяется границами 0,0025 ÷ 0,01.

## 7.6. Трение в передачах с фрикционными колесами

Силы трения чаще всего связаны с потерями энергии на преодоление сопротивления при работе механизмов и в этом смысле являются вредным фактором. Однако в ряде случаев они могут быть полезны. В частности за счет сил трения обеспечивается передача движения между звеньями во фрикционных механических передачах.

Под **механическими передачами** (они будут подробно рассмотрены в главе 10) понимают устройства, которые передают механическую энергию от двигателя к рабочим органам технологических аппаратов и машин, преобразуя при этом основные параметры движения. При передаче вращательного движения такими параметрами служат мощность и крутящий момент. Существует довольно много конструкций механических передач, основанных на различных способах передачи движения. На рис. 7.9. приведена схема простейшей передачи с фрикционными цилиндрическими колесами. Передача движения в таких передачах осуществляется силами трения между рабочими поверхностями фрикционных колес 1 и 2. Чтобы такие силы возникли, необходимо создать силу  $Q$ , прижимающую колеса друг к другу. Указанную силу можно создать с помощью пружины, груза или специального устройства.

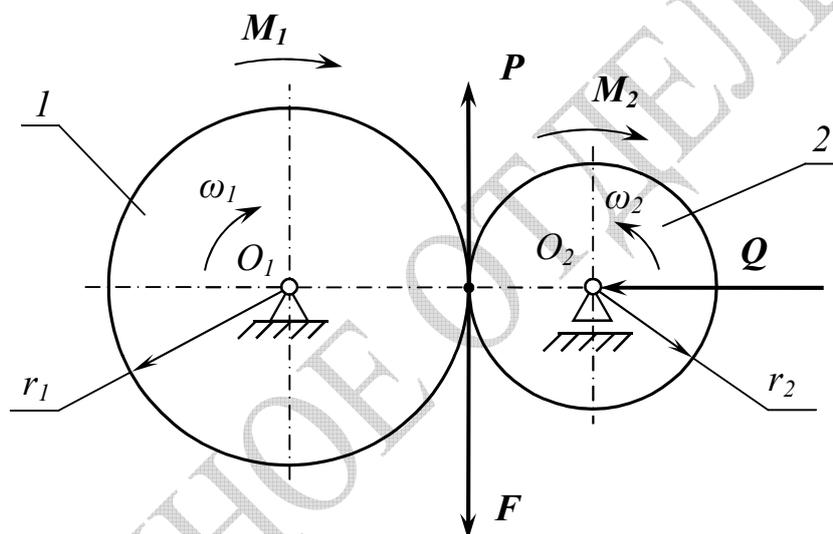


Рисунок 7.9

Допустим, что вал колеса 1 непосредственно связан с двигателем, а вал колеса 2 – с рабочим органом технологического аппарата или машины (например, с ротором центрифуги). Тогда колесо 1 называют ведущим, а колесо 2 – ведомым. К ведомому колесу приложен крутящий момент  $M_c$  полезного сопротивления, который в области контакта колес вызывает окружную силу  $P = M_c / r$ . Сила сцепления колес за счет трения должна превосходить окружную силу  $P$ . В противном случае колеса будут проскальзывать относительно друг друга. Отсюда вытекает условие работы фрикционных передач:  $F_{тр} > P$ , т.е.

$$fQ > \frac{M_c}{r} \quad \text{или} \quad Q > \frac{M_c}{fr} . \quad (7.24)$$

Последнее неравенство дает оценку величины прижимной силы  $Q$ , обеспечивающей необходимую силу сцепления фрикционных колес. На практике для максимального снижения проскальзывания прикладывается прижимная сила больше той, которая следует из неравенства (7.24). Коэффициент  $\chi$ , равный отношению силы трения  $F_{mp}$  к окружной силе  $P$ , называется **коэффициентом запаса сцепления**:

$$\chi = \frac{F_{mp}}{P} = \frac{fQr}{M_c} . \quad (7.25)$$

Его значения для фрикционных передач в технологических аппаратах составляют от 1,2 до 1,5; в измерительных приборах – от 3 до 5.

Несмотря на создаваемый запас сцепления, небольшое проскальзывание колес во фрикционных передачах всегда происходит. Основной причиной его являются упругие деформации в области контакта фрикционных колес. Благодаря деформациям материала под действием прижимной силы контакт осуществляется не по линии, а по некоторой площадке. Равенство линейных окружных скоростей выполняется только для тех точек колес на этой площадке, которые равноудалены от центра вращения. Для остальных точек имеет место скольжение. Обычно оно не превышает  $2 \div 3 \%$ .

Наличие проскальзывания колес является основным недостатком фрикционных передач. Другой недостаток связан с необходимостью создания прижимной силы, которая передается на опоры колес, вызывая их износ. Кроме того, прижимая сила вызывает появление локальных напряжений материала в месте соприкосновения колес. Эти напряжения называются **контактными**. Из-за вращения колес они циклически меняются во времени. В большинстве конструкционных материалов после большого числа циклов изменения напряжений появляются микротрещины, которые, увеличиваясь с течением времени, захватывают все новые участки поверхности колес. Края трещин обламываются (выкрашиваются), трещины углубляются и превращаются в макроскопические неровности. Такой процесс называется **усталостным выкрашиванием**. Он приводит к разрушению рабочих поверхностей фрикционных колес.

Достоинствами фрикционных передач является их невысокая стоимость, простота конструкции, бесшумность работы. Обычно их применяют для передачи вращательного движения с окружными скоростями до 25 м / с в диапазоне мощностей до 20 кВт.

## 7.7. Трение в ременных передачах

Еще одним примером технических устройств, где силы трения играют положительную роль, являются **ременные передачи**. Передачи этого типа используются в тех случаях, когда движение необходимо передать на значительное расстояние (до 15 м) и одновременно преобразовать его параметры. Ременная передача состоит из двух шкивов (ведущего и ведомого) и гибкого звена, надетого на шкивы с натяжением. В качестве гибкого звена могут применяться ремни, ленты, канаты и т. п. При работе ременной передачи ремень передает крутящий момент от ведущего шкива к ведомому за счет сил трения между шкивом и ремнем. На рис. 7.10 приведена схема силового взаимодействия шкива и ремня. В каждый момент времени ремень можно условно разделить на три части: часть ремня, набегающая на шкив (**набегающая ветвь**), часть ремня, соприкасающаяся со шкивом, и часть ремня, сбегающая со шкива (**сбегающая ветвь**). Дуга, по которой ремень соприкасается со шкивом, называется **дугой обхвата**, а соответствующий центральный угол  $\alpha$  – **углом обхвата**.

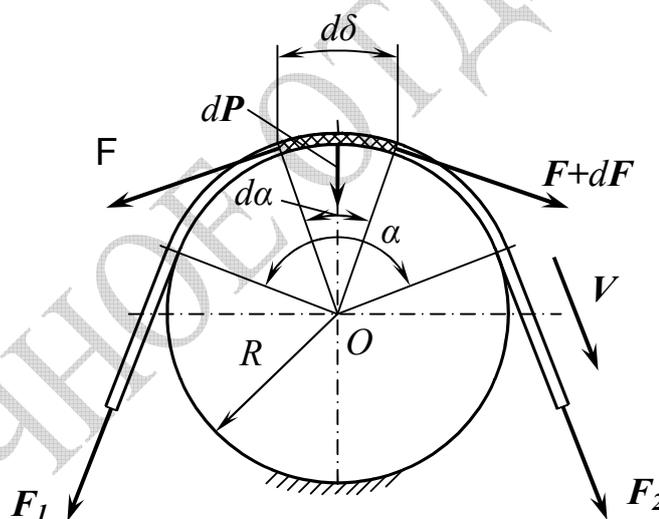


Рисунок 7.10

Для количественной оценки сил, действующих в ременных передачах, необходимо в первую очередь найти связь между величиной силы трения  $F_{тр}$  и углом обхвата  $\alpha$ . Пусть силы натяжения набегающей и сбегающей ветвей равны  $F_1$  и  $F_2$ . Если разница между ними невелика, они уравниваются силой трения  $F_{тр}$  ремня о шкив, и ремень остается неподвижным. С увеличением разности  $(F_2 - F_1)$  сила трения также увеличивается, обеспечивая равенство:  $F_{тр} = F_2 - F_1$ . В этом случае, как указывалось ранее, имеет место

трение покоя. Как только натяжение сбегающей ветви ремня превзойдет натяжение набегающей ветви на некоторую определенную величину, ремень придет в движение. При равномерном движении ремня равенство  $F_{mp} = F_2 - F_1$  по-прежнему будет соблюдаться.

Выделим бесконечно малый элемент ремня  $d\delta$ , который стягивается центральным углом  $d\alpha$  (см. рис. 7.10). Обозначим через  $F$  и  $F + dF$  величину натяжения ремня в начале и конце этого элемента. Согласно только что изложенным соображениям, разность натяжений  $F$  и  $F + dF$  равна элементарной силе трения, действующей на выделенный элемент ремня:  $dF_{mp} = dF$ . С другой стороны сила трения может быть выражена через коэффициент трения  $f$ :  $dF_{mp} = f dP$ . Здесь  $dP$  – сила давления элемента ремня  $d\delta$  на шкив. Она представляет собой векторную сумму сил  $F$  и  $F + dF$  и может быть получена по правилу параллелограмма. Следовательно, ее величина с точностью до величин более высокого порядка малости равна:

$$dP = 2 F \sin d\alpha / 2 \approx 2 F d\alpha / 2 = F d\alpha. \quad (7.26)$$

Комбинируя полученное соотношение с предыдущими равенствами, приходим к следующему дифференциальному уравнению для силы натяжения ремня:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = fF(\alpha), \quad (7.27)$$

которое отражает зависимость натяжения ремня от угла обхвата. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив обе его части на  $F$ , проинтегрируем их по всей дуге обхвата:

$$\int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} = \int_0^{\alpha} f d\alpha.$$

После вычисления интегралов получим соотношение, связывающее величину натяжения ремня на набегающей и сбегающей ветвях:

$$F_2 = F_1 e^{f\alpha}. \quad (7.28)$$

Полученное соотношение называется **формулой Эйлера**. Оно позволяет записать для силы трения ремня о шкив следующее выражение:

$$F_{mp} = F_2 - F_1 = F_1 (e^{f\alpha} - 1). \quad (7.29)$$

Из него, в частности, видно, что сила трения быстро возрастает с увеличением угла обхвата.

При работе ременной передачи выражение (7.29) определяет ту максимальную силу, которая может быть передана ведомому шкиву. Если  $R$  – радиус шкива, то максимальный вращающий момент  $M_{mp}$  от ремня к шкиву не может превышать величины:

$$M_{mp} = F_{mp} R = F_1 (e^{f\alpha} - 1) R . \quad (7.30)$$

Значение момента  $M_{mp}$  необходимо сравнить с величиной момента полезного сопротивления  $M_c$ , приложенного к ведомому шкиву. Неравенство  $M_{mp} > M_c$  представляет собой условие работы ременной передачи, поскольку оно означает, что шкив будет вращаться под действием силы трения со стороны ремня. В противном случае ремень будет проскальзывать, не приводя шкив в движение.

Еще одним важным вопросом при проектировании ременных передач является вопрос о величине предварительного натяжения ремня  $F_0$ . Пусть известна сила полезного сопротивления  $F_c = M_c / R$ . Во время работы передачи натяжение на ведущей ветви ремня увеличится на некоторую величину  $\Delta F$ , а натяжение ведомой ветви уменьшится на ту же величину, поскольку общая длина ремня останется неизменной. Следовательно, натяжения ремня по обе стороны шкива равны:

$$F_1 = F_0 - \Delta F , \quad F_2 = F_0 + \Delta F .$$

Отсюда вытекает, что предварительное натяжение ремня равно полусумме натяжений ведущей и ведомой ветвей ремня в нагруженной передаче:

$$F_0 = \frac{F_1 + F_2}{2} . \quad (7.31)$$

Силы  $F_1$  и  $F_2$  связаны формулой Эйлера (7.28), а полезная сила  $F_c$ , как отмечалось ранее, равна полной силе трения  $F_{mp}$  между ремнем и шкивом. Таким образом, для сил натяжения  $F_1$  и  $F_2$  имеем систему двух уравнений:

$$F_2 = F_1 e^{f\alpha} , \quad F_c = F_{mp} = F_2 - F_1 .$$

Отсюда нетрудно найти силы натяжений ремня:

$$F_1 = \frac{F_c}{e^{\alpha f} - 1}, \quad F_2 = \frac{F_c e^{\alpha f}}{e^{\alpha f} - 1}, \quad (7.32)$$

а для предварительного натяжения ремня согласно (7.31) получаем:

$$F_0 = \frac{F_c (e^{\alpha f} + 1)}{2(e^{\alpha f} - 1)}. \quad (7.33)$$

Полученное соотношение позволяет количественно оценить необходимую силу натяжения ремня при известной величине передаваемой мощности  $N$  и угловой скорости шкива  $\omega$ , т. к.  $F_c = N/R\omega$ .

Численный множитель при силе полезного сопротивления в соотношении (7.33) определяется углом обхвата ремня и коэффициентом трения ремня о шкив. Для резинотканевых ремней коэффициент трения о сталь составляет  $f \approx 0,35$ ; для кожаных ремней  $f \approx 0,22$ . Если принять угол обхвата равным  $120^\circ$ , то нетрудно установить, что  $F_0 = (1,44 \div 2,25) F_c$ . Отсюда следует, что при передаче больших мощностей требуется значительное натяжение ремней, которое отрицательно сказывается на долговечности гибкого звена и опор валов. Поэтому ременные передачи используются для передачи мощностей до 50 кВт.

## 7.8. Контрольные вопросы

1. Назовите основные виды трения. Какова физическая природа сил сопротивления, возникающих при трении скольжения и трении качения?
2. Чем отличается сухое трение от жидкостного?
3. Какие условия необходимы для обеспечения жидкостного трения?
4. От чего зависит величина силы трения скольжения и куда эта сила направлена?
5. В чем отличие трения покоя от трения движения?
6. Какова геометрическая интерпретация коэффициента трения?
7. Что такое угол трения и конус трения?
8. Куда направлена полная реактивная сила в поступательной кинематической паре, если силы трения приходится учитывать?
9. Как могут быть учтены потери на трение в поступательных кинематических парах?
10. Как проявляются силы трения во вращательных кинематических парах?

11. Как могут быть учтены потери на трение во вращательных кинематических парах?
12. Что такое коэффициент трения качения?
13. Какова физическая природа трения качения?
14. От чего зависят потери на трение в подшипниках качения?
15. Как передается движение во фрикционных передачах?
16. Сформулируйте условие работы фрикционных передач.
17. Что такое коэффициент запаса сцепления во фрикционных передачах?
18. В чем состоят достоинства и недостатки фрикционных передач?
19. Как работают ременные механические передачи? Из каких элементов они состоят?
20. Запишите формулу Эйлера и прокомментируйте ее.
21. Как определить, какова должна быть сила первоначального натяжения ремня?

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

## Глава 8. Анализ движения механизмов

### 8.1. Работа сил, действующих на звенья механизма

Силовой анализ (глава 6) позволил установить величину и направление сил, действующих на звенья механизма. Кинематический анализ, в свою очередь, показал, каков должен быть характер движения звеньев, чтобы механизм соответствовал своему назначению. Однако на целый ряд вопросов эти разделы не отвечают. К таким вопросам следует отнести следующие. Как на самом деле будут двигаться звенья механизма (в том числе выходное звено) под действием заданных сил? Каково должно быть соотношение между силами, массами и размерами звеньев, чтобы истинное движение выходного звена было наиболее близким к требуемому движению? Как определить мощность, необходимую для осуществления заданного движения, и как эта мощность расходуется на выполнение работ различными силами, действующими на звенья? Все перечисленные вопросы, а также некоторые другие составляют предмет динамического анализа.

В подразделе 6.1 были перечислены силы, действующие на звенья механизма, и даны их общие характеристики. Каждая из внешних сил, приложенных к звеньям механизма, совершает работу, которая помогает или препятствует движению машины. В любой машине действуют две группы сил, которые обусловлены целевым назначением машины. Первую такую группу составляют силы полезного сопротивления. Их преодоление связано с выполнением машиной заданного технологического процесса. Силы полезного сопротивления совершают «отрицательную» работу и поэтому сами по себе не могут вызвать движения звеньев механизмов данной машины. Чтобы преодолеть эти силы, которые всегда приложены к ее рабочему органу – ведомому (выходному) звену, машине нужно сообщить определенную энергию.

Эту энергию сообщают силы, которые составляют другую группу сил и поэтому называются движущими силами. Движущие силы приложены к ведущему звену (или звеньям) и совершают «положительную» работу. В технологических машинах или аппаратах ведущее звено, как правило, вращается относительно стойки, поскольку в таком случае к нему удобно подводить энергию от машины-двигателя.

Передача энергии движущих сил от ведущего звена ведомому звену, потребляющему эту энергию, обязательно сопровождается ее потерями, обусловленными наличием сил трения в кинематических парах и сопротивлением среды, в которой движутся звенья

механизма. Силы трения и силы сопротивления образуют третью группу сил. Эти силы совершают «отрицательную» работу, поскольку препятствуют движению (тормозят его). Как уже отмечалось, их называют силами вредного сопротивления. На их преодоление затрачивается часть энергии движущих сил.

Наконец, четвертую группу составляют силы тяжести звеньев. Они могут совершать как «положительную», так и «отрицательную» работу. В первом случае происходит опускание центров тяжести звеньев, во втором – их подъем.

Общая работа, совершаемая всеми внешними (активными) силами, приложенными к звеньям механизма, складывается из четырех составляющих, соответствующих каждой из перечисленных групп:

$$\Sigma A = \Sigma A_{дв} - \Sigma A_{пс} - \Sigma A_{тр} \pm \Sigma A_{в}, \quad (8.1)$$

$\Sigma A$  – полная работа, совершаемая внешними силами,  $\Sigma A_{дв}$  – работа движущих сил,  $\Sigma A_{пс}$  – работа сил полезного сопротивления,  $\Sigma A_{тр}$  – работа сил трения,  $\Sigma A_{в}$  – работа сил веса.

Совершаемая внешними силами работа вызывает изменение кинетической энергии механизма. Изменение кинетической энергии сопровождается изменением скорости ведущего звена. На **тахограмме** (рис. 8.1) выделяют три фазы работы механизма: разбег, установившийся режим и выбег.

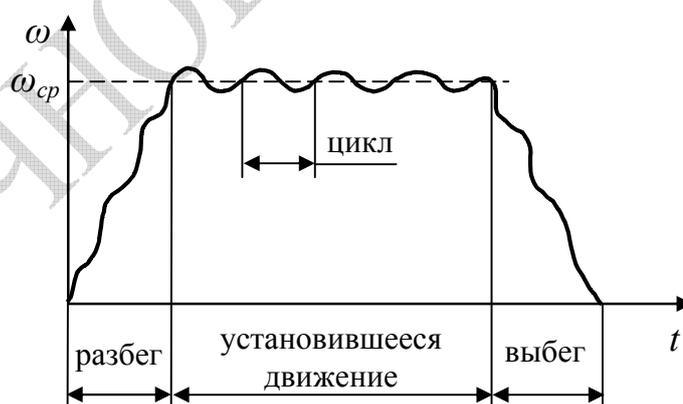


Рисунок 8.1

Если «положительная» работа превышает «отрицательную» ( $\Sigma A > 0$ ), то механизм, преодолевая инерцию, накапливает кинетическую энергию, что приводит к возрастанию скорости ведущего звена (фаза разбега). Если  $\Sigma A < 0$  – «положительная» работа меньше «отрицательной», то скорость ведущего звена уменьшается (фаза

выбега). При установившемся движении работа, совершаемая внешними силами за полный цикл равна нулю ( $\Sigma A = 0$ ), кинетическая энергия и скорость ведущего звена за целое число циклов не изменяются. Как будет показано ниже, при установившемся движении работа внешних сил, кинетическая энергия звеньев и скорость ведущего звена внутри цикла переменна. Качество работы машинного агрегата в значительной степени зависит от параметров установившегося движения, при котором выполняется технологический процесс.

Таким образом, основными задачами динамического исследования механизма рабочей машины является определение закона движения ведущего звена под действием приложенных к звеньям механизма сил, с учетом масс и моментов инерции движущихся звеньев, а также определение постоянных параметров (масс, моментов инерции, размеров), обеспечивающих требуемый закон движения.

## 8.2. Уравнение движения механизма в форме интеграла энергии (уравнение кинетической энергии)

Для механизмов с одной степенью свободы (именно такие механизмы рассматриваются в настоящем пособии) наиболее простой формой уравнения движения механизма является уравнение кинетической энергии, основанное на теореме об ее изменении (3.53). Применительно к механизму, состоящему из  $n$  подвижных звеньев, указанная теорема позволяет записать:

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i0}) \quad (8.2)$$

Здесь  $A_i$  – работа внешних сил, действующих на  $i$  – е звено на конечном перемещении за рассматриваемый промежуток времени;  $T_i$  – кинетическая энергия звена  $i$  в конце рассматриваемого промежутка времени;  $T_{i0}$  – кинетическая энергия звена  $i$  в начале рассматриваемого промежутка времени. Работа всех сил в (8.2) определяется на перемещениях, совершаемых точками приложения соответствующих сил. Поскольку механизм имеет одну степень свободы, то эти перемещения связаны между собой однозначными зависимостями. Следовательно, перемещения всех звеньев механизма можно связать с перемещением одного и того же звена, в качестве которого, как правило, выбирается ведущее звено. При этом работы всех сил в соотношении (8.2) можно рассматривать на

перемещении этого звена. Такой подход используется при построении динамических моделей механизмов.

### 8.3. Простейшие динамические модели плоских рычажных механизмов. Приведение сил и масс.

Уравнение (8.2) оказывается крайне громоздким даже при небольшом числе подвижных звеньев в механизме. В связи с этим в динамике машин и механизмов при нахождении закона движения ведущего звена часто используется **метод приведения сил и масс**, когда машинный агрегат (или механизм) заменяется его эквивалентной **динамической моделью**. Идея метода состоит в замене исходного механизма эквивалентной ему моделью, включающей только одно звено – **звено приведения**. При этом все силы и моменты, действующие на звенья исходного механизма, заменяются несколькими условными силами и моментами (**приведенными силами и приведенными моментами**), приложенными к звену приведения. Этот метод позволяет свести динамическую задачу о совокупном движении системы  $n$  подвижных звеньев механизма к динамической задаче о движении одного звена механизма или одной точки звена.

Замена исследуемого механизма, состоящего из  $n$  подвижных звеньев, его динамической моделью в виде звена приведения, находящегося под воздействием приведенных моментов и приведенных сил, позволяет представить уравнение движения механизма (8.1) в следующем виде

$$A_{\Gamma \partial \bar{v}} - A_{\Gamma \Gamma c} - A_{\Gamma \Gamma \text{тр}} \pm A_{\Gamma \Gamma \bar{v}} = \Delta T_{\Gamma}. \quad (8.3)$$

Если пренебречь работой сил веса  $A_{\Gamma \bar{v}}$  (силы веса обычно на один – два порядка меньше сил полезного сопротивления), а силы трения учесть с помощью коэффициента полезного действия, то *уравнение движения механизма* применительно к звену приведения запишется еще проще:

$$A_{\Gamma \partial \bar{v}} - A_{\Gamma c} = \Delta T_{\Gamma}, \quad (8.4)$$

где  $A_{\Gamma c}$  – работа приведенных сил сопротивления;  $\Delta T_{\Gamma}$  – изменение кинетической энергии звена приведения за рассматриваемый промежуток времени.

Требование эквивалентности исходного механизма и его модели означает, что динамическая модель должна быть эквивалентной

механизму по важнейшим структурным, кинематическим и энергетическим параметрам в любой момент времени, а именно:

- число степеней свободы динамической модели  $w_n$  такое же, как и у исходного механизма (в нашем случае  $w_n = w = 1$ );
- обобщенная координата динамической модели (звена приведения)  $\varphi_n$  и исследуемого механизма совпадают, т.е.  $\varphi_n = \varphi$ ;
- угловая скорость звена приведения  $\omega_n$  и начального звена механизма совпадают, т.е.  $\omega_n = \omega$ ;
- работа  $A_n$  (мощность  $N_n$ ) внешних сил, приложенных к звену приведения, равна суммарной работе  $\Sigma A$  (мощности  $N$ ) совершаемой всеми внешними силами, приложенными к звеньям механизма, т.е.  $A_n = \Sigma A$  или  $N_n = N$ ;
- кинетическая энергия звена приведения  $T_n$  равна кинетической энергии исследуемого механизма, т.е.  $T_n = T$ .

Последние два условия, как это будет показано ниже, позволяют получить выражения для приведенных сил, приведенных моментов сил и приведенного момента инерции и приведенной массы.

Рассмотрим вначале случай, когда ведущее звено исходного механизма совершает вращательное движение, т.е. является кривошипом. Тогда в качестве динамической модели (звена приведения) такого механизма естественно выбрать вращающееся звено. На рис. 8.2 представлены схемы рычажного механизма и его

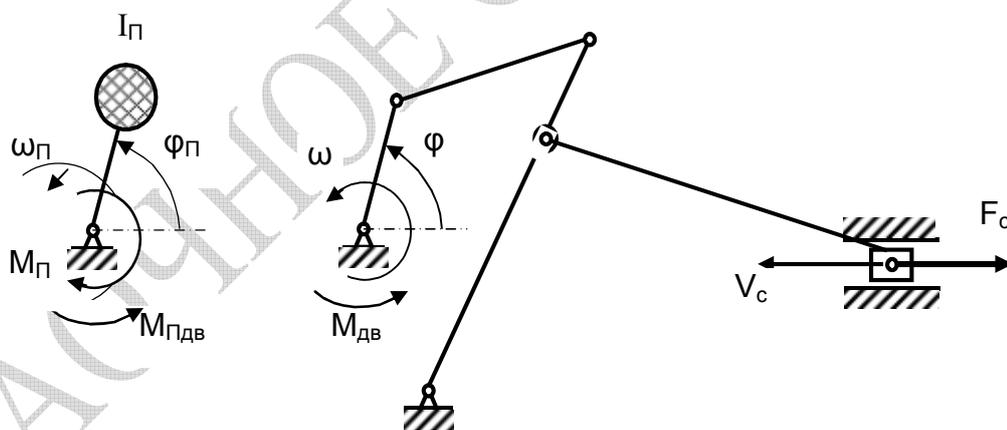


Рисунок 8.2

динамической модели. Момент инерции звена приведения относительно оси его вращения обозначим через  $I_n$ . Он называется **приведенным моментом инерции** и представляет собой момент инерции условной массы, сосредоточенной на звене приведения, относительно оси вращения этого звена.

Звено приведения в модели вращается под действием пары сил с моментом  $M_n$ , который называют **приведенным моментом сил**. Приведенный момент представляет собой в некотором роде эквивалент всех сил, действующих на звенья исходного механизма. Расчетная схема, содержащая звено приведения с одним параметром  $I_n$ , называется первой одномассовой динамической моделью механизма.

Покажем, что всегда возможно определить такие значения величин  $I_n$  и  $M_n$ , при которых уравнение движения звена приведения будет тождественно уравнению движения исходного механизма. Под тождественностью здесь понимается равенство обобщенной координаты  $\varphi$  звена приведения и исходного механизма в произвольный момент времени. Обозначим через  $\varphi_0$ ,  $\omega_0$  и  $I_{n0}$  значения обобщенной координаты, угловой скорости и приведенного момента инерции звена приведения в некоторый начальный момент времени  $t_0$ . Значения этих же величин в момент времени  $t$  обозначим через  $\varphi$ ,  $\omega$  и  $I_n$ . Тогда работа приведенного момента сил за промежуток времени  $[t_0, t]$  может быть выражена с помощью соотношения (3.42), а кинетическая энергия звена приведения в начале и конце рассматриваемого промежутка – с помощью соотношения (3.49). Таким образом, уравнение (8.2) применительно к звену приведения будет иметь вид:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_n d\varphi = \frac{I_n \omega^2}{2} - \frac{I_{n0} \omega_0^2}{2} . \quad (8.5)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением движения механизма (8.2), видим, что для эквивалентности динамической модели исходному механизму необходимо и достаточно выполнение двух условий:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_n d\varphi = \sum_{i=1}^n A_i , \quad (8.6)$$

$$\frac{I_n \omega^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_i . \quad (8.7)$$

Эти условия позволяют найти численные значения параметров  $I_n$  и  $M_n$ , если известны массы и кинематические характеристики всех звеньев исходного механизма.

Кинетическая энергия  $T_i$  каждого звена, совершающего плоское движение, согласно (3.50), складывается из кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$T_i = \frac{1}{2} (m_i V_{si}^2 + I_i \omega_i^2), \quad (8.8)$$

где  $m_i$  – масса звена  $i$ ,  $V_{si}$  – скорость центра масс звена  $i$ ,  $\omega_i$  – угловая скорость звена  $i$ ,  $I_i$  – момент инерции звена  $i$  относительно оси, проходящей через центр масс звена  $i$  перпендикулярно плоскости движения. Суммирование по всем звеньям механизма с учетом (8.7) позволяет получить следующее выражение для приведенного момента инерции:

$$I_{II} = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{V_{si}}{\omega} \right)^2 + I_i \left( \frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (8.9)$$

Полученное выражение дает возможность рассчитать численное значение важнейшего параметра первой одномассовой динамической модели. При этом значении  $I_{II}$  кинетическая энергия звена приведения будет равняться сумме кинетических энергий всех подвижных звеньев механизма. Приведенный момент инерции и приведенная масса  $m_{II}$  связаны простым соотношением  $I_{II} = m_{II} r^2$ , где  $r$  – радиус звена приведения. Следует подчеркнуть, что приведенный момент инерции, согласно (8.9), изменяется в зависимости от изменения передаточных отношений:  $V_{si} / \omega$  и  $\omega_i / \omega$ .

Получим теперь аналогичное соотношение для приведенного момента сил  $M_{II}$ . Он представляет собой условный момент пары сил, приложенных к звену приведения, и определяется, согласно (8.6), исходя из равенства элементарной работы этой пары сумме элементарных работ сил и пар сил, воздействующих на подвижные звенья механизма. Для механизмов, имеющих стационарные геометрические связи, равенство указанных работ равносильно равенству соответствующих мощностей. При таком условии приведенный момент сил  $M_{II}$  можно определить как *условный момент пары сил, приложенный к звену приведения, у которого развиваемая мощность равна сумме мощностей всех сил и моментов пар сил, действующих на все подвижные звенья механизма.*

В символьной записи сформулированное определение приведенного момента означает, что выполняется равенство:

$$N_{\Pi} = M_{\Pi} \omega = \sum_{i=1}^n N_i, \quad (8.10)$$

где  $N_{\Pi}$  – мощность, развиваемая приведенным моментом  $M_{\Pi}$ ,  $N_i$  – мощность сил и пар сил, приложенных к звену с номером  $i$ .

Обозначим через  $F_{si}$  силу, приложенную к центру масс  $s_i$  этого звена, а через  $M_i$  – момент пары сил, действующей на него (рис. 8.3).

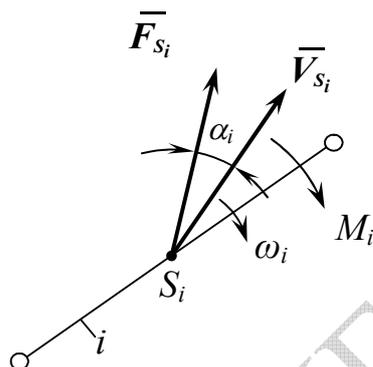


Рисунок 8.3

В плоских рычажных механизмах каждое подвижное звено в общем случае совершает сложное плоско-параллельное движение, которое характеризуется скоростью  $V_{si}$  его центра масс и угловой скоростью  $\omega_i$ . Мощность, развиваемая силой  $F_{si}$ , согласно (3.35), равна скалярному произведению вектора силы  $F_{si}$  на вектор скорости  $V_{si}$ . Мощность, развиваемая моментом пары сил  $M_i$ , согласно (3.41), равна произведению момента на угловую скорость. При этом их произведение берется со знаком «+», если момент и скорость направлены в одну сторону и со знаком «-» - в противном случае. Таким образом, для произвольного звена  $i$  полная мощность действующих на него сил и пар сил определяется с помощью соотношения:

$$N_i = F_{si} V_{si} \cos \alpha_i \pm M_i \omega_i. \quad (8.11)$$

С учетом общего количества звеньев и соотношения (8.10) для приведенного момента сил имеем:

$$M_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{F_{si} V_{si} \cos \alpha_i}{\omega} \pm \frac{M_i \omega_i}{\omega} \right]. \quad (8.12)$$

Из выражений (8.9) и (8.12) следует, что если *передаточные отношения*  $V_{sj} / \omega$  и  $\omega_j / \omega$  в механизме не постоянны для различных значений обобщенной координаты  $\varphi$ , то приведенный момент инерции  $I_{\Gamma}$  и приведенный момент сил  $M_{\Gamma}$  оказываются переменными, т.е.  $I_{\Gamma} = f(\varphi)$  и  $M_{\Gamma} = f(\varphi)$ . Однако приведенный момент инерции  $I_{\Gamma}$  и приведенный момент сил  $M_{\Gamma}$  не зависят от величины угловой скорости  $\omega$  звена приведения, поскольку в формулы (8.9) и (8.12) входят только отношения скоростей  $V_{sj} / \omega$  и  $\omega_j / \omega$ . Последние не изменяются с изменением  $\omega$ . В самом деле, между угловой скоростью ведущего звена и угловыми и линейными скоростями других звеньев имеет место линейная зависимость (см. главу 5). Поэтому, если  $\omega$  изменяется в  $k$  раз, то во столько же раз изменятся величины  $\omega_j$  и  $V_{sj}$ . Таким образом, определение приведенного момента инерции и приведенного момента сил можно выполнить на ранней стадии исследования, еще не зная скорости вращения звена приведения, т. е. до решения уравнения движения. В этом состоит основное достоинство метода приведения сил и масс в механизмах и машинах.

Рассмотрим теперь случай, когда ведущее звено исходного механизма совершает поступательное движение, т. е. является ползуном (рис. 8.4). В этом случае в качестве простой модели исходного механизма естественно выбрать одно движущееся поступательно звено (звено приведения). Параметрами такой модели будет приведенная масса  $m_{\Gamma}$  и приведенная сила  $F_{\Gamma}$  (см. рис. 8.4). Указанная модель называется второй одномассовой динамической моделью. Задача состоит в том, чтобы обеспечить эквивалентность исходного механизма и его модели, подобрав должным образом приведенную массу и приведенную силу.

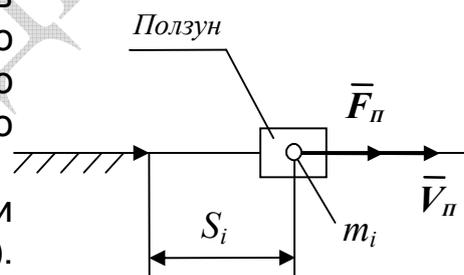


Рисунок 8.4

Как и в предыдущем случае, модель и моделируемый объект будут эквивалентны, если уравнения их движения будут тождественно совпадать. Обозначим через  $V_{\Gamma}$  скорость звена приведения. Тогда мощность, развиваемая приведенной силой, определится с помощью соотношения:

$$N_{\Gamma} = F_{\Gamma} \cdot V_{\Gamma} \quad (8.13)$$

Кинетическая энергия звена приведения при его поступательном движении равна:

$$T_n = \frac{m_n V_n^2}{2}. \quad (8.14)$$

Подстановка соотношения (8.13) в (8.10) с учетом (8.11) позволяет получить для приведенной силы следующее выражение:

$$F_{II} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{F_{si} V_{si} \cos \alpha_i}{V_n} \pm \frac{M_i \omega_i}{V_n} \right]. \quad (8.15)$$

Таким образом, приведенная сила в рамках второй одномассовой динамической модели представляет собой силу, условно приложенную в точке приведения  $\Pi$  ведущего звена и определяемую из условия равенства мощности, развиваемой этой силой, сумме мощностей всех сил и моментов пар сил, приложенных ко всем подвижным звеньям механизма.

Подстановка соотношения (8.14) в (8.7) с учетом (8.8) позволяет получить аналогичное выражение для второго параметра второй одномассовой модели – приведенной массы:

$$m_{II} = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{V_{si}}{V_n} \right)^2 + I_i \left( \frac{\omega_i}{V_n} \right)^2 \right]. \quad (8.16)$$

Приведенная масса механизма определяется как точечная масса, сосредоточенная в точке приведения, и имеющая в любой момент времени кинетическую энергию, равную сумме кинетических энергий всех подвижных звеньев механизма.

В заключение этого подраздела еще раз отметим, что все параметры обеих одномассовых моделей (приведенный момент инерции, приведенный момент сил, приведенная сила и приведенная масса) не зависят от угловой скорости звена приведения  $\omega$  и скорости точки приведения  $V_n$ , так как в любую из полученных формул для этих параметров входят только отношения соответствующих скоростей. Последние не меняются с изменением  $\omega$  и  $V_n$ . Следовательно, определение приведенного момента инерции, приведенного момента сил, а также приведенной силы и приведенной массы можно проводить на ранней стадии исследования, еще не зная конкретных числовых значений угловой скорости звена приведения (первая модель) и скорости точки приведения (вторая модель), т.е. до решения уравнения движения.

#### 8.4. Определение приведенной силы и приведенного момента сил по теореме Жуковского

Мощность, развиваемая приведенной силой  $F_n$ , равна сумме мощностей всех сил и моментов пар сил, приложенных к подвижным звеньям механизма;

$$N_n = \sum_{i=1}^n N_i . \quad (8.17)$$

Воспользуемся следствием из теоремы Жуковского, которое было доказано в главе 6, а именно: если силу  $F_i$ , приложенную к какой-либо точке  $i$ -го звена механизма, перенести параллельно самой себе в одноименную точку повернутого на  $90^0$  плана скоростей  $i$ -го звена, то момент этой силы относительно полюса повернутого плана будет пропорционален мощности, развиваемой этой силой (формула (6.21)):  $N_i = \mu_V M_P (F_i)$ .

Перенесем все силы (включая приведенную силу) и моменты в соответствующие точки плана скоростей. При этом каждый момент  $M_i$ , действующий на звено с номером  $i$ , заменим на пару сил, как это было сделано в подразделе 6.5 (рис. 6.5, д). Тогда соотношение (8.17) равносильно уравнению:

$$F_n h_{F_n} = \sum_{i=1}^n (F_i h_{F_i} + F_i' h_{F_i'} + F_i'' h_{F_i''}) , \quad (8.18)$$

где  $h_{F_n}$  и  $h_{F_i}$  – «плечи» относительно полюса повернутого на  $90^0$  плана скоростей приведенной силы  $F_n$  и силы  $F_i$ , действующей на звено с номером  $i$ ;  $F_i'$  и  $F_i''$  - составляющие пары сил, заменяющей момент пары сил  $M_i$ , приложенный к звену с номером  $i$ ;  $h_{F_i'}$  и  $h_{F_i''}$  - плечи этих сил на повернутом плане скоростей. Величины сил  $F_i'$  и  $F_i''$  определяются через длину  $l_i$  звена с номером  $i$ :  $F_i' = F_i'' = M_i / l_i$ .

Из соотношения (8.18) нетрудно получить окончательное выражение для вычисления приведенной силы:

$$F_n = \sum_{i=1}^n \left( F_i \frac{h_{F_i}}{h_{F_n}} + F_i' \frac{h_{F_i'}}{h_{F_n}} + F_i'' \frac{h_{F_i''}}{h_{F_n}} \right) . \quad (8.19)$$

Направление приведенной силы находится из следующего условия: на повернутом на  $90^0$  плане скоростей момент приведенной силы

должен совпадать по направлению с суммарным моментом приводимых сил и пар сил.

По найденному численному значению приведенной силы приведенный момент  $M_n$  определяется через длину ведущего звена:

$$M_n = F_n l_{OA} . \quad (8.20)$$

Таким образом, применение теоремы Жуковского позволяет определить численные значения приведенной силы и приведенного момента, используя только одно уравнение моментов всех сил, действующих на звенья механизма, относительно полюса плана скоростей.

### 8.5. Дифференциальное уравнение движения механизма

В некоторых случаях при анализе движения механизма удобно применять не уравнение движения в форме интеграла энергии (8.2), а уравнение движения в форме дифференциального уравнения. Для определенности будем сначала считать, что ведущим звеном исходного механизма является кривошип, и механизму соответствует первая одномассовая динамическая модель (рис. 8.2). Рассмотрим движение модели на некотором малом промежутке времени  $dt$ . Работа  $dA$ , совершаемая за этот промежуток времени приведенным моментом  $M_n$ , равна изменению кинетической энергии  $dT$  звена приведения за этот же промежуток, т.е.  $dA = dT$ . Если  $\varphi$  – обобщенная координата, определяющая положение звена приведения, то совершаемая работа пропорциональна его элементарному угловому перемещению  $d\varphi$ :

$$dA = M_n d\varphi . \quad (8.21)$$

Изменение кинетической энергии звена приведения при его вращении равно:

$$dT = d\left(\frac{I_n \omega^2}{2}\right) . \quad (8.22)$$

Приравнивая величины  $dA$  и  $dT$ , получим уравнение для угловой скорости звена приведения:

$$M_n = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{I_n \omega^2}{2} \right) = \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_n}{d\varphi} + \frac{I_n}{2} \frac{d}{d\varphi} (\omega^2) . \quad (8.23)$$

Здесь учтено, что приведенный момент инерции может зависеть от положения ведущего звена.

Преобразуем производную  $\frac{d}{d\varphi}(\omega^2)$ , входящую в правую часть полученного соотношения, учитывая, что угловая скорость звена приведения является функцией времени:

$$\frac{d}{d\varphi}(\omega^2) = 2\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = 2 \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = 2 \frac{d\omega}{dt} = 2\varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  - угловое ускорение звена приведения. С учетом этого преобразования уравнение (8.23) примет вид:

$$M_n = \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_n}{d\varphi} + I_n \varepsilon. \quad (8.24)$$

Это уравнение позволяет определить истинное движение звена приведения, которое в силу требования эквивалентности исходного механизма и его модели означает, что таким же будет и движение начального звена рассматриваемого механизма.

Пусть теперь исходному механизму соответствует вторая одномассовая динамическая модель. В этой модели звено приведения совершает поступательное движение. Тогда работа приведенной силы за некоторый малый промежуток времени  $dt$  равна  $dA = F_n ds$ , а изменение кинетической энергии этого звена за тот же промежуток времени составит величину  $dT = d\left(\frac{m_n V_n^2}{2}\right)$ . Поскольку должно выполняться равенство  $dA = dT$ , приходим к соотношению:

$$F_n = \frac{d\left(\frac{m_n V_n^2}{2}\right)}{ds}. \quad (8.25)$$

Скорость точки приведения  $V_n$  является функцией времени, а приведенная масса  $m_n$  зависит от перемещения  $s$  звена приведения. С учетом этого преобразуем правую часть последнего соотношения:

$$\frac{d\left(\frac{m_n V_n^2}{2}\right)}{ds} = \frac{V_n^2}{2} \frac{dm_n}{ds} + m_n V_n \frac{dV_n}{ds} = \frac{V_n^2}{2} \frac{dm_n}{ds} + m_n \frac{dV_n}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Но произведение производных в последнем слагаемом представляет собой ускорение точки приведения, т.к.

$$\frac{dV_n}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dV_n}{dt} = W_n.$$

Поэтому окончательно приходим к уравнению:

$$F_n = \frac{V_n^2}{2} \frac{dm_n}{ds} + m_n W_n, \quad (8.26)$$

которое позволяет определить истинное движение звена приведения, т.е. найти закон изменения во времени обобщенной координаты механизма.

## 8.6. Режимы движения механизмов

Решение уравнений (8.24) и (8.26) дает возможность точно установить закон движения входного звена механизма, т.е. зависимость обобщенной координаты механизма от времени. Такая зависимость в качественной форме описывается тахограммой, характерный вид которой представлен на рис. 8.1 для механизма с входным звеном в виде кривошипа. Полное время работы механизма состоит из времени разбега  $t_{раз}$ , времени установившегося режима  $t_{уст}$  и времени выбега  $t_{выб}$ . Для периода разбега характерно возрастание угловой скорости ведущего звена от нулевого значения до некоторого среднего значения  $\omega_{ср}$ . При этом энергия привносится к механизму, и, следовательно,  $\Delta A > 0$  и  $\Delta T > 0$ . В периоде выбега угловая скорость ведущего звена убывает от значения  $\omega_{ср}$  до нуля. В этом периоде энергия забирается из механизма, и, следовательно,  $\Delta A < 0$  и  $\Delta T < 0$ . Отбор энергии чаще всего осуществляется с помощью тормозного устройства.

В периоде установившегося движения угловая скорость не остается строго постоянной (рис. 8.1). Она, в большинстве случаев, колеблется вокруг некоторого среднего значения  $\omega_{ср}$ . Колебания носят периодический характер, так что мгновенное значение угловой скорости является периодической функцией времени:  $\omega(t) = \omega(t + T)$ .

Период  $T$  функции  $\omega(t)$  принято называть продолжительностью цикла установившегося движения. За время равное продолжительности цикла положение, скорость и ускорение ведущего звена принимают свои первоначальные значения. Следовательно, приращение кинетической энергии  $\Delta T$  равно нулю за время кратное целому числу циклов. Из соотношения (8.2) вытекает, что и работа внешних сил за этот промежуток времени также равна нулю.

Приращение кинетической энергии за произвольный промежуток времени можно условно представить как работу сил инерции:  $\Delta T = A_u$ . Тогда соотношение (8.2) с учетом (8.1) можно записать в форме уравнения энергетического баланса:

$$A_{\partial e} - A_{nc} - A_{mp} \pm A_e \pm A_u = 0. \quad (8.27)$$

Смысл составляющих в этом уравнении тот же, что и в уравнении (8.1). Работа сил инерции может быть как положительной, так и отрицательной, поскольку кинетическая энергия механизма может быть как возрастающей, так и убывающей функцией времени. Для элементарного промежутка времени  $dt$  уравнение энергетического баланса примет вид:

$$dA_{\partial e} - dA_{nc} - dA_{mp} \pm dA_e \pm dA_u = 0.$$

Разделив каждое слагаемое на промежуток времени  $dt$ , придем к уравнению энергетического баланса, связывающему между собой мощности, развиваемые различными силами:

$$N_{\partial e} - N_{nc} - N_{mp} \pm N_e \pm N_u = 0. \quad (8.28)$$

Здесь  $N_{\partial e}$  – мощность, развиваемая движущими силами;  $N_{nc}$  – мощность, затрачиваемая на преодоление сил полезных (производственных) сопротивлений;  $N_{mp}$  – мощность, затрачиваемая на преодоление сил трения в кинематических парах и других вредных (непроизводственных) сопротивлений;  $N_e$  – мощность, затрачиваемая на преодоление силы веса звеньев (или развиваемая этими силами);  $N_u$  – мощность, затрачиваемая на изменение кинетической энергии звеньев механизма (или получаемая за счет изменения кинетической энергии звеньев). Два последние слагаемые обращаются в нуль, если уравнения (8.27) и (8.28) применяются к установившемуся режиму работы механизма за период времени кратный целому числу циклов.

В этом случае уравнение (8.27) может быть записано в простом виде:

$$A_{\text{дв}} = A_{\text{пс}} + A_{\text{мп}}, \quad (8.29)$$

т.е. за период времени кратный целому числу циклов (в частности, за один цикл) при установившемся режиме работа движущих сил равна сумме работ сил полезных и вредных сопротивлений. *Отношение абсолютной величины работы сил полезных сопротивлений к работе движущих сил за цикл установившегося движения называют коэффициентом полезного действия (цикловым) механизма  $\eta$ :*

$$\eta = \frac{A_{\text{пс}}}{A_{\text{дв}}}. \quad (8.30)$$

*Коэффициентом потерь  $\psi$  (цикловым) в механизме называется отношение абсолютной величины работы сил вредного сопротивления к работе движущих сил за цикл установившегося движения:*

$$\psi = \frac{A_{\text{мп}}}{A_{\text{дв}}}. \quad (8.31)$$

Поделив обе части равенства (8.29) на величину  $A_{\text{дв}}$ , получим простую формулу, устанавливающую связь между коэффициентом полезного действия (к.п.д.) механизма  $\eta$  и коэффициентом потерь (к.п.) в механизме  $\psi$ :

$$\eta + \psi = 1. \quad (8.32)$$

Отсюда следует, что с уменьшением в механизме вредных сопротивлений коэффициент потерь убывает и одновременно увеличивается, стремясь к единице, коэффициент полезного действия механизма. Следовательно, чем выше значение к.п.д. механизма, тем совершеннее он в энергетическом смысле.

Очевидно, что к.п.д. механизма может быть определен и через отношение мощностей:

$$\eta = \frac{N_{\text{пс}}}{N_{\text{дв}}}. \quad (8.33)$$

Очень часто удобно пользоваться именно такой оценкой эффективности механизмов.

## 8.7. Коэффициент полезного действия отдельных механизмов

В силу особой важности понятия к.п.д. рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих возможность оценки энергетической эффективности некоторых простых механизмов. Вначале определим к.п.д. наклонной плоскости при подъеме по ней груза  $G$  за счет действия движущей силы  $F$  заданной величины (рис. 8.5, а). Пусть известны угол наклона плоскости  $\alpha$ , угол  $\beta$  между направлением движения и линией действия силы  $F$ , а также коэффициент трения скольжения  $f$ .

Найдем связь между величиной груза и движущей силой, считая движение груза равномерным ( $V = \text{const}$ ). В силу последнего допущения система сил, действующих на груз, находится в равновесии. При этом, кроме сил  $F$  и  $G$ , на груз действуют сила трения  $F_{\text{тр}}$  и реакция опорной поверхности  $N$ . Эти две силы связаны между собой коэффициентом трения скольжения:  $F_{\text{тр}} = f N$ . Уравнение равновесия в проекциях на направление движения груза может быть записано в виде:

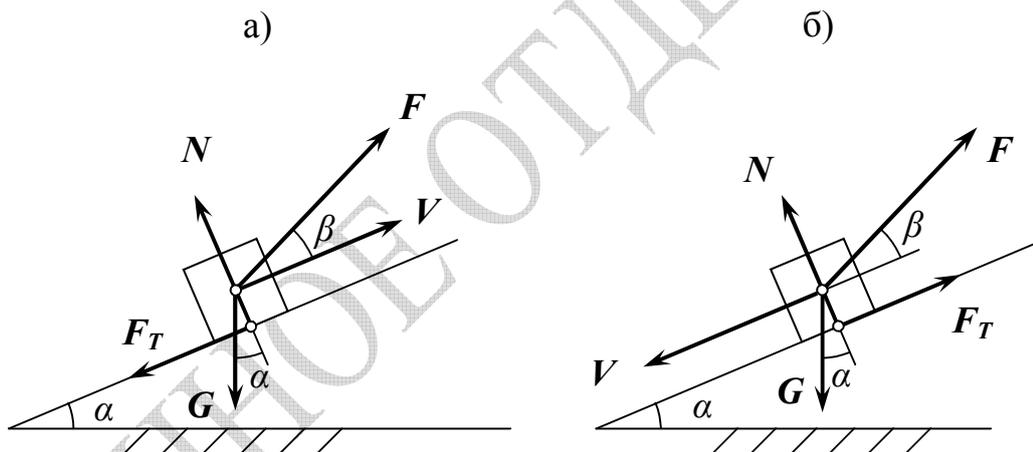


Рисунок 8.5

$$F \cos \beta - G \sin \alpha - f N = 0. \quad (8.34)$$

В проекциях на направление, перпендикулярное направлению движения, уравнение равновесия может быть записано следующим образом:

$$F \sin \beta + N - G \cos \alpha = 0. \quad (8.35)$$

Если из последнего уравнения выразить величину реакции  $N$  и подставить полученное выражение в (8.34), то нетрудно получить следующую формулу, связывающую величину груза и движущую силу:

$$F = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}. \quad (8.36)$$

Здесь  $\varphi = \text{arctg } f$  – угол трения скольжения.

Оценку к.п.д. проведем, исходя из формулы (8.33). Мощность, развиваемая движущей силой  $F$ , равна скалярному произведению вектора этой силы на вектор скорости точки приложения силы  $F$ :

$$N_{\text{дв}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = F V \cos \beta. \quad (8.37)$$

При подъеме груза роль полезного сопротивления, очевидно, играет сила тяжести  $G$ . Поэтому величина мощности, развиваемой силой полезного сопротивления, равна скалярному произведению вектора силы тяжести на вектор скорости точки, к которой приложена сила тяжести:

$$N_{\text{пс}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = G V \sin \alpha. \quad (8.38)$$

С учетом соотношений (8.33) и (8.36) получим следующее выражение для к.п.д. наклонной плоскости:

$$\eta = \frac{N_{\text{пс}}}{N_{\text{дв}}} = \frac{GV \sin \alpha}{FV \cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{\cos(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)} \quad (8.39)$$

Рассмотрим теперь случай равномерного поступательного движения тела (ползуна) по наклонной плоскости вниз (рис. 8.5, б). В этом случае роль движущей силы играет сила тяжести  $G$ , а роль силы полезного сопротивления – сила  $F$ . При равномерном движении вниз связь между силами  $G$  и  $F$  определяется соотношением:

$$F = G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}, \quad (8.40)$$

которое может быть получено с помощью точно таких же выкладок как и соотношение (8.36). Тогда мощность, развиваемая движущей силой  $G$ , будет равна:

$$N_{\text{дв}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = G V \sin \alpha.$$

Мощность, развиваемая силой полезного сопротивления  $\mathbf{F}$ , выразится соотношением:

$$N_{\text{пс}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = G V \cos \beta,$$

а к.п.д. наклонной плоскости при движении ползуна вниз под действием силы тяжести будет следующим образом зависеть от углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\varphi$ :

$$\eta = \frac{N_{\text{пс}}}{N_{\text{дв}}} = \frac{FV \cos \beta}{GV \sin \alpha} = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}. \quad (8.41)$$

Движение по наклонной плоскости представляет собой простейший и достаточно идеализированный случай оценки энергетической эффективности технических устройств. На практике реальные машины составлены из нескольких механизмов, соединенных между собой тем или иным способом. Поэтому очень часто возникает необходимость оценки величины коэффициента полезного действия нескольких последовательно или параллельно соединенных механизмов.

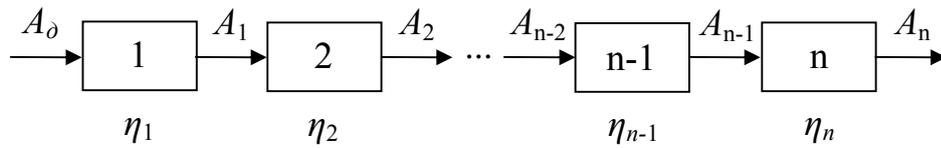
Пусть имеется  $n$  последовательно соединенных механизмов (рис. 8.6, а) с известными значениями к.п.д.  $\eta_j$ . Первый механизм приводится в движение движущими силами (например, от электродвигателя), совершающими работу  $A_{\text{дв}}$ . Силы полезного сопротивления первого механизма являются движущими силами для соединенного с ним второго механизма. Поэтому работа сил полезного сопротивления  $A_1$  первого механизма одновременно служит работой движущих сил для второго механизма. Следовательно, для первого механизма имеет место равенство:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_{\text{дв}}} \quad \text{или} \quad A_1 = \eta_1 A_{\text{дв}}.$$

Рассуждая аналогичным образом, для второго механизма можем записать:

$$\eta_2 = \frac{A_2}{A_1} \quad \text{или} \quad A_2 = \eta_2 A_1 = \eta_1 \eta_2 A_{\text{дв}}.$$

а)



б)

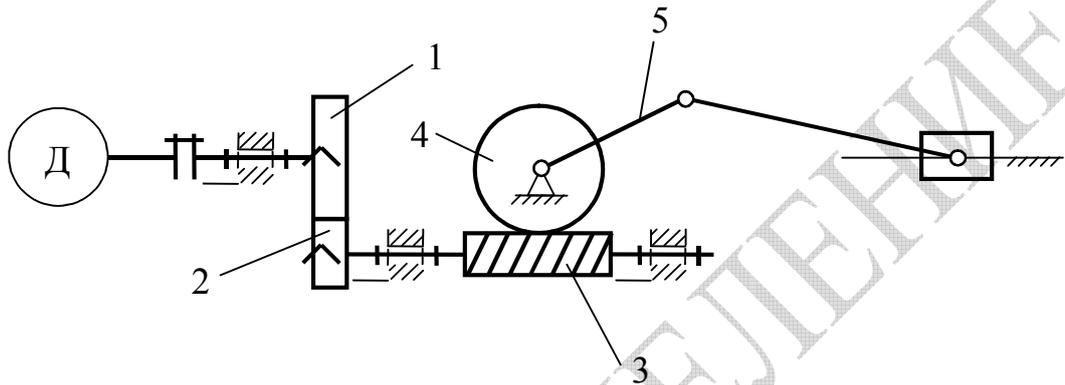


Рисунок 8.6

Соответственно для механизма с номером  $n$  получим:

$$\eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_{пс}}{A_{n-1}} \quad \text{или} \quad A_n = A_{пс} = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n A_{дв},$$

где  $A_{пс}$  – работа сил полезного сопротивления всей совокупности  $n$  механизмов. Используя полученные соотношения, для к.п.д.  $n$  последовательно соединенных механизмов имеем:

$$\eta = \frac{A_{пс}}{A_{дв}} = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n = \prod_{i=1}^n \eta_i. \quad (8.42)$$

Таким образом, *общий коэффициент полезного действия ряда последовательно соединенных механизмов равен произведению коэффициентов полезного действия всех составляющих механизмов.* Из формулы (8.42) следует важный для практики вывод: коэффициент полезного действия ряда последовательно соединенных механизмов всегда меньше к.п.д. механизма с минимальным его значением.

Для иллюстрации применения формулы (8.42) рассмотрим три последовательно соединенных механизма (рис. 8.6, б): **зубчатую передачу**, состоящую из зубчатых колес 1 и 2, жестко закрепленных на валах; **червячную передачу**, состоящую из червяка 3 и червячного колеса 4; **кривошипно-ползунный механизм**, кривошип которого жестко связан с червячным колесом. Пусть коэффициенты полезного действия всех перечисленных механизмов известны и равны: к.п.д. зубчатой передачи  $\eta_{зп} = 0.97$ ; к.п.д. червячной передачи  $\eta_{чп} = 0.70$ ; к.п.д. кривошипно-ползунного механизма  $\eta_{кп} = 0.95$ . Применяя формулу (8.42), для к.п.д.  $\eta$  всего агрегата получим:

$$\eta = \eta_{зп} \cdot \eta_{чп} \cdot \eta_{кп} = 0.97 \cdot 0.70 \cdot 0.95 = 0.645 < 0.70 = \eta_{чп}.$$

Выведем теперь аналогичное соотношение для коэффициента полезного действия  $\eta$  параллельно соединенных механизмов (рис. 8.7, а) с известными значениями к.п.д. каждого из них. Общая работа движущих сил  $A_{дв}$ , подводимая к агрегату, распределяется между отдельными его механизмами. Обозначим через  $\nu_i$  долю общей работы движущих сил (подводимой к агрегату механической энергии),

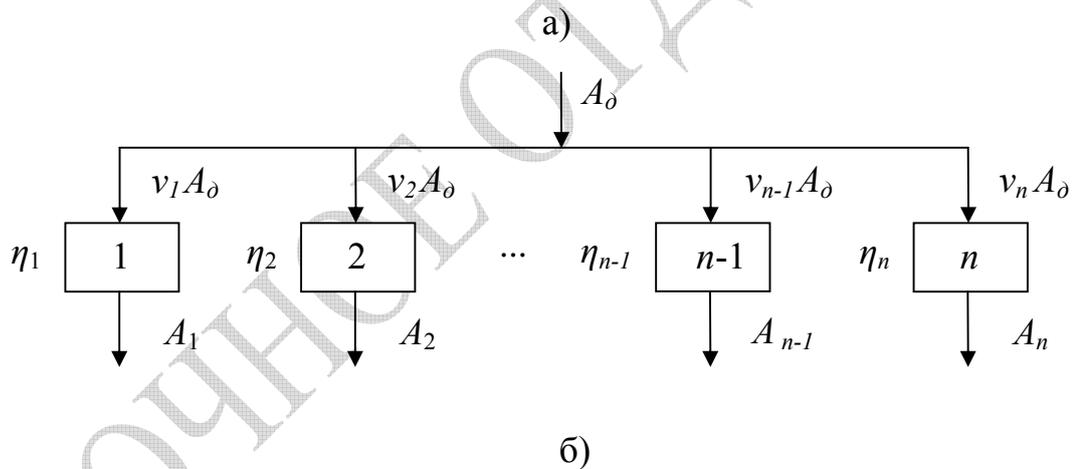


Рисунок 8.7

приходящуюся на механизм с номером  $i$ . Очевидно, что коэффициенты  $v_i$  удовлетворяют условию:

$$\sum_{i=1}^n v_i = 1 .$$

Тогда для первого механизма работа движущих сил будет равна  $v_1 A_{дв}$ , для второго -  $v_2 A_{дв}$  и т.д., а для  $n$  – го -  $v_n A_{дв}$ . Если обозначить работу сил полезного сопротивления  $i$  – го через  $A_i$ , то суммарная работа сил полезного сопротивления равна их сумме:

$$A_{пс} = \sum_{i=1}^n A_i ,$$

а коэффициент полезного действия механизма с номером  $i$  выразится отношением:  $\eta_i = A_i / v_i A_{дв}$ . Тогда суммарная работа сил полезного сопротивления может быть представлена в виде:

$$A_{пс} = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n v_i \eta_i A_{дв} .$$

С учетом этого равенства для к.п.д. ряда параллельно соединенных механизмов окончательно получим:

$$\eta = \frac{A_{пс}}{A_{дв}} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i \eta_i A_{дв}}{A_{дв}} = \sum_{i=1}^n v_i \eta_i . \quad (8.43)$$

Из полученной формулы видно, что в агрегате с параллельным соединением механизмов допустимо использовать механизмы с низким к.п.д. Однако их негативное влияние на общий коэффициент полезного действия можно снизить, если доля приходящейся на них энергии будет незначительна (т.е. соответствующие коэффициенты  $v_i$  малы).

Чтобы проиллюстрировать применение формулы (8.43), рассмотрим два параллельно соединенных технологических агрегата ТА1 и ТА2, схема которых приведена на рис. 8.7, б. Работа движущих сил от двигателя передается на вал, на котором жестко закреплены зубчатые колеса 1 и 3. Далее через зубчатую передачу, состоящую из зубчатых колес 1 и 2, часть механической энергии передается

первому агрегату, а другая часть энергии двигателя через зубчатую передачу, состоящую из зубчатых колес 3 и 4, передается на второй агрегат. Примем коэффициент полезного действия первой зубчатой передачи равным 0.96, а второй – 0.97. Пусть доля работы движущих сил, подаваемая на агрегат ТА1, составляет 0.4, а доля работы движущих сил, подаваемая на агрегат ТА2 – 0.6. Тогда в соответствии с формулой (8.43) коэффициент полезного действия всего комплекса будет равен:

$$\eta = v_1 \eta_1 + v_2 \eta_2 = 0.4 \cdot 0.96 + 0.6 \cdot 0.97 \approx 0.966.$$

### 8.8. Законы передачи сил и моментов в механизмах

При анализе работы механизмов важно уметь находить связь между параметрами движения входного и выходного звеньев без детального рассмотрения движения всех промежуточных звеньев. Такую связь устанавливают соотношения, которые называют законами передачи. Выясним вначале, как связаны силы, действующие на указанные звенья. Пусть имеется некоторый механизм, состоящий из произвольного числа звеньев. Обозначим через  $F_{дв}$  движущую силу, приложенную в некоторой точке  $A$  первого (входного) звена. Скорость точки  $A$  характеризуется вектором  $V_A$ . Сила полезного сопротивления  $F_{пс}$  приложена в некоторой точке  $B$  выходного звена, перемещающейся со скоростью  $V_B$ . Угол между векторами  $F_{дв}$  и  $V_A$  обозначим через  $\alpha$ , а угол между векторами  $F_{пс}$  и  $V_B$  – через  $\beta$ . Ясно, что угол  $\alpha$  будет острым, а угол  $\beta$  – тупым. В самом деле, мощность, развиваемая движущей силой  $F_{дв}$ , равна скалярному произведению вектора этой силы на вектор скорости точки ее приложения:

$$N_{дв} = F_{дв} V_A = F_{дв} V_A \cos \alpha. \quad (8.44)$$

Поскольку мощность, развиваемая движущей силой, должна быть положительна, отсюда следует, что косинус должен принимать положительные значения. Это имеет место только тогда, когда угол  $\alpha$  будет острым.

Аналогично, мощность, развиваемая силой полезного сопротивления  $F_{пс}$ , равна скалярному произведению этой силы на вектор скорости точки ее приложения:

$$N_{пс} = F_{пс} V_B = F_{пс} V_B \cos \beta. \quad (8.45)$$

Мощность  $N_{nc}$  – величина отрицательная. Следовательно,  $\cos \beta < 0$ , что имеет место для тупых углов.

Применим формулу (8.33) для оценки к.п.д. механизма в рассматриваемом случае:

$$\eta = \frac{|N_{nc}|}{N_{\partial\partial}} = \frac{F_{nc} V_B |\cos \beta|}{F_{\partial\partial} V_A \cos \alpha}. \quad (8.46)$$

Входящее в числитель этого соотношения произведение  $F_{nc} |\cos \beta|$  представляет собой проекцию  $F_{nc}^t$  силы полезного сопротивления на направление вектора скорости точки ее приложения; произведение  $F_{\partial\partial} \cos \alpha$ , входящее в знаменатель, является проекцией  $F_{\partial\partial}^t$  вектора движущей силы на направление скорости точки ее приложения. С учетом этого обстоятельства приходим к следующему соотношению, связывающему силы на входном и выходном звене:

$$F_{nc}^t = F_{\partial\partial}^t \eta u_{AB}, \quad (8.47)$$

где  $u_{AB} = V_A / V_B$  – так называемое **передаточное отношение** от точки  $A$  приложения движущей силы к точке  $B$  приложения силы полезного сопротивления. Соотношение (8.47) носит универсальный характер, поскольку оно справедливо для любого механизма независимо от его структуры, числа звеньев и типа кинематических пар. Поэтому это соотношение называют законом передачи сил.

Установим теперь аналогичный закон передачи моментов. Допустим, что первое (входное) звено механизма, в точке  $A$  которого приложен вектор движущей силы  $F_{дв}$ , вращается с угловой скоростью  $\omega_1$  относительно неподвижной оси  $O_1$ . Пусть выходное звено механизма, в точке  $B$  которого приложен вектор силы полезного сопротивления  $F_{nc}$ , вращается с угловой скоростью  $\omega_n$  относительно неподвижной оси  $O_n$ . Тогда, очевидно, скорости точек  $A$  и  $B$  могут быть определены с помощью соотношений:

$$V_A = \omega_1 O_1 A, \quad V_B = \omega_n O_n A. \quad (8.48)$$

Моменты движущей силы и силы полезного сопротивления относительно соответствующих осей вращения равны:

$$M_{\partial\partial} = F_{\partial\partial}^t O_1 A = F_{\partial\partial} O_1 A \cos \alpha, \quad (8.49)$$

$$M_{\text{пс}} = F_{\text{пс}}^t O_n B = F_{\text{пс}} O_n B |\cos \beta|.$$

Подставив соотношения (8.48) и (8.49) в формулу (8.46) для к.п.д., получим связь между моментами  $M_{\text{дв}}$  и  $M_{\text{пс}}$

$$M_{\text{пс}} = M_{\text{дв}} \eta u_{1n}, \quad (8.50)$$

где  $u_{1n} = \omega_1 / \omega_n$  – передаточное отношение механизма. Соотношение (8.50) также носит общий характер, в силу чего его называют универсальным законом передачи моментов.

### 8.9. Интегрирование дифференциального уравнения движения механизма

Как уже отмечалось, одной из задач анализа движения механизмов является определение истинного закона движения его звеньев, в том числе выходного звена. Для механизмов с одной степенью подвижности достаточно знать закон движения звена, которое выбрано в качестве звена приведения. В самом деле, в силу требований эквивалентности реального механизма и его динамической модели в любой момент времени кинетическая энергия звена приведения равна кинетической энергии всего механизма, а его угловая скорость совпадает с угловой скоростью начального звена. Как следует из выражений (8.7) и (8.14), изменение кинетической энергии может происходить как за счет изменения угловой или линейной скорости, так и за счет изменения приведенного момента инерции или приведенной массы. Те и другие величины зависят от различных факторов. Если первые определяются характером технологического процесса, то вторые зависят от передаточных отношений в механизме и, следовательно, являются функциями обобщенной координаты. Поэтому «синхронное» изменение сил и приведенного момента инерции или приведенной массы, приводящее к постоянству скорости звена приведения в пределах одного цикла работы механизма, невозможно. Таким образом, даже при установившемся режиме движение звеньев механизма, в том числе и начального, не является равномерным.

Закон движения звена приведения (а значит, и начального звена) может быть установлен в результате решения уравнения (8.24) или уравнения (8.26) в зависимости от того, какая динамическая модель принята. Рассмотрим возможность решения этих уравнений на примере уравнения (8.24):

$$M_n = \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_n}{d\varphi} + I_n \varepsilon = \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_n}{d\varphi} + I_n \frac{d\omega}{dt} \quad (8.51)$$

Неизвестной функцией, подлежащей определению, является угловая скорость звена приведения  $\omega(t)$  как функция времени. В самом деле, если явный вид функции  $\omega(t)$  известен, то закон движения  $\varphi(t)$  может быть найден из соотношения, связывающего угловую скорость и угол поворота звена приведения  $\varphi$ :

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} \quad (8.52)$$

Приведенный момент инерции  $I_n$  и приведенный момент сил  $M_n$ , входящие в уравнение движения (8.51), определяются с помощью соотношений (8.9) и (8.12) соответственно. В общем случае они могут быть функциями обобщенной координаты  $\varphi$ , а приведенный момент сил может зависеть также и от времени.

Дифференциальное уравнение (8.51) является нелинейным относительно неизвестной функции. Это обстоятельство сильно затрудняет его интегрирование с помощью аналитических методов, которые пригодны только для некоторых частных случаев. Так, если приведенный момент  $M_n$  зависит только от обобщенной координаты, то уравнение (8.51) может быть записано в виде:

$$M_n = \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_n}{d\varphi} + I_n \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{I_n \omega^2}{2} \right) \quad (8.53)$$

Здесь использовано несложное преобразование:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}$$

Проинтегрируем обе части уравнения (8.53) от некоторого начального значения обобщенной координаты  $\varphi_0$  до произвольного значения  $\varphi$ . В результате получим:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_n(\varphi) d\varphi = \frac{I_n(\varphi) \omega^2}{2} - \frac{I_n(\varphi_0) \omega_0^2}{2},$$

где  $\omega_0$  – значение угловой скорости звена приведения в том его положении, которому соответствует значение обобщенной координаты равное  $\varphi_0$ . Из последнего равенства может быть найдено значение угловой скорости при произвольном значении  $\varphi$ :

$$\omega(\varphi) = \left[ \frac{2}{I_n(\varphi)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_n(\varphi) d\varphi + \frac{I_n(\varphi_0)}{I_n(\varphi)} \omega_0^2 \right]^{0.5}. \quad (8.54)$$

Полученное выражение задает угловую скорость звена приведения как функцию обобщенной координаты. Чтобы найти зависимость угловой скорости от времени воспользуемся соотношением (8.52). Из него следует, что дифференциалы времени и обобщенной координаты связаны между собой следующим образом:

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} \quad \text{или} \quad \int_{t_0}^t dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}.$$

Здесь  $t_0$  и  $t$  – моменты времени, в которые положение звена приведения определяется значениями обобщенной координаты  $\varphi_0$  и  $\varphi$  соответственно. Интегрируя обе части последнего равенства, нетрудно получить время движения механизма как функцию угла поворота звена приведения:  $t = t(\varphi)$ . Исключая из зависимостей  $\omega(\varphi)$  и  $t(\varphi)$  угол поворота  $\varphi$ , в итоге получим явный вид функции  $\omega(t)$ .

Изложенная процедура интегрирования уравнения движения (8.24) предполагает, что зависимости  $M_n(\varphi)$  и  $I_n(\varphi)$  известны. На практике значения приведенного момента сил и приведенного момента инерции определяются для нескольких значений обобщенной координаты. Полученные значения либо аппроксимируются некоторой функциональной зависимостью (как правило, степенной), либо представляются в виде таблицы. В первом случае все интегралы, входящие в приведенные соотношения, точно вычисляются, а во втором – они вычисляются приближенно с помощью численных методов.

Уравнение движения (8.24) может быть проинтегрировано в квадратурах еще в некоторых частных случаях. Однако чаще всего оно может быть решено только численными методами. Зная явный вид зависимости угловой скорости звена приведения от времени можно оценить степень неравномерности начального звена в пределах одного цикла работы механизма. Она определяется коэффициентом неравномерности движения  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{cp}}}, \quad (8.55)$$

где  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  – соответственно максимальное и минимальное значения угловой скорости начального звена за цикл, а  $\omega_{\text{cp}}$  – средняя за цикл его скорость. Она приближенно определяется как среднее арифметическое максимального и минимального значений:

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (8.56)$$

Неравномерность движения звеньев механизма сильно сказывается на условиях его работы. При высокой степени неравномерности большие ускорения вызывают появление значительных сил инерции, которые приводят к возрастанию динамических нагрузок, как на элементы кинематических пар, так и на опоры машины или технологического аппарата. Как следствие, могут возникнуть нежелательные переменные воздействия и вибрации на фундамент. Для каждого типа машин практикой устанавливаются допускаемые значения коэффициента неравномерности  $\delta$ . Например, для грохотов и конвейеров  $\delta = 0,04 \div 0,1$ ; для электрогенераторов  $\delta = 0,003 \div 0,01$ ; для металлорежущего оборудования  $\delta = 0,01 \div 0,02$ .

Основным способом снижения коэффициента неравномерности движения начального звена механизма является увеличение инерционности начального звена, что приводит к увеличению сопротивления изменению его скорости. Практически это достигается добавлением к этому звену значительной постоянной массы, выполняемой в виде вращающегося вместе со звеном массивного маховика. Чем больше масса маховика ( $a$ , следовательно, и приведенный момент инерции механизма), тем равномернее движется начальное звено.

#### 8.10. Подбор маховика и определение угловой скорости ведущего звена механизма с маховиком

Конструктивно маховик представляет собой, как правило, сплошной диск со ступицей или шкив с тяжелым массивным ободом, спицами и ступицей. Для маховика-диска зависимость между массой маховика  $m_M$  и моментом инерции  $I_M$  выражается формулой

$$I_M = \frac{m_M D^2}{8}, \quad (8.57)$$

а для маховика-шкива эта связь определяется соотношением:

$$I_M = \frac{m_M (D_H^2 - D_E^2)}{8}, \quad (8.58)$$

где  $m_M$  – масса диска или обода;  $D$  – диаметр диска;  $D_H$  и  $D_E$  наружный и внутренний диаметры обода (кольца). Обычно  $D_H = 1,1D_{cp}$ ,  $D_E = 0,9D_{cp}$  ( $D_{cp}$  – средний диаметр). Моментами инерции ступицы и спиц можно пренебречь, т.к. они составляют менее 1% от суммарного момента инерции маховика.

Момент инерции маховика, обеспечивающего заданное значение коэффициента неравномерности хода  $\delta$ , часто определяется с помощью графоаналитического метода энергомасс. Метод энергомасс сравнительно прост и в то же время позволяет обеспечить достаточную для инженерных расчетов точность. Его существо состоит в построении и дальнейшем анализе диаграммы энергомасс. Последняя представляет собой график зависимости приращения кинетической энергии  $\Delta T$  от приведенного момента инерции механизма  $I_{\Gamma}$ . В соответствии с соотношением (8.4) приращение кинетической энергии, очевидно, равно разности работ движущих сил  $A_{\Gamma\delta\epsilon}$  и сил полезного сопротивления  $A_{\Gamma\sigma}$ , выполненных к данному моменту времени в пределах цикла установившегося движения. Различие в законах изменения приведенных работ движущих сил  $A_{\Gamma\delta\epsilon}(\varphi)$  и сил сопротивления  $A_{\Gamma\sigma}(\varphi)$ , а также сложная нелинейная зависимость приведенного момента инерции от обобщенной координаты внутри цикла движения механизма являются непосредственными причинами неравномерности хода.

Диаграмма энергомасс  $\Delta T = f(I_{\Gamma})$  при установившемся режиме движения представляет собой замкнутую петлеобразную кривую (рис. 8.8), построенную по ряду точек (обычно 8 – 12). Исходными данными для построения диаграммы являются законы изменения (в пределах одного цикла ( $\varphi = 0 \div 2\pi$ )), приведенного момента сил сопротивления  $M_{\Gamma\sigma} = f(\varphi)$  (8.12) и приведенного момента движущих сил  $M_{\Gamma\delta\epsilon} = f(\varphi)$ , который зависит от типа двигателя и должен быть задан. Интегрирование данных зависимостей по обобщенной координате позволяет определить функции работ указанных моментов:  $A_{\Gamma\sigma} = f(\varphi)$ ,  $A_{\Gamma\delta\epsilon} = f(\varphi)$ . При получении зависимости  $A_{\Gamma\delta\epsilon} = f(\varphi)$  следует учитывать, что за целое число циклов избыточная работа  $A_{изб} = A_{\Gamma\delta\epsilon} - A_{\Gamma\sigma} = 0$ , т.е.

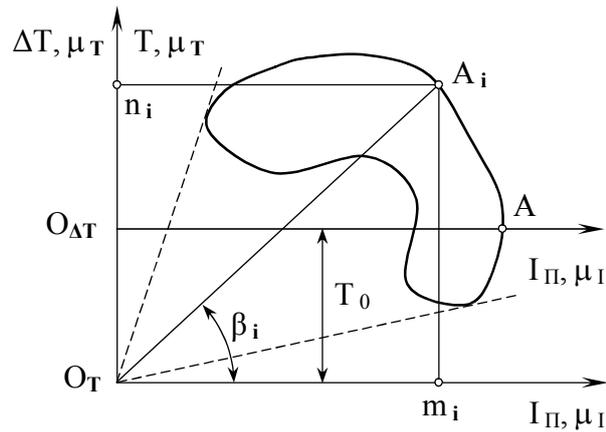


Рисунок 8.8

в начале и в конце цикла значения  $A_{Г\partial в}$  и  $A_{Гс}$  совпадают. Вычисляя разность между  $A_{Г\partial в}$  и  $A_{Гс}$  для нескольких  $\varphi$  определяют  $A_{узб} = \Delta T = f(\varphi)$ . Зависимости  $\Delta T = f(\varphi)$  и  $I_{\Pi} = f(\varphi)$  позволяют построить диаграмму энергомасс, т.е.  $\Delta T = f(I_{\Pi})$ .

Рассмотрим свойства диаграммы энергомасс (рис. 8.8). Если предположить, что для начального положения механизма угловая скорость  $\omega_0$  ведущего звена известна, то нетрудно определить и величину полной кинетической энергии в данный момент времени:

$$T_0 = \frac{I_{\Pi 0} \omega_0^2}{2}. \quad (8.59)$$

Величину  $T_0$  в соответствующем масштабе отложим от начала координат (точка  $O_{\Delta T}$  на рис. 8.8) вниз и получим точку  $O_T$ . Из этой точки проведем луч в произвольную точку диаграммы  $A_i$ . Тангенс угла наклона этого луча к оси  $I_{\Pi}$  равен отношению длин отрезков:

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{A_i m_i}{O_T m_i}. \quad (8.60)$$

Из рис. 8.8 видно, что текущие значения кинетической энергии и приведенного момента инерции могут быть выражены длинами соответствующих отрезков графика:

$$T_i = \frac{I_{\Pi i} \omega_i^2}{2} = |A_i m_i| \mu_T ; \quad (8.61)$$

$$I_{\Pi i} = |O_T m_i| \mu_I , \quad (8.62)$$

где  $\mu_T$  – масштабный коэффициент по оси  $T$  (размерность коэффициента  $\mu_T$  кгм<sup>2</sup>с<sup>-2</sup>/мм = Нм/мм);  $\mu_I$  – масштабный коэффициент по оси  $I_{\Pi}$  (его размерность кгм<sup>2</sup>/мм). После подстановки двух последних соотношений в формулу (8.60) для  $tg \beta_i$  получим:

$$tg \beta_i = \frac{T_i \mu_I}{\mu_T I_{\Pi i}} = \frac{\mu_I}{\mu_T} \cdot \frac{I_{\Pi i} \omega_i^2}{2 I_{\Pi i}} = \frac{\mu_I}{2 \mu_T} \omega_i^2 . \quad (8.63)$$

Таким образом, тангенс угла наклона луча, проведенного на диаграмме  $T = f(I_{\Pi})$  из начала отсчета  $O_T$  в произвольную точку  $A_i$ , оказывается пропорциональным квадрату угловой скорости  $\omega_i$  ведущего звена механизма. Это основное свойство диаграммы энергомасс.

Из формулы (8.63) вытекает выражение для угловой скорости ведущего звена:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2 \mu_T tg \beta_i}{\mu_I}} . \quad (8.64)$$

Максимальная угловая скорость  $\omega_{max}$  будет соответствовать углу  $\beta_{max}$  (луч, проведенный из точки  $O_T$ , касается верхней точки диаграммы энергомасс), а минимальная скорость  $\omega_{min}$  – углу  $\beta_{min}$  (луч, проведенный из точки  $O_T$ , касается нижней точки диаграммы). Подсчет величины  $\delta$  по формуле (8.55) и сопоставление ее с заданным значением коэффициента неравномерности чаще всего указывает на необходимость использования в машине дополнительной (маховой) массы. В этом случае начало системы координат ( $T, I_{\Pi}$ ) помещают в точке  $O_M$ , которая смещена вдоль оси  $I_{\Pi}$  влево на величину  $I_M$  (рис. 8.9). Точка  $O_M$  находится на пересечении лучей, проведенных под углами  $\beta_{min}$  и  $\beta_{max}$  и охватывающих диаграмму энергомасс. Углы  $\beta_{max}$  и  $\beta_{min}$  рассчитываются с помощью соотношения (8.63):

$$\operatorname{tg} \beta_{\max} = \frac{\mu_I}{2\mu_T} \omega_{\max}^2 \approx \frac{\mu_I}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 (1 + \delta),$$

$$\operatorname{tg} \beta_{\min} = \frac{\mu_I}{2\mu_T} \omega_{\min}^2 \approx \frac{\mu_I}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 (1 - \delta).$$

при подстановке в него значений  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$ , найденных в свою очередь по формулам:

$$\omega_{\max} = \omega_{cp} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right) \quad \text{и} \quad \omega_{\min} = \omega_{cp} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right).$$

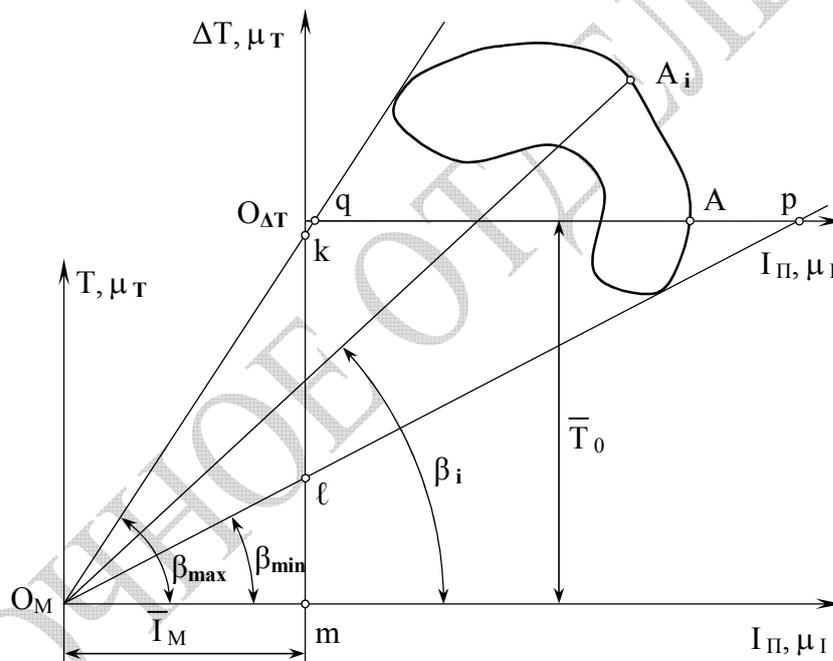


Рисунок 8.9

Таким образом, точка  $O_M$  является началом координат диаграммы энергомасс, при котором коэффициент неравномерности движения механизма и средняя угловая скорость имеют заданные значения.

Расстояние  $O_M m$  от нового начала координат до прежней оси ординат  $\Delta T$  определяет искомое значение момента инерции маховика:

$$I_M = |O_M m| \mu_I . \quad (8.65)$$

Может оказаться, что точка  $O_M$  будет лежать на оси  $\Delta T$ . Это означает, что при заданном значении средней угловой скорости ведущего звена механизм в состоянии обеспечить заданное значение коэффициента неравномерности движения без маховика. При графическом определении положения точки  $O_M$  могут встретиться два крайних случая:

а) точка  $O_M$  оказывается за пределами чертежа, а углы  $\beta_{max}$  и  $\beta_{min}$  близки к нулю. В этом случае ее положение находят аналитически следующим образом. Из треугольников  $O_M tk$  и  $O_M ml$  (рис. 8.9) следует:

$$km = O_M m \operatorname{tg} \beta_{max}, \quad (8.66)$$

$$lm = O_M m \operatorname{tg} \beta_{min}. \quad (8.67)$$

Отсюда

$$kl = km - lm = O_M m (\operatorname{tg} \beta_{max} - \operatorname{tg} \beta_{min}).$$

Для величины отрезка  $O_M m$  получим:

$$O_M m = \frac{kl}{\operatorname{tg} \beta_{max} - \operatorname{tg} \beta_{min}}. \quad (8.68)$$

Этой формулой можно пользоваться во всех случаях, когда возможно графическое определение длины отрезка  $kl$ .

б) точка  $O_M$  лежит за пределами чертежа, а углы  $\beta_{max}$  и  $\beta_{min}$  близки к  $90^\circ$ . В этом случае охватывающие лучи могут не пересекать ось ординат  $\Delta T$  в пределах чертежа. Но тогда они пересекают ось абсцисс  $l_\Pi$  в точках  $p$  и  $q$  (рис. 8.9). Из треугольников  $O_{\Delta T} kq$  и  $O_{\Delta T} lp$  следует:

$$O_{\Delta T} k = O_{\Delta T} q \operatorname{tg} \beta_{max},$$

$$O_{\Delta T} l = O_{\Delta T} p \operatorname{tg} \beta_{min}.$$

Следовательно,

$$kl = O_{\Delta T} l - O_{\Delta T} k = O_{\Delta T} p \operatorname{tg} \beta_{min} - O_{\Delta T} q \operatorname{tg} \beta_{max}.$$

Подставив полученное соотношение в формулу (4.23), окончательно получим:

$$O_M m = \frac{O_{\Delta T} p \operatorname{tg} \beta_{\min} - O_{\Delta T} q \operatorname{tg} \beta_{\max}}{\operatorname{tg} \beta_{\max} - \operatorname{tg} \beta_{\min}} . \quad (8.69)$$

Длину отрезка  $O_M m$ , выраженную в мм, называют чертежным значением момента инерции маховика, и обозначать через  $\bar{I}_M$ . Значение момента инерции в его обычной размерности (кг м<sup>2</sup>) получается путем умножения чертежного значения на величину масштабного коэффициента  $\mu_I$ . Чертежное значение среднего запаса кинетической энергии  $\bar{T}_0$  может быть получено по формуле (см. рис. 8.9):

$$\bar{T}_0 = O_{\Delta T} k + km = O_{\Delta T} k + \bar{I}_M \operatorname{tg} \beta_{\max} \quad (8.70a)$$

или по формуле

$$\bar{T}_0 = (O_{\Delta T} q + \bar{I}_M) \operatorname{tg} \beta_{\max} . \quad (8.70b)$$

Значение  $T_0$  в Дж определяется путем умножения  $\bar{T}_0$  на масштабный коэффициент  $\mu_T$ .

При известных координатах точки  $O_M$  нетрудно найти углы  $\beta_i$  (номера положений:  $i = 0, 1, \dots, n$ ), характеризующие угловую скорость ведущего звена в соответствующих положениях:

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{\bar{T}_0 \pm \Delta \bar{T}_i}{\bar{I}_M + \bar{I}_{\Pi i}} . \quad (8.71)$$

Здесь  $\Delta \bar{T}_i$  – чертежное значение приращения запаса кинетической энергии, взятое с учетом знака (знак «+», если точка  $A_i$  лежит выше оси  $I_{\Pi}$ , знак «-» – в противном случае);  $\bar{I}_{\Pi i}$  – чертежное значение приведенного момента инерции механизма без учета маховой массы в соответствующий момент времени.

Далее по формуле (8.64) находятся истинные значения угловой скорости ведущего звена в промежуточных точках внутри отдельного цикла установившегося движения. Закон движения ведущего звена (изменение углового ускорения в форме  $\varepsilon = f(\varphi)$ ) может быть получен с помощью дифференцирования зависимости  $\omega = f(\varphi)$  и последующего

умножения полученных значений на соответствующие значений угловой скорости  $\omega_i$ :

$$\varepsilon_i = \omega_i \frac{d\omega_i}{d\varphi} . \quad (8.72)$$

### 8.11. Контрольные вопросы

1. Перечислите все группы сил, действующих на звенья механизмов.
2. Назовите фазы работы механизма. В чем особенность каждой из них?
3. Каковы основные задачи анализа движения механизмов?
4. Запишите движения механизма в форме интеграла энергии. Каков физический смысл этого уравнения?
5. В чем состоит идея метода приведения сил и масс при динамическом анализе механизмов?
6. Сформулируйте условия эквивалентности динамической модели и реального механизма.
7. Что представляет собой первая одномассовая динамическая модель механизма? Какие параметры она включает?
8. Дайте определения приведенного момента инерции и приведенного момента сил.
9. От чего зависят приведенный момент инерции и приведенный момент сил?
10. Для каких механизмов используется вторая одномассовая динамическая модель? Какие параметры она включает?
11. От чего зависят приведенная сила и приведенная масса?
12. Дайте определения приведенной силы и приведенной массы.
13. Как определить приведенную силу и приведенный момент с помощью теоремы Жуковского?
14. Каков смысл уравнения движения механизма? Какие параметры оно включает?
15. Как определить закон движения ведущего звена механизма с помощью уравнения движения?
16. Какова связь между движением приведенного звена и движением ведущего звена механизма?
17. Каков характер движения приведенного звена механизма в установившемся режиме?

18. Дайте определение коэффициента полезного действия механизма? Что характеризует этот коэффициент?
19. Чему равен общий коэффициент полезного действия ряда последовательно соединенных механизмов?
20. Чему равен общий коэффициент полезного действия нескольких параллельно соединенных механизмов?
21. Сформулируйте закон передачи сил в механизмах.
22. Сформулируйте закон передачи моментов в механизмах.
23. Какой величиной оценивается степень неравномерности движения ведущего звена?
24. Почему высокая степень неравномерности движения является нежелательным фактором?
25. Как может быть снижена неравномерность движения ведущего звена?
26. В чем состоит основное свойство диаграммы энергомасс?
27. Как определить момент инерции маховика, обеспечивающего заданное значение коэффициента неравномерности хода?

## Глава 9. Синтез рычажных механизмов

### 9.1. Основные типы задач синтеза механизмов

Синтез механизмов является одним из этапов их проектирования, которое представляет собой сложную комплексную задачу. При создании нового механизма первое, что нужно сделать, это подобрать такую кинематическую схему, которая обеспечивала бы требуемый характер движения ведомого (рабочего) звена, диктуемый назначением механизма. Затем разрабатываются конструктивные формы звеньев и их компоновка, определяющие габариты будущего механизма. На этом этапе выбираются конструкционные материалы, проводятся расчеты на прочность и долговечность, от которых зависит эксплуатационная надежность механизма. Наконец, третий этап проектирования включает анализ технологических и технико-экономических показателей будущего механизма. В теории механизмов и машин под синтезом принято понимать первый из перечисленных этапов – разработку кинематической схемы проектируемого механизма.

Существо задач синтеза механизмов состоит в нахождении набора структурных, кинематических и динамических характеристик, который будет обеспечивать преобразование заданного движения ведущего звена в требуемое движение ведомого звена. При этом учитываются вся совокупность условий, необходимых для решения указанных задач. Сюда относятся определение геометрических размеров звеньев, допускающих воспроизведение заданного движения, оценка его кинематической точности, уравнивание механизма, приводящее к устранению дополнительных динамических нагрузок на стойку и т. д.

На практике при синтезе механизмов обычно приходится решать следующие задачи:

- преобразование вращательного движения вокруг одной оси во вращательное движение вокруг другой оси;
- преобразование вращательного движения относительно некоторой оси в поступательное движение вдоль некоторой прямой или обратную задачу;
- преобразование поступательного движения вдоль одной прямой в поступательное движение вдоль другой прямой;
- преобразование вращательного движения относительно некоторой оси в движение точек ведомого звена по заданным траекториям.

Все перечисленные задачи могут быть решены с помощью использования плоских рычажных механизмов. Указанные механизмы широко применяются в технологических машинах, приборах и

устройствах. Поэтому основные положения синтеза механизмов будут изложены применительно именно к таким механизмам.

Конкретное назначение механизма полностью определяет характер движения точек ведомого звена, т. е. их траектории, скорости и ускорения. Указанные величины, в свою очередь, при конкретной структурной схеме зависят от закона движения ведущего звена и геометрических параметров механизма. Для плоских рычажных механизмов такими параметрами являются размеры звеньев, расстояния между центрами шарниров, конфигурация звеньев, определяющая траекторию их отдельных точек и т. д. Таким образом, в результате синтеза механизма необходимо разработать его структурную и кинематическую схемы так, чтобы закон движения ведомого звена как можно точнее соответствовал заданному. Методы решения задач синтеза проиллюстрируем на примере шарнирного четырехзвенника  $OABC$ , изображенного на рис. 9.1.

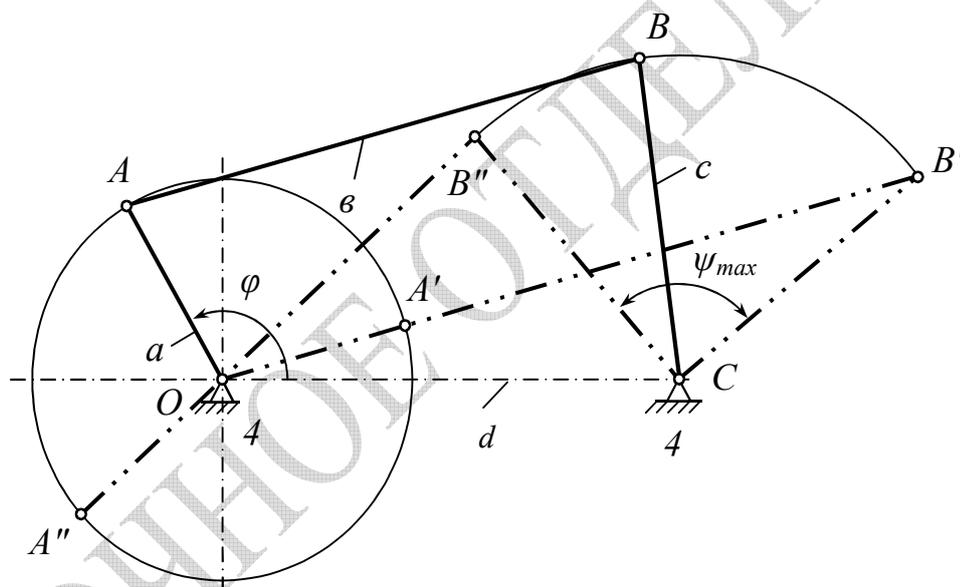


Рисунок 9.1

## 9.2. Условие существования кривошипа в шарнирном четырехзвенном механизме

Нетрудно видеть (см. рис. 9.1), что проворачиваемость звена  $OA$  в шарнирном четырехзвеннике возможна только при определенном соотношении между длинами звеньев  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и расстоянием  $d$  между шарнирами  $O$  и  $C$ . Поэтому при синтезе такого механизма следует в первую очередь выяснить, при каких условиях звено  $OA$  может

совершать полный оборот вокруг опоры  $O$ . В этом случае, как известно, звено называется кривошипом. Требование, состоящее в том, чтобы ведущее звено механизма являлось кривошипом, представляется очень важным в практическом отношении, поскольку задача соединения такого механизма с электродвигателем или редуктором значительно упрощается.

Найдем условия, при которых звено  $OA$  сможет совершить полный оборот вокруг опоры  $O$ , считая для определенности, что размеры звеньев удовлетворяют условию:  $a < b < c < d$ . Очевидно, что для этого необходимо, чтобы звено при своем вращении могло пройти через крайние положения ( $OA'$ ) и ( $OA''$ ), когда звенья  $OA$  и  $AB$  составляют одну прямую линию. В первом случае (положение  $OA'$ ) между длинами звеньев выполняется соотношение:

$$a + b + c > d. \quad (9.1)$$

Во втором случае (положение  $OA''$ ) длины звеньев удовлетворяют неравенству:

$$b - a + c > d. \quad (9.2)$$

Последнее неравенство является более строгим, чем неравенство (9.1). Следовательно, звено  $OA$  будет кривошипом, если выполняется неравенство (9.2). Его удобно записать в виде:

$$b + c > a + d. \quad (9.3)$$

Полученное условие выражает правило Грасгофа: *в шарнирном четырехзвеннике, удовлетворяющем условию:  $a < b < c < d$ , наименьшее звено  $a$  является кривошипом, если сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев меньше суммы длин двух других звеньев.*

Аналогичным образом можно вывести условия существования кривошипа для четырехзвенных механизмов с иными соотношениями между длинами звеньев. При этом звено  $BC$  может быть либо также кривошипом (совершать полный оборот вокруг опоры  $C$ ), либо коромыслом (не совершать полного оборота). В зависимости от типа движения звеньев  $OA$  и  $BC$ , обусловленного соотношениями между размерами звеньев, все шарнирные четырехзвенники делятся на три группы: двухкривошипные механизмы, кривошипно-коромысловые механизмы и двухкоромысловые механизмы. В двухкривошипных механизмах сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин двух других звеньев, причем самое короткое

звено является стойкой. В кривошипно-коромысловых механизмах выполняется правило Грасгофа, а стойкой является звено соседнее с самым коротким. Наконец, в двухкоромысловых механизмах либо не выполняется правило Грасгофа, либо (если оно выполняется) самое короткое звено является шатуном.

Разумеется, выбором кинематической схемы, обеспечивающей нужный тип движения звеньев, не исчерпывается синтез механизмов. Необходимо удовлетворить целому ряду не менее важных требований.

### 9.3. Проектирование кривошипно-коромыслового четырехзвенника

Для определенности будем считать, что звено  $OA$  шарнирного четырехзвенника, изображенного на рис. 9.1, является ведущим, а звено  $BC$  – ведомым. Законы движения обоих указанных звеньев, как правило, заданы, т. е. они входят в состав исходных данных при проектировании механизма. Таким образом, явный вид функций  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ , задающих положение ведущего и ведомого звеньев, известен. Если исключить время  $t$  из этих функциональных зависимостей, то можно получить непосредственную связь между углами  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\psi = \psi(\varphi). \quad (9.4)$$

Следовательно, задача проектирования механизма сводится к определению таких параметров кинематической схемы механизма, которые обеспечат связь между положениями ведущего и ведомого звеньев, задаваемую соотношением (9.4). Применительно к кривошипно-коромысловому четырехзвеннику (рис. 9.1) параметрами кинематической схемы служат длины звеньев и расстояние между опорами  $O$  и  $C$ .

В зависимости от требуемой точности определения параметров механизма и набора исходных данных различают несколько способов расчета указанных параметров. На практике достаточно часто используются графические методы решения задачи о синтезе простейших механизмов. Пусть, например, требуется спроектировать шарнирный четырехзвенник по крайним положениям коромысла (положения  $CB'$  и  $CB''$ ). Эти положения, а также длина коромысла определяются характером технологической операции, которую выполняет ведомое звено или связанный с ним рабочий орган. Таким образом, в данном случае необходимо найти длины кривошипа и шатуна. При этом местоположение центра вращения кривошипа (точка  $O$ ) может быть выбрано произвольно.

Когда коромысло находится в одном из крайних положений, кривошип и шатун располагаются на одной прямой. Поэтому справедливы равенства:

$$OB' = a + \epsilon, \quad OB'' = \epsilon - a, \quad (9.5)$$

где  $a$  – радиус кривошипа,  $\epsilon$  – длина шатуна. Вычитая из первого равенства второе, получаем простое соотношение для вычисления длины кривошипа:

$$a = OA = \frac{OB' - OB''}{2}. \quad (9.6)$$

Длина шатуна может быть найдена с помощью одного из равенств (9.5).

Исходные данные на проектирование могут включать также ряд дополнительных требований, обусловленных особенностями работы того или иного технического устройства. В частности, во многих машинах и агрегатах движение ведомого звена должно происходить с различной скоростью при прямом (рабочем) и обратном (холостом) ходе. Пусть в рассматриваемом механизме четырехзвенника перемещение коромысла  $BC$  из положения  $CB'$  в положение  $CB''$  соответствует рабочему ходу, а перемещение в обратном направлении – холостому ходу (рис. 9.2).

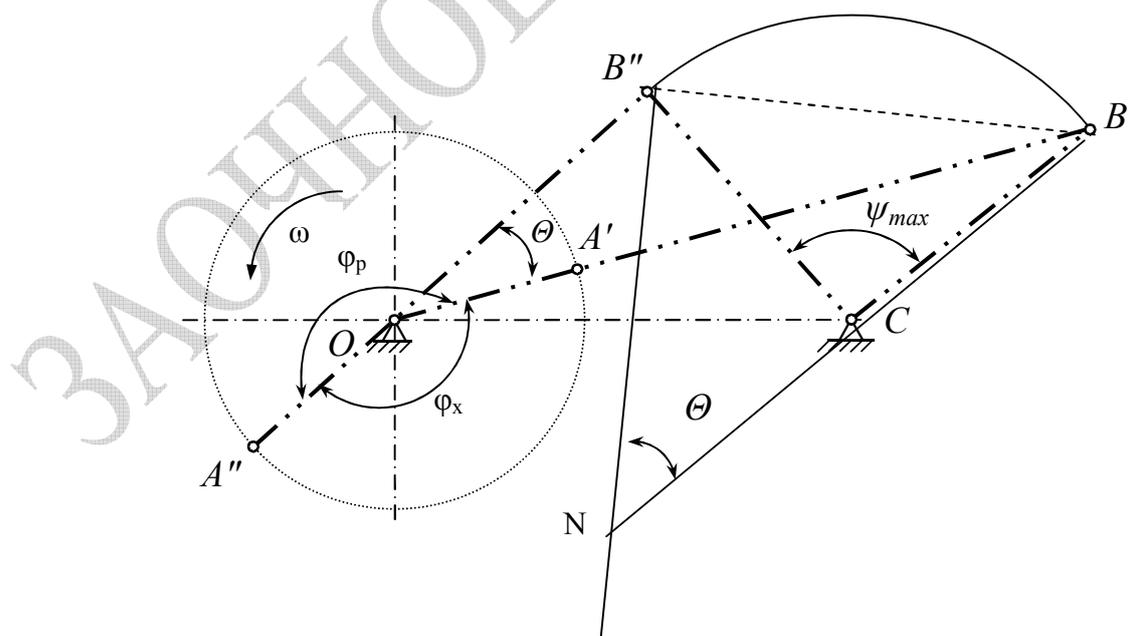


Рисунок 9.2

При рабочем ходе коромысла кривошип поворачивается на угол  $\varphi_p$ , а при холостом ходе коромысла – на угол  $\varphi_x$ . Если кривошип вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , то время, за которое он поворачивается на соответствующий угол, пропорционально величине этого угла. Следовательно, имеет место пропорция:

$$\frac{t'}{t''} = \frac{\varphi_p}{\varphi_x}, \quad (9.7)$$

где  $t'$  и  $t''$  – промежутки времени, за которые кривошип поворачивается на углы  $\varphi_p$  и  $\varphi_x$  соответственно. В течение этих же промежутков времени точка  $B$  коромысла проходит путь равный длине дуги  $B'B''$ . Поскольку величина временных промежутков различается, средняя скорость движения точки  $B$  в прямом и обратном направлениях будет также различной. Мерой отличия скорости движения коромысла при рабочем и холостом ходе может служить коэффициент  $K$ :

$$K = \frac{V''}{V'} = \frac{t'}{t''} = \frac{\varphi_p}{\varphi_x}, \quad (9.8)$$

где  $V'$  и  $V''$  – средние скорости движения точки  $B$  ведомого звена при рабочем и холостом ходе соответственно. Коэффициент  $K$  носит название **коэффициента увеличения средней скорости ведомого звена**. Его величина может быть выражена также через угол  $\Theta$  между направлениями кривошипа в крайних положениях коромысла (рис. 9.2):

$$K = \frac{\varphi_p}{\varphi_x} = \frac{180^\circ + \Theta}{180^\circ - \Theta}. \quad (9.9)$$

Из этого соотношения нетрудно определить величину угла  $\Theta$  при заданном значении коэффициента увеличения скорости ведомого звена:

$$\Theta = \frac{K - 1}{K + 1} 180^\circ. \quad (9.10)$$

Последнее соотношение используется при синтезе кинематической схемы механизма, если в состав исходных данных входит величина коэффициента  $K$ .

Пусть требуется составить кинематическую схему шарнирного четырехзвенника, обеспечивающую заданное значение коэффициента увеличения скорости ведомого звена. Это условие является дополнительным к тем минимально необходимым, которые требуются для расчета параметров четырехзвенника (крайние положения ведомого звена и его длина). Выясним, к чему приводит наложение дополнительного условия.

По формуле (9.10) по заданному значению коэффициента увеличения средней скорости определяется величина угла  $\Theta$ . Затем к отрезку  $B' B''$  в точке  $B''$  восстанавливается перпендикуляр (см. рис. 9.2). А в точке  $B'$  проводится луч под углом  $90^\circ - \Theta$  к отрезку  $B' B''$ . Точку пересечения этого луча с перпендикуляром обозначим через  $N$ . Угол  $B' N B''$ , очевидно, равен  $\Theta$ . Если провести окружность через точки  $B', N$  и  $B''$ , то любая точка на этой окружности будет обладать тем же свойством, а именно: угол между отрезками, соединяющими точку с крайними положениями конца ведомого звена, равен  $\Theta$ . Следовательно, поместив центр вращения кривошипа в любую точку указанной окружности, мы обеспечим заданное значение коэффициента  $K$ .

Таким образом, наложение дополнительного условия приводит к большей определенности в отношении кинематической схемы. Если потребовать выполнения других дополнительных условий (например, задаться длиной одного из звеньев), то положение центра вращения кривошипа определится однозначно.

#### 9.4. Проектирование кривошипно-ползунного механизма

Похожим образом решаются вопросы составления кинематической схемы кривошипно-ползунного механизма. Такие механизмы используются для преобразования вращательного движения кривошипа в поступательное движение ползуна или для решения

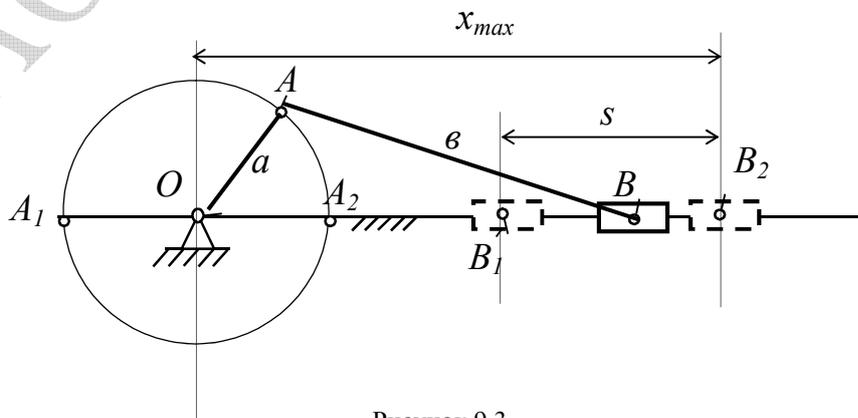


Рисунок 9.3

обратной задачи. В частности, они широко применяются в агрегатах с гидро- и пневмоустройствами. Чаще всего при проектировании этого механизма требуется определить размеры  $a$  и  $b$  кривошипа и шатуна при заданном перемещении  $s$  ведомого звена, непосредственно связанного с рабочим органом технологической машины или аппарата (рис. 9.3). Кроме того, обычно задается также и максимальное расстояние  $x_{max}$  от крайнего положения ползуна до шарнира  $O$ . Этот размер определяет габариты проектируемого механизма.

Нетрудно видеть, что условием существования кривошипа в рассматриваемом механизме будет служить неравенство:

$$a < b. \quad (9.11)$$

В противном случае звено  $a$  будет коромыслом. Из рис. 9.3 видно, что между заданными и искомыми размерами выполняются соотношения:

$$OB_2 = x_{max} = a + b; \quad OB_1 = b - a = x_{max} - s.$$

Из последних равенств для длин кривошипа и шатуна нетрудно получить следующие выражения:

$$a = s / 2; \quad b = x_{max} - a. \quad (9.12)$$

При наложении дополнительных условий рассматриваемый механизм может не удовлетворить им. Тогда следует отказаться от механизма с осью направляющей, проходящей через ось вращения кривошипа, и перейти к проектированию внецентренного кривошипно-ползунного механизма.

## 9.5. Уравновешивание механизмов

Уже отмечалось, что при работе механизмов на его звенья и элементы кинематических пар воздействуют дополнительные динамические нагрузки, обусловленные силами инерции звеньев. Через стойку механизма указанные дополнительные нагрузки передаются на фундамент механизма. В результате фундамент испытывает нежелательные колебания и вибрации, вызывающие в нем дополнительные напряжения переменного характера. Поэтому при проектировании механизмов одной из задач является рациональный подбор масс и формы звеньев, который приводил бы к максимально возможному снижению указанных дополнительных динамических воздействий.

Эта стадия проектирования называется уравниванием механизмов. Механизм считается **уравновешенным**, если главный вектор и главный момент сил, действующих на стойку механизма, остаются постоянными при заданном законе движения ведущего звена.

Обозначим через  $F_{\phi}$  и  $M_{\phi}$  главный вектор и главный момент сил, действующих на стойку со стороны фундамента; через  $F$  и  $M$  главный вектор и главный момент всех других внешних сил, действующих на звенья механизма;  $F_{и}$  и  $M_{и}$  главный вектор и главный момент сил инерции, приложенных ко всем подвижным звеньям механизма. В соответствии с принципом Даламбера справедливы два векторных равенства:

$$F_{\phi} + F_{и} + F = 0, \quad (9.13)$$

$$M_{\phi} + M_{и} + M = 0. \quad (9.14)$$

Из приведенного определения вытекает, что для уравновешенного механизма имеют место следующие соотношения:

$$F_{и} + F = C_1, \quad (9.15)$$

$$M_{и} + M = C_2, \quad (9.16)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные по величине и направлению векторы.

В принципе добиться выполнения условий (9.15) и (9.16) можно несколькими путями: подбором соответствующей формы звеньев, использованием противовесов, введением дополнительных внешних сил и т. д. Однако при реальном проектировании механизмов удовлетворить одновременно обоим условиям удастся крайне редко. Поэтому обычно ограничиваются условием равенства нулю главного вектора и главного момента сил инерции:

$$F_{и} = 0, \quad (9.17) \quad M_{и} = 0. \quad (9.18)$$

Такой подход позволяет решить задачу уравнивания механизма лишь отчасти. При выполнении равенств (9.17) и (9.18) говорят, что имеет место **уравнивание масс механизма**. В этом случае подбор и распределение масс звеньев механизма обеспечивает отсутствие дополнительных динамических воздействий стойки механизма на фундамент.

Для того чтобы, используя равенства (9.17) и (9.18), выйти на практические решения при проектировании механизмов, необходимо

рассмотреть эти равенства более подробно. Главный вектор сил инерции  $\mathbf{F}_i$  представляет собой результирующую всех элементарных сил инерции, действующих на звенья механизма. В свою очередь элементарная сила инерции пропорциональна ускорению элементарного объема и его массе. Поэтому в проекциях на оси декартовой системы координат векторное равенство (9.17) равносильно трем скалярным равенствам следующего вида:

$$F_{ux} = -\sum m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0, \quad F_{uy} = -\sum m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0, \quad F_{uz} = -\sum m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0,$$

где суммирование ведется по всем элементарным объемам, на которые мысленно разбиты звенья механизма.

Векторное равенство (9.18) также может быть спроектировано на координатные оси. При этом выражения для проекций момента от каждой элементарной силы инерции определяются соотношениями (1.13):

$$M_{ux} = \sum m_i \left( y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = 0,$$

$$M_{uy} = \sum m_i \left( z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) = 0,$$

$$M_{uz} = \sum m_i \left( x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = 0.$$

Для плоских механизмов, которые рассматриваются в настоящем пособии, одна из координат (например, координата  $z$ ) любого элементарного объема остается постоянной. Поэтому производная от этой координаты по времени обращается в нуль. Следует учесть также, что момент  $M_{uz}$  действует в плоскости движения механизма. В этой же плоскости действуют все внешние силы, моменты которых тоже оказывают влияние на величину динамических нагрузок на стойку и фундамент. Поэтому воздействие момента  $M_{uz}$  необходимо анализировать совместно с моментами указанных сил. С учетом сказанного условия уравновешенности сил инерции, действующих на звенья механизма, примут вид:

$$\sum m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0 ; \quad \sum m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0 ; \quad (9.19)$$

$$\sum m_i z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0 ; \quad \sum m_i z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0 .$$

Поскольку в любой момент времени положение каждого звена механизма однозначно определяется положением ведущего звена, координаты  $x_i$  и  $y_i$  являются функциями угла поворота  $\varphi$  ведущего звена. Поэтому для производных по времени, входящих в соотношения (9.19), справедливы следующие представления:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} ; \quad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{dx_i}{d\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} + \varepsilon \frac{dx_i}{d\varphi} .$$

Здесь  $\omega$  и  $\varepsilon$  – угловая скорость и угловое ускорение ведущего звена. Аналогичные равенства выполняются и для производных от координат  $y_i$ . Подстановка этих выражений в равенства (9.19) позволяет записать:

$$\omega^2 \sum m_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} + \varepsilon \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0 , \quad \omega^2 \sum m_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} + \varepsilon \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0 , \quad (9.20)$$

$$\omega^2 \sum m_i z_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} + \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0 , \quad \omega^2 \sum m_i z_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} + \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0 ,$$

Полученные равенства должны выполняться при любых значениях угловой скорости и углового ускорения. Это возможно только в том случае, когда каждая из сумм, входящих в равенства, равна нулю. При этом равенство нулю сумм, содержащих первые производные, автоматически приводит к равенству нулю сумм, содержащих вторые производные по обобщенной координате. Следовательно, условия (9.20) выполняются тогда, когда равны нулю следующие четыре суммы:

$$\sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0 ; \quad \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0 ; \quad \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0 ; \quad \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0 . \quad (9.21)$$

Рассмотрим первое из этих равенств. Его можно записать в виде:

$$\sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \sum m_i x_i = \frac{d}{d\varphi} m x_s = 0.$$

Здесь использовано понятие центра масс механической системы (подраздел 3.4) и соотношения (3.14) для определения координат центра масс. Поскольку полная масса механизма  $m$  остается постоянной, это равенство означает, что абсцисса центра масс механизма не зависит от положения ведущего звена. Аналогичным образом второе равенство (9.21) позволяет заключить, что и ордината центра масс не меняется при работе механизма, в котором силы инерции уравновешены. Таким образом, для *уравновешивания главного вектора сил инерции звеньев плоского механизма требуется подобрать массы его звеньев так, чтобы общий центр масс всех звеньев механизма не менял своего положения*:

$$x_s = \text{const}; \quad y_s = \text{const}. \quad (9.22)$$

Рассмотрим теперь третье и четвертое из равенств (9.21). Напомним, что они отражают отсутствие проекций момента сил инерции на соответствующие координатные оси. Третье равенство может быть записано в виде:

$$\sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \sum m_i x_i z_i - \sum m_i x_i \frac{dz_i}{d\varphi} = 0.$$

Поскольку координаты  $z_i$  не меняются при работе механизма, все производные  $\frac{dz_i}{d\varphi}$  равны нулю, и равенство сводится к простому соотношению:

$$\frac{d}{d\varphi} \sum m_i x_i z_i = \frac{dJ_{xz}}{d\varphi} = 0. \quad (9.23)$$

Величина  $J_{xz} = \sum m_i x_i z_i$  называется центробежным моментом инерции масс всех звеньев механизма относительно плоскости  $Oxz$ . По своему смыслу она аналогична рассмотренным в подразделе 3.6 моментам инерции механической системы относительно осей декартовой системы координат.

Четвертое равенство (9.21) точно так же может быть сведено к соотношению:

$$\frac{d}{d\varphi} \sum m_i y_i z_i = \frac{dJ_{yz}}{d\varphi} = 0, \quad (9.24)$$

где  $J_{yz} = \sum m_i y_i z_i$  - центробежный момент инерции масс всех звеньев механизма относительно плоскости  $Oyz$ . Соотношения (9.23) и (9.24) выражают собой условия уравнивания главных моментов сил инерции относительно осей  $x$  и  $y$ . Для этого *требуется подобрать массы звеньев механизма так, чтобы центробежные моменты инерции масс всех звеньев относительно плоскостей  $Oxz$  и  $Oyz$  оставались постоянными при любом положении ведущего звена:*

$$J_{xz} = const; \quad J_{yz} = const. \quad (9.25)$$

На практике при уравнивании плоских рычажных механизмов часто ограничиваются лишь условием (9.22), т. е. требованием равенства нулю главного вектора сил инерции всех подвижных звеньев механизма. Такое уравнивание масс механизма называют **статическим**. Если за счет распределения масс звеньев удастся удовлетворить также и условиям (9.25), то уравнивание механизма называют **динамическим**.

В качестве примера рассмотрим статическое уравнивание механизма шарнирного четырехзвенника, изображенного на рис. 9.4.

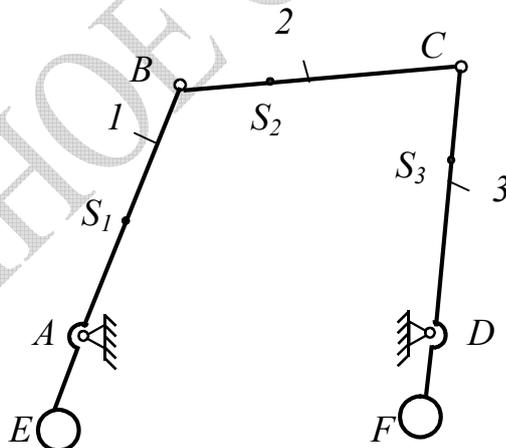


Рисунок 9.4

В данном случае для уравнивания механизма используются противовесы  $E$  и  $F$ . Задача состоит в том, чтобы найти массы противовесов, обеспечивающих равенство нулю главного вектора сил инерции. Исходными данными являются массы подвижных звеньев

$m_1, m_2, m_3$  ; длины звеньев  $l_1, l_2, l_3$  ; положение центра масс каждого подвижного звена  $S_1, S_2, S_3$ .

Наиболее простым и наглядным методом решения задачи уравнивания масс механизма служит **метод заменяющих масс**. Он состоит в следующем. Реальные звенья механизма мысленно заменяются **системой точечных заменяющих масс**, которая обладает массой, равной сумме масс всех подвижных звеньев, имеет положение центра масс, совпадающее с положением центра масс звеньев механизма, и одинаковые с ним значения моментов инерции относительно декартовых осей.

Для упрощения задачи ограничимся двумя заменяющими массами при замене каждого звена. Звено 1 заменим двумя массами  $m_A$  и  $m_{B1}$ , сосредоточенными в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Найдем их величины, исходя из свойств, которыми должна обладать система заменяющих масс. Сумма масс  $m_A$  и  $m_{B1}$  равна массе звена  $m_1$ :

$$m_A + m_{B1} = m_1,$$

а центр масс системы  $\{m_A, m_{B1}\}$  должен находиться в точке  $S_1$ :

$$m_A A S_1 - m_{B1} B S_1 = 0.$$

Решая систему этих двух уравнений относительно масс  $m_A$  и  $m_{B1}$ , находим:

$$m_A = \frac{BS_1}{l_1} m_1, \quad m_{B1} = \frac{AS_1}{l_1} m_1.$$

Здесь учтено, что сумма отрезков  $A S_1$  и  $B S_1$  равна полной длине  $l_1$  звена 1.

Звено 2 заменим системой двух точечных масс  $m_{B2}$  и  $m_{C2}$ , сосредоточенных соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Точно так же выразим их величину через заданную массу  $m_2$  звена 2, его длину  $l_2$  и положение центра масс  $S_2$ :

$$m_{B2} = \frac{CS_2}{l_2} m_2, \quad m_{C2} = \frac{BS_2}{l_2} m_2.$$

Наконец, третье звено заменим системой двух точечных масс  $m_{C3}$  и  $m_D$ , сосредоточенных соответственно в точках  $C$  и  $D$ . Указанные массы также выразим через параметры звена 3:

$$m_{C3} = \frac{DS_3}{l_3} m_3, \quad m_D = \frac{CS_3}{l_3} m_3.$$

Таким образом, в точке  $B$  сосредоточена масса  $m_B = m_{B1} + m_{B2}$ , а в точке  $C$  – масса  $m_C = m_{C2} + m_{C3}$ . Обе величины выражаются через заданные параметры подвижных звеньев механизма. Эти массы должны быть уравновешены за счет использования противовесов. Массу последних нужно выбрать так, чтобы центр масс звеньев 1 и 3 вместе с противовесами при работе оставался неподвижным. Это может быть достигнуто, если указанные центры масс будут находиться в точках  $A$  и  $D$ . Следовательно, массы противовесов  $m_E$  и  $m_F$  должны удовлетворять уравнениям:

$$m_E AE = m_B l_1, \quad m_F FD = m_C l_3,$$

где длины  $AE$  и  $FD$  определяются габаритами противовесов.

#### 9.6. Контрольные вопросы

1. В чем состоят основные задачи синтеза механизмов?
2. Назовите условия существования кривошипа в шарнирном четырехзвенном механизме.
3. Назовите условия существования кривошипа в кривошипно-ползунном механизме.
4. Что представляют собой исходные данные при проектировании механизмов?
5. Какие параметры должны быть определены при разработке кинематической схемы проектируемого механизма?
6. Что такое коэффициент увеличения средней скорости ведомого звена?
7. К чему приводит наложение дополнительных условий, которым должен удовлетворять проектируемый механизм?
8. В чем состоит уравновешивание механизмов, и какие задачи оно решает?
9. Когда механизм является уравновешенным?
10. Сформулируйте условия уравновешенности механизма.

## Глава 10. Передаточные механизмы

### 10.1. Классификация и основные характеристики передаточных механизмов

Большинство технологических машин имеют в своем составе механизмы, которые называют общим термином **передаточные механизмы**. Рабочие процессы таких машин требуют, чтобы движение выходных звеньев осуществлялось по строго заданному закону и было согласовано с движением выходных звеньев других механизмов. Чаще всего речь идет о связи движений двигателя и исполнительного органа машины. Двигатель работает более экономично при больших скоростях вращения, между тем как скорость ведомого звена обычно бывает значительно ниже, что обуславливается требованием технологического процесса. Отсюда вытекает необходимость понижения скорости вращения, за счет включения в схему проектируемой машины промежуточного механизма.

Кроме того, на передаточные механизмы могут возлагаться функции распределения мощности между различными исполнительными органами машины, передача и преобразование движения, воспроизведение движения с заданной траекторией, его реверсирование, пуск и останов и т. д. Указанные функции должны выполняться механизмом с определенной точностью в течение достаточно длительного промежутка времени. Передаточные механизмы должны иметь приемлемые габариты, быть надежными и безопасными при эксплуатации машин. К ним могут предъявляться другие важные требования, удовлетворить которые невозможно без тщательного выбора кинематической схемы механизма, выбора конструкционных материалов, всестороннего расчета его составных частей.

В настоящем пособии рассматриваются только передаточные механизмы, передающие непрерывное вращательное движение между двумя произвольно ориентированными осями. Такие механизмы называются **механическими передачами**. В зависимости от способа передачи движения различают **передачи зацеплением** и **передачи трением**. К передачам зацеплением относятся, например, **зубчатые** и **червячные передачи**. Представителями передач трением являются **фрикционные** и **ременные передачи**. В последних движение передается через промежуточное звено – **гибкую связь**. Разновидность ременных передач являются **ленточные передачи**, предназначенные для реализации ограниченного возвратно-вращательного движения.

Механическая передача согласует параметры движения стандартного электродвигателя (скорость вращения и крутящий

момент на валу) с аналогичными параметрами движения рабочего органа машины. Одновременно в случае необходимости движение может быть передано на определенное расстояние.

Важнейшей кинематической характеристикой механической передачи является ее **передаточное отношение**. Этой величиной называют отношение  $U_{12}$  угловой скорости ведущего звена  $\omega_1$  к угловой скорости ведомого звена  $\omega_2$ :

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} . \quad (10.1)$$

Ведущее звено, как правило, непосредственно связано с валом двигателя. Двигатель работает более экономично при больших скоростях вращения. Так, скорость вращения вала электродвигателя обычно составляет 75, 100, 150 или 300 радиан в секунду. Скорость вращения ведомого звена, которое связано с валом рабочего органа машины, в зависимости от ее назначения может находиться в очень широких пределах – приблизительно от 0,1 до  $10^4$  радиан в секунду. Отсюда видно, что передаточное отношение может принимать практически любые значения. Если  $U_{12} > 1$ , то передача называется **понижающей**, т. к. скорость выходного (ведомого) звена меньше, чем скорость ведущего (входного) звена. Если  $U_{12} < 1$ , то передача называется **повышающей**, а если  $U_{12} = 1$ , то – **прямой**.

Энергетическим параметром любой передачи служит **коэффициент полезного действия** – *отношение полезной мощности* (мощности на выходе  $N_{\text{вых}}$ ) *к затраченной мощности* (мощности на входе  $N_{\text{вх}}$ )

$$\eta = \frac{N_{\text{вых}}}{N_{\text{вх}}} < 1 . \quad (10.2)$$

Выражение (10.2) может быть записано в виде *закона передачи мощности*

$$N_{\text{вых}} = N_{\text{вх}} \eta . \quad (10.3)$$

Для случая вращательного движения мощность, как известно, выражается через момент на валу  $T$  и угловую скорость вала  $\omega$ , т.е.

$$N = T \omega . \quad (10.4)$$

Комбинируя выражения (10.3) и (10.4), получим *закон передачи момента*:

$$T_2 = T_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} \eta = T_1 U_{12} \eta, \quad (10.5)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – величины крутящего момента на ведущем и ведомом звеньях передачи соответственно. Из закона передачи момента следует, что в понижающей передаче уменьшение скорости вращения сопровождается увеличением крутящего момента, примерно в  $U_{12}$  раз (если не учитывать величину КПД).

Простейшая механическая передача включает стойку и два подвижных звена. При этом подвижные звенья образуют со стойкой, как правило, низшую вращательную кинематическую пару 5-го класса, а между собой – высшую пару 4-го класса. Примерами таких передач

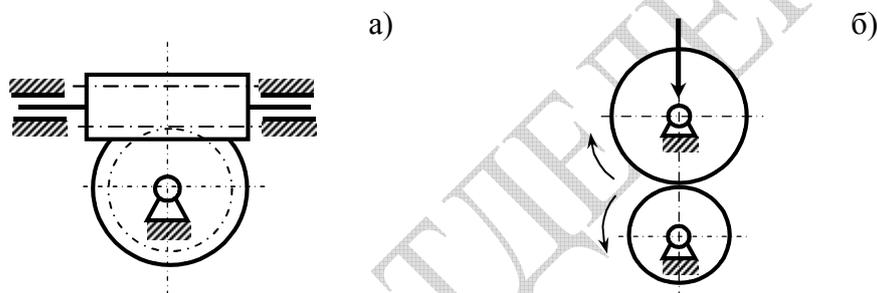


Рисунок 10.1

могут служить червячная и фрикционная передачи, изображенные на рис. 10.1, а и рис. 10.1, б соответственно.

Классификация механических передач может проводиться по различным признакам. В зависимости от способа передачи движения они делятся на **передачи сцеплением** и **передачи зацеплением**. В передачах первого вида движение передается за счет сил трения. В передачах зацеплением движение передается путем давления элементов высшей кинематической пары одного подвижного звена на элементы кинематической пары другого подвижного звена.

По взаимному расположению вращающихся звеньев различают передачи с параллельными осями вращения (рис. 10.1, б), с пересекающимися осями, с перекрещивающимися осями (рис. 10.1, а). Передачи могут быть открытыми или закрытыми. **Закрытая передача** (обычно это зубчатая или червячная передача) помещается в специальный корпус, в котором обеспечивается необходимый режим смазки элементов передачи, а **открытая передача** специального герметичного корпуса не имеет. Открытыми передачами могут быть зубчатые, фрикционные, ременные, цепные передачи.

Различают силовые и кинематические передачи. Силовые передачи используются для передачи значительных мощностей. Их габариты определяются, как правило, прочностной надежностью. Размеры кинематических передач определяются конструктивными соображениями.

В настоящем пособии подробно рассмотрены передачи зацеплением, поскольку они применяются при разработке химико-технологического оборудования наиболее широко. В таких передачах характер относительного движения подвижных звеньев зависит от формы кинематических элементов высшей пары механизма. В свою очередь требуемый характер относительного движения звеньев определяет форму элементов высшей пары механизма. Поэтому вопрос о связи формы элементов пары и вида их относительного движения является основным.

## 10.2. Воспроизведение движения между звеньями механизма передачи методом взаимного обкатывания центроид

Для определения вида относительного движения между подвижными звеньями передачи удобно использовать метод обращенного движения (*метод инверсии*). Сущность метода состоит в следующем. Всему механизму мысленно придаётся угловая скорость, равная скорости одного из подвижных звеньев (например, звену 2) и обратно ей направленная. В таком случае звено 2 становится для наблюдателя неподвижным, а движение другого будет являться движением относительно первого.

Применим этот метод к передаче с параллельными осями  $O_1$  и  $O_2$  и передаточным отношением  $U_{12} = \omega_1 / \omega_2$  (рис. 10.2). Всему механизму мысленно сообщим угловую скорость  $\omega'_2$ , равную угловой скорости  $\omega_2$ , но направленную в противоположную сторону. Тогда движение звена 1 относительно звена 2 будет складываться из вращения вокруг оси  $O_2$  вместе со стойкой с угловой скоростью  $\omega'_2$  и вращения вокруг собственной оси с угловой скоростью  $\omega_1$ . Таким образом, рассматриваемое относительное движение звена 1 будет сложным вращательным. Вектор скорости этого движения будет равен  $\Omega_{12} = \omega_1 + \omega'_2$ . С такой скоростью звено 1 поворачивается вокруг некоторой точки  $P$  – *мгновенного центра скоростей относительного движения* (см. рис. 10.2).

Так как рассматривается передача с параллельными осями вращения звеньев, то векторы всех угловых скоростей также будут параллельными и, следовательно, величина угловой скорости  $\Omega_{12}$  равна:

$$\Omega_{12} = \omega_1 \pm \omega'_2 = \omega_1 \pm \omega_2.$$

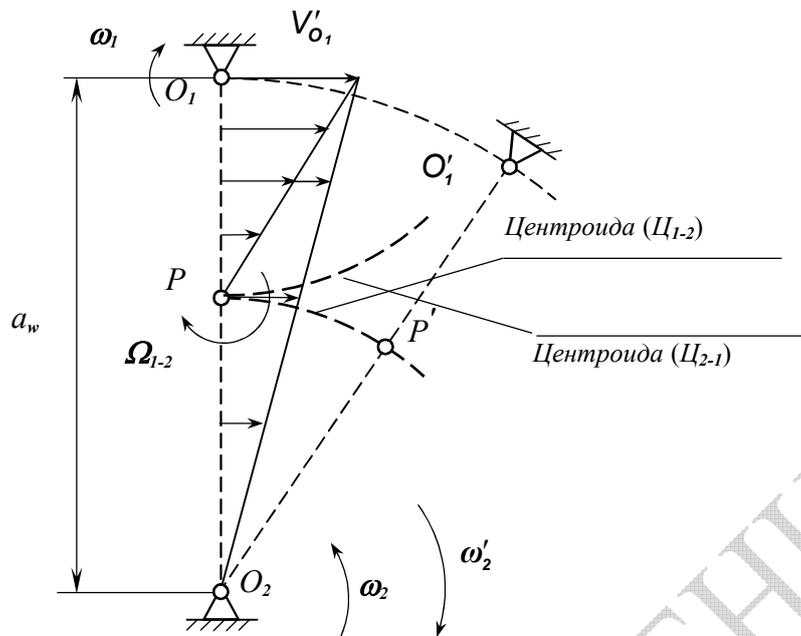


Рисунок 10.2

Здесь знак «+» соответствует случаю, когда звенья 1 и 2 вращаются в различные стороны (внешнее зацепление звеньев), а знак «-» – в одну сторону (внутреннее зацепление звеньев).

Линейную скорость точки  $O_1$  можно выразить двумя способами. С одной стороны, поскольку точка  $P$  – мгновенный центр скоростей относительного движения звеньев, то скорость  $V'_{O_1}$  указанной точки при движении звена 1 вокруг мгновенного центра скоростей равна:

$$V'_{O_1} = \Omega_{12} \cdot O_1P = (\omega_1 \pm \omega_2) \cdot O_1P .$$

С другой стороны, скорость этой же точки при движении вокруг центра  $O_2$  может быть выражена через угловую скорость  $\omega_2$ :

$$V'_{O_1} = \omega_2 \cdot O_1O_2 .$$

Следовательно,

$$(\omega_1 \pm \omega_2) \cdot O_1P = \omega_2 \cdot O_1O_2 .$$

С учётом того, что  $O_1O_2 = O_2P \pm O_1P$ , после несложных преобразований получим:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} \quad (10.6)$$

Точно такой же результат получится, если рассматривать движение звена 2 относительно звена 1, применяя обращённое движение механизма при условно остановленном звене 1.

Таким образом, *относительное движение* звеньев является сложным вращательным движением, которое в каждый момент времени может рассматриваться как поворот вокруг мгновенного центра скоростей. Этот мгновенный центр (точка  $P$ ) расположен на линии, соединяющей центры вращения звеньев, и делит расстояние между центрами вращения на части, обратно пропорциональные угловым скоростям звеньев.

Так как межосевое расстояние  $a_w = O_2P \pm O_1P$ , то положение мгновенного центра скоростей  $P$  определится из выражений

$$O_1P = \frac{a_w}{U_{12} \pm 1}; \quad O_2P = \frac{a_w \cdot U_{12}}{U_{12} \pm 1} \quad (10.7)$$

При относительном перемещении звеньев точка  $P$  будет описывать некоторую кривую  $\zeta_{1-2}$ , называемую **центроидой относительного движения**. Центроида является геометрическим местом мгновенных центров скоростей относительного движения звеньев. Если рассматривать движение звена 2 относительно звена 1, то получится вторая центроида  $\zeta_{2-1}$  (см. рис. 10.2). В процессе движения механизма эти центроиды будут перекатываться друг по другу без скольжения. Если через каждую точку центроид относительного движения звеньев, т.е. через каждое положение мгновенного центра скоростей, провести прямую перпендикулярную плоскости чертежа, то образуются две цилиндрические поверхности, которые являются геометрическим местом мгновенных осей относительного движения звеньев. Эти поверхности носят название **аксоидов относительного движения**. Очевидно, что аксоиды также перекатываются друг по другу без скольжения.

Если по форме аксоидов относительного движения выполнить элементы высшей кинематической пары и обеспечить относительное перекатывание этих элементов без проскальзывания, то между заданными осями будет осуществляться передача движения по требуемому закону. Такие передачи называют *центроидными* или *фрикционными*. Последнее название обусловлено тем, что исключение относительного проскальзывания обеспечивается за счёт сил трения (от латинского *frictionis* – трение), создаваемых на рабочих поверхностях звеньев. Передачи с параллельными осями из-за

цилиндрической формы аксоидов относительного движения называют также **цилиндрическими**.

Из формул (10.7) следует, что при постоянном передаточном отношении  $U_{12}$  радиусы центроид будут постоянными, т. е. в этом случае центроиды будут представлять собой окружности. Соответственно аксоиды относительного движения и сами рабочие поверхности подвижных звеньев центроидного механизма будут круглыми цилиндрами.

Фрикционные передачи, несмотря на несомненные достоинства, связанные в первую очередь с простотой форм рабочих поверхностей звеньев, обладают весьма существенным недостатком: практически оказывается невозможным постоянно обеспечить чистое перекачивание аксоидных поверхностей друг по другу. В результате передаточное отношение оказывается непостоянным, что во многих случаях является недопустимым. Передачи зацеплением лишены этого недостатка.

### 10.3. Основная теорема зацепления

В передачах зацеплением подвижные звенья снабжены профильными выступами (зубьями), взаимодействие которых приводит к передаче движения. Звенья, имеющие зубья, называют *зубчатыми звеньями*, а зубчатое звено с замкнутой системой зубьев, обеспечивающее непрерывную передачу движения другому зубчатому звену – *зубчатым колесом*. Для нормальной работы передачи зубья зацепляющихся зубчатых колес должны иметь **взаимооггибаемые поверхности**, т.е. иметь такие боковые поверхности, которые были бы касательными одна к другой при любом возможном относительном положении зубьев в процессе движения. Соответствующую форму должны иметь и кривые, очерчивающие, в частности, торцевые профили зубьев, т.е. кривые, определяющие форму зуба в плоскости, перпендикулярной оси колеса.

Но условие **взаимооггибаемости** профилей зубьев ещё не достаточно для того, чтобы с их помощью возможно было осуществление передачи движения с заданным передаточным отношением. Требования, которым должны удовлетворять в этом случае профили зубьев зубчатых колёс формулируются так называемой **основной теоремой зацепления (теоремой Виллиса)**: *профили, передающие вращение между параллельными осями в каждой точке своего касания должны иметь общую нормаль, проходящую через мгновенный центр относительного вращения звеньев, положение которого определяется заданным относительным движением звеньев.*

Для доказательства теоремы рассмотрим зацепление двух профилей, передающих движение между двумя параллельными

осями  $O_1$  и  $O_2$  с заданным передаточным отношением (рис. 10.3). При этом профиль 1 вращается с угловой скоростью  $\omega_1$ , а профиль 2 – с угловой скоростью  $\omega_2$ . В рассматриваемый момент времени профили касаются друг друга в точке  $A$  (в этом месте точка  $A_1$  профиля 1 касается точки  $A_2$  профиля 2). Перпендикулярно общей касательной  $T-T$  проведена общая нормаль  $N-N$  к профилям в точке их контакта. Из точек  $O_1$  и  $O_2$  на общую нормаль опущены перпендикуляры  $O_1M_1$  и  $O_2M_2$ .

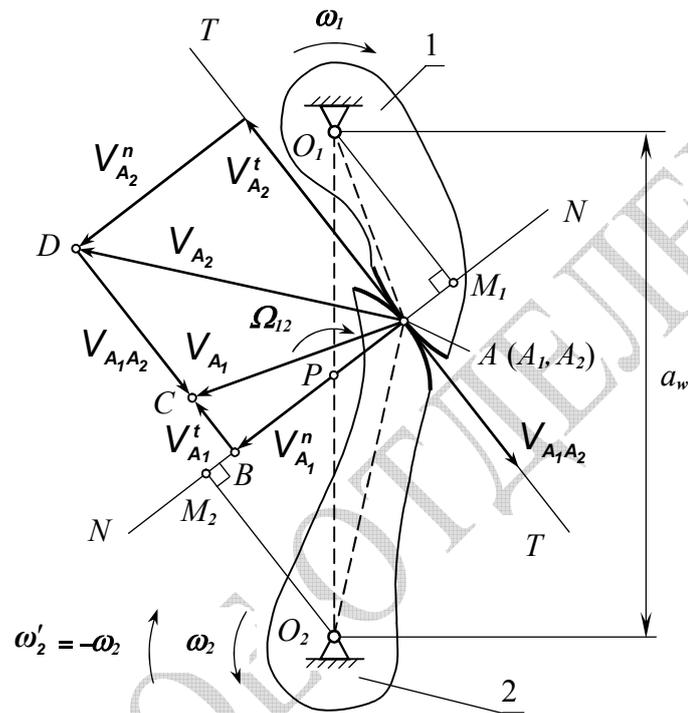


Рисунок 10.3

Векторы окружных скоростей  $V_{A_1}$  и  $V_{A_2}$  перпендикулярны отрезкам  $O_1A_1$  и  $O_2A_2$  соответственно. Из рис. 10.3 следует, что

$$V_{A_1} = \omega_1 O_1A_1 ; V_{A_2} = \omega_2 O_2A_2 . \quad (10.8)$$

Скорости точек  $A_1$  и  $A_2$ , принадлежащие звеньям, связаны условием

$$V_{A_1} = V_{A_2} + V_{A_1A_2} ,$$

где  $V_{A_1A_2}$  – скорость точки  $A_1$  относительно  $A_2$ . По величине векторы окружных скоростей  $V_{A_1}$  и  $V_{A_2}$  должны быть такими, чтобы их проекции на общую нормаль  $N-N$  были бы одинаковы:

$$V_{A_1}^n = V_{A_2}^n . \quad (10.9)$$

В противном случае профиль 1 будет врезаться в профиль 2 или отставать от него, что невозможно т.к. кинематическая пара в этом случае разрушится или разомкнется. Проекции векторов окружных скоростей  $V_{A_1}^t$  и  $V_{A_2}^t$  на общую касательную  $T-T$  могут быть не равны друг другу (как это показано на рис. 10.3), что свидетельствует о возможности скольжения в кинематической паре.

Поскольку треугольник  $O_1M_1A$  и векторный треугольник  $BCA$  имеют взаимно перпендикулярные стороны, то они подобны. Следовательно, с учетом 10.8 справедливо соотношение:

$$\frac{V_{A_1}}{O_1A} = \frac{V_{A_1}^n}{O_1M_1} \quad \text{или} \quad \omega_1 = \frac{V_{A_1}^n}{O_1M_1} \cdot \quad (10.10)$$

Треугольники  $O_2M_2A$  и  $BDA$  также подобны из-за перпендикулярности их сторон, из чего следует аналогичное соотношение:

$$\frac{V_{A_2}}{O_2A} = \frac{V_{A_2}^n}{O_2M_2} \quad \text{или} \quad \omega_2 = \frac{V_{A_2}^n}{O_2M_2} \cdot \quad (10.11)$$

Наконец, из подобия прямоугольных треугольников  $O_1M_1P$  и  $O_2M_2P$ , с учетом (10.9 – 10.11) вытекают следующие пропорции:

$$\frac{O_2M_2}{O_1M_1} = \frac{O_2P_2}{O_1P_1} \quad \text{или} \quad \frac{V_{A_2}^n \omega_1}{V_{A_1}^n \omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} \cdot$$

Таким образом, *точка P делит межосевое расстояние в отношении пропорциональном передаточному отношению*

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} \cdot$$

Сравнивая полученное соотношение с (10.6), видим, что они идентичны. Это является доказательством прохождения общей нормали  $N-N$  через мгновенный центр скоростей  $P$ . В передачах с зацеплением мгновенный центр называют **полюсом передачи**.

При постоянном передаточном отношении, т.е. при  $\omega_1 / \omega_2 = const$ , полюс передачи находится всегда в одной и той же точке на линии, соединяющей центры вращения звеньев. Следовательно, в этом случае нормали, проведенные к различным точкам касания двух совместно работающих профилей должны всегда проходить через

одну и ту же точку. Этим свойством обладают кривые, относящиеся к семейству рулетт. **Рулеттами** называют кривые, которые описываются точками, скреплёнными с некоторой кривой, катящейся без скольжения по некоторой другой, неподвижной кривой.

Из большого числа различных рулетт одной из самых простых кривых является эвольвента окружности, которая широко используется для образования профилей зубьев в передачах зацеплением. Предложение использовать эвольвенту окружности в этих целях высказал в 1764 году русский учёный Л.Эйлер.

Ниже рассматриваются зубчатые эвольвентные передачи, обеспечивающие передачу движения между параллельными осями с постоянным передаточным отношением.

#### 10.4. Эвольвентное зацепление и его свойства

**Эвольвентной окружности** называют кривую, которую описывает точка прямой линии при перекатывании её без скольжения по окружности. Прямая линия носит название **производящей прямой**, а окружность – **основной окружностью**. На рис. 10.4 изображены основная окружность радиуса  $r_b$  и производящая прямая в начальном (штриховая линия) и произвольном ( $K_y N_y$ ) положениях. Точка  $K$  производящей прямой при её перекатывании без скольжения описывает эвольвенту  $K_b K_y$ . Отрезок  $OK_y = r_y$  является текущим

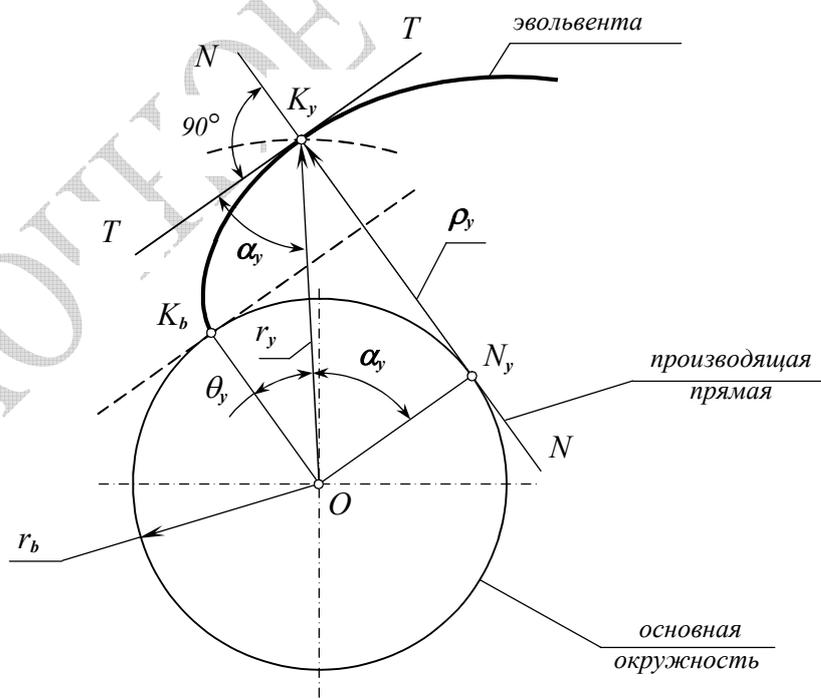


Рисунок 10.4

**радиус-вектором** в точке  $K_y$ . Начальный радиус-вектор  $OK_o$  эвольвенты равен радиусу  $r_b$  основной окружности. Острый угол  $\alpha_y$  между касательной к эвольвенте  $T-T$  в точке  $K_y$  и её радиусом-вектором  $r_y$  называется **профильным углом** эвольвенты. На схемах часто обозначают вместо профильного угла равный ему угол  $K_yON_y = \alpha_y$ . Угол  $\theta_y$ , образованный начальным радиусом-вектором эвольвенты  $OK_b$  и её текущим радиусом  $r_y$ , называется эвольвентным углом или инволютой  $\alpha_y$ , т.е.

$$\theta_y = \text{inv}\alpha_y .$$

Любая точка эвольвенты вполне определяется двумя параметрами: радиусом-вектором  $r_y$  и эвольвентным углом  $\theta_y$ . Исходя из представлений о получении эвольвенты (дуга  $K_bN_y$  равна отрезку  $K_yN_y = \rho_y$ , где  $\rho_y$  – радиус кривизны эвольвенты в точке  $K_y$ ), с учетом свойств центральных углов окружности справедливы соотношения:

$$\rho_y = r_b(\theta_y + \alpha_y) \quad \text{или} \quad \theta_y = \rho_y / r_b - \alpha_y .$$

Отсюда получаем:

$$\theta_y = \text{inv}\alpha_y = \text{tg}\alpha_y - \alpha_y , \quad (10.12)$$

где  $\text{tg}\alpha_y = \frac{\rho_y}{r_b}$ . Текущий радиус-вектор  $r_y$  и угол профильный угол эвольвенты  $\alpha_y$  связаны зависимостью:

$$r_y = \frac{r_b}{\cos \alpha_y} . \quad (10.13)$$

Формулы (10.12) и (10.13) задают уравнение эвольвенты в параметрической форме. Исключая из них параметр  $\alpha_y$ , получают прямую связь между  $\theta_y$  и  $r_y$ , выраженную через  $r_b$ . Следовательно, эвольвента полностью определяется основной окружностью. Поэтому для аналитического определения координат эвольвентного профиля зуба или для графического его построения необходимо и достаточно знать лишь радиус основной окружности.

Эвольвента обладает следующими основными свойствами:

1. Начальная точка эвольвенты лежит на основной окружности. Внутри этой окружности эвольвента точек не имеет.

2. Точка  $N_y$  является мгновенным центром вращения производящей прямой, а, следовательно, и центром кривизны эвольвенты в точке  $K_y$ . Отрезок  $K_y N_y$  производящей прямой является текущим радиусом кривизны  $\rho_y$  эвольвенты в точке  $K_y$ . Отсюда следует, что нормаль  $N-N$  в любой точке эвольвенты легко может быть построена, если провести из этой точки прямую, касательную к основной окружности.
3. Профильный угол  $\alpha_y$  и радиус кривизны  $\rho_y$  в начальной точке  $K_0$  эвольвенты равны нулю. По мере удаления точек эвольвенты от основной окружности профильный угол и радиус кривизны эвольвенты увеличиваются.

С увеличением радиуса основной окружности  $r_b$  кривизна эвольвенты уменьшается, и при  $r_b = \infty$  эвольвента вырождается в прямую линию. Рис. 10.5 иллюстрирует приближенный способ построения эвольвенты, которая является траекторией некоторой точки  $K_y$  производящей прямой. Отрезок  $K_y N_y$  разделён на пять равных частей ( $N_y - 1$ ,  $1 - 2$ ,  $2 - 3$ ,  $3 - 4$ ,  $4 - K_y$ ). На основной окружности отмечены точки  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ,  $4'$  и  $K_b$ , с которыми при перекачивании последовательно соприкасаются точки  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$  и  $K_y$  прямой  $K_y N_y$ .

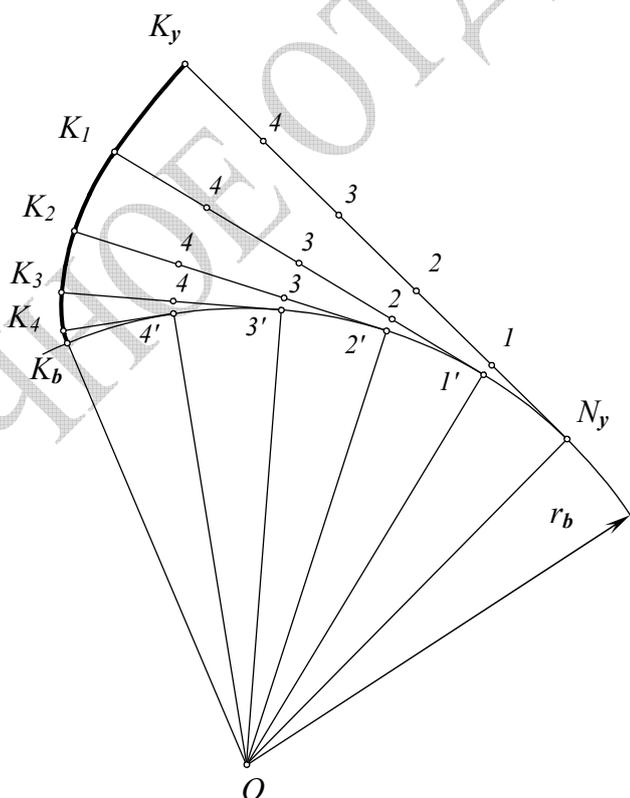


Рисунок 10.5

Поскольку длины хорд дуг  $\cup N_y - 1'$ ,  $\cup 1' - 2'$ ,  $\cup 2' - 3'$ ,  $\cup 3' - 4'$  и  $\cup 4' - K_b$  равны соответствующим отрезкам производящей прямой (при

делении отрезка  $K_y N_y$  на достаточно большое число частей), то длины дуг будут мало отличаться от длины их хорд. Через точки  $1', 2', 3', 4'$  и  $K_b$  проведены касательные, представляющие собой ряд последовательных положений прямой  $K_y N_y$  при её перекачивании по основной окружности. На каждой из касательных определено положение точки  $K_i$ :  $K_1 - 1' = K_y - 1$ ;  $K_2 - 2'$  и т.д.). Траектория точки  $K$  является эвольвентой.

Зацепление эвольвентных профилей обладают определенными свойствами. На рис. 10.6 показаны эвольвенты  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  основных окружностей радиусов  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$ , описываемые одной и той же точкой  $a$  общей производящей прямой  $N-N$  и следовательно, соприкасающиеся в этой точке, и эвольвенты  $\mathcal{E}'_1$  и  $\mathcal{E}'_2$  тех же основных

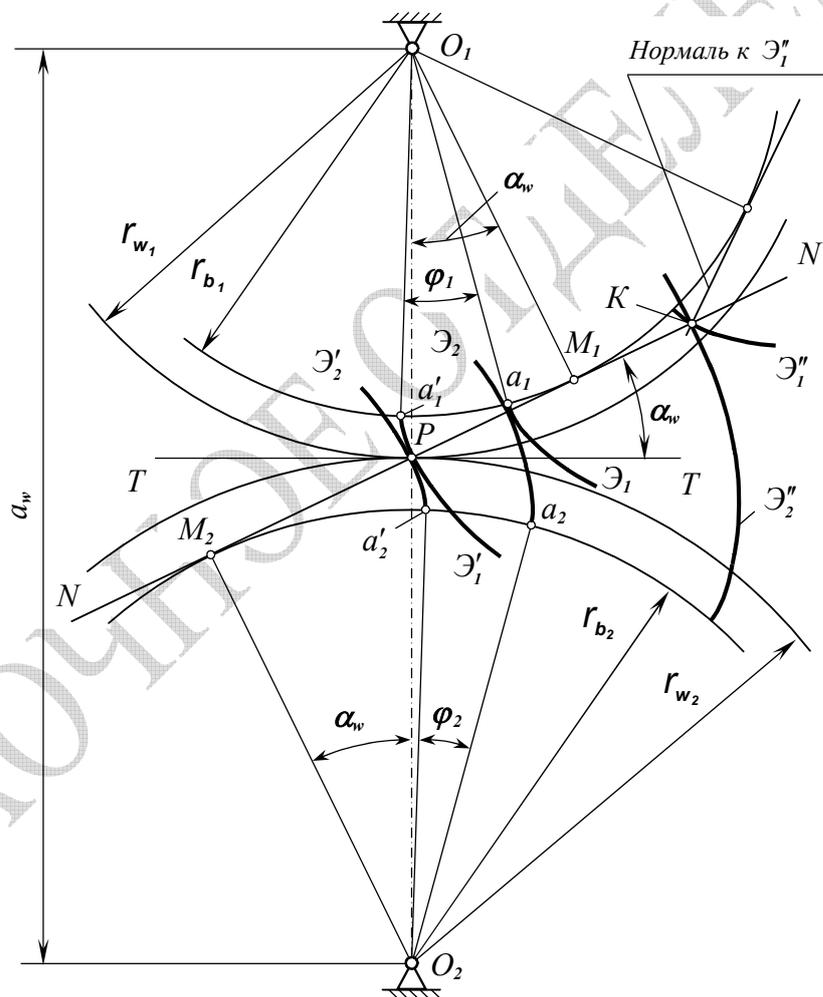


Рисунок 10.6

окружностей, соприкасающихся в точке  $P$ , являющейся полюсом передачи. Для обеих пар эвольвент прямая  $N-N$  является общей нормалью и проходят через полюс  $P$  передачи. Обе пары эвольвент

представляют пару сопряженных профилей, которые обеспечивают передачу движения с заданным передаточным отношением

$$U_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}},$$

где  $r_{w_1}$  и  $r_{w_2}$  – радиусы центров относительного движения колёс. В передачах зацеплением с постоянным передаточным отношением  $U_{12}$  эти центры называют **начальными окружностями**. Действительно, из свойств эвольвенты следует:

$$PA = \cup a'_2 a_2 = \cup a'_1 a_1,$$

но

$$\cup a'_2 a_2 = r_{b_2} \varphi_2, \quad \cup a'_1 a_1 = r_{b_1} \varphi_1,$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – центральные углы, определяющие относительное положение эвольвент  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}'_1$ , а также эвольвент  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}'_2$ . Отсюда получаем:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{r_{b_2}}{r_{b_1}} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = U_{12}. \quad (10.14)$$

В процессе зацепления профилей общая точка их контакта перемещается по прямой  $N-N$ , если рассматривать перемещение этой точки в системе координат, связанной со стойкой. Прямую  $N-N$ , являющуюся геометрическим местом точек контакта сопряжённых эвольвент  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  называют **линией зацепления**. Угол  $\alpha_w$ , образуемый линией зацепления  $N-N$  и общей касательной  $T-T$  к начальным окружностям в точке  $P$ , называется **углом зацепления**.

На рис. 10.6 показаны углы  $M_1 O_1 P$  и  $M_2 O_2 P$ , равные углу зацепления. Несмотря на равенство этих углов, их не следует смешивать, так как углы  $M_1 O_1 P$  и  $M_2 O_2 P$ , равные профильным углам эвольвент в точках, лежащих на центроидах, являются геометрическими параметрами каждого из профилей, а угол  $\alpha_w$  есть кинематический параметр зацепления обоих профилей.

Из выражения (10.14) и рис. 10.6 вытекает следующие свойства эвольвентного зацепления:

1. Эвольвентное зацепление как внешнее, так и внутреннее допускает изменение межосевого расстояния, сохраняя при этом постоянство

предусмотренного ранее передаточного числа, которое определяется отношением радиусов основных окружностей. Изменение величины межосевого расстояния  $a_w$  сказывается только на величинах угла зацепления  $\alpha_w$  и радиусов начальных окружностей. Радиусы начальных окружностей могут быть подсчитаны из выражений:

$$r_{w_1} = \frac{r_{b_1}}{\cos \alpha_w}, \quad r_{w_2} = \frac{r_{b_2}}{\cos \alpha_w}. \quad (10.15)$$

2. Сумма радиусов основных окружностей  $r_{b_1} + r_{b_2}$  остаётся постоянной при изменении межосевого расстояния. Это свойство широко используется при проектировании эвольвентных передач.
3. При внешнем зацеплении эвольвентные профили являются сопряженными только в пределах отрезка  $M_1M_2$  линии зацепления. Так как точка  $K$ , взятая на этой прямой за точкой  $M_1$ , опишет эвольвенты  $\mathcal{E}_1''$  и  $\mathcal{E}_2''$ , не имеющие общей нормали. Это означает, что эвольвенты не касаются в точке  $K$ , а пересекаются. То же самое произойдёт и за точкой  $M_2$ .

### 10.5. Элементы эвольвентного зубчатого колеса

Из сказанного выше с очевидностью следует, что эвольвентное зацепление целиком зависит от геометрии профиля зубьев. Рассмотрим геометрические элементы кругового зубчатого эвольвентного колеса в любом сечении, перпендикулярном его оси, т.е. в **торцовом сечении** (рис. 10.7).

Зубья колеса ограничиваются со стороны тела колеса **окружностью впадин** радиуса  $r_f$ , а с внешней стороны **окружностью вершин** радиуса  $r_a$ . Соответствующие этим окружностям цилиндрические поверхности называются **поверхностями впадин** и **выступов**. Профиль зуба колеса внешнего зацепления имеет эвольвентную и неэвольвентную части, которые разделяются **окружностью граничных точек** радиуса  $r_{\square} \geq r_b$ . Эвольвентный профиль зуба соответствует вполне определённой основной окружности радиуса  $r_b$ . В каждой точке эвольвентный профиль зуба имеет свой профильный угол  $\alpha_y$ . Точка профиля, в которой этот угол равен стандартному значению  $\alpha = 20^\circ$  называется **делительной точкой профиля**, а окружность, соединяющая делительные точки профилей всех зубьев, называется **делительной окружностью** радиуса  $r$ . Зуб имеет два профиля – **правый** и **левый** при взгляде из центра колеса. Зуб высотой  $h = r_a - r_f$  делительной окружностью

делиться на головку зуба высотой  $h_a = r_a - r$  и ножку зуба высотой  $h_f = r - r_f$ .

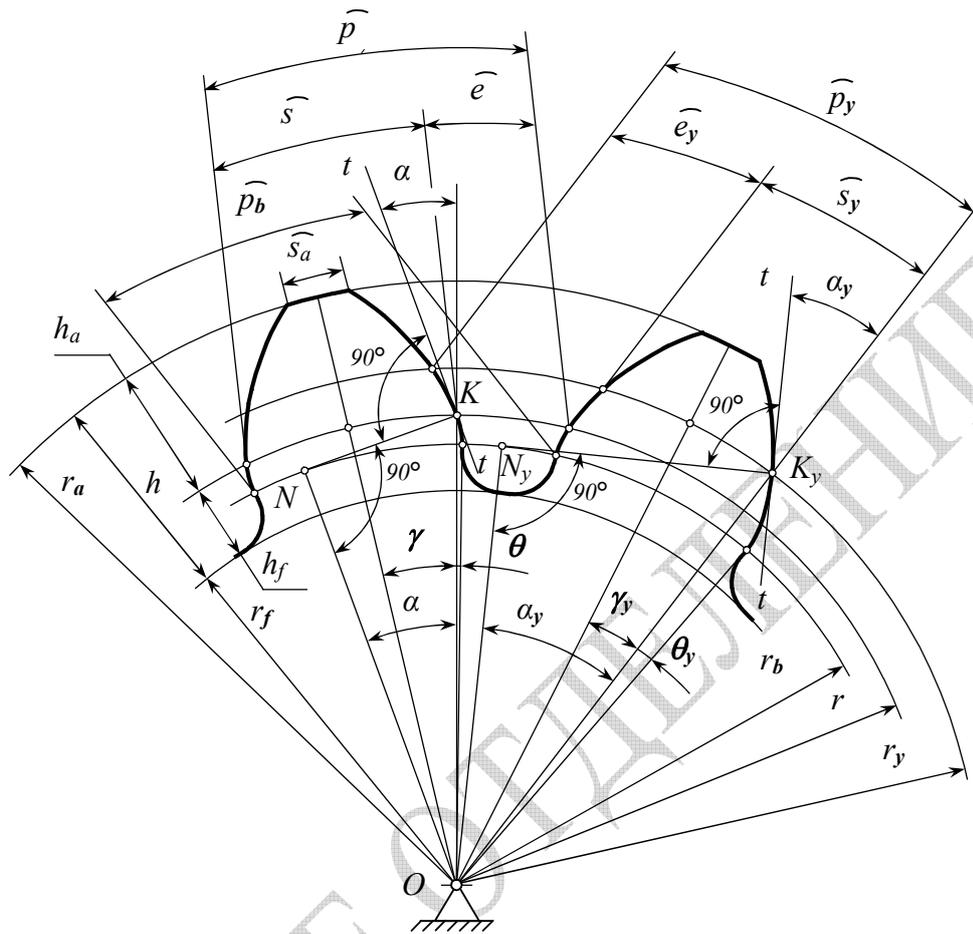


Рисунок 10.7

Если длину любой окружности колеса поделить на число зубьев  $z$ , то будут получены расстояния между одноименными профилями двух соседних зубьев по соответствующим окружностям, называемые **шагом зубьев** по этим окружностям.

Поскольку по любой окружности радиуса  $r_y$  шаг укладывается целое число раз, равное  $z$ , то длину этой окружности можно выразить через шаг и число зубьев:

$$2\pi r_y = p_y z .$$

Откуда

$$d_y = 2r_y = \frac{p_y}{\pi} z . \quad (10.16)$$

Отношение шага по какой-либо окружности к числу  $\pi$  называют **модулем** колеса по этой окружности

$$\frac{p_y}{\pi} = m_y . \quad (10.17)$$

Таким образом, диаметр окружности и модуль колеса по этой окружности связаны простым соотношением:  $d_y = m_y z$ .

Для делительной окружности

$$d = \frac{p}{\pi} z = mz \quad (10.18)$$

где  $m = \frac{p}{\pi} . \quad (10.19)$

Модуль  $m$  измеряется в линейных единицах (миллиметрах) и является на делительной окружности стандартной величиной (ГОСТ 9563 – 60). Значения наиболее употребительных модулей согласно этому ГОСТу приведены ниже в таблице.

Таблица. - Ряд наиболее употребительных модулей по ГОСТ 9563–60

1-й ряд *	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	16	20
2-й ряд	1,7	2,2	2,7	3,5	4,5	5,5	7	9	11	14	18	22

\* Первый ряд следует предпочитать второму

Различают **мелкомодульные** ( $m < 1 \text{ мм}$ ), **среднемодульные** ( $1 \leq m < 10 \text{ мм}$ ) и **крупномодульные** ( $m > 10 \text{ мм}$ ) зубчатые передачи.

Через модуль на делительной окружности определяются размеры колеса:

радиус основной окружности находится из  $\Delta KON$  (рис. 10.7)

$$r_b = r \cos \alpha = \frac{mz}{2} \cos \alpha ; \quad (10.20)$$

шаг зацепления по делительной окружности:

$$p = \pi m , \quad (10.21)$$

шаг по основной окружности

$$p_b = 2\pi r_b / z = 2\pi r \cos \alpha / z = p \cos \alpha = \pi m \cos \alpha . \quad (10.22)$$

Радиус любой окружности колеса находится из  $\Delta K_y O N_y$  (рис. 10.7)

$$r_y = \frac{r_b}{\cos \alpha_y} = r \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_y} = \frac{mz}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_y} . \quad (10.23)$$

Шаг зубьев колеса по любой окружности можно представить как сумму толщины зуба  $s_y$  и ширина впадины  $e_y$  :

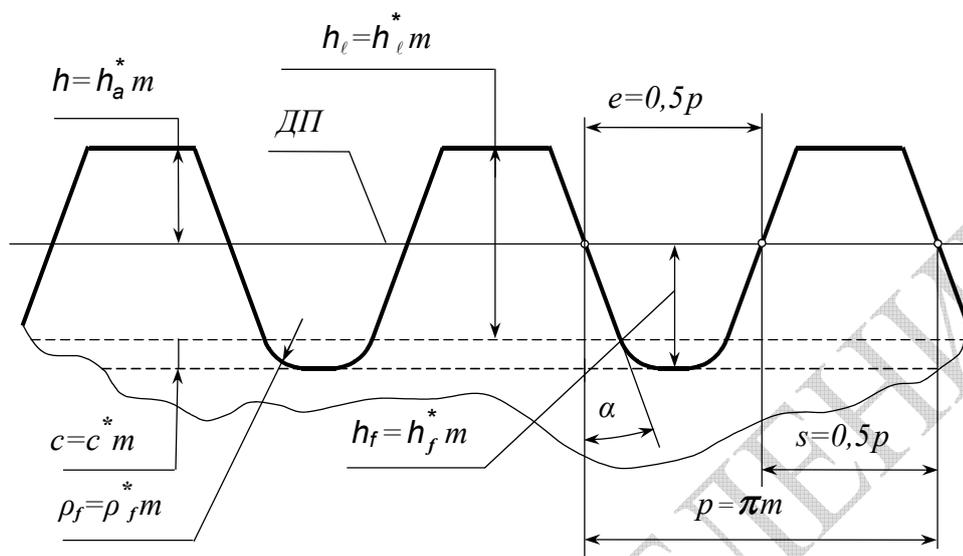
$$p_y = s_y + e_y . \quad (10.24)$$

#### 10.6. Способы изготовления зубчатых колес и их сравнительная оценка

Из основной теоремы зацепления следует, что кинематика зубчатой передачи непосредственно зависит от формы рабочих поверхностей зубьев колес. Форма и размеры зубьев колеса зависят от модуля, количества зубьев, от формы и расположения режущего инструмента относительно колеса-заготовки. Базой («геометрическим эталоном») для определения теоретических форм и размеров зубьев эвольвентного профиля семейства колес с разными числами зубьев является стандартный **исходный контур** (рис. 10.8), представляющий собой трапецеидальную зубчатую рейку. Форму такой рейки приобретает колесо с бесконечным числом зубьев (колесо бесконечного диаметра). При этом эвольвентные боковые поверхности зубьев колеса превращаются в наклонные прямолинейные участки рейки. Переход от прямолинейной части зуба рейки к основанию впадины осуществляется по дуге радиусом  $\rho_f$ . Прямая исходного контура, на которой толщина зуба  $s$  равна ширине впадины  $e$  называется **делительной прямой (ДП)**. Над делительной прямой располагается **головка зуба**, под ней – **ножка зуба** рейки. Стандарт на исходный контур ГОСТ13755-81 для цилиндрических колес с  $m \geq 1$  мм устанавливает вполне определенные значения коэффициентов (см. табл. 2.2).

Существующие методы нарезания зубчатых колес позволяют не только производить колеса со сложной поверхностью зубьев (червячные, шевронные и др.), но и корректировать форму зубьев в зависимости от теоретических условий синтеза передачи (заданное

межосевое расстояние, уменьшенные габариты, повышенная прочность и т. п.). Для изготовления колес используются два метода: копирования и обкатки.



ДП – делительная прямая  
Рисунок 10.8

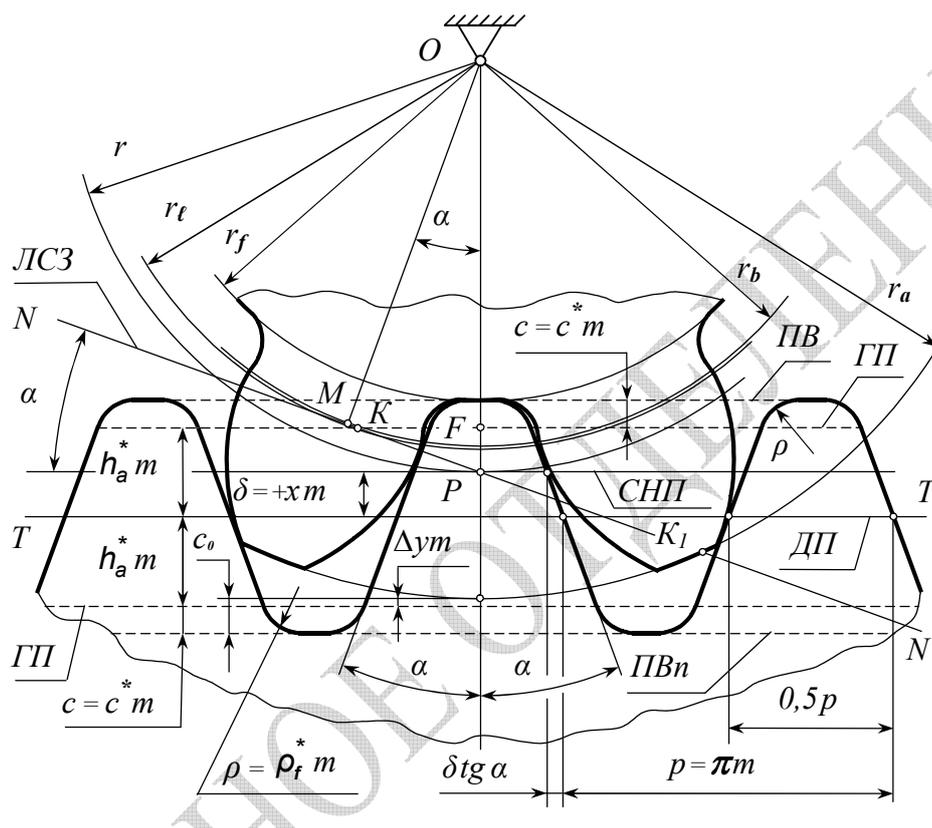
Таблица. – Значения коэффициентов и параметров для исходного контура по ГОСТ13755-81

Наименование коэффициента	Обозначение	Численное значение
высоты головки зуба	$h_a^*$	1
высоты ножки зуба	$h_f^*$	1,25
граничной высоты	$h_{\square}^*$	2
радиального зазора	$c^*$	0,25
радиуса кривизны переходной кривой	$\rho_f^*$	0,38
стандартный угол профиля	$\alpha$	$20^\circ$

**Метод копирования** предполагает использование режущих инструментов (фрез), режущий профиль которых полностью геометрически соответствует профилю впадины между зубьями колеса. После формирования очередной впадины между зубьями инструмент отводится от заготовки, которая поворачивается на величину углового шага  $2\pi/z$ , после чего операция изготовления впадины между зубьями повторяется. Поскольку форма зубьев и, соответственно впадин между ними, зависит не только от модуля, но и от числа нарезаемых зубьев, то этот метод оказывается не

экономичным из-за необходимости использования большого ассортимента режущего инструмента для изготовления колес одного и того же модуля, но с различным числом зубьев.

**Метод обкатки** использует положение основной теоремы зацепления о **взаимоогibaемости** профилей зубьев. Простейший режущий инструмент представляет собой **инструментальную рейку (рейку)** с чередующимися зубьями трапецидальной формы (рис. 10.9).



ЛСЗ – линия станочного зацепления;  
 СНП – станочная начальная прямая;  
 ДП – делительная прямая; ГП – граничная прямая;  
 ПВ – прямая выступов; ПВп – прямая впадин

Рисунок 10.9

Производящая поверхность инструмента и изготавливаемая боковая поверхность зуба колеса являются **взаимоогibaемыми**, поэтому такой метод нарезания колес получил еще название – **способ огibaния**. Эвольвентный профиль зуба формируется как **огibaющая** ряда последовательных положений прямолинейного профиля инструментальной рейки. При этом чередуются два движения: режущие движения инструмента вдоль оси колеса-заготовки, и пошаговое перекачивание колеса-заготовки вдоль инструментальной рейки. Одним и тем же инструментом можно нарезать колесо с любым числом зубьев того же модуля. С точки

кинематики этот процесс можно рассматривать как зацепление инструмента с заготовкой колеса. Указанное зацепление называют **станочным**.

Для получения колес со стандартным профилем зубьев любой режущий инструмент также должен быть стандартным и соответствовать **исходному производящему контуру** (рис. 10.9), т.е. «геометрическому эталону инструмента». На рис. 10.9 показана схема расположения инструментальной рейки по отношению к нарезаемому колесу. Боковые поверхности зубьев исходного производящего контура представляют собой режущие кромки, профиль которых очерчен по впадинам исходного контура. Очертания исходного (рис. 10.8) и исходного производящего контуров (рис. 10.9) совпадают за исключением головки зуба исходного производящего контура, у него она больше на величину  $c=c^*m$ . Этот «дополнительный» профиль инструмента обеспечивает при нарезании большую высоту ножки по сравнению с головкой зуба колеса.

Касательно к вершинам зубьев рейки проходит прямая выступов ( $ПВ$ ), а касательно впадинам – прямая впадин ( $ПВл$ ). Эвольвентные части производящего контура рейки прямолинейны и наклонены к оси зуба под углом  $\alpha$  (по ГОСТ 13755-81,  $\alpha = 20^\circ$ ). Данные части профиля по высоте ограничены двумя граничными прямыми ( $ГП$ ). Переходы от прямолинейной части зуба к основанию впадин и вершин осуществлены по дуге с тем же радиусом, что и исходного контура

$$\rho_f = \rho_f^* m = \frac{c^* m}{1 - \sin \alpha} \approx 0,38 m .$$

Линия  $N-N$ , проходящая через полюс  $P$  под углом  $\alpha = 20^\circ$  к делительной прямой  $ДП$ , нормальна к кромкам рейки и профилям зубьев в точке их контакта. Таким образом, это – линия, по которой перемещается точка контакта профиля рейки и колеса-заготовки – **линия станочного реечного зацепления (ЛСЗ)**. Активная часть  $ЛСЗ$  – отрезок  $KK_1$  между пересечениями этой линии с  $ГП$  и окружностью вершин. В пределах активной части  $ЛСЗ$  прямолинейная наклонная кромка рейки формирует эвольвентную часть зуба. Переход эвольвентного профиля зуба колеса в неэвольвентный находится на окружности граничных точек, радиус которой  $r_\ell = OK$ .

Расстояние между окружностью вершин зубьев колеса и прямой впадин (рис. 10.9)  $ПВл$  рейки представляет собой станочный зазор

$$c_o = m(c^* + \Delta y) , \quad (10.25)$$

где  $\Delta u$  – коэффициент уравнивающего смещения (зависит от межосевого расстояния передачи и определяется в процессе ее синтеза).

У нарезанного зубчатого колеса угол профиля и модуль на делительной окружности должны иметь стандартные значения, соответствующие профильному углу  $\alpha$  и модулю  $m$  инструмента. Для осуществления этого необходимо, чтобы в процессе станочного зацепления какая-либо прямая инструмента, параллельная делительной прямой, перекатывалась по делительной окружности без скольжения. Таким образом, делительная окружность в станочном зацеплении должна являться центроидой для инструмента в движении его относительно заготовки. В свою очередь в качестве центроиды для заготовки в движении относительно инструмента может быть выбрана любая прямая рейки, параллельная делительной прямой и называемая **станочной начальной прямой (СНП)**.

Если в процессе нарезания делительная прямая  $ДП$  касается делительной окружности, т.е. совпадает со  $СНП$ , то получают **нулевые** зубчатые колеса с равноделенным шагом, у которого толщина зуба равна ширине впадины  $s = e = 0,5p$  (рис. 10.10, а).

В целях уменьшения габаритных размеров зубчатой передачи за счет применения колес с малыми числами зубьев, увеличения ширины ножки зуба шестерни для повышения его выносливости при изгибе, обеспечения заданного межосевого расстояния передачи при сохранении заданного передаточного числа, снижения уровня шума при работе механизма применяют **корригирование** зубчатых колес. Корригирование заключается в смещении режущего инструмента относительно колеса-заготовки. Расстояние  $\delta$  между делительной прямой  $ДП$  инструментальной рейки и станочной начальной прямой  $СНП$ , т.е. прямой касательной к делительной окружности колеса-заготовки, называется **смещением**. Отношение смещения  $\delta$  к модулю колеса  $m$  называют коэффициентом смещения:

$$x = \frac{\delta}{m}. \quad (10.26)$$

Смещение  $\delta$  и коэффициент смещения  $x$  имеют алгебраический знак «+», если инструмент отодвинут от центра колеса-заготовки (делительная прямая  $ДП$  инструмента не пересекает делительную окружность колеса), или – знак «–», если инструмент приближен к центру колеса-заготовки (делительная прямая  $ДП$  инструмента пересекает делительную окружность колеса).

Зубчатые колеса называют **положительными**, если при нарезании зубьев инструмент имел положительное смещение от центра колеса-заготовки на расстояние  $\delta = + x m$  (рис. 10.10, б). При таком положении

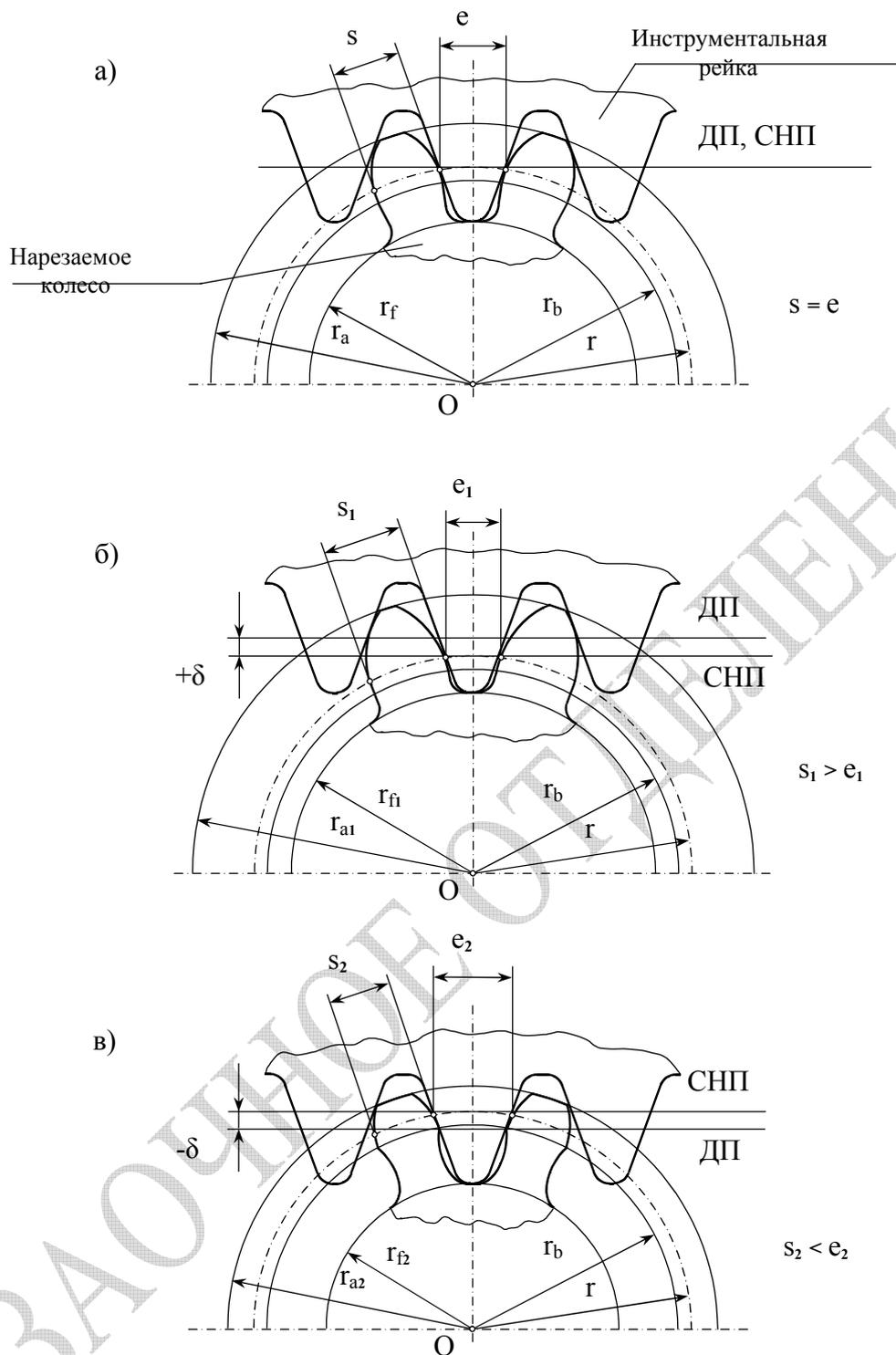


Рисунок 10.10

инструмента по делительной окружности перекачивается без скольжения станочная начальная прямая (СНП). В связи с этим толщина зуба по делительной окружности положительного зубчатого колеса равна ширине впадины между зубьями по станочной

начальной прямой исходного производящего контура, т.е. при  $x > 0$  толщина зуба колеса  $s > 0,5\pi m$  и  $s > e$ .

**Отрицательные** зубчатые колеса получают при смещении инструмента к центру колеса на расстояние  $\delta = -xm$  (рис. 10.10, в). В результате отрицательного смещения  $s < 0,5\pi m$  и  $s < e$ .

С учетом знака коэффициента смещения основные геометрические параметры нарезанных колес с внешними зубьями (рис. 10.7, 10.9) могут быть определены по формулам приведенным ниже.

Диаметр делительной окружности

$$d = 2r = mz. \quad (10.27)$$

Диаметр окружности вершин

$$\begin{aligned} d_a = 2r_a &= d + 2xm + 2h_a^*m - 2\Delta ym = \\ &= m(z + 2x + 2h_a^* - 2\Delta y). \end{aligned} \quad (10.28)$$

Диаметр окружности впадин

$$\begin{aligned} d_f = 2r_f &= d + 2xm - 2h_a^*m - 2c^*m = \\ &= m(z + 2x - 2h_a^* - 2c^*). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Толщина зуба по делительной окружности (определяется шириной впадины рейки по станочной начальной прямой *СНП*)

$$s = \frac{\pi m}{2} + 2xm \operatorname{tg} \alpha = m \left( \frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (10.30)$$

Толщина по хорде зуба

$$s = d \sin \left( \frac{s}{d} \right). \quad (10.31)$$

Высота зуба

$$h = m(2h_a^* + c^* - \Delta y). \quad (10.32)$$

Если смещение инструментальной рейки отсутствует, то в (10.28-10.30, 10.32)  $x=0$ ,  $\Delta y=0$ . При подстановке стандартных значений

коэффициентов (см. табл. на стр. 236) зависимости (10.28, 10.29, 10.32) приобретают следующий вид:

$$d_a = m(z + 2); \quad d_f = m(z - 2,5); \quad h = 2,25m.$$

Зависимость для расчета толщины зуба по любой окружности радиуса  $r_y$  получают из анализа схемы на рис. 10.7. Суммы углов, охватывающих одинаковы дуги, равны между собой:

$$\gamma + \theta = \gamma_y + \theta_y$$

или

$$\gamma + \operatorname{inv}\alpha = \gamma_y + \operatorname{inv}\alpha_y.$$

Центральные углы  $\gamma$  и  $\gamma_y$  могут быть выражены через длины соответствующих дуг и их радиусы

$$\frac{s}{2r} + \operatorname{inv}\alpha = \frac{s_y}{2r_y} + \operatorname{inv}\alpha_y.$$

Откуда толщина зуба по любой окружности, пересекающей эвольвентный профиль зуба, вычисляется по формуле:

$$s_y = s \frac{r_y}{r} + 2r_y (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_y). \quad (10.33)$$

### 10.7. Явление подрезания профилей зубьев

В процессе нарезания зубьев по способу огибания может иметь место явление, называемое **подрезанием** основания ножки зуба. В этом случае происходит пересечение эвольвентного профиля впадины зуба нарезаемого колеса с режущей кромкой на головке зуба инструмента. Подрезание происходит в случае, если линия, проходящая через конечные точки эвольвентных участков профилей зубьев инструмента, т.е. граничная прямая  $ГП$ , пересекает линию станочного зацепления  $ЛСЗ$  начальную прямую за пределами ее теоретического участка  $МК_1$  (рис. 10.9). В результате подрезания удаляется некоторая часть активного профиля зуба, т.е. уменьшается эвольвентная часть профиля зуба колеса. Подрезание приводит к следующим негативным последствиям:

- уменьшается толщина ножки зуба и, следовательно, снижается прочность зуба;

- при работе передачи может произойти заклинивание и поломка зубьев;

- в определенные моменты работы передачи нарушается основная теорема зацепления, согласно которой передаточное отношение равно передаточному числу при повороте колес передачи на любой угол.

Подрезание зубьев может быть устранено путем положительного смещения режущего инструмента. Параметры, при которых отсутствует подрезание можно определить, анализируя схему на рис. 10.9. Из свойств эвольвенты и эвольвентного зацепления (см. подраздел 10.4) следует, что подрезания не будет, если граничная точка  $K$  активной части линии станочного зацепления не заходит за точку  $M$ , т.е. если выполняется условие

$$PM \geq PK. \quad (10.34)$$

Рассматривая  $\triangle POM$ , можем записать:

$$PM = OP \sin \alpha = r \sin \alpha = 0,5 m z \sin \alpha.$$

Для  $\triangle PFK$  имеем:

$$PK = PF l \sin \alpha = (h_a^* m - x) l \sin \alpha = m(h_a^* - x) l \sin \alpha.$$

Из последних двух выражений следует, что переменными параметрами, влияющим на наличие или отсутствие подрезания являются число зубьев  $z$  и коэффициент смещения  $x$ . С учетом (10.34) условиями отсутствия подрезания будут два следующих неравенства:

$$x \geq h_a^* - 0,5 z \sin^2 \alpha, \quad (10.35)$$

$$z \geq 2 (h_a^* - x) l \sin^2 \alpha. \quad (10.36)$$

Для нулевого колеса ( $x = 0$ ) из условия (10.36) определяется минимальное число зубьев, при котором подрезание отсутствует

$$z_{min} = 2 h_a^* l \sin^2 \alpha, \quad (10.37)$$

для исходного контура с  $h_a^* = 1$  и  $\alpha = 20^\circ$  из последнего соотношения имеем:  $z_{min} = 17$ .

Формулу для минимального коэффициента смещения, при котором отсутствует подрезание, можно получить подстановкой в (10.35) выражения для  $\sin^2 \alpha$  из (10.37):

$$x \geq h_a^* (z_{min} - z) / z_{min} , \quad (10.38)$$

или с учетом стандартных значений коэффициентов

$$x_{min} = \frac{17 - z}{17} . \quad (10.39)$$

Из полученного соотношения нетрудно видеть, что зубчатое колесо, имеющее число зубьев  $z > 17$  может быть нарезано с положительным, нулевым и отрицательным смещением без подрезания основания ножки зуба. При  $z = 17$  колесо может иметь положительное или нулевое смещение, а колесо с малым числом зубьев, т.е. при  $z < 17$ , будет иметь смещение только положительное, вычисляемое в соответствии с (10.38, 10.39).

При выполнении графической проверки зубьев колеса на отсутствие подрезания ( $z < 17, x < 0$ ) следует построить схему станочного зацепления колеса с реечным инструментом. Подрезание будет отсутствовать, если рабочий участок линии станочного зацепления не выйдет за точку  $M$  (рис. 10.9).

Коэффициент смещения имеет как нижнюю границу ( $x_{min}$ ), так и верхнюю –  $x_{max}$ . У колес с малым числом зубьев ( $z < 15$ ) при больших положительных смещениях происходит заострение вершины зуба. Уменьшение толщины зуба  $s_a$  у вершины (рис. 10.7) может вызвать поломку. Условие отсутствия заострения имеет следующий вид:

$$s_a \geq 0,2 m , \quad (10.40)$$

где  $s_a$  – толщина зуба у вершины, определяемая по уравнению (10.33), в котором  $r_y = r_a$  и  $\alpha_y = \alpha_a$  (здесь  $\alpha_a$  – угол профиля при вершине, который находят из выражения (10.23)

$$\alpha_a = \arccos(r_b / r_a). \quad (10.41)$$

## 10.8. Условия сборки передач и их классификация

При проектировании зубчатой передачи исходными данными для синтеза являются межосевое расстояние, передаточное отношение и модуль, все остальные параметры колес и передачи рассчитываются. Простейшая эвольвентная зубчатая передача может быть составлена из любых двух колес, имеющих одинаковый модуль (рис. 10.11). Но при этом должно соблюдаться условие, чтобы толщина зуба по начальной окружности одного из колес была в точности равна ширине

впадины по начальной окружности второго. В противном случае при изменении направления вращения (реверсе) ведущего колеса

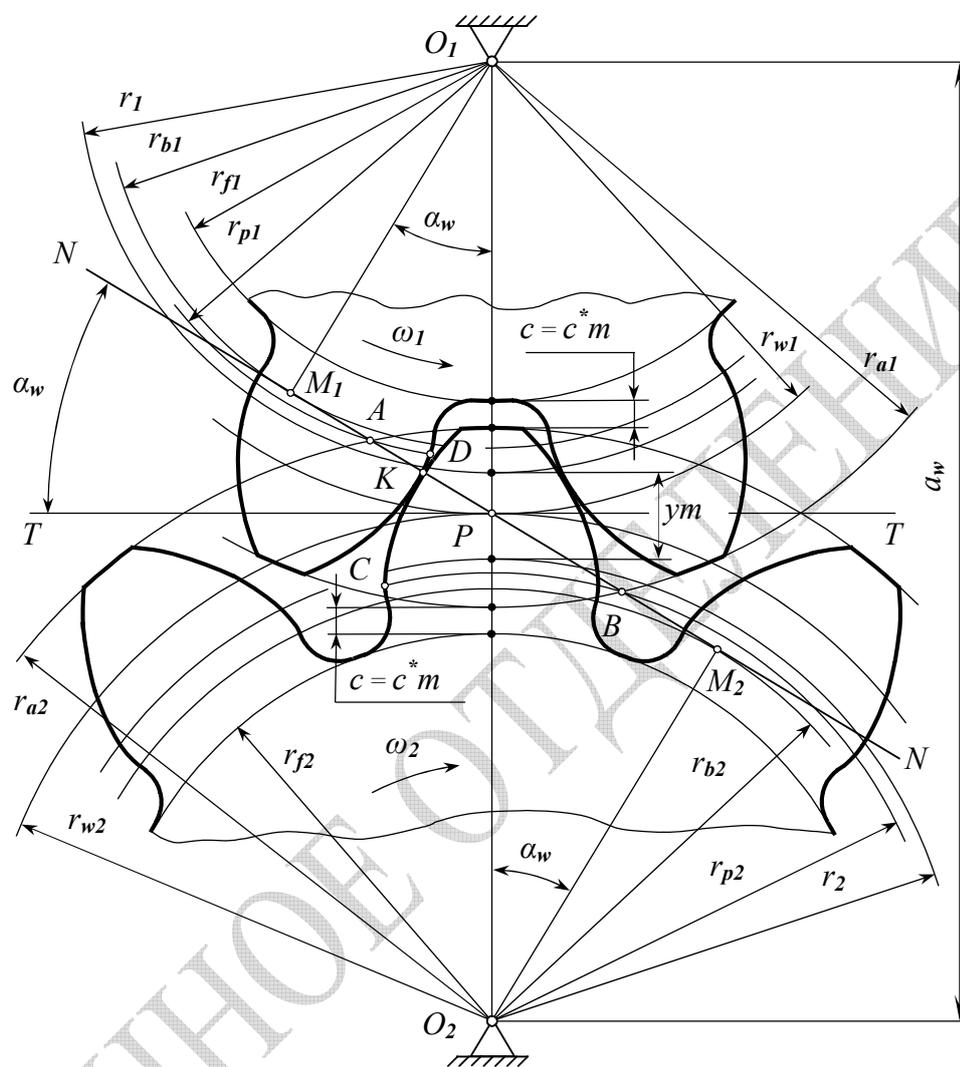


Рисунок 10.11

последнее будет иметь так называемый свободный (мертвый) ход, следствием которого, в частности, будет перерыв в движении ведомого колеса и возникновение больших динамических усилий. Это условие называют **условием беззазорного зацепления**. Вторым условием, которому должна удовлетворять стандартная зубчатая передача, является **условие существования радиального зазора С** (рис. 10.11) установленной величины между зацепляющимися колесами. Радиальный зазор необходим для размещения смазки, компенсации температурных деформаций, неточностей изготовления колес и сборки передачи.

Схема беззазорной передачи (рис. 10.11) с изображением рассчитанных для каждого колеса пяти окружностей (начальной,

делительной, основной, вершин и впадин), контуров двух-трех зубьев шестерни и колеса, линии зацепления и необходимых размеров представляет собой **картину зацепления**. Картина зацепления дает наиболее полное представление о геометрии колес и передачи, и используется для оценки правильности спроектированной или составленной передачи, а также для определения ее качественных показателей. Например, из рис. 10.11 видно, что беззазорность зацепления обеспечивается как формой и размерами зубьев, так и межосевым расстоянием.

**Линия зацепления** – линия, по которой перемещается точка контакта (точка  $K$ ) профилей зубьев. Эта линия является касательной к основным окружностям в точках  $M_1$  и  $M_2$  и проходит через полюс зацепления – точку  $P$ . Угол  $\alpha_w$  между линией зацепления и касательной  $T-T$  к начальным окружностям – **угол зацепления**. Линия зацепления в точках  $A$  и  $B$  пересекается окружностями вершин зубьев колес. В точке  $A$  сопряженные профили входят в зацепление, а в точке  $B$  – выходят из зацепления. Участок  $AB$  называется **активным участком линии зацепления**, который при заданном направлении вращения ведущего колеса делится на две части: доплюсовая ( $AP$ ) и заплуюсная ( $PB$ ). Если  $AP > PM_1$  или  $BP > PM_2$ , то в зубчатой передаче произойдет заклинивание. Во время контакта зубьев колес только одна сторона боковой поверхности зуба участвует в передаче усилия, причем не вся, а только ее активная часть соответствующая активной линии зацепления. На профилях зубьев активный участок ограничен точками  $C$  и  $D$  и вершинами зубьев.

Если передача составляется из нулевых колес, у которых по делительным окружностям толщина зуба равна ширине впадины, то в качестве начальных окружностей используются делительные окружности. Межосевое расстояние в такой передаче равно:

$$a_w = r_{w1} + r_{w2} = r_1 + r_2 .$$

Но если в передаче, составленной из колес с такими же числами зубьев, и, следовательно, обеспечивающей такое же передаточное число, будет хотя бы одно колесо, нарезанное со смещением, то центры вращения колес должны быть либо сближены, либо раздвинуты, для того чтобы условие беззазорного зацепления было соблюдено. При этом, естественно, будет изменяться угол зацепления передачи  $\alpha_w$ , т.к. размеры основных окружностей одинаковы как для нулевых, так и для ненулевых колес. Этот угол называется **монтажным углом зацепления**.

Шаг по начальной окружности любого из колес передачи определяется в соответствии с (10.24)

$$\rho_w = s_w + e_w . \quad (10.42)$$

Так как начальные окружности перекатываются без скольжения, то по этим окружностям толщина зуба одного колеса, например второго  $s_{w_2}$ , в точности равна ширине впадины  $e_{w_1}$  другого колеса, и поэтому

$$\rho_w = s_{w_1} + s_{w_2} .$$

Для расчета  $s_{w_1}$  и  $s_{w_2}$  используется формула (10.33) для толщины зуба по любой окружности ( $s_y = s r_y l r + 2r_y (\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_y)$ ). Учитывая, что  $r = 0,5 m z$ , и принимая  $r_y = r_w = 0,5 m_w z$ , где  $m_w = \rho_w / \pi$  – модуль по начальной окружности, получают с учетом (10.30) формулы для толщин зубьев шестерни и колеса по начальным окружностям:

$$\begin{aligned} s_{w_1} &= s_1 \frac{m_w z_1}{m z_1} + m_w z_1 (\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_w) = \\ &= \frac{\rho_w}{\pi} \left[ \frac{s_1}{m} + z_1 (\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_w) \right] = \frac{\rho_w}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x_1 \text{tg}\alpha + z_1 (\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_w) \right] \end{aligned}$$

и

$$e_{w_1} = s_{w_2} = \frac{\rho_w}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x_2 \text{tg}\alpha + z_2 (\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_w) \right] .$$

Подставляя эти значения в (10.42) и проведя преобразования, получают

$$\text{inv}\alpha_w = \text{inv}\alpha + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \text{tg}\alpha$$

или

$$\text{inv}\alpha_w = \text{inv}\alpha + \frac{x_\Sigma}{z_\Sigma} 2 \text{tg}\alpha , \quad (10.43)$$

где  $x_\Sigma = (x_1 + x_2)$  – суммарный коэффициент смещения;  $z_\Sigma$  – суммарное число зубьев колес передачи.

По величине суммарного коэффициента смещения все эвольвентные зубчатые передачи разделяются на три вида:

- нулевые передачи ( $x_{\Sigma} = 0$ );
- положительные передачи ( $x_{\Sigma} > 0$ );
- отрицательные передачи ( $x_{\Sigma} < 0$ ).

На рисунке 10.12 приведены схемы всех трех видов передач, на которых указаны угол зацепления и межосевое расстояние. Нулевая передача (рис. 10.12, а) составляется либо из двух нулевых колес, либо из положительного и отрицательного, причем положительное смещение одного из колес равно по абсолютной величине отрицательному смещению другого. Во втором случае передача называется **равносмещенной**. Для всех нулевых передач угол зацепления  $\alpha_w = \alpha$ , начальные окружности совпадают с делительными, а межосевое расстояние равно:

$$a_w = r_{w_1} + r_{w_2} = r_1 + r_2 = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) = \frac{m}{2}z_{\Sigma} = a, \quad (10.44)$$

где  $a$  – делительное межосевое расстояние.

Положительная передача (рис. 2.12, б) составляется из двух положительных, или из нулевого и положительного, или из положительного и отрицательного колес. В последнем случае смещение положительного колеса по абсолютной величине должно быть больше смещения отрицательного. У положительных передач  $\alpha_w > \alpha$ ,  $r_w > r$ , а межосевое расстояние с учетом (10.23)

$$a_w = r_{w_1} + r_{w_2} = \frac{(r_1 + r_2) \cos \alpha}{\cos \alpha_w} = \frac{m}{2} z_{\Sigma} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad (10.45)$$

оказывается больше, чем у нулевой передачи.

Отрицательная передача (рис. 2.12, в) составляется из двух отрицательных, из нулевого и отрицательного, или из положительного и отрицательного колес, если у последнего смещение по абсолютной величине больше, чем у положительного. У отрицательной передачи  $\alpha_w < \alpha$ ,  $r_w < r$ , а межосевое расстояние  $a_w$  меньше, чем у нулевой.

Как отмечалось выше, еще одним условием, которым должна отвечать передача, является условие существования радиального зазора  $C$  (рис. 10.11) установленной величины между зацепляющимися колесами. У эвольвентных передач, нарезанных инструментом с исходным контуром по ГОСТ 13755-81, радиальный зазор должен быть равен  $C = c^*m = 0,25m$ . При составлении передач из нулевых колес такой зазор получается автоматически, т.к. именно такую высоту имеет незвольвентная часть профиля исходного контура. В ненулевых передачах обеспечение такого зазора практически осуществляется за счет того, что при проектировании

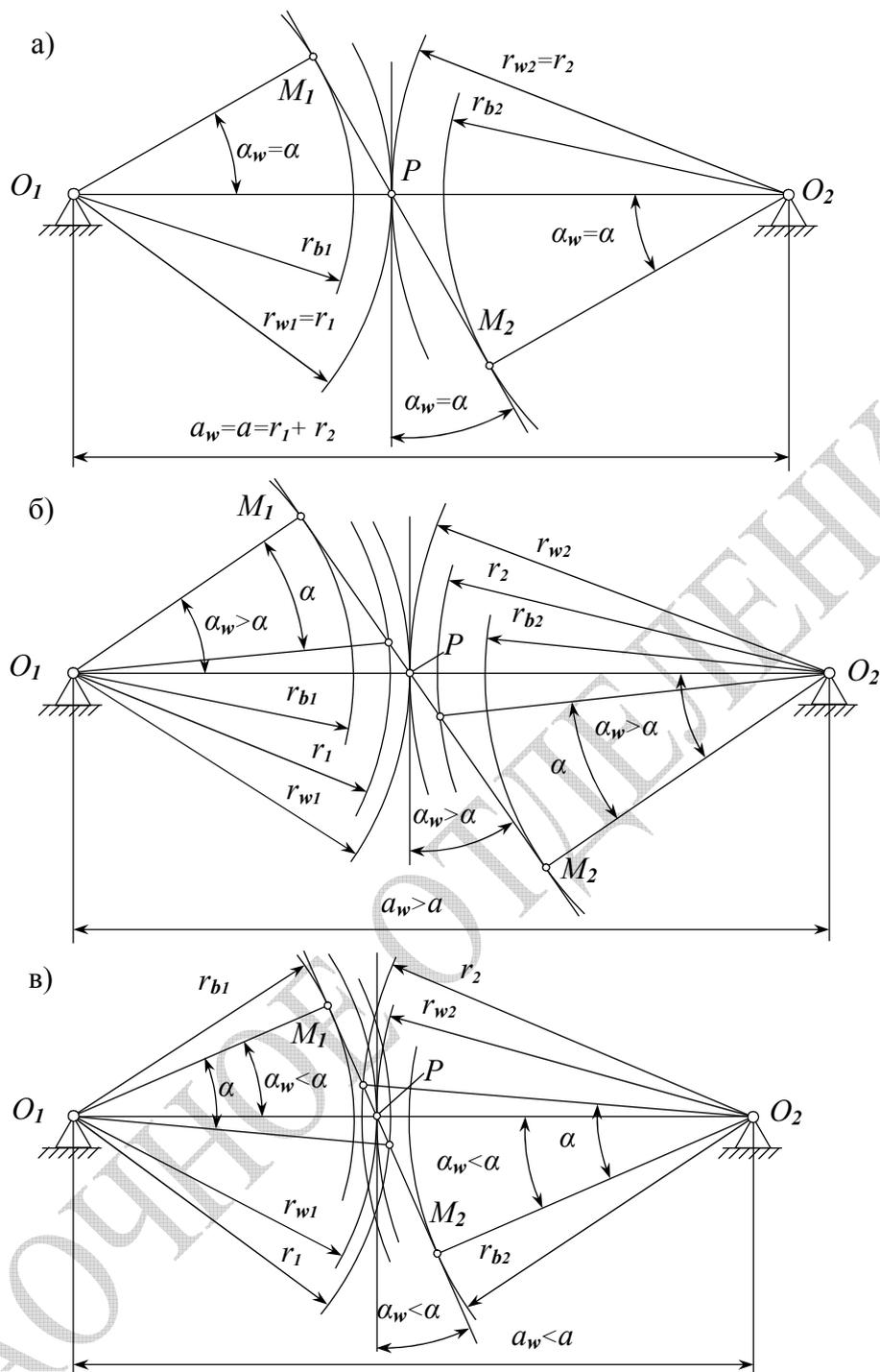


Рисунок 10.12

диаметр заготовки  $d_a$  назначается с учетом уравнительного смещения  $\Delta u$   $m$ , который входит в формулу (10.28). Определить диаметры заготовок (т.е. диаметры окружностей выступов колес) можно через межосевые расстояния по следующим формулам:

$$r_{a1} = a_w - r_{f2} - c \cdot m, \quad (10.46 \text{ а})$$

$$r_{a2} = a_w - r_{f1} - c \cdot m. \quad (10.46 \text{ б})$$

Из рисунка 10.11 межосевое расстояние выражается следующим образом

$$a_w = r_1 + r_2 + y m, \quad (10.47)$$

где  $ym$  – расстояние между делительными окружностями – воспринимаемое смещение,  $y$  – коэффициент воспринимаемого смещения. Выражая его из последнего равенства, получаем:

$$y = \frac{a_w - a}{m} = \frac{a_w - (r_1 + r_2)}{m}.$$

Из уравнений (10.45, 10.47) следует, что

$$y = \frac{z_\Sigma}{2} \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} - 1 \right).$$

С учетом выражений (10.46 а, 10.47, 10.27, 10.28 и 10.32) и высоты зуба  $h = r_a - r_f$  выражение для коэффициента уравнительного смещения имеет вид:

$$\Delta y = x_\Sigma - y. \quad (10.48)$$

### 10.9. Дуга зацепления и коэффициент перекрытия

Так как эвольвентные боковые профили зубьев передачи удовлетворяют основной теореме зацепления, то передача движения за время контакта одной пары профилей будет происходить непрерывно и с заданным передаточным отношением. В зубчатых передачах размеры эвольвентных профилей ограничены и, следовательно, профиль каждого зуба одного зубчатого колеса будет находиться в контакте с профилем другого зубчатого колеса лишь определенное время, после чего в контакт должен вступить профиль следующего зуба. Передача движения в зубчатой передаче будет непрерывной, если следующий зуб вступит в контакт в тот момент, когда передача движения первым будет заканчиваться, или несколько ранее.

За время контакта одной пары зубьев колеса поворачиваются на некоторые углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , которые называются **углами торцового перекрытия**. Они находятся в соотношении:

$$\varphi_1 / \varphi_2 = u_{12}$$

и зависят от геометрических размеров зубьев. При этом точки зубьев, лежащие на начальных окружностях, проходят по этим окружностям некоторые дуги.

**Дугой зацепления**  $\cup l_3$  называют дугу начальной окружности, которую проходит точка бокового профиля зуба за время контакта одной пары зубьев. Так как в процессе работы зубчатой передачи начальные окружности радиусов  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$  перекатываются друг по другу без проскальзывания (являясь центроидами относительного движения), то дуги зацепления на зубчатых колесах передачи будут иметь одинаковые длины.

При известной длине дуги зацепления условие непрерывности передачи вращательного движения в зубчатой передаче может быть записано следующим образом

$$\cup l_3 \geq p_w, \quad (10.49)$$

то есть длина дуги зацепления должна быть больше шага зацепления по дуге начальной окружности.

На практике непрерывность работы зубчатой передачи принято характеризовать **коэффициентом торцового перекрытия**:

$$\varepsilon = \cup l_3 / p_w. \quad (10.50)$$

С учетом (10.49) и (10.50) условие непрерывности работы зубчатой передачи может быть записано в виде

$$\varepsilon \geq 1. \quad (10.51)$$

Если допустить  $\varepsilon < 1$  (то есть  $\cup l_3 < p_w$ ), то передача движения окажется прерывистой, будет сопровождаться периодически повторяющимися ударами в момент вхождения в зацепление очередной пары зубьев. Если допустить  $\varepsilon = 1$ , то теоретически непрерывность передачи движения будет обеспечена. Однако на практике возможные неточности, допущенные при изготовлении зубчатых колес и монтаже зубчатой передачи, неизбежно приведут к нарушению условия непрерывности передачи движения. Практикой проектирования зубчатых передач выработано условие

$$\varepsilon > 1,1.$$

Таким образом, вводится количественная оценка условия непрерывности передачи движения в зубчатой передаче. *Величина*

коэффициента торцового перекрытия  $\varepsilon$  указывает на время, в течение которого находятся в зацеплении две пары зубьев. Например, при  $\varepsilon = 1,6$  время, приходящееся на зацепление двух пар зубьев, равно 60%, а на одну пару – 40%.

Схема для определения длины дуги зацепления представлена на рис. 10.13. На линии зацепления  $N-N$  отмечены точки  $A$  и  $B$  пересечения дуг окружностей выступов шестерни 1 и колеса 2 с линией зацепления. Поскольку точка контакта двух совместно работающих профилей перемещается по линии зацепления, то точки  $A$  и  $B$  характеризуют положения зубьев колес в момент начала и окончания зацепления. При ведущей шестерне 1 в точке  $A$  профили начинают контактировать (профиль зуба шестерни 1 соприкасается с точкой профиля зуба колеса 2, лежащей на его окружности выступов), а в точке  $B$  – контакт зубьев прекращается (точка зуба шестерни 1, лежащая на ее окружности выступов, выходит из зацепления). Если провести через точки  $A$  и  $B$  левые боковые профили зубьев шестерни 1, то эти эвольвентные профили будут определять положение зуба колеса шестерни 1 в момент начала и окончания его работы. При этом дуга  $\cup c_1 d_1$  начальной окружности шестерни будет дугой зацепления. Аналогичным образом, дуга  $\cup c_2 d_2$  начальной окружности зубчатого колеса 2 будет дугой зацепления. Таким образом, длина дуги зацепления

$$\cup l_3 = \cup c_1 d_1 = \cup c_2 d_2 . \quad (10.52)$$

Дуга зацепления может быть выражена через длину участка  $AB$  (активного или рабочего участка линии зацепления  $N-N$ ). Из рис. 2.13 с учетом изложенного выше следует, что

$$\cup c_i d_i = r_{wi} \varphi_i , \quad (10.53)$$

$$\cup a_i b_i = r_{bi} \varphi_i , \quad (10.54)$$

$$\cup a_i b_i = AB . \quad (10.55)$$

Поскольку треугольники  $O_1 M_1 P$  и  $O_2 M_2 P$  прямоугольные, то

$$r_{wi} = r_{bi} / \cos \alpha_w . \quad (10.56)$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\frac{\cup c_i d_i}{\cup a_i b_i} = \frac{r_{wi}}{r_{bi}} = \frac{1}{\cos \alpha_w} .$$



Так как радиус начальной окружности (10.56) можно выразить через шаг  $p_W$  по формуле (10.16) то

$$r_W = \frac{p_W}{2\pi} z = \frac{r_b}{\cos \alpha_W} = \frac{r \cos \alpha}{\cos \alpha_W} = \frac{mz \cos \alpha}{2 \cos \alpha_W}.$$

Отсюда шаг зацепления по дуге начальной окружности  $p_W = \pi m \cos \alpha / \cos \alpha_W$ . Тогда шаг по линии зацепления из (10.58) выражается следующим образом:

$$p_n = p_W \cos \alpha_W = \pi m \cos \alpha = p_b, \quad (10.59)$$

где  $p_b$  – шаг по основной окружности.

С учетом (10.58) и (10.59) окончательно получим формулу для расчета коэффициента перекрытия через длину рабочего участка линии зацепления

$$\varepsilon = \frac{AB}{\pi m \cos \alpha} = \frac{AB}{p_b}. \quad (10.60)$$

Коэффициент перекрытия может быть определен и аналитически. Из рис. 10.13 нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} AB &= M_1M_2 - M_2B - M_1A = \\ &= M_1M_2 - [M_1M_2 - M_1B] - [M_1M_2 - M_2A] = \\ &= M_1B + M_2A - M_1M_2 = \\ &= \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - a_W \sin \alpha_W. \end{aligned}$$

Окончательно аналитическое выражение для коэффициента торцового перекрытия имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - a_W \sin \alpha_W}{\pi m \cos \alpha}. \quad (10.61)$$

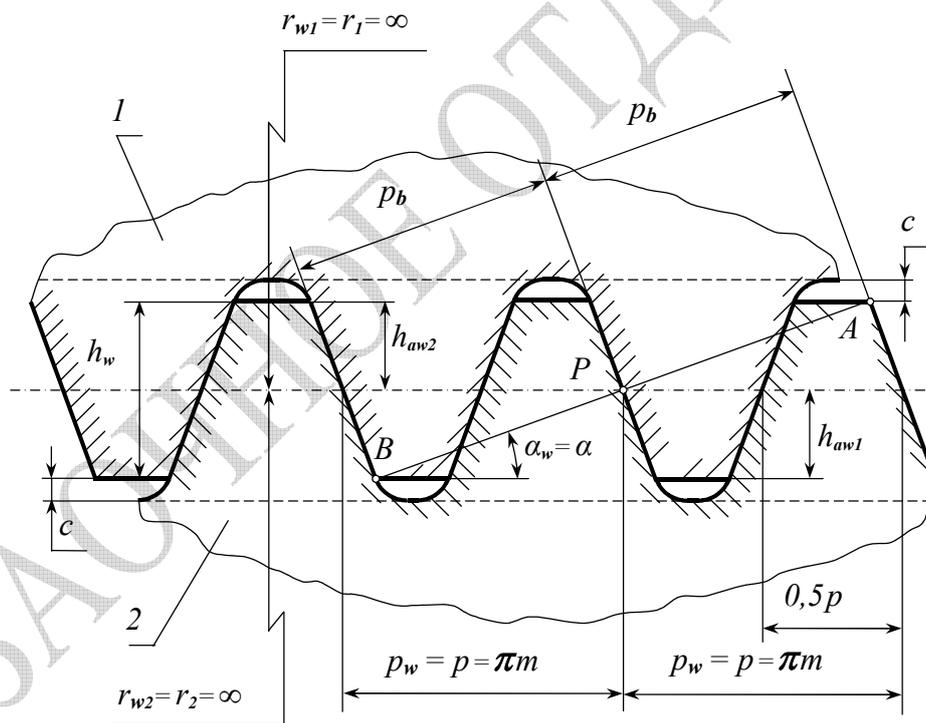
Анализ формулы (10.60) и (10.61) позволяет сделать ряд следующих полезных для практики проектирования зубчатых передач выводов:

1. Коэффициент торцового перекрытия  $\varepsilon$  увеличивается с увеличением числа зубьев колес передачи (так как с ростом числа зубьев колес уменьшается модуль  $m$ );

2. Коэффициент торцового перекрытия  $\varepsilon$  уменьшается с увеличением положительного суммарного коэффициента смещения  $x_\Sigma = x_1 + x_2$ . Это объясняется тем, что с увеличением  $x_\Sigma$  увеличивается монтажный угол зацепления  $\alpha_w$  и, следовательно, уменьшается длина рабочего участка зацепления. Отсюда следует, что отрицательные зубчатые передачи обеспечивают большую плавность передачи движения, чем нулевые или положительные, а нулевые зубчатые передачи имеют большую плавность, чем положительные.

Как было показано выше, существует предельный случай, при котором радиусы начальных окружностей зубчатой передачи обращаются в бесконечность  $r_{w1} = \infty$  и  $r_{w2} = \infty$ , а зубчатые колеса вырождаются в зубчатые рейки (рис. 10.14). Из этой схемы следует, что

$$AB = 2 h_a^* m / \sin \alpha .$$



$h_w$  – глубина захода зубьев колес,

$h_{aw1} = h_a^* m$  – высота начальной головки зуба колеса 1,

$h_{aw2} = h_a^* m$  – высота начальной головки зуба колеса 2

Рисунок 10.14

Тогда с учетом выражения (10.60), формула для предельного значения коэффициента торцового перекрытия зубчатой передачи имеет вид:

$$\varepsilon_{np} = \frac{4h_a^*}{\pi \sin(2\alpha)} \quad (10.62)$$

Подстановка в данную формулу стандартных значений  $h_a^* = 1$  и  $\alpha = 20^\circ$  дает  $\varepsilon_{np} \approx 1,982$ . Следовательно для прямозубой передачи справедливо неравенство:

$$1 < \varepsilon < 2.$$

Это означает, что в зацеплении одновременно могут находиться одна или две пары зубьев. На практике для увеличения коэффициента перекрытия применяют косозубые и шевронные зубчатые передачи.

Еще одним важным вопросом при анализе работы зубчатых передач, а также при их проектировании является вопрос об изменении нагрузки на отдельный зуб колеса по времени зацепления.

Для иллюстрации закономерностей изменения нагрузки на зуб по мере перемещения точки контакта по рабочему участку  $AB$  линии зацепления служит диаграмма изменения нагрузки на зуб по времени зацепления (рис. 10.15).

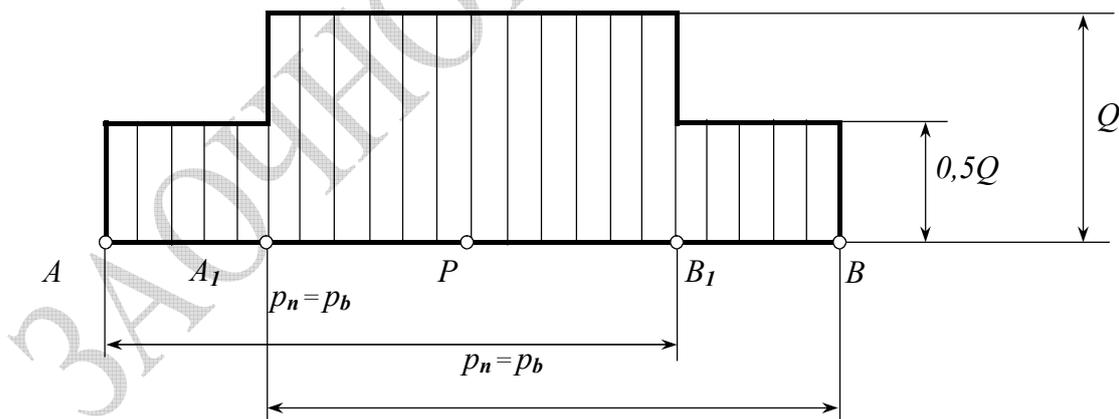


Рисунок 10.15

При построении диаграммы для передачи с внешним зацеплением, для которой справедливо условие:

$$1 < \varepsilon < 2$$

считают, что зубчатая передача работает в установившемся режиме, и, следовательно, момент движущих сил, приложенный к шестерни и момент сил сопротивления, приложенный к зубчатому колесу, постоянны по величине. Рабочий участок линии зацепления изображают отрезком  $AB$  таким же как и на картине зацепления (рис. 10.11). Вправо от точки  $A$  отложен шаг зацепления, измеренный по линии зацепления  $N-N$  (он, очевидно, совпадает с шагом по основной окружности  $\rho_b$ )

$$\rho_n = \rho_b = \pi m \cos \alpha .$$

Если в точке  $A$  в данный момент времени находится одна пара контактирующих эвольвентных профилей зубьев шестерни и колеса, то в точке  $B_1$  (на расстоянии  $\rho_n = \rho_b$  от точки  $A$ ) будет находиться вторая пара контактирующих эвольвентных профилей. Если принять условия работы зубьев колес одинаковыми, то нагрузка, передаваемая с шестерни на колесо, в рассматриваемый момент будет поровну распределяться между обеими контактирующими парами профилей. В процессе перемещения точек контакта профилей по линии зацепления расстояние между двумя соседними профилями одного и того же зубчатого колеса будет сохраняться. Через некоторое время пара эвольвентных профилей, контактировавшая в точке  $B_1$ , переместится в точку  $B$  и в следующий момент времени выйдет из зацепления. Точка контакта пары профилей, соприкасающихся в начальный момент в точке  $A$ , за это же время переместится в точку  $A_1$ , находящейся на расстоянии  $\rho_n = \rho_b$  от точки  $B$ .

Поскольку расстояние между точками  $A$  и  $A_1$  меньше, чем  $\rho_n = \rho_b$ , то следующая за двумя рассмотренными третья пара профилей зубьев колес не начнет контактировать до того момента времени, пока не попадет в точку  $A$ . Следовательно, в пределах отрезка  $A_1B_1$  линии зацепления нагрузка, передаваемая от шестерни к зубчатому колесу, будет передаваться одной парой зубьев, а на участках  $AA_1$  и  $BB_1$  – двумя. Эта особенность нагружения зубьев колес отображена на диаграмме сил взаимодействия профилей (рис. 10.15). При этом сила  $Q$  изображена произвольно. Конкретное численное значение силы может быть определено только при заданном значении мощности передаваемой передачей.

#### 10.10. Проверка профилей на взаимное внедрение

В неправильно спроектированной зубчатой передаче при ее работе может иметь место интерференция профилей. Это явление возникает, когда зубья колес в ходе зацепления занимают одновременно одну и ту же часть пространства, т.е. происходит наложение одной части зуба на другой. В этом случае траектория

точки  $K$ , вершины зуба большого колеса в его относительном движении пересекает профиль ножки зуба шестерни, вызывая заклинивание передачи и возможную поломку зубьев (рис. 10.16). С целью проверки спроектированной передачи на отсутствие интерференции зубьев производят построение указанной выше траектории.

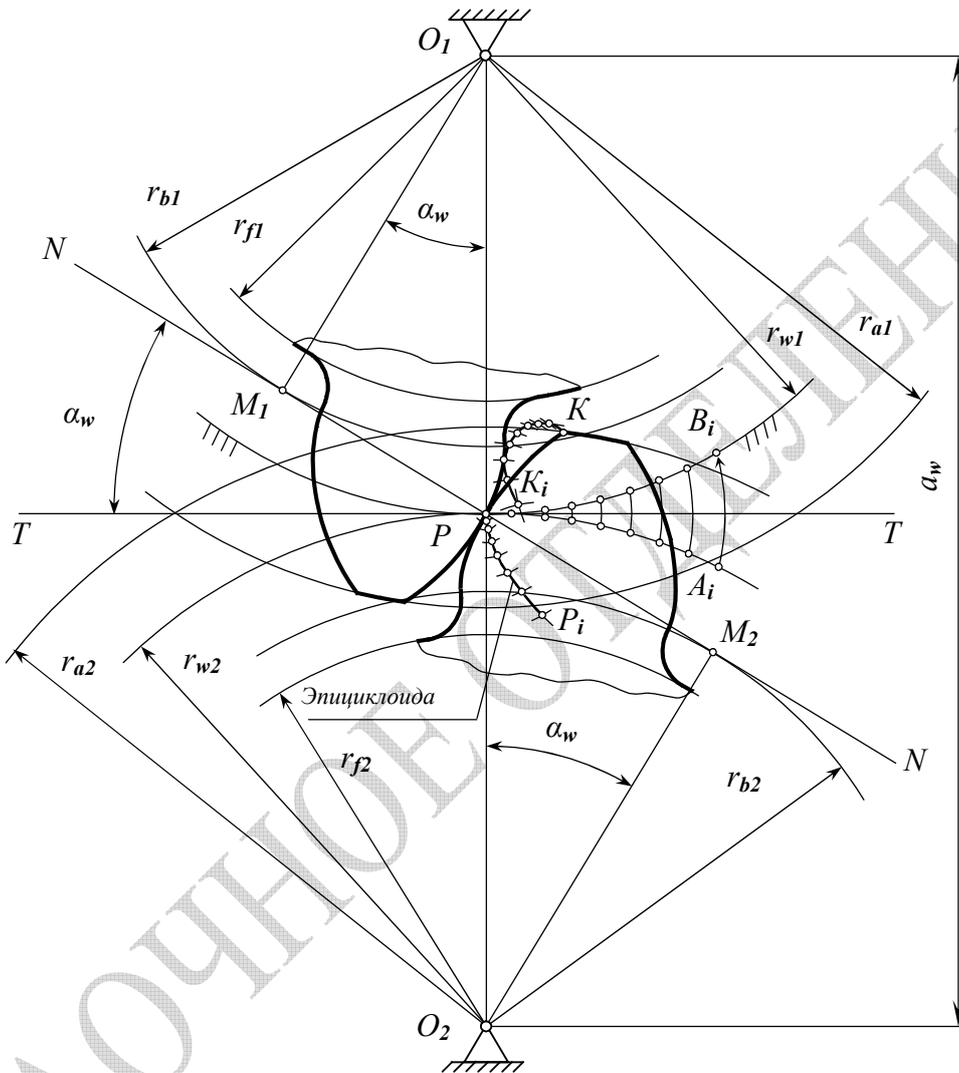


Рисунок 10.16

При выполнении данного построения одно колесо мысленно останавливают, в данном случае ведущее колесо (см. рис. 10.16), а ведомое перекачивают по начальной окружности. Порядок построения включает следующие пункты.

1. Дуги начальных окружностей обоих колес передачи делятся на некоторое число равных участков

$$\cup PA_1 = \cup A_1A_2 = \cup A_2A_3 = \dots = \cup A_{i-1}A_i.$$

Так как начальные окружности перекатываются друг по другу без скольжения, то со временем точки  $A_1, A_2, \dots, A_i$  будут совпадать с точками  $B_1, B_2, \dots, B_i$  «неподвижного» колеса, т.е.  $\cup PB_i = \cup PA_i$ .

2. Методом засечек строится вспомогательная траектория точки  $P$  зуба перекатываемого колеса – эпициклоиду:

- из точки  $B_i$  радиусом  $PA_i$  проводится дуга;
- из точки  $P$  радиусом  $B_iA_i$  на построенной дуге делается засечка, и отмечается точка  $P_i$ ;
- построение повторяется для получения остальных точек  $P_i$ , которые представляют траекторию точки  $P$  на начальной окружности (эпициклоиду).

Для контроля точности построения используют:  $P_iB_i = PA_i$  и  $P_iP = B_iA_i$ .

3. Методом засечек строится искомая траектория точки  $K$ . При перекатывании колеса по начальной окружности шестерни положение точек  $A_i$  и  $P_i$  изменяется, но расстояния между точками одного колеса сохраняется:  $A_iK = const$  и  $PK = const$ . Построения выполняются в следующей последовательности:

- из точки  $B_i$  радиусом  $KA_i$  проводится дуга;
- из точки  $P_i$  радиусом  $KP$  на построенной дуге делается засечка, отмечается точка  $K_i$ ;
- построение повторяется для получения траектории движения точки  $K$ .

Для контроля точности построения используют проверяются равенства длин:  $K_iB_i = KA_i$  и  $K_iP_i = KP$ .

В правильно спроектированной передаче траектория вершины зуба, т.е. точки  $K$ , должна касаться ответного профиля. Пересечение траекторией профиля зуба или отсутствие касания с ним указывает на ошибки в проектировании передачи.

Аналитическая проверка отсутствия интерференции заключается в сравнении радиусов кривизны, как профиля зуба шестерни, так и профиля зуба колеса. Для этого определяются радиусы кривизны  $\rho_{c1}$  и  $\rho_{c2}$  в граничной точке  $K$  (рис. 10.9) и радиусы кривизны  $\rho_{p1}$  в нижней точке активного профиля шестерни (точка  $A$ ) и  $\rho_{p2}$  в нижней точке активного профиля колеса (точка  $B$ ) (рис. 10.13). В результате должны выполняться два условия:

$$\rho_{c1} \leq \rho_{p1}, \quad (10.63 \text{ а})$$

$$\rho_{c2} \leq \rho_{p2}. \quad (10.63 \text{ б})$$

Радиусы кривизны профилей зубьев в граничных точках для шестерни и для колеса вычисляются с помощью соотношений:

$$\rho_{\ell_1} = r_1 \sin \alpha - \frac{l - x_1}{\sin \alpha} m, \quad (10.64 \text{ а})$$

$$\rho_{\ell_2} = r_2 \sin \alpha - \frac{l - x_2}{\sin \alpha} m, \quad (10.64 \text{ б})$$

а радиусы кривизны активных профилей зубьев в нижних точках для шестерни и для колеса – с помощью соотношений:

$$\rho_{p1} = a_w \sin \alpha_w - r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_{a2}, \quad (10.65 \text{ а})$$

$$\rho_{p2} = a_w \sin \alpha_w - r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_{a1}, \quad (10.65 \text{ б})$$

где  $\alpha_{a1}$  и  $\alpha_{a2}$  – соответственно углы профиля зуба в точке на окружности вершин шестерни и колеса (рис. 10.13), определяются по формуле (10.41).

### 10.11. Коэффициент скольжения зубьев

В зубчатой передаче при работе без проскальзывания перекачиваются друг по другу только начальные окружности. Следовательно, относительное проскальзывание боковых профилей зубьев отсутствует только в момент их контакта в полюсе  $P$  зацепления. По мере удаления точек контакта от полюса относительное проскальзывание профилей возрастает, вызывая износ и нагрев зубьев, а также снижение коэффициента полезного действия зубчатой передачи.

Поскольку в различных точках профилей, удаленных от начальных окружностей величина относительного проскальзывания различна, то для практики проектирования эвольвентных зубчатых передач необходимо определение зон боковых профилей зубьев наиболее подверженных износу. Это необходимо, чтобы в дальнейшем при изготовлении зубчатых колес уменьшить износ рабочих профилей с использованием специальных технологических приемов.

Следует отметить, что интенсивность износа зависит не только от величины силы, действующей со стороны профиля зуба шестерни на профиль зуба колеса, но и от конструкционного материала шестерни и колеса, условий смазки, температуры и других факторов.

Для количественной оценки величины относительного проскальзывания профилей используется коэффициент скольжения зубьев, который зависит от геометрических и кинематических параметров колес передачи:

$$\lambda = V_s / V_t,$$

где  $V_s$  – скорость скольжения точек контакта зубьев;  $V_t$  – скорость перемещения точки контакта по рабочему профилю зуба.

За время одного полного оборота шестерни 1 зубчатое колесо 2 совершает не полный оборот. Следовательно, его зубья колеса в  $U_{12} = z_2 / z_1$  раза реже вступает в контакт, чем зубья шестерни, и меньше изнашивается.

Для сравнения возможного износа зубьев колес передачи по коэффициентам скольжения можно воспользоваться формулами:

$$\lambda_1 = \frac{V_s}{V_{t_1}}, \quad (10.66)$$

$$\lambda_2 = \frac{V_s}{U_{12} V_{t_2}}, \quad (10.67)$$

где  $V_{t_1}$  – скорость перемещения точки контакта зубьев по рабочей поверхности бокового профиля зуба шестерни 1;  $V_{t_2}$  – скорость перемещения точки контакта зубьев по рабочей поверхности бокового профиля зуба колеса 2.

На рис. 10.17 рассматриваются два сопряженных рабочих профиля, контактирующих в точке  $K(K_1; K_2)$ . Скорость скольжения профилей для случая внешнего зацепления зубчатых колес определяется по формуле:

$$V_s = V_{K_1 K_2} = \Omega_{1-2} PK = (\omega_1 + \omega_2) PK, \quad (10.68)$$

где  $\Omega_{1-2} = (\omega_1 + \omega_2)$  – угловая скорость в движении колеса 2 относительно шестерни 1;  $PK$  – расстояние от точки контакта рабочих профилей  $K$  до полюса зацепления передачи  $P$  (т.е. до мгновенного центра вращения в относительном движении колеса и шестерни).

В соответствии с планом скоростей (см. рис. 10.17) абсолютная скорость точки  $K_1$ , находящейся на профиле зуба шестерни 1, равна:

$$V_{K_1} = \omega_1 O_1 K_1 = \omega_1 r_{b1} / \cos \beta_1, \quad (10.69)$$

абсолютная скорость точки  $K_2$ , находящейся на профиле зуба колеса 2, равна:

$$V_{K_2} = \omega_2 O_2 K_2 = \omega_2 r_{b2} / \cos \beta_2. \quad (10.70)$$

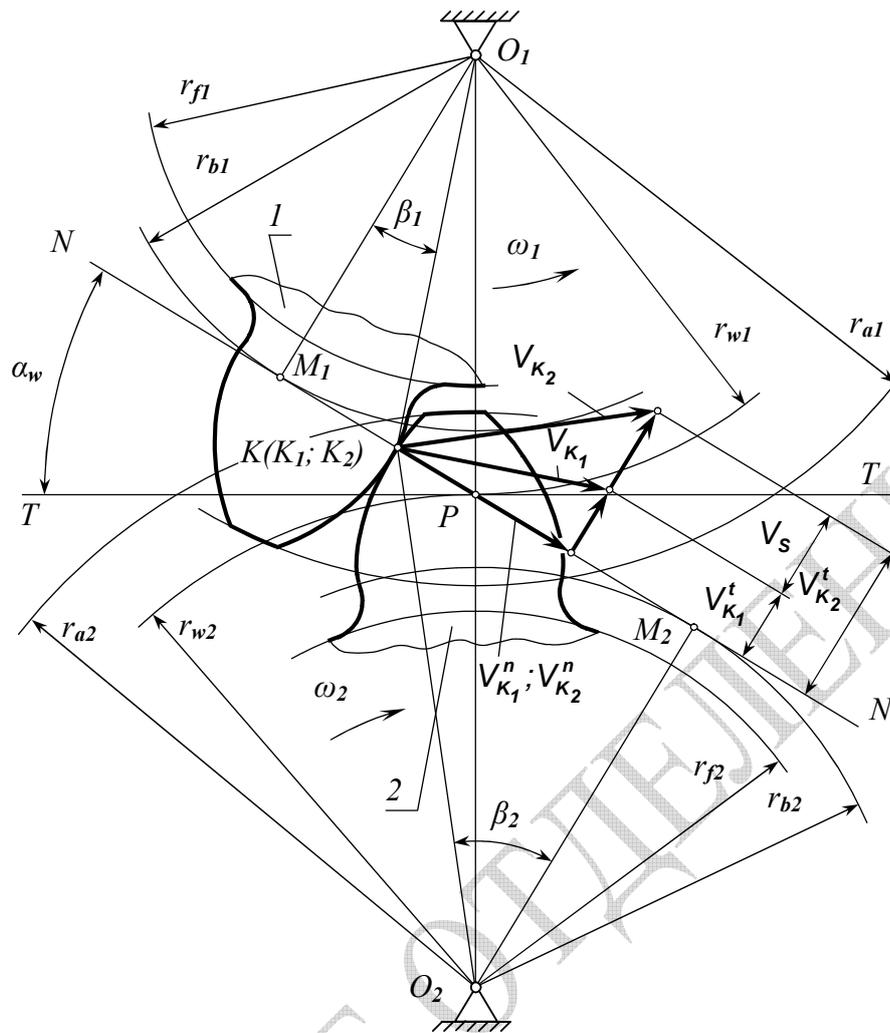


Рисунок 10.17

При этом указанные абсолютные скорости должны иметь одну и ту же нормальную составляющую на линии зацепления  $N-N$  :

$$V_K = V_{K_1}^n = V_{K_2}^n, \quad (10.71)$$

В противном случае профили зубьев колес врезались бы или отставали друг от друга (см. раздел 10.3).

Поскольку нормальные составляющие зависят от абсолютных скоростей, то с учетом (10.61) и (10.70) имеем:

$$\begin{aligned} V_{K_1}^n &= V_{K_1} \cos \beta_1 = \omega_1 r_{b1}, \\ V_{K_2}^n &= V_{K_2} \cos \beta_2 = \omega_2 r_{b2}, \end{aligned} \quad (10.72)$$

Мгновенные скорости перемещения точки контакта  $K$  по рабочим поверхностям зубьев шестерни 1 и колеса 2  $V_{t_1}$  и  $V_{t_2}$  будут совпадать с тангенциальными составляющими  $V_{K_1}^t$  и  $V_{K_2}^t$  абсолютных скоростей

$V_{K_1}$  и  $V_{K_2}$ , которые в свою очередь, могут быть выражены через текущие радиусы кривизны  $\rho_{K_1}$  и  $\rho_{K_2}$  соприкасающихся в точке  $K$  эвольвентных профилей (см. рис. 10.17):

$$V_{t_1} = V_{K_1}^t = V_{K_1}^n \operatorname{tg} \beta_1 = V_{K_1}^n \rho_{K_1} / r_{b_1}, \quad (10.73)$$

$$V_{t_2} = V_{K_2}^t = V_{K_2}^n \operatorname{tg} \beta_2 = V_{K_2}^n \rho_{K_2} / r_{b_2}.$$

С учетом (10.72) уравнения для тангенциальных составляющих скоростей принимают вид:

$$V_{t_1} = \omega_1 \rho_{K_1}, \quad (10.74)$$

$$V_{t_2} = \omega_2 \rho_{K_2}.$$

Наконец, принимая во внимание зависимости (10.66) – (10.68), (10.74) получим окончательные выражения для коэффициентов скольжения:

$$\lambda_1 = \frac{(\omega_1 + \omega_2)PK}{\omega_1 \rho_{K_1}} = \left(1 + \frac{1}{U_{1-2}}\right) \frac{\ell}{\rho_{K_1}}, \quad (10.75)$$

$$\lambda_2 = \frac{(\omega_1 + \omega_2)PK}{U_{1-2} \omega_2 \rho_{K_2}} = \left(1 + \frac{1}{U_{1-2}}\right) \frac{\ell}{\rho_{K_2}}, \quad (10.76)$$

где  $\ell = PK$  и  $U_{12} = \omega_1 / \omega_2$ .

На основе полученных соотношений строятся **диаграммы относительного скольжения** рабочих профилей зубьев (диаграммы изнашивания) на нерабочих профилях зубьев для удобства условно выведенных из зацепления (рис. 10.18). Вначале рабочие участки  $AP$  и  $PB$  линии зацепления  $N-N$  разбивается на несколько отрезков (не менее 4):  $A-1$ ;  $1-2$ ;  $2-3$ , и т.д. Для граничных точек этих отрезков подсчитывают  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Далее определяют точки профилей, контактирующих в точках  $A, 1, 2, 3 \dots B$  линии зацепления. Например, чтобы определить положение точек  $A_1$  и  $A_2$  на профилях соответственно зуба шестерни 1 и колеса 2 необходимо сделать засечки радиусами  $O_1A$  и  $O_2A$  на соответствующих профилях. Величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в масштабе откладывают на нормалях, проведенных к профилям в соответствующих точках, и представляющих собой продолжение касательных к основной окружности.

Наличие диаграмм скольжения позволяет выявить те участки рабочих профилей зубьев, которые в наибольшей степени будут подвержены износу.

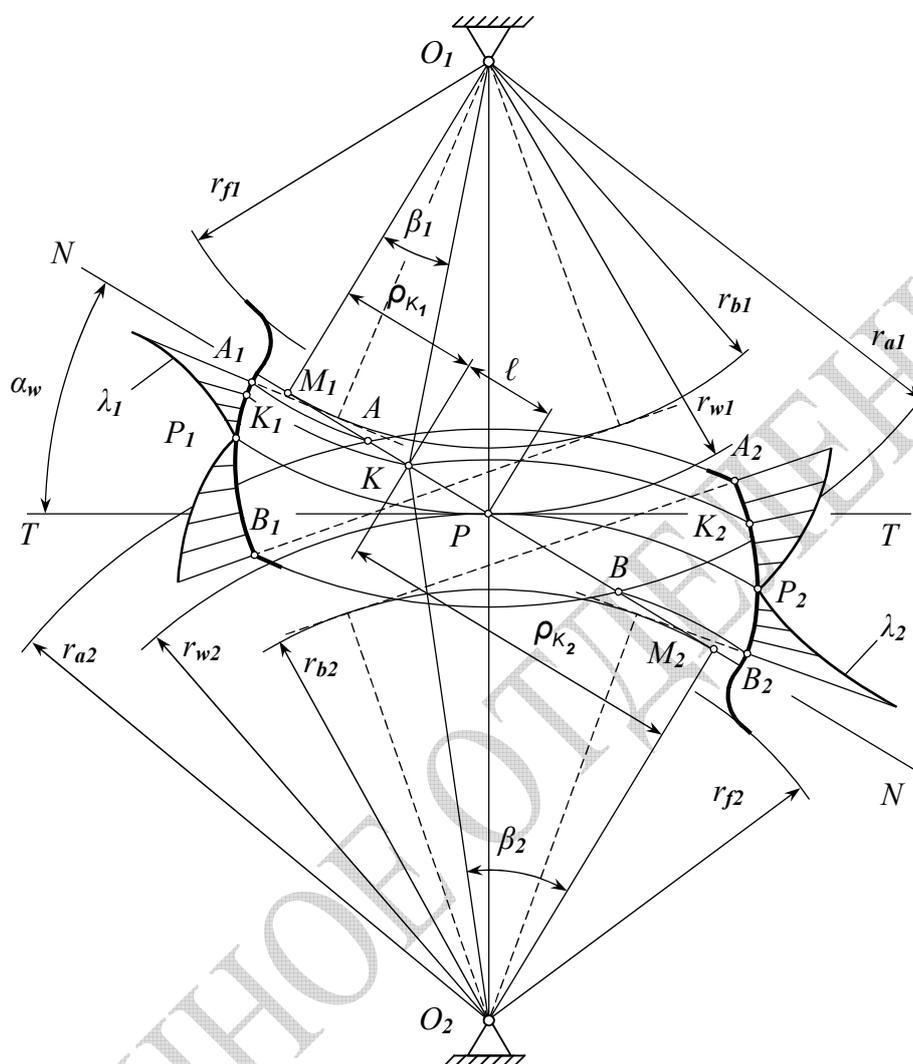


Рисунок 10.18

## 10.12. Порядок проектирование зубчатых передач

Целью проектирования (синтеза) зубчатой передачи является определение **выходных параметров синтеза** в виде геометрических параметров шестерни, колеса и зубчатой передачи по независимым друг от друга **входным параметрам синтеза**, а также определение и анализ качественных показателей спроектированной передачи. Входными параметрами, т.е. исходными данными на проектирование цилиндрической эвольвентной прямозубой зубчатой передачи с внешним зацеплением (стандарт на расчет геометрии колес – ГОСТ 16532-70) являются: межосевое расстояние  $a_w$ , модуль  $m$  и

передаточное отношение  $u_{12}$  и нормальный исходный контур по ГОСТ 13755-81. Эти исходные данные получают предварительно при проведении прочностного и кинематического расчетов.

Проектирование начинается с расчета геометрических параметров передачи. При выполнении расчета следует иметь в виду, что вначале суммарное число зубьев  $z_{\Sigma}$  определяется приближенно в предположении проектирования нулевой передачи. Если при этом были получены дробные значения чисел зубьев, они округляются до целых значений так, чтобы фактическое передаточное число не отличалось бы от заданного значения более чем на 5%.

Порядок расчета геометрических параметров передачи и колес изложен в приведенной ниже таблице. Для обеспечения заданного межосевого расстояния  $a_w$ , с учетом фактически принятых целых чисел зубьев  $z_1$  и  $z_2$  принимается решение о необходимости корригирования передачи. Такая необходимость возникает в случае, если заданное межосевое расстояние  $a_w$  не равно делительному межосевому расстоянию  $a$ . Корригированные колеса нарезаются со смещением. При назначении коэффициентов смещения следует учитывать, что шестерни и колеса с  $z > 17$  можно нарезать с положительным, нулевым и отрицательным смещением; для колес с  $z = 17$  смещение может быть положительным и нулевым; для шестерней с  $z_1 < 17$  смещение может быть только положительным. При выборе коэффициентов смещения, если число зубьев шестерни  $z_1 < 17$ , то коэффициент смещения  $x_1$  выбирается из условия отсутствия подрезания основания ножки зуба (см. п. 16÷17 табл.).

Для определения расстояния между делительными окружностями колес корригированных передач  $u_t$  в расчет вводится коэффициент *воспринимаемого смещения*  $y$ . Для получения передач со стандартным радиальным зазором применяют *уравнительное смещение*, величина которого определяется *коэффициентом уравнительного смещения*  $\Delta u$  (см. п. 18÷19 табл.).

Значения эвольвентных углов профиля зуба  $\alpha$  и зацепления  $\alpha_w$  следует рассчитывать с точностью до шестого знака после запятой.

При больших значениях коэффициента смещения возможно заострение зуба шестерни при вершине, что проверяется при выполнении пунктов 26÷28 (см. табл.). Если условие отсутствия заострения не соблюдается, следует уменьшить коэффициент смещения до наименьшего значения  $x_1 = x_{гр}$  (см. п. 16 табл.).

После проведения расчета всех геометрических параметров переходят к построению профиля зуба зубчатого колеса. Контур зуба очерчивается окружностью вершин, окружностью впадин и боковыми поверхностями, которые определяются при взгляде из центра колеса, как левая и правая. Профиль каждой боковой поверхности зуба состоит из эвольвентной и переходной частей.

Таблица. Порядок расчета геометрических параметров цилиндрической эвольвентной прямозубой зубчатой передачи

№	Параметры	шестерни	зубчатого колеса
Предварительные расчеты <sup>(*)</sup>			
1	Начальный диаметр*	$d_{w_1} = \frac{2a_w}{u_{12} + 1}$	$d_{w_2} = d_{w_1} u_{12}$
2	Суммарное число зубьев*	$z_{\Sigma} = \frac{2a_w}{m}$	
3	Число зубьев*	$z_1 = \frac{z_{\Sigma}}{u_{12} + 1}$	$z_2 = z_1 u_{12}$
4	Число зубьев (после округления до целых чисел)	$z_1$	$z_2$
Корректировка расчетов с учетом принятых значений $z_1$ и $z_2$			
5	Передаточное отношение (фактическое)	$U_{12} = \frac{z_2}{z_1}$	
6	Отклонение фактического передаточного отношения от исходного	$\Delta_u = \frac{u_{12} - U_{12}}{u_{12}} 100\% \leq 5\%$	
7	Начальный диаметр	$d_{w_1} = \frac{2a_w}{U_{12} + 1}$	$d_{w_2} = d_{w_1} U_{12}$
8	Суммарное число зубьев	$z_{\Sigma} = z_1 + z_2$	
Расчетные параметры колес и передачи			
9	Диаметр делительной окружности	$d_1 = m z_1$	$d_2 = m z_2$
10	Диаметр основной окружности	$d_{b_1} = d_1 \cos \alpha$	$d_{b_2} = d_2 \cos \alpha$
11	Делительное межосевое расстояние	$a = 0,5 (d_1 + d_2)$	
12	Угол зацепления	$\alpha_w = \arccos \left( \frac{a}{a_w} \cos \alpha \right)$	
13	Эвольвентный угол профиля	$\text{inv} \alpha = \text{tg} \alpha - \alpha$	

Продолжение таблицы

14	Эвольвентный угол зацепления	$inv\alpha_w = tg \alpha_w - \alpha_w$	
15	Суммарный коэффициент смещения	$x_\Sigma = \frac{z_\Sigma(inv\alpha_w - inv\alpha)}{2tg\alpha}$	
16	Предельный коэффициент смещения	$x_{пр1} = (17 - z_1)/17$	$x_{пр2} = (17 - z_2)/17$
17	Коэффициент смещения: при $0 < x_\Sigma \leq 0,5$ при $0,5 < x_\Sigma \leq 1$	$x_1 = x_\Sigma$ ( $x_1 \geq x_{пр1}$ ) $x_1 = 0,5$ ( $x_1 \geq x_{пр1}$ )	$x_2 = x_\Sigma - x_1$ $x_2 = 0$ ( $x_2 \geq x_{пр2}$ ) $x_2 = x_\Sigma - 0,5$ ( $x_2 \geq x_{пр2}$ )
18	Коэффициент воспринимаемого смещения	$y = \frac{a_w - a}{m}$	
19	Коэффициент уравнивающего смещения	$\Delta y = x_\Sigma - y$	
20	Диаметр окружности вершин зубьев	$d_{a1} = d_1 + 2m(h_a^* + x_1 - \Delta y)$	$d_{a2} = d_2 + 2m(h_a^* + x_2 - \Delta y)$
21	Диаметр окружности впадин зубьев	$d_{f1} = d_1 - 2m(h_a^* + c^* - x_1)$	$d_{f2} = d_2 - 2m(h_a^* + c^* - x_2)$
22	Толщина зуба по делительной окружности	$s_1 = m \left( \frac{\pi}{2} + 2x_1 tg\alpha \right)$	$s_2 = m \left( \frac{\pi}{2} + 2x_2 tg\alpha \right)$
23	Шаг по делительной окружности	$p = \pi m$	
24	Ширина впадины между зубьями	$e_1 = p - s_1$	$e_2 = p - s_2$
25	Радиус кривизны переходной кривой	$r = \rho^* f m = 0,38 m$	
Проверка на заострение зуба при вершине			
26	Угол профиля при вершине	$\alpha_{a1} = arccos \left( \frac{d_{b1}}{d_{a1}} \right)$	$\alpha_{a2} = arccos \left( \frac{d_{b2}}{d_{a2}} \right)$
27	Толщина зуба при вершине	$s_{a1} = d_{a1} \left( \frac{s_1}{d_1} + inv\alpha - inv\alpha_{a1} \right)$	$s_{a2} = d_{a2} \left( \frac{s_2}{d_2} + inv\alpha - inv\alpha_{a2} \right)$

Продолжение таблицы

28	Проверка условия	$s_{a_1} \geq 0,2m$	$s_{a_2} \geq 0,2m$
----	------------------	---------------------	---------------------

Построение контура зуба рассмотрим на примере левой боковой поверхности зуба (рис. 10.19). Для удобства и наглядности масштабный коэффициент выбирают так, чтобы высота зуба составляла  $40 \div 50$  мм:

$$k_d = \frac{2,25m}{40 \div 50} .$$

С учетом выбранного масштаба из произвольно взятого центра зубчатого колеса проводятся окружности диаметрами  $d$ ,  $d_a$ ,  $d_b$  и  $d_f$ . Под углом зацепления  $\alpha_w$  к вертикали  $ON$  обозначается радиус основной окружности  $OM$ . Касательная к основной окружности в точке  $M$  является производящей прямой, точка пересечения которой с окружностью вершин зубьев диаметром  $d_a$  определяет отрезок  $KM$ . Следовательно, отрезок  $KM$  является радиусом кривизны эвольвенты с мгновенным центром кривизны в точке  $M$ . При перекатывании отрезка  $KM$  без скольжения по основной окружности траектория точки  $K$  представит собой эвольвенту левого профиля зуба. При построении эвольвентный участок  $KM$  разбивается на  $n$  равных частей длиной  $c$ :

$$c = \frac{KM}{n} \quad \text{при } n = 5 \div 10.$$

От точки  $M$  на основной окружности откладываются дуги (длина каждой из них равна  $c$ ), обозначая тем самым положение мгновенных центров вращения производящей прямой  $M \dots M_i \dots M_n$ . В каждой точке  $M_i$  последовательно проводят касательные к основной окружности. На каждой касательной отмечают положение точки  $K_i$ , уменьшая соответственно отрезок  $KM$  на  $c$ :

$$K_iM_i = (KM - ic) ,$$

где  $i$  от 1 до  $n$ .

Соединяя все точки  $K_i$  плавной кривой, получают траекторию точки  $K$ , т.е. эвольвенту. Дуга  $KM_n$  - эвольвентная часть профиля зуба. Переходная часть профиля выполняется путем сопряжения радиальной прямой  $M_nO$  с окружностью впадин дугой радиуса  $r = 0,38m$ . Правый профиль зуба строится аналогично, т.е. перекатыванием производящей прямой по часовой стрелке. Проще

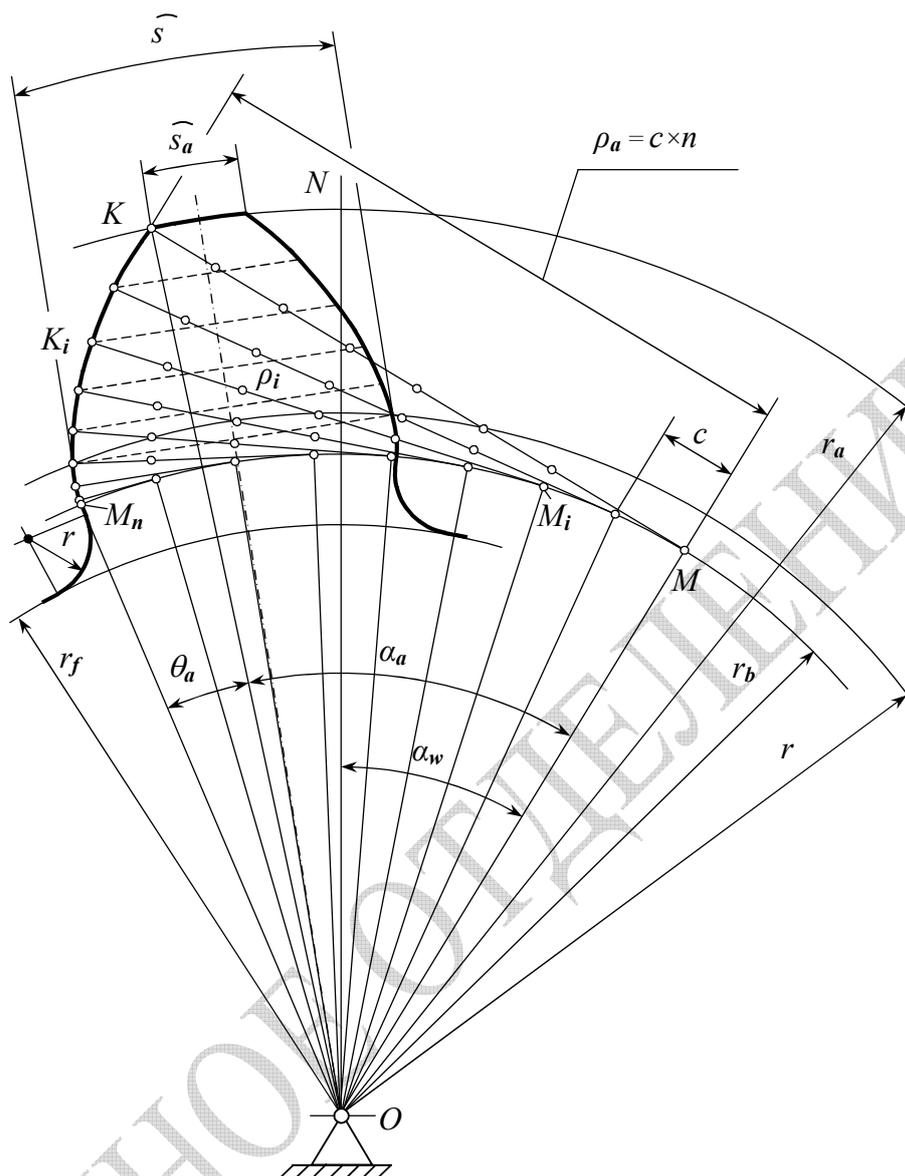


Рисунок 10.19

построить правый профиль, пользуясь шаблоном. Для этого с учетом принятого масштабного коэффициента  $k_d$  нужно отложить на окружности вершин  $d_a$  толщину зуба  $s_a$  и на делительной окружности  $s$ . Затем на карандашную кальку следует перенести левый профиль, отметив на нем точки  $K, M_n$ , а так же  $s_a$  и  $s$ . Зеркально переворачивая кальку, и совмещая отрезки  $s_a$  и  $s$  на чертеже и на кальке, получают профиль зуба колеса. Можно также, для построения правого профиля использовать симметричное расположение точек  $K_i$  относительно оси зуба.

После построения профиля зуба переходят к выяснению картины эвольвентного зацепления двух колес. Она необходима для оценки качественных показателей зубчатой передачи. В выбранном масштабе на чертеже откладывается межосевое расстояние  $a_w (O_1O_2)$

и отмечают центры вращения шестерни  $O_1$  и колеса  $O_2$ , затем проводятся окружности найденных выше диаметров:  $d_{w1}, d_1, d_{a1}, d_{b1}, d_{f1}$  и  $d_{w2}, d_2, d_{a2}, d_{b2}, d_{f2}$  (рис. 10.11). Точка касания начальных окружностей является **полюсом зацепления**  $P$ , через который проводится под углом зацепления  $\alpha_w$  к общей касательной к начальным окружностям  $T-T$  **линия зацепления**  $N-N$ . Линия зацепления  $N-N$  является касательной к основным окружностям и, следовательно, является общей нормалью к профилям зубьев в точке контакта  $K$ . Линия зацепления пересекается окружностями вершин зубьев в точках  $A$  и  $B$ . В этих точках левые профили зубьев входят и выходят из зацепления, поэтому отрезок  $AB$  называют активной частью линии зацепления. Зубчатая передача спроектирована правильно, если точки  $A$  и  $B$  находятся в пределах отрезка  $M_1M_2$ . В противном случае произойдет заклинивание передачи.

При выполнении картины зацепления обычно, пользуясь шаблоном, изображаются два зуба шестерни и три зуба колеса. Расстояние между делительными окружностями  $u_m$  (воспринимаемое смещение) и расстояние между окружностью вершин зубьев колеса и окружностью впадин зубьев шестерни  $s$  (радиальный зазор) можно использовать в качестве проверки правильности и точности построения картины зацепления.

Построения целесообразно дополнить анализом качественных показателей эвольвентной зубчатой передачи:

- вычисление коэффициента перекрытия;
- определение изменения нагрузки на зуб по времени зацепления;
- проверка профилей на взаимное внедрение (см. 2.9.4);
- определение коэффициента скольжения зубьев; построение диаграмм изнашивания рабочих поверхностей зубьев;
- проверка на отсутствие подрезания профилей зуба.

### 10.13. Цилиндрические зубчатые передачи с косозубыми колесами

В передачах с прямозубыми цилиндрическими колесами образующие боковых поверхностей зубьев параллельны осям вращения колес (рис. 10.20, а). Вследствие этого контакт двух сопряженных зубьев происходит одновременно по всей длине зуба. Это обстоятельство является серьезным недостатком передач с прямозубыми колесами, поскольку даже небольшие погрешности при изготовлении колес могут серьезно ухудшить условия работы зубчатой передачи. Кроме того, ранее отмечалось, что коэффициент торцового перекрытия  $\varepsilon$  для прямозубой передачи лежит в узких пределах  $1 < \varepsilon < 2$ . Это означает, что одновременно в зацеплении находится не более чем две пары зубьев. При этом вся силовая нагрузка в данный момент времени приходится только на них. В условиях передачи больших мощностей такая ситуация может

привести к возникновению больших контактных напряжений в материале зубьев.

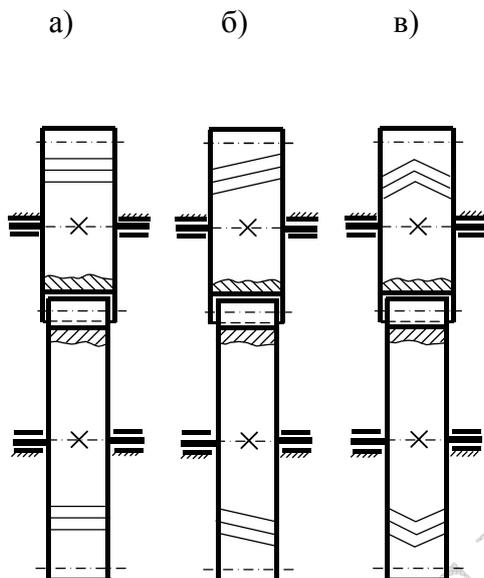


Рисунок 10.20

С целью уменьшения влияния погрешностей на работу передачи и увеличения коэффициента торцового перекрытия прямозубое зацепление заменяют косозубым (рис. 10.20, б). При нарезании косозубых колес режущий инструмент движется вдоль впадин между зубьями не параллельно оси колеса, а под некоторым углом  $\beta$  к ней. В сечении, перпендикулярном этому направлению, будет нарезан эвольвентный профиль, определяемый стандартными параметрами инструмента. Шаг зацепления в указанном сечении обозначим через  $p_n$ . Он называется **нормальным шагом**. Нормальный шаг связан с торцовым шагом  $p_t$  с помощью соотношения:

$$p_n = p_t \cos \beta . \quad (10.77)$$

Аналогичное соотношение имеет место между нормальным и торцовым модулями:

$$m_n = m_t \cos \beta . \quad (10.78)$$

Высота зубьев (или их элементов) не зависит от того, нарезался ли профиль инструментом, двигавшимся вдоль оси колеса или под углом к ней. Поэтому высота головки зуба  $h_a = m_n$ , а высота ножки зуба  $h_f = 1.25 m_n$ . Разница между полной высотой зуба и высотой его

головки приводит к появлению зазора  $s$ , который необходим для размещения смазки и для компенсации тепловых деформаций, неточностей изготовления и монтажа. Если число зубьев колеса равно  $z$ , то диаметр делительной окружности косозубого колеса с учетом (10.78) равен:

$$d = \frac{m_n z}{\cos \beta}, \quad (10.79)$$

диаметр окружности выступов зубьев –

$$d_a = d + 2h_a = \frac{m_n z}{\cos \beta} + 2m_n = m_n \left( \frac{z}{\cos \beta} + 2 \right), \quad (10.80)$$

диаметр окружности впадин –

$$d_f = d - 2h_f = \frac{m_n z}{\cos \beta} - 2.5m_n = m_n \left( \frac{z}{\cos \beta} - 2.5 \right). \quad (10.81)$$

При зацеплении у косозубых колес длина линии касания зубьев (контактной линии) меняется в процессе зацепления. Зубья таких колес входят в зацепление и выходят из него постепенно. Благодаря этому смягчаются удары, возникающие при входе в зацепление каждой новой пары зубьев и являющиеся следствием неточности изготовления колес. Работа передачи становится более плавной, снижается уровень шума, уменьшается износ контактных поверхностей.

Плавность зацепления непосредственно зависит от величины коэффициента перекрытия  $\epsilon$ , который, как отмечалось выше, представляет собой отношение длины дуги зацепления к шагу зацепления. При зацеплении эвольвентных зубчатых колес их делительные цилиндры при угле зацепления  $\alpha_w = 20^\circ$  являются одновременно и начальными цилиндрами (перекатываются друг по другу без проскальзывания). Вследствие того, что зубья косозубого колеса расположены под углом  $\beta$  к образующим делительного цилиндра, длина дуги зацепления увеличивается на величину  $\Delta = b \operatorname{tg} \beta$  ( $b$  – ширина колеса) и становится равной:

$$\tilde{s}_{\text{кос}} = \tilde{s}_{\text{прям}} + b \operatorname{tg} \beta, \quad (10.82)$$

где  $\tilde{s}_{\text{прям}}$  - дуга зацепления аналогичной пары прямозубых колес. После деления обеих частей этого равенства на шаг  $p_t$  получим:

$$\varepsilon_{\text{кос}} = \varepsilon_{\text{прям}} + \frac{b}{p_t} \operatorname{tg} \beta . \quad (10.83)$$

Соответствующим подбором ширины колеса и угла наклона зубьев можно существенно повысить коэффициент перекрытия (довести его величину до  $7 \div 8$ ) и реализовать возникающие в этом случае преимущества косозубого зацепления.

Основные недостатки передач с косозубыми колесами связаны с особенностями силового взаимодействия сопряженных звеньев. Полное усилие  $F$  при зацеплении пары зубьев направлено по нормали к поверхности их контакта. Очевидно, что направление силы  $F$  составляет угол  $\beta$  с направлением вращения колес. Она может быть разложена на две составляющие  $F_t$  и  $F_a$ . Усилие  $F_t$ , называемое окружным усилием, направлено в сторону вращения колеса и производит полезную работу. Составляющая  $F_a$  направлено вдоль оси колеса. Эта сила стремится сдвинуть колесо в продольном направлении. Для восприятия этой силы и противодействия ей требуется использовать подшипники специальной конструкции (упорные осевые подшипники), которые являются более дорогими.

Указанный недостаток может быть устранен, если вместо обычных косозубых колес применить шевронные колеса (рис. 10.20, в). Шевронные колеса представляют собой как бы два жестко соединенных между собой косозубых колеса с симметричным расположением зубьев (полушевроны). При такой конструкции колес осевые усилия, возникающие на полушевронах, взаимно уравновешиваются, и необходимость использовать специальные подшипники отпадает.

Угол наклона зубьев  $\beta$  обычно принимают в пределах  $6 \div 15^\circ$ . При меньших углах основное достоинство передач с косозубыми колесами – повышение плавности работы за счет высоких значений коэффициента перекрытия – проявляется в малой степени. При углах  $\beta$ , превышающих указанное выше верхнее значение, осевые усилия становятся слишком большими.

#### 10.14. Конические передачи

Механические передачи с коническими колесами используются в тех случаях, когда требуется передать движение между пересекающимися осями. Угол между осями может лежать в широких пределах. Однако наиболее распространены конические передачи с

взаимно перпендикулярными осями (ортогональные передачи). Если относительное движение двух находящихся в зацеплении цилиндрических колес можно представить как качение одного начального цилиндра по другому, то относительное движение двух конических колес воспроизводится качением без скольжения двух конусов, называемых начальными конусами. Начальные конусы имеют общую вершину – точку  $O$  пересечения осей вращения колес (см. рис. 10.21).

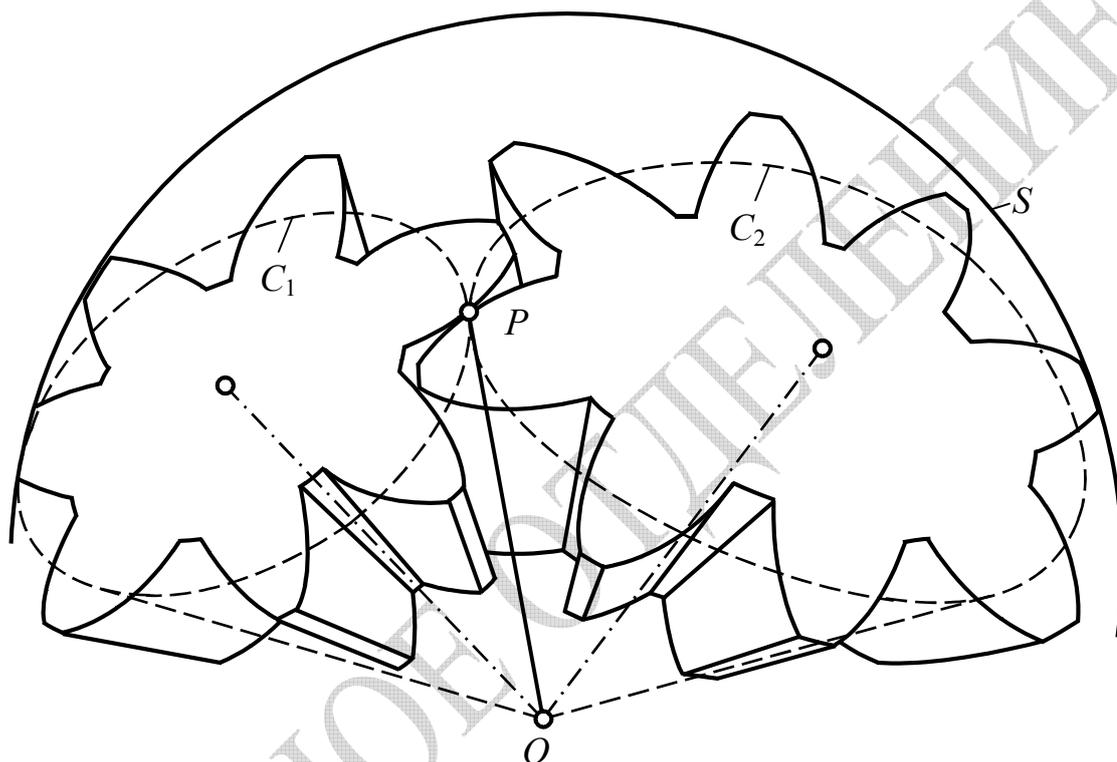


Рисунок 10.21

Для анализа геометрии конических передач опишем из центра  $O$  сферу  $S$  произвольного радиуса. Она пересечет начальные конусы, которые показаны на рис. 10.21 пунктирными линиями, по некоторым окружностям  $C_1$  и  $C_2$ . При качении одного конуса по другому эти окружности также будут перекатываться одна по другой, оставаясь на все время на сферической поверхности  $S$ . Таким образом, окружности  $C_1$  и  $C_2$  можно рассматривать как сферические центроиды, аналогичные начальным окружностям цилиндрических колес. Точка  $P$  касания этих окружностей является полюсом зацепления, роль которого остается той же, что и при зацеплении цилиндрических колес. При этом линия  $OP$  представляет собой ось мгновенного вращения одного конического колеса относительно другого.

Схема образования боковых поверхностей зубьев конического колеса та же, что и для колеса цилиндрического. Отличие заключается лишь в том, что в начальный момент рассматривается касание образующей плоскости  $\Pi_1$  не с основным цилиндром, а с основным конусом (рис. 10.22). При чистом качении этой плоскости

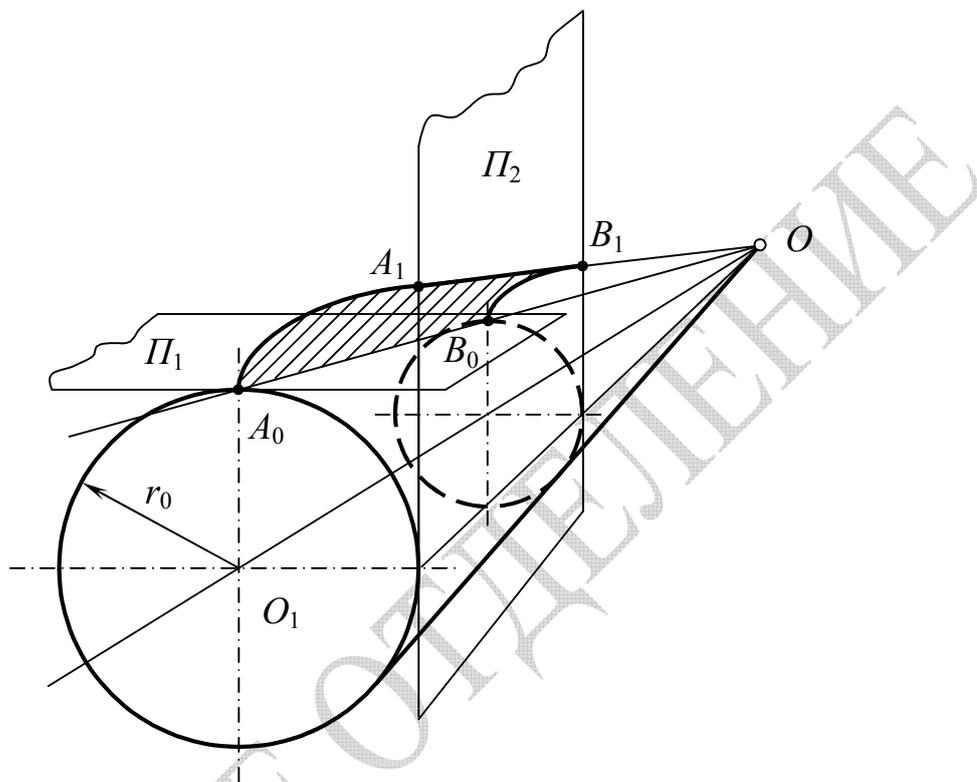


Рисунок 10.22

по основному конусу плоскость переместится в положение  $\Pi_2$ , а прямая  $A_0B_0$ , лежащая в этой плоскости и совпадающая с образующей конуса, займет положение  $A_1B_1$  и опишет коническую эвольвентную поверхность. Любая точка указанной прямой при этом остается на одном и том же расстоянии от вершины конуса  $O$ , т. е. ее траектория лежит на сферической поверхности. Таким образом, профили зубьев конического колеса представляют собой сферические эвольвенты. Они не могут быть изображены на плоскости без искажения. Поэтому при их изображении пользуются приближенным способом.

К начальным конусам 1 и 2 (рис. 10.23) добавляют конусы 1' и 2', которые называются дополнительными. Их вершины  $O_1$  и  $O_2$  лежат на соответствующих осях вращения, а образующие перпендикулярны к образующим начальных конусов. Дополнительные конусы касаются сферы по окружностям  $C_1$  и  $C_2$ , а отрезки  $A_1P$  и  $A_2P$  изображают их выпрямленные радиусы. Дополнительные конусы имеют то преимущество перед сферической поверхностью, что их можно развернуть на плоскость без искажения размеров. На этих

развернутых поверхностях и строят эвольвентные профили. Возникающие при этом погрешности невелики, поскольку профили расположены в зоне касания дополнительных конусов со сферой,

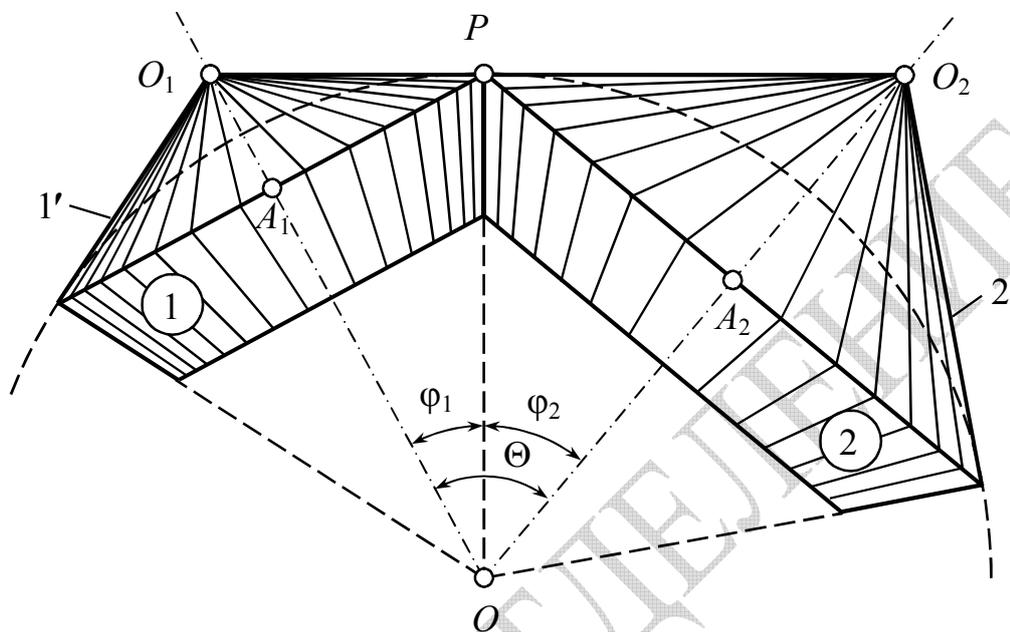


Рисунок 10.23

причем высота зубьев мала по сравнению с длиной образующей дополнительного конуса. Длины образующих  $O_1P$  и  $O_2P$  дополнительных конусов принимаются за радиусы  $r_1'$  и  $r_2'$  начальных окружностей фиктивных цилиндрических колес (рис. 10.24), а само построение профиля зуба ведется так же, как и для зубьев цилиндрических колес.

Пусть  $z_1$  и  $z_2$  – число зубьев двух конических колес 1 и 2, находящихся в зацеплении. При развертке дополнительных конусов на плоскость окружности  $S_1$  и  $S_2$  перейдут в незамкнутые дуги окружностей  $S_1'$  и  $S_2'$ , на которых разместятся зубья  $z_1$  и  $z_2$ . Если эти дуги дополнить до полных окружностей, то на них сможет разместиться другое число зубьев  $z_1'$  и  $z_2'$ . Очевидно, что  $z_1' > z_1$  и  $z_2' > z_2$ , т. е. зацепление пары конических колес эквивалентно зацеплению пары цилиндрических колес с большим числом зубьев.

В конических колесах принято значение шага и модуля зацепления относить к наиболее удаленному от вершины  $O$  сечению. Так как отрезки  $A_1P = r_1$  и  $A_2P = r_2$  представляют собой радиусы центроид  $S_1$  и  $S_2$ , то их длины могут быть определены по формулам:

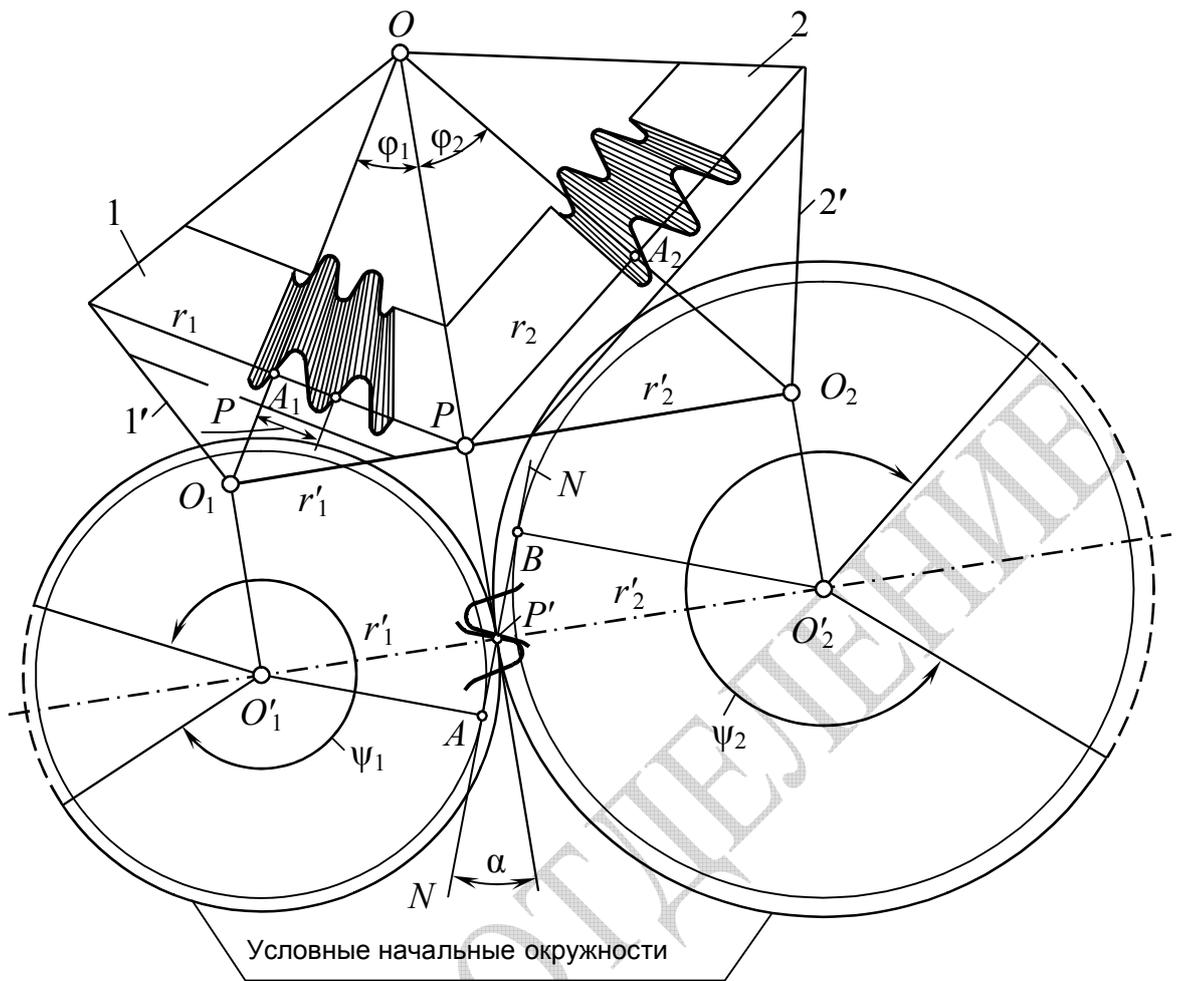


Рисунок 10.24

$$r_1 = \frac{mz_1}{2} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{mz_2}{2}. \quad (10.84)$$

Величины радиусов  $r_1$  и  $r_2$  связаны с углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соотношениями:

$$r_1 = OP \sin \varphi_1 \quad \text{и} \quad r_2 = OP \sin \varphi_2.$$

Следовательно, отношение радиусов центров удовлетворяет пропорции:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = \frac{z_2}{z_1} = U_{12}. \quad (10.85)$$

Если задан угол между осями конических колес  $\Theta$  и передаточное отношение  $U_{12}$ , то углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , связанные равенством:  $\varphi_1 + \varphi_2 = \Theta$ , можно найти из соотношения:

$$U_{12} = \frac{\sin(\Theta - \varphi_1)}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin \Theta}{\operatorname{tg} \varphi_1} - \cos \Theta,$$

вытекающего из равенства (10.85). Действительно, решая последнее уравнение относительно  $\operatorname{tg} \varphi_1$ , для углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  получим следующие расчетные формулы:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \Theta}{U_{12} + \cos \Theta} \right), \quad \varphi_2 = \Theta - \varphi_1. \quad (10.86)$$

После того, как углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определены, могут быть найдены радиусы дополнительных конусов. Из рис. 10.24 видно, что с учетом (10.84) для них справедливы соотношения:

$$r_1' = \frac{r_1}{\cos \varphi_1} = \frac{mz_1}{2 \cos \varphi_1}, \quad r_2' = \frac{r_2}{\cos \varphi_2} = \frac{mz_2}{2 \cos \varphi_2}. \quad (10.87)$$

Так как радиусы  $r_1'$  и  $r_2'$  являются радиусами начальных окружностей замещающих цилиндрических колес того же модуля, то

$$r_1' = \frac{mz_1'}{2} \quad \text{и} \quad r_2' = \frac{mz_2'}{2}.$$

Сопоставляя с предыдущими выражениями, получим:

$$z_1' = \frac{z_1}{\cos \varphi_1} \quad \text{и} \quad z_2' = \frac{z_2}{\cos \varphi_2}. \quad (10.88)$$

Величины  $z_1'$  и  $z_2'$  называются **числами зубьев эквивалентных цилиндрических колес**, а сами цилиндрические колеса – **эквивалентными цилиндрическими зубчатыми колесами**. Рассматривая вместо пары конических колес пару эквивалентных им цилиндрических колес, можно определить коэффициент перекрытия, удельные скорости скольжения и другие параметры конической передачи, пользуясь при этом формулами, выведенными для цилиндрических колес. По числам зубьев эквивалентных цилиндрических колес можно также судить о возможности заклинивания конических колес, об опасности подреза зубьев и т. д.

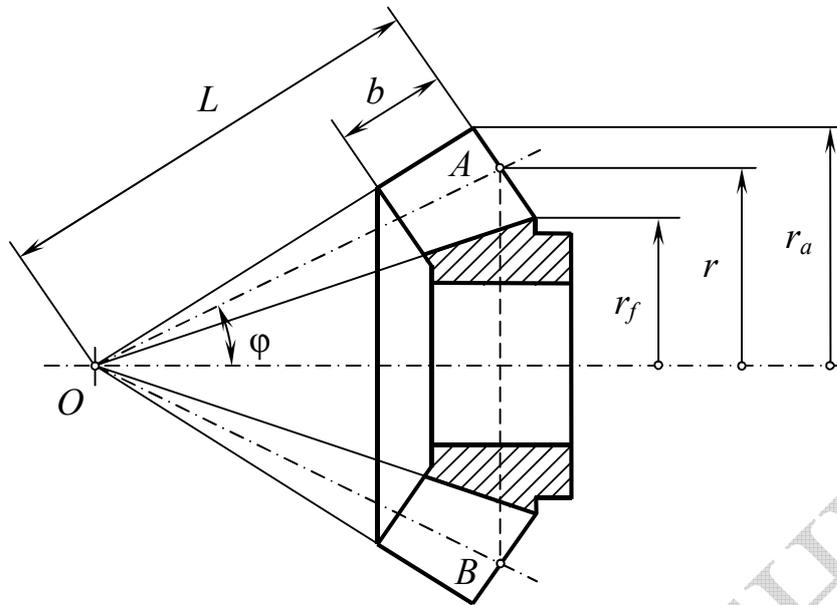


Рисунок 10.25

На рис. 10.25 показана типовая конструкция конического колеса. Как уже указывалось, торцовые поверхности колеса выполняются по дополнительному конусу. При этом все основные размеры принято относить к наружному торцу колеса. Окружность радиуса  $r$ , получаемая при пересечении начального конуса плоскостью  $AB$ , перпендикулярной оси колеса, носит название начальной. Именно по этой окружности модуль  $m$  должен иметь стандартное значение.

У нормальных конических колес радиус начальной окружности  $r$ , шаг зацепления  $p$ , толщина зуба  $s$ , ширина впадины  $u$  и высота головки зуба  $h_a$  связаны с модулем  $m$  и числом зубьев  $z$  такими же соотношениями, что и параметры нормальных цилиндрических колес. Эти соотношения, напомним, имеют вид:

$$r = \frac{mz}{2}; \quad p = \pi m; \quad s = u = \frac{\pi m}{2}; \quad h_a = m \quad (10.89)$$

В отличие от цилиндрических колес соотношения для высоты ножки  $h_f$  и высоты зуба  $h$  несколько другие:

$$h_f = 1,2 m \text{ (а не } 1,25 m \text{ как для цилиндрических колес),}$$

$$h = 2,2 m \text{ (а не } 2,25 m \text{ как для цилиндрических колес).}$$

Из рис. 10.25 нетрудно видеть, что радиус  $r_a$  окружности головок зубьев может быть найден по формуле:

$$r_a = r + h_a \cos \varphi = \frac{mz}{2} + m \cos \varphi = \frac{m}{2}(z + 2 \cos \varphi), \quad (10.90)$$

а радиус окружности впадин – по формуле:

$$r_f = r - h_f \cos \varphi = \frac{mz}{2} - 1,2m \cos \varphi = \frac{m}{2}(z - 2,4 \cos \varphi). \quad (10.91)$$

Кроме перечисленных параметров при проектировании и расчете конических колес представляют интерес длина образующей начального конуса  $L$  (конусное расстояние) и ширина зубчатого венца  $b$  (см. рис. 10.25). Первый параметр, очевидно, можно найти из соотношения:

$$L = \frac{r}{\sin \varphi}, \quad (10.92)$$

а второй, обычно, меняется в пределах:  $b = (0.2 \div 0.4) L$ .

На практике широко применяются конические колеса с косыми зубьями. Из-за большего значения коэффициента перекрытия они превосходят прямозубые конические колеса по несущей способности и могут работать при значительных окружных скоростях. Применяются также конические колеса с круговыми зубьями, работа которых характеризуется плавностью и бесшумностью. Однако во всех конических колесах, так же как и при работе косозубых цилиндрических колес возникают осевые усилия. Поэтому валы, на которых укреплены конические колеса, должны располагаться в подшипниках, способных воспринимать осевые нагрузки.

### 10.15. Червячные передачи

В тех случаях, когда оси ведущего и ведомого валов скрещиваются под прямым углом, применяются, как правило, червячные передачи. Они состоят из двух подвижных звеньев – червяка и червячного колеса (рис. 10.26). Червяк представляет собой цилиндр, снабженный винтовой нарезкой с трапециевидным, эвольвентным или другим профилем в осевом сечении. В качестве червячного колеса используются косозубые колеса с профилем зубьев, сопрягаемым с профилем витков червяка. Если червячное колесо является цилиндрическим, то его зубья имеют точечный контакт с червяком, что приводит к незначительной нагрузочной способности передачи и повышенному износу. Поэтому чаще всего применяются червячные передачи, у которых колеса имеют вогнутую форму, охватывая червяк по дуге с углом  $60 \div 110^\circ$ . При этом контакт зубьев колеса и червяка

происходит по линии, и нагрузочная способность передачи существенно повышается. Еще более совершенными являются передачи, в которых вогнутую форму имеют не только зубья колеса, но и витки червяка.

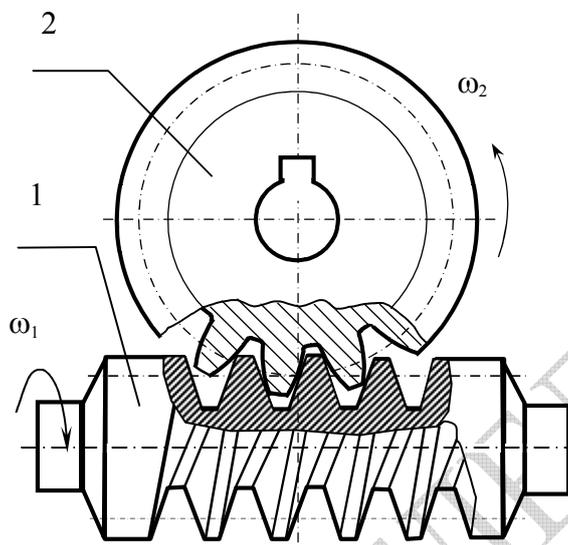


Рисунок 10.26

Рассмотрим основные геометрические параметры червячных передач применительно к передачам с цилиндрическим колесом. Условная поверхность червяка, образующие которой касаются начального цилиндра колеса, называется **делительным цилиндром червяка**. Точка касания этих цилиндров носит название полюса  $P$  передачи. Угол  $\lambda$  подъема винтовой линии червяка и угол  $\beta$  наклона зубьев червячного колеса должны быть равными для того, чтобы обеспечить сопряжение зубьев колеса и витков червяка. Кроме того, в червячном зацеплении осевой шаг червяка  $p_x$  равен окружному шагу  $p_t$  колеса. Поэтому в качестве модуля червячной передачи принимается окружной модуль червячного колеса, который задается в соответствии со стандартом.

Установим связь между окружными скоростями червяка и колеса в точке их контакта (полюса  $P$ ). Окружные скорости червяка  $V_{\text{ч}}$  и колеса  $V_{\text{к}}$  направлены перпендикулярно соответствующим осям (рис. 10.27). Следовательно, в отличие от зубчатой в червячной передаче окружные скорости не совпадают по направлению и различны по значению. Начальные цилиндры колеса и червяка в относительном движении скользят, а не обкатываются друг по другу. Движение точки колеса, совпадающей в данный момент времени с полюсом  $P$ , можно рассматривать как сложное: относительное по отношению к червяку и

переносное вместе с ним. Относительная скорость  $V_{\text{отн}}$  (ее называют скоростью скольжения) направлена вдоль винтовой линии нарезки червяка. Скорости абсолютного, относительного и переносного движений связаны векторным равенством:

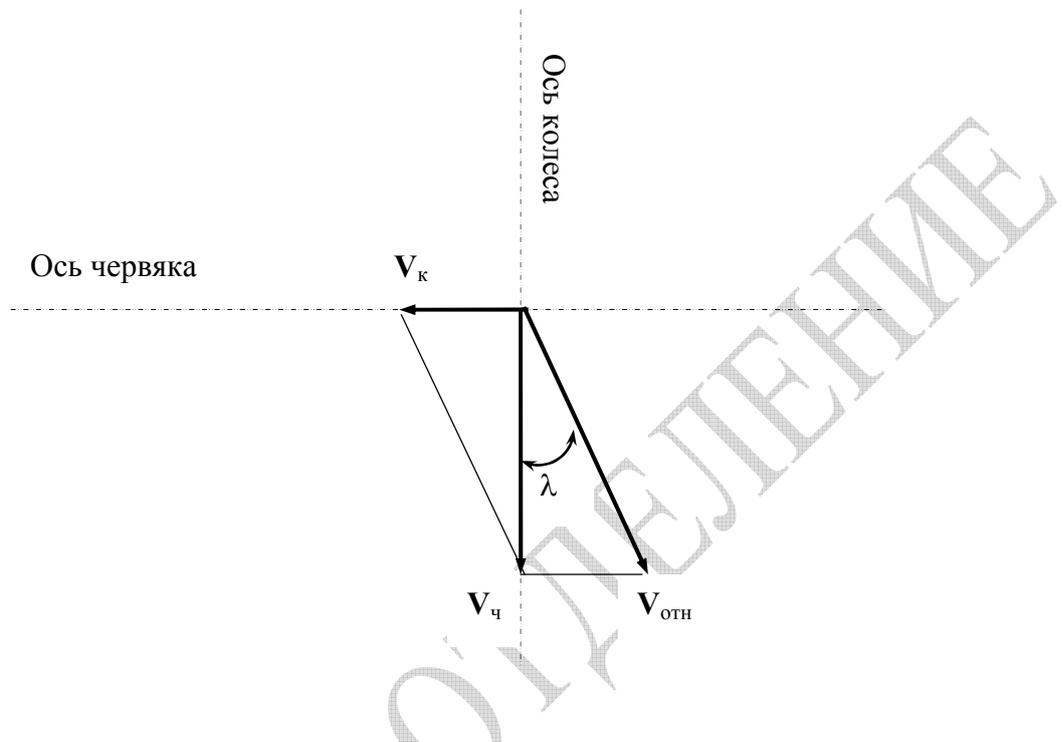


Рисунок 10.27

$$V_k = V_{\text{отн}} + V_{\text{ч}},$$

а их векторы составляют параллелограмм скоростей (рис. 10.27). Поэтому для абсолютных значений окружных скоростей червяка и колеса справедливо соотношение:  $V_k = V_{\text{ч}} \operatorname{tg} \lambda$ . С другой стороны эти же значения скоростей определяются угловыми скоростями вращения червяка и колеса:  $V_k = R \omega_k$  и  $V_{\text{ч}} = r \omega_{\text{ч}}$ , где  $R$  и  $r$  – радиусы делительной окружности колеса и червяка соответственно. Последние равенства позволяют найти передаточное отношение  $U$  червячной передачи:

$$U = \frac{\omega_{\text{ч}}}{\omega_k} = \frac{V_{\text{ч}} R}{V_k r} = \frac{R}{r \operatorname{tg} \lambda}. \quad (10.93)$$

Радиус делительной окружности колеса определяется окружным шагом  $p_t$  и числом зубьев  $z$ :  $R = z p_t / 2\pi$ . Радиус делительной окружности червяка определяется числом заходов винтовой нарезки  $k$

и осевым шагом червяка  $p_x$ , который, как уже отмечалось, равен окружному шагу колеса  $p_t$ :  $r = k p_t / 2\pi \operatorname{tg} \lambda$ . Тогда соотношение (10.93) для передаточного отношения может быть записано в виде:

$$U = \frac{\omega_q}{\omega_k} = \frac{z}{k} \quad (10.94)$$

Следовательно, передаточное отношение червяка к колесу равно отношению числа зубьев колеса к числу заходов винтовой нарезки червяка. Если витки червяка составляют одну винтовую линию ( $k = 1$ ), то передаточное отношение червячной передачи равно числу зубьев  $z$  колеса. Это дает возможность получать в передачах такого типа большие значения передаточных отношений при небольших габаритах ( $U = 25 \div 100$  для силовых передач и  $U$  до 300 в кинематических цепях приборов).

Недостатком червячных передач является их сравнительно низкие коэффициенты полезного действия  $\eta$ . Наличие скольжения в кинематической паре приводит к большим потерям на трение. Для приближенной оценки к.п.д. может служить соотношение:

$$\eta = 0,95 \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} (\lambda + \rho)}, \quad (10.95)$$

где  $\rho$  - угол трения, который связан с коэффициентом трения  $f$  простой формулой:  $\operatorname{tg} \rho = f$ . Обычно к.п.д. червячной передачи лежит в пределах  $0,7 \div 0,92$ . Из соотношения (10.95) видно, что к.п.д. передачи возрастает с увеличением числа заходов винтовой нарезки червяка, поскольку при этом увеличивается угол подъема винтовой линии  $\lambda$ . Снижение коэффициента трения  $f$  также способствует увеличению коэффициента полезного действия.

Большие потери на трение вызывают повышенное выделение тепла в червячных передачах. Это приводит к значительному повышению температуры элементов передаче и ухудшению условий их работы. Поэтому основными причинами отказов червячных передач являются износ зубьев червячного колеса, усталостное контактное выкрашивание и заедание зубьев. Расчеты на прочность, износостойкость и противозадирную стойкость червячных передач дополняются тепловыми расчетами. Если тепловыделение в передаче превосходит скорость теплоотвода, то реализуются меры по искусственному охлаждению деталей корпуса (обдув вентилятором, применение циркуляционной системы смазки, подача смазочного материала в зону контакта и т. д.).

## 10.16. Контрольные вопросы

1. Как классифицируются зубчатые передачи по способу расположения осей звеньев? Как называются ведущие и ведомые звенья?
2. Чему равно передаточное отношение в зубчатых передачах?
3. Как может быть получена эвольвента окружности, каковы ее свойства. Чему равны профильные и эвольвентные углы.
4. Назовите основные элементы зубчатого колеса (шаг зацепления, модуль зацепления, делительная и основная окружности зубчатого венца, окружности выступов и впадин, толщина зуба и ширина впадины).
5. Почему зубчатая передача может быть составлена только из колес с одинаковым модулем?
6. Каковы параметры зацепления эвольвентной зубчатой передачи (начальные окружности, делительное межосевое расстояние, рабочие участки профилей зубьев, линия зацепления, ее теоретический и рабочий участки, угол зацепления, дуга зацепления, воспринимаемое смещение)?
7. Как проходит линия зацепления по отношению к сопряженным профилям зубьев? От чего зависит величина рабочего участка линии зацепления?
8. Назовите способы изготовления зубчатых колес. Что такое коэффициент смещения в станочном зацеплении?
9. В чем состоит явление подрезания профилей зубьев в процессе их нарезания? Каково условие отсутствия подрезания?
10. В чем состоит явление интерференции зубьев колеса и шестерни?
11. Составление зубчатых передач (нулевые, положительные и отрицательные колеса; нулевые, положительные и отрицательные передачи, их параметры).
12. Чему равен коэффициент скольжения зубьев? Что он учитывает?
13. Какие параметры являются исходными при проектировании зубчатых передач?
14. Каковы выходные параметры синтеза зубчатых передач?
15. В чем состоят преимущества и недостатки зубчатых передач с косозубыми колесами?
16. Что такое эквивалентные цилиндрические зубчатые колеса?
17. Как составляются червячные передачи? В чем их отличия от зубчатых передач?
18. Чему равно передаточное отношение в червячных передачах?
19. Почему к.п.д. червячных передач существенно ниже, чем в передачах другого типа?

## Глава 11. Кулачковые механизмы

### 11.1. Виды кулачковых механизмов, их структурные и геометрические параметры

Одним из наиболее распространенных передаточных механизмов являются кулачковые механизмы. Они широко применяются в технологических машинах, приборах, системах автоматизации и управления. Кулачковые механизмы можно классифицировать по числу независимых движений кулачка, видам движения кулачка и толкателя, конструктивному выполнению кулачка и наконечника толкателя, по способу замыкания их кинематической пары. Некоторые схемы механизмов приведены на рис. 11.1.

Простейший, плоский кулачковый механизм состоит из трёх звеньев – неподвижной стойки и двух подвижных (кулачка и толкателя), образующих между собой высшую кинематическую пару (пару 4 класса). Элемент стойки, обеспечивающий поступательное (вращательное) перемещение толкателя называют **направляющей**. **Кулачок** представляет собой звено с элементом высшей кинематической пары в виде поверхности переменной кривизны. По форме кулачки бывают дисковыми (рис. 11.1, а – з, л), цилиндрическими (рис. 11.1, м), барабанными (рис. 11.1, н) и пространственными (рис. 11.1, к). Цилиндрические кулачки компактнее дисковых, а кулачки барабанного типа используются для обеспечения больших перемещений толкателя, но могут совершать лишь возвратно-вращательное движение (рис. 11.1, н).

Наиболее часто ведущее звено – кулачок, поворачиваясь на угол  $\varphi$ , совершает равномерное вращательное движение (рис. 11.1, а – з, к – м), а ведомое звено – **толкатель** возвратно-поступательное с линейным перемещением  $S$  (рис. 11.1, а – д, з – к, м), возвратно-вращательное, т.е. качательное, с поворотом на угол  $\theta$  (рис. 11.1, е, ж, и), или плоско-параллельное (рис. 11.1, л). Толкатель, совершающий качательное движение называют **коромыслом**. Поступательное движение кулачка может быть преобразовано как в поступательное, так и во вращательное движение (рис. 11.1, и).

Существуют механизмы, в которых ведущим звеном может являться толкатель, а ведомым кулачок (рис. 11.1, з). Эти механизмы используются, например, для возврата отсчетных устройств приборов в исходное положение. Пространственные кулачки – **коноиды** (рис. 11.1, к) совершают два независимых движения: вращательное и поступательное. Наконечники толкателя или коромысла могут быть плоскими (рис. 11.1, г, ж), остроконечными (рис. 11.1, а, б, к), или снабжены **роликом** (рис. 11.1, в, д, е, з, и, л), который, уменьшая трение между кулачком и толкателем, повышает КПД механизма, снижает износ звеньев. Замыкание кинематической пары

рассматриваемых механизмов может быть силовым (при помощи пружины, грузо-рычажной системы, давления газа и т.д.) или кинематическим, для чего рабочий профиль, по которому перекачивается ролик, выполняют в виде канавки внутри кулачка (рис 11.1 д, н). Если при поступательном движении ось толкателя пересекает ось кулачка (рис. 11.1, а, д, з), то такой механизм называют **центральный**. Если ось толкателя смещена относительно оси кулачка (рис. 1.1, б, в), то механизм называют **смещенным**, или **внецентренным (дезаксиальным)**.

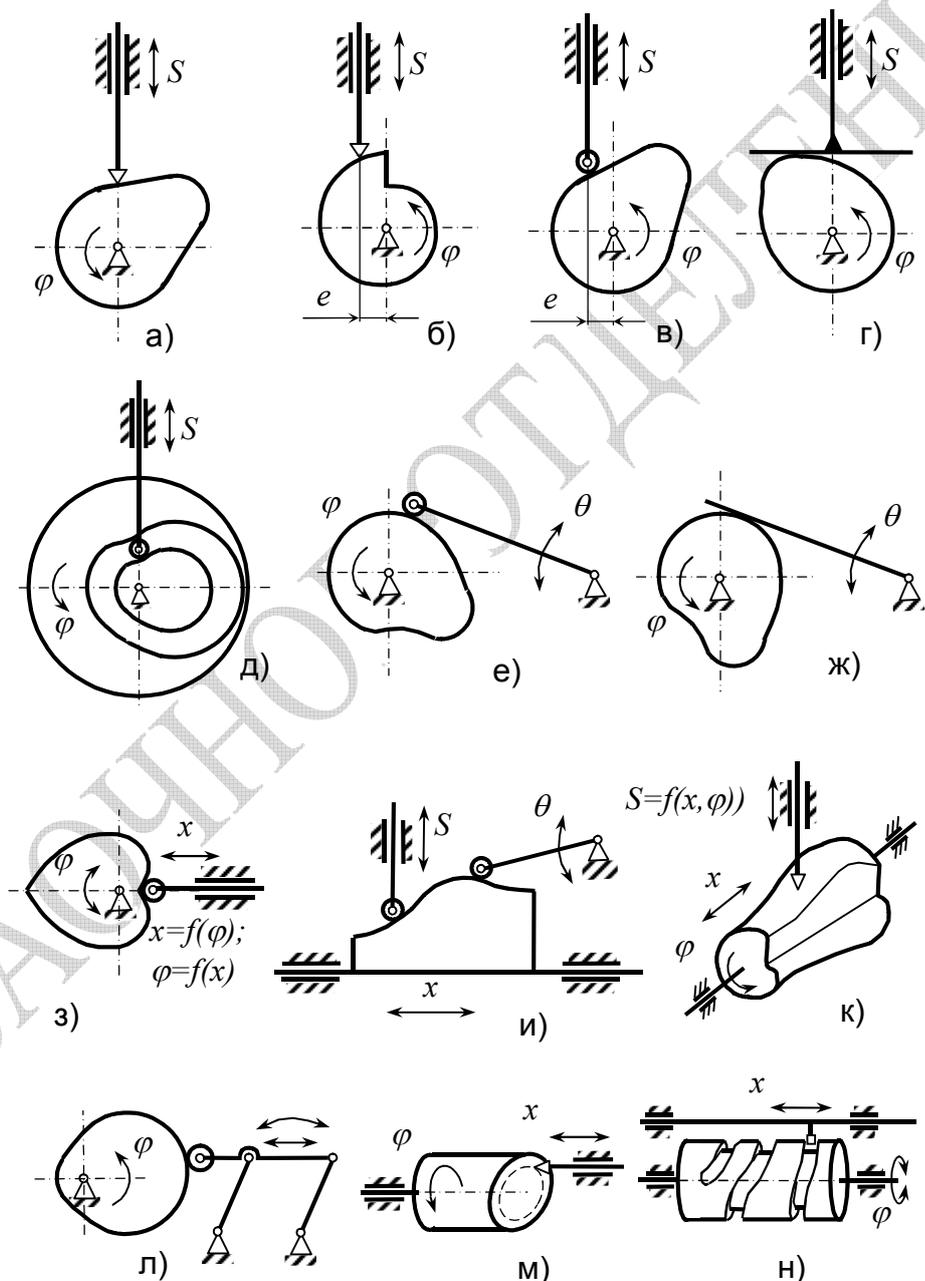


Рисунок 11.1

Рассмотрим работу и основные геометрические параметры типовых кулачковых механизмов на примере конструкции кривошипной таблеточной машины – автомата ТП–1 (рис. 11.2). Машина предназначена для получения таблеток из порошковых материалов. В процессе её работы осуществляются три согласованные по времени операции: дозирование порошка, его прессование в таблетку и выталкивание готовой таблетки. При дозировании над матрицей 1 перемещается бункер-башмак 2 до затвора, из которого в камеру матрицы высыпается определённый объём порошка. Эта операция осуществляется в то время, когда пуансон 3, установленный на ползуне кривошипно-ползунного механизма А, совершает движение над башмаком, а выталкиватель 4 неподвижен. После операции дозирования, башмак, приводимый в движение коромыслом 6 кулачкового механизма В, перемещается в исходное положение и остаётся неподвижным в продолжении двух последующих операций:

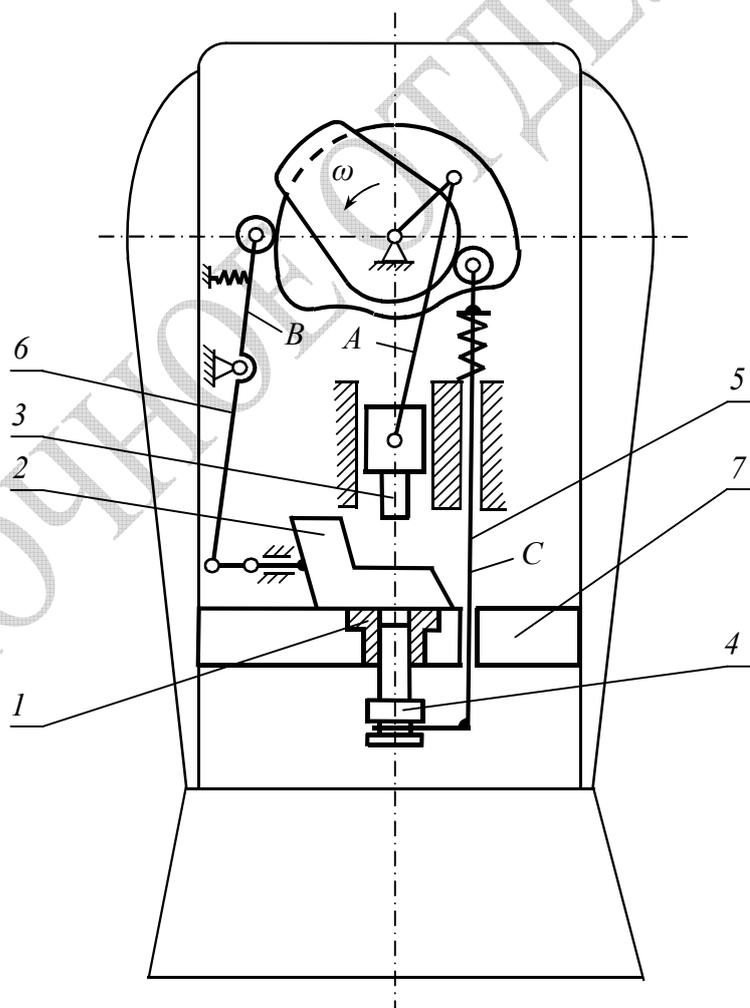


Рисунок 11.2

- прессования таблетки с помощью механизма А;
- выталкивание таблетки с помощью кулачкового механизма С.

Эти операции осуществляются следующим образом:

После прессования при ходе пуансона вверх, начинает двигаться толкатель 5 кулачкового механизма С с выталкивателем 4 таблетки.

Вытолкнутая же из матрицы готовая таблетка сбрасывается со стола 7 машины башмаком дозатора перед засылкой новой порции порошка.

На рис. 11.3 более подробно воспроизведена схема кулачкового

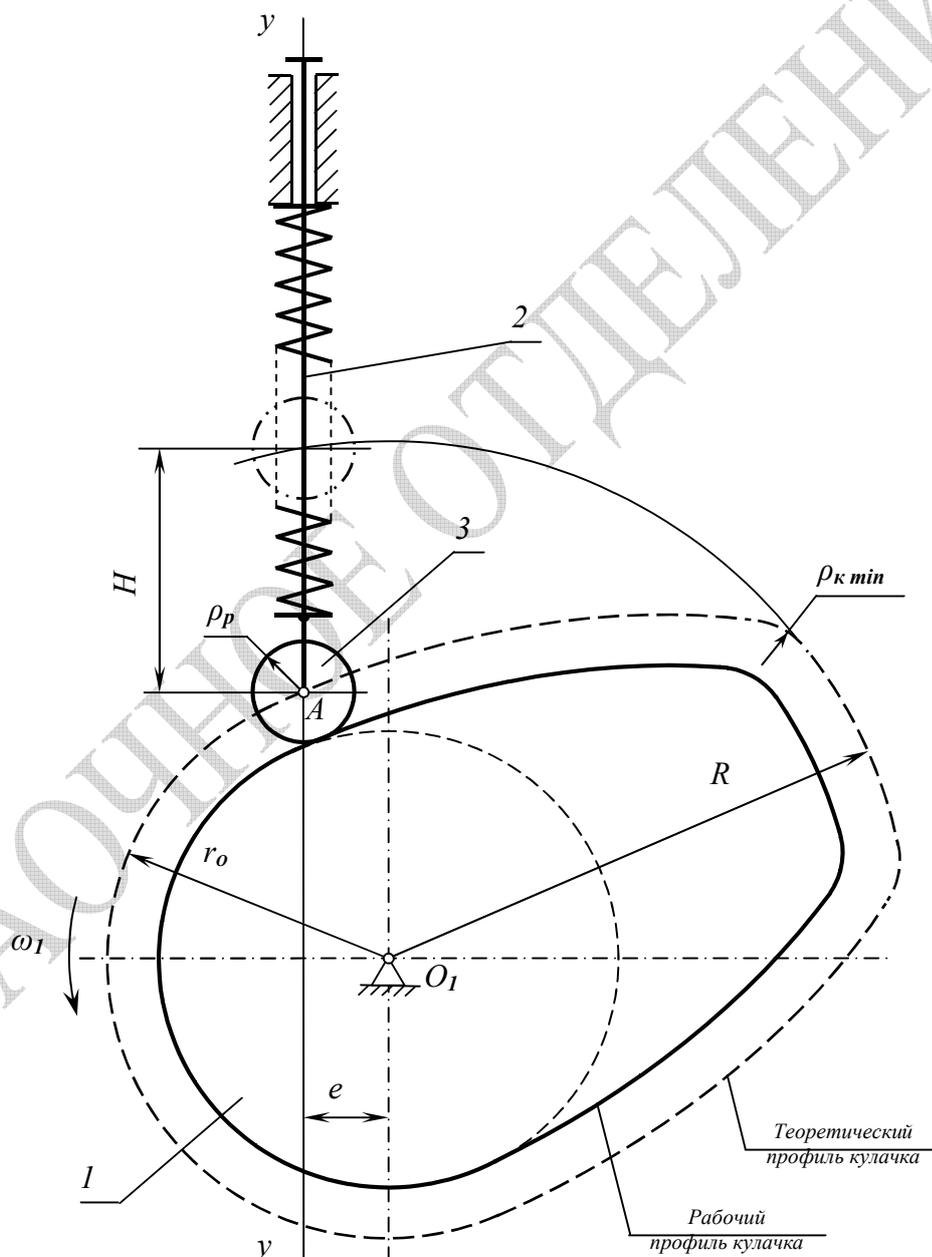


Рисунок 11.3

механизма С. Сплошной линией показан **рабочий профиль** кулачка, т.е. профиль по которому перекачивается ролик, а пунктирной линией показан **теоретический профиль** кулачка, т.е. воображаемый профиль, по которому перемещается центр ролика относительно кулачка.

Очевидно, при отсутствии ролика и так называемом игольчатом толкателе, теоретический и рабочий профили совпадают. Расстояние  $H$  соответствует ходу толкателя в одну сторону. Расстояние  $e$  от линии перемещения толкателя до центра вращения кулачка, называется **эксцентриситетом**.

Основные геометрические параметры кулачкового механизма с игольчатым толкателем воспроизведены на рис. 11.4. и рис. 11.5. На

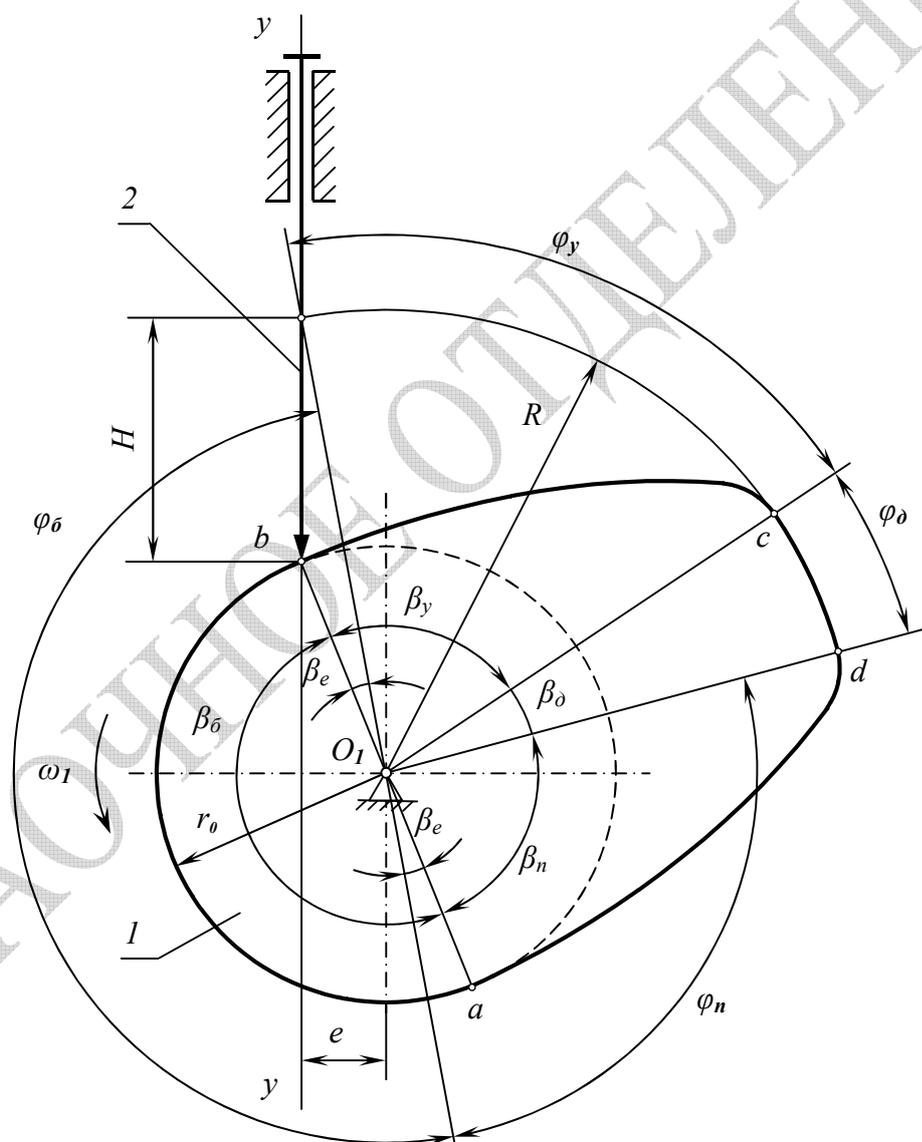


Рисунок 11.4

этих рисунках показаны одинаковые профили и направления вращения кулачка, но оси, которых расположены по разные стороны от линии движения толкателя на расстоянии  $e$ , что приводит к различному положению кулачка в начальной стадии движения толкателя.

Окружность наименьшего радиуса  $r_0$ , которую можно вписать в теоретический профиль кулачка называют **начальной окружностью** или **окружностью начальной шайбы**. Радиус  $r_0$  должен быть таким, чтобы обеспечивалось бы крепление кулачка на валу механизма. При перемещении острия толкателя по участку  $ab$ , описанному радиусом  $r_0$ , сам толкатель остаётся неподвижным в ближнем по отношению к центру кулачка положении. Участки профиля  $bc$  и  $da$ , имеющие переменный радиус, определяют закон движения толкателя на

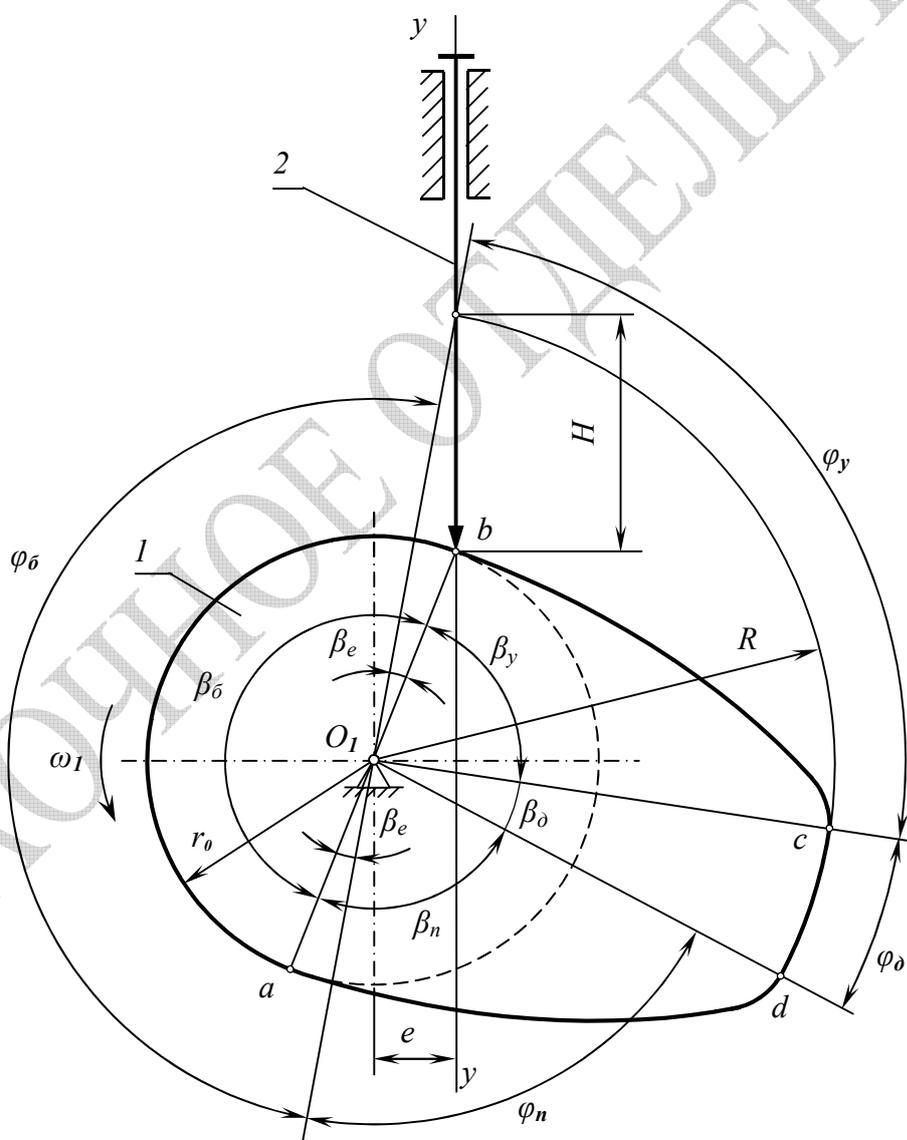


Рисунок 11.5

этих участках и называются, в первом случае, **участком удаления**, а во втором – **участком приближения**. **Окружность максимального радиуса  $R$** , вписанная в теоретический профиль кулачка, очерчивает участок **дальнего стояния**. При перемещении острия толкателя по этому участку профиля кулачка толкатель остается неподвижным в крайнем дальнем положении от центра кулачка.

Каждому участку профиля соответствуют **центральные профильные углы** кулачка, которые определяют его форму и размеры и являются разметочными углами при изготовлении ( $\beta_6, \beta_y, \beta_d, \beta_n$ ).

Продолжительность той или иной фазы в цикле работы механизма определяется **фазовыми углами**  $\varphi_y, \varphi_d, \varphi_n, \varphi_6$ . На рис. 11.4. и рис. 11.5  $\varphi_y$  – угол поворота кулачка на участке удаления толкателя (**угол удаления**),  $\varphi_d$  – угол поворота кулачка, при котором толкатель остается неподвижным на наибольшем удалении от центра вращения кулачка (**угол дальнего стояния**),  $\varphi_n$  – угол поворота кулачка на участке приближения толкателя (**угол приближения**),  $\varphi_6$  – угол поворота кулачка, при котором толкатель остается неподвижным на наименьшем удалении от центра вращения кулачка (**угол ближнего стояния**). Сумма фазовых углов равна  $2\pi$ .

Следует отметить, что углы  $\beta_6$  и  $\varphi_6$ , а также  $\beta_d$  и  $\varphi_d$  всегда совпадают по величине, а углы  $\beta_y$  и  $\varphi_y$ , а также  $\beta_n$  и  $\varphi_n$  совпадают только для механизмов, у которых эксцентриситет  $e = 0$ . Так для механизмов, изображенных на рис. 11.4 и 11.5, имеем:

$$\beta_y = \varphi_y \pm \beta_e \quad \text{и} \quad \beta_n = \varphi_n \mp \beta_e, \quad (11.1)$$

где  $\beta_e$  – так называемый **угол эксцентриситета**.

Соотношение между  $\varphi_y$  и  $\beta_y$ , и между  $\varphi_n$  и  $\beta_n$  меняются в зависимости от расположения эксцентриситета  $e$  слева (верхние знаки) или справа (нижние знаки) от оси вращения кулачка.

Из анализа рис. 11.4. и рис. 11.5 получают соотношения для параметров, необходимых для аналитического расчета кулачков

$$\beta_e = \arccos \frac{e}{R} - \arccos \frac{e}{r_o}, \quad (11.2)$$

$$R = \sqrt{\left(\sqrt{r_o^2 - e^2} + H\right)^2 + e^2}. \quad (11.3)$$

## 11.2. Силовой анализ кулачковых механизмов

Минимальные размеры кулачкового механизма при заданной высоте подъёма (ходе) толкателя  $H$  определяются размером  $r_o$  – радиусом начальной окружности кулачка (рис. 11.3 – 11.5). В свою очередь её минимальный радиус находится из условия работы толкателя без заклинивания в направляющих, т.е. в стойке механизма. Причины возможного заклинивания устанавливают путем *силового анализа* кулачкового механизма, причем, силами тяжести, инерции, силами трения между роликом и кулачком, кулачком и стойкой, как правило, можно пренебречь.

Рассмотрим поступательно движущийся толкатель в некотором положении на фазе его подъёма (рис. 11.6). В этом положении на толкатель со стороны кулачка будет действовать некоторая сила  $F_n$ , направленная по нормали к профилю кулачка в точке  $A$  его касания с толкателем. Эту силу можно разложить по двум направлениям: вдоль линии движения толкателя  $y$ -у  $F_d$  (продольная сила) и перпендикулярно ей  $F_m$  (поперечная сила):

$$F_d = F_n \cdot \cos \vartheta_A \quad (11.4)$$

$$F_m = F_n \cdot \sin \vartheta_A . \quad (11.5)$$

Продольная сила  $F_d$  будет являться непосредственно движущей для толкателя. Поперечная сила  $F_m$ , вызывая перекося толкатель в направляющих, создаёт в точках его касания с направляющими силы реакции  $R_1$  и  $R_2$  и, соответственно, силы трения  $F_1$  и  $F_2$ , которые вместе с силой полезного сопротивления  $F_{nc}$ , приложенной к толкателю, составляют силу сопротивления, препятствующую движению. Может оказаться, что эта сила сопротивления  $F_c$  будет больше движущей, т.е.

$$F_c = F_{nc} + F_1 + F_2 > F_d . \quad (11.6)$$

Тогда движение толкателя становится невозможным – происходит его заклинивание в направляющих. Соотношение между силами  $F_c$  и  $F_d$ , очевидно, зависит от величины угла  $\vartheta_A$ , который называют **углом давления** кулачка на толкатель в точке  $A$ . *Угол давления – это угол между направлением действия силы на толкатель (направлением нормали к профилю кулачка в месте его касания с толкателем) и направлением движения толкателя.* Таким образом, это угол между вектором силы, действующей на толкатель, и вектором скорости перемещения толкателя.

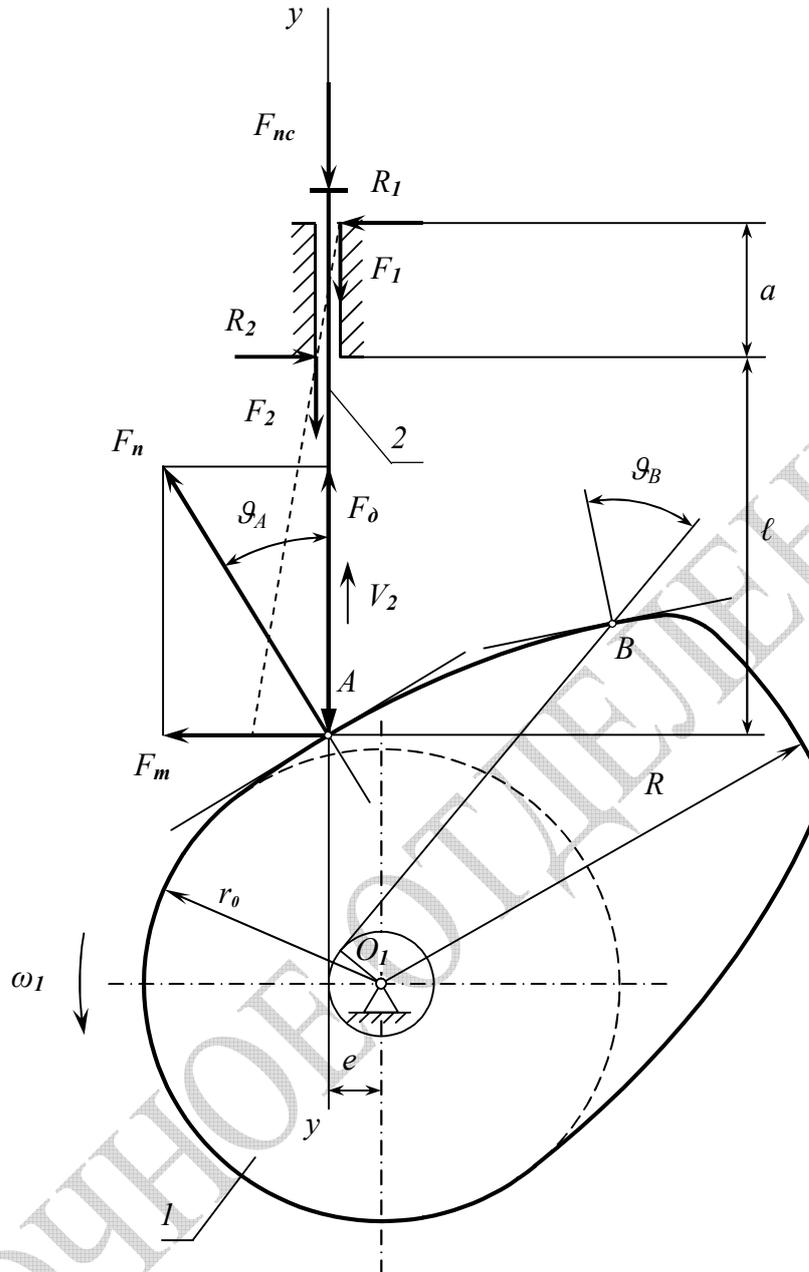


Рисунок 11.6

В различных точках контакта кулачка и толкателя угол давления также будет различным. На рис. 11.6 показаны углы давления для точек  $A$  и  $B$  профиля кулачка (линия движения толкателя в любом положении относительно кулачка остаётся касательной к окружности радиуса  $e$  эксцентриситета).

Остановимся более подробно на силовом анализе механизма. Зависимости для определения реакций  $R_1$  и  $R_2$  получают из уравнений равновесия моментов сил, действующих на толкатель относительно точек приложения сил  $R_1$  и  $R_2$ :

$$R_2 = F_m (1 + l/a) = F_n \cdot \sin \vartheta_A (1 + l/a), \quad (11.7)$$

$$R_1 = F_m (l/a) = F_n \cdot \sin \vartheta_A (l/a). \quad (11.8)$$

Тогда суммарная сила трения в направляющих равна:

$$F_{mp} = F_1 + F_2 = f(R_1 + R_2) = F_n \cdot \sin \vartheta_A f (1 + 2l/a), \quad (11.9)$$

где  $f$  – коэффициент трения толкателя в направляющих.

Зависимость для силы полезного сопротивления получают, рассматривая проекции всех сил на ось  $y-y$

$$F_{nc} = F_\partial - F_{mp} = F_n \cdot \cos \vartheta_A - F_n \cdot \sin \vartheta_A f (1 + 2l/a). \quad (11.10)$$

При заклинивании механизма в направляющих мгновенное значение коэффициента полезного действия ( $\eta$ ) механизма равно нулю, т.е.

$$\begin{aligned} \eta &= A_{nc}/A_{\partial\partial} = F_{nc} ds / F_\partial ds = \\ &= \frac{F_n \cos \vartheta_A - F_n \sin \vartheta_A f (1 + 2l/a)}{F_n \cos \vartheta_A} = 1 - \operatorname{tg} \vartheta_A f (1 + 2l/a) = 0, \end{aligned} \quad (11.11)$$

где  $A_{nc}$  и  $A_{\partial\partial}$  – соответственно работа сил полезного сопротивления и работа движущих сил на элементарном перемещении толкателя  $ds$ .

Таким образом, из последнего выражения можно получить зависимость для расчета максимального угла давления, принимая в качестве длины  $l$  максимальное значение длины консоли толкателя проектируемого механизма

$$\vartheta_{A(max)} = \operatorname{arctg}(1 / (f(1 + 2l/a))). \quad (11.12)$$

Очевидно, условием работы кулачкового механизма без заклинивания будет ограничение угла давления по величине для всех точек контакта профиля кулачка с толкателем. При этом практикой для механизмов с поступательно движущимся толкателем (с учетом коэффициента запаса) установлено допустимое значение предельного угла давления равное:

$$[\vartheta_{max}] = 35^\circ.$$

С целью повышения коэффициента полезного действия механизма в каждом конкретном случае допускаемые значения углов давления могут быть взяты и меньшими. При конструировании механизма стараются уменьшить трение в направляющих толкателя, например, за счет применения в нем подшипников качения, что повышает КПД механизма без увеличения его габаритов.

Угол давления важнейший параметр, определяющий работоспособность кулачкового механизма, – величина переменная, зависящая от размеров и формы кулачка. Форма кулачка определяет такие характеристики движения, как перемещение, скорость и ускорение толкателя.

Рассмотрим схему механизма с вращающимся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  кулачком и поступательно движущимся толкателем (рис. 11.7). Толкатель и кулачок в некоторый момент соприкасаются в точке  $A$  (в этот момент совпадают точки  $A_1$  кулачка и  $A_2$  толкателя).

Введем понятие **аналога скорости**  $S'_A$  и **аналога ускорения**  $S''_A$  толкателя. Понятие аналогов скорости и ускорения удобно тем, что они имеют геометрическую интерпретацию и измеряются в единицах длины. С этими характеристиками могут производиться математические численные операции, когда ни значения скорости, ни ускорения неизвестны.

Скорость  $V_{A_2}$  и ускорение  $a_{A_2}$  линейного перемещения  $S_A$  толкателя в дифференциальном виде представим следующим образом:

$$V_{A_2} = \frac{dS_A}{dt} = \frac{dS_A}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{dS_A}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = S'_A \omega, \quad (11.13)$$

$$a_{A_2} = \frac{d^2 S_A}{dt^2} = \frac{d^2 S_A}{dt^2} \frac{d\varphi^2}{d\varphi^2} = \frac{d^2 S_A}{d\varphi^2} \frac{d\varphi^2}{dt^2} = S''_A \omega^2. \quad (11.14)$$

Таким образом, выражения для аналога скорости и аналога ускорения имеют следующий вид:

$$S'_A = \frac{dS_A}{d\varphi} = \frac{V_{A_2}}{\omega}, \quad (11.15)$$

$$S''_A = \frac{d^2 S_A}{d\varphi^2} = \frac{a_{A_2}}{\omega^2}. \quad (11.16)$$

Для определения скорости точки  $A_2$  можно написать следующее векторное уравнение:

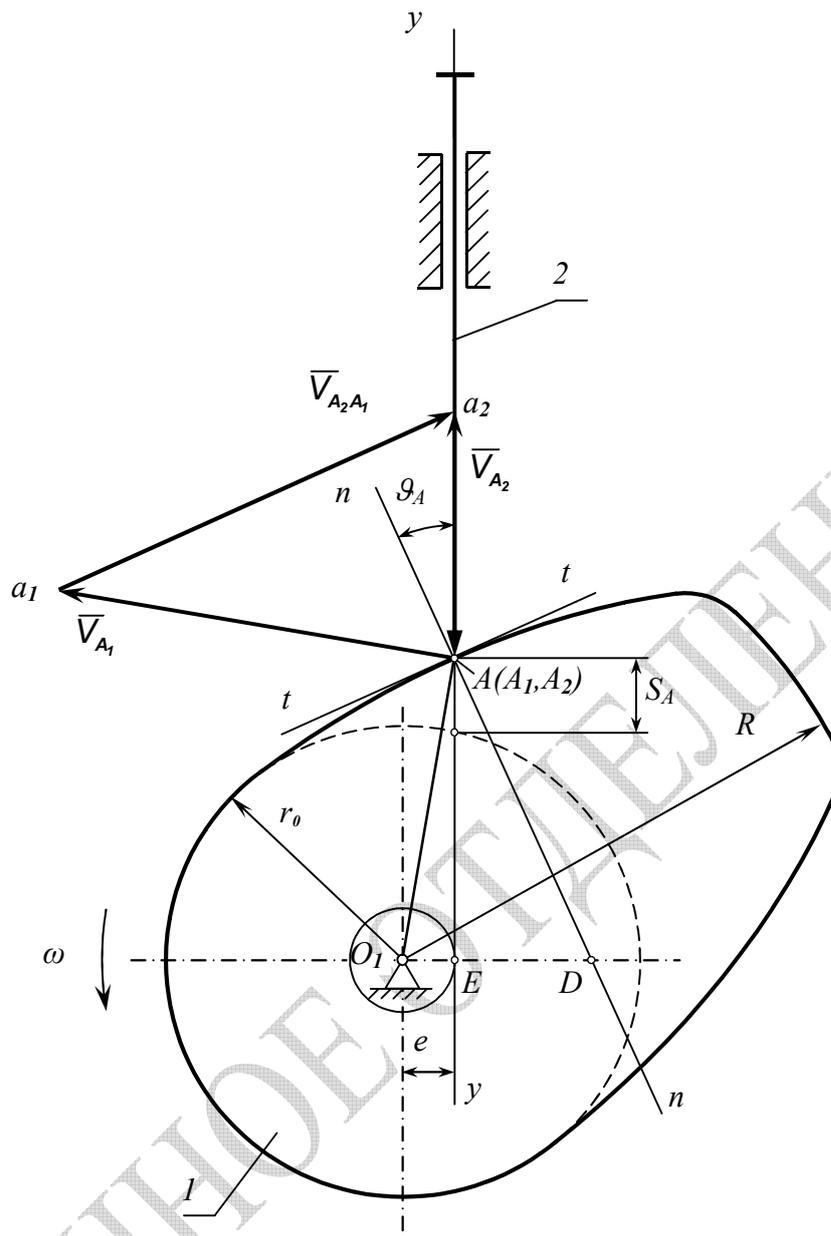


Рисунок 11.7

$$\mathbf{V}_{A_2} = \mathbf{V}_{A_1} + \mathbf{V}_{A_2A_1}, \quad (11.17)$$

здесь  $\mathbf{V}_{A_2}$  – абсолютная скорость точки  $A_2$  толкателя;

$\mathbf{V}_{A_1} = \mathbf{O_1A} \omega$  – скорость точки  $A_2$  в переносном вращательном движении вместе с точкой  $A_1$  кулачка, направлена перпендикулярно радиусу  $O_1A$  в сторону вращения  $\omega$ ;

$V_{A_2A_1}$  – скорость точки  $A_2$  в движении относительно точки  $A_1$  кулачка, т.е. это скорость скольжения точки  $A_2$  толкателя вдоль поверхности кулачка.

Скорость скольжения направлена вдоль касательной  $t-t$  к профилю кулачка в точке  $A$  (в противном случае точка  $A_2$  врезалась бы в профиль кулачка или отстала от него).

Из схемы (рис. 11.7) видно, что треугольники  $O_1AD$  и  $Aa_1a_2$ , имеющие взаимно перпендикулярные стороны, подобны. Отсюда следует, что

$$\frac{V_{A_1}}{O_1A} = \frac{V_{A_2}}{O_1D} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{V_{A_2}}{O_1D}.$$

Таким образом, отрезок  $O_1D$  равен аналогу скорости

$$O_1D = \frac{V_{A_2}}{\omega} = S'_A. \quad (11.18)$$

Из прямоугольного треугольника  $EAD$  получим выражение для тангенса угла давления

$$\operatorname{tg} \vartheta_A = \frac{O_1D - O_1E}{AE} = \frac{S'_A - e}{S_A + \sqrt{r_o^2 - e^2}}. \quad (11.19)$$

Из анализа этого выражения следует, что с увеличением радиуса начальной окружности  $r_o$  величина  $\operatorname{tg} \vartheta_A$  убывает, и КПД механизма (11.11) увеличивается. Оптимальным решением при заданных параметрах  $r_o$  и  $e$  будет такое, при котором выходные параметры синтеза (в данном случае габаритные размеры механизма) окажутся наименьшими. Следовательно, математическая модель оптимизации может быть записана в следующей форме:

$$\vartheta_A = \operatorname{arctg} \frac{S'_A - e}{S_A + \sqrt{r_o^2 - e^2}} \leq [\vartheta_{\max}]. \quad (11.20)$$

Данная зависимость, объединяет все геометрические параметры кулачка ( $S_A$ ,  $r_o$ ), геометрический параметр механизма ( $e$ ), кинематический параметр ( $S'_A$ ), силовые параметры механизма (углы давления  $\vartheta_A$  и предельные углы давления на участке удаления  $\vartheta_{y_{\max}}$  и приближения  $\vartheta_{n_{\max}}$ ). Зависимость (11.20) является основой при

решении одной из задач синтеза: определения области значений радиуса  $r_0$  начальной окружности кулачка и эксцентриситета  $e$  толкателя, при которых отсутствует заклинивание толкателя в направляющих. Эту задачу называют также **определением центра вращения кулачка**. Решение данной задачи позволяет спроектировать кулачковый механизм минимальных размеров.

### 11.3. Проектирование кулачкового механизма

При проектировании кулачкового механизма решаются следующие задачи, необходимые для последующего конструирования:

- выбор схемы механизма и закона движения кулачка;
- выбор закона движения толкателя;
- определение кинематических параметров кулачкового механизма;
- определение центра вращения кулачка;
- построение профиля кулачка.

При решении первых двух задач формируются исходные данные для синтеза механизма (**входные параметры синтеза**). Последние три задачи собственно и представляют собой синтез кулачкового механизма, который базируется на зависимостях, полученных при анализе механизма.

**Схема кулачкового механизма** определяется назначением и условиями работы данного механизма в технологическом агрегате или приборе.

**Закон движения толкателя** выбирается с учетом тех функций, которые должен выполнять механизм:

- воспроизведение заданного закона движения рабочих звеньев технологического агрегата;
- обеспечения заданного перемещения рабочих звеньев технологического агрегата за определенный промежуток времени.

В первом случае задаются ход толкателя  $H$ , и закон его движения в виде одной из следующих функций: перемещения  $S = f(\varphi)$ , скорости  $V = f(\varphi)$  или ускорения  $a = f(\varphi)$ . Поскольку параметры  $S = f(\varphi)$ ,  $V = f(\varphi)$  (или  $S'_A = f(\varphi)$ ),  $a = f(\varphi)$  (или  $S''_A = f(\varphi)$ ) связаны дифференциальными зависимостями, то задается какая-либо одна функция, остальные получают интегрированием или дифференцированием. Операции интегрирования (дифференцирования) выполняются аналитически (численно) при проектировании точных механизмов, когда закон движения задан математической функцией. Графический метод используют в тех случаях, когда закон движения задан в виде графиков, таблиц, а также при расчете кулачков, выполняющих вспомогательные операции (например, кулачки тормозных устройств и т. д.).

Во втором случае задается ход толкателя  $H$ , а закон выбирается конструктором исходя из обеспечения наиболее благоприятных

условий работы механизма. Из всех возможных законов движения целесообразным представляется закон, который обеспечивает лучшие условия работы. Чаще всего оптимальным будет закон с наименьшим значением максимального ускорения, так как снижение ускорения при прочих равных условиях приводит к уменьшению сил инерции, к уменьшению реакции в кинематических парах, а также к уменьшению расхода энергии при работе механизма.

На рис. 11.8 в качестве примера для кулачковых механизмов различного назначения приведены типовые законы движения толкателя в виде аналитических зависимостей аналога ускорения толкателя:  $S''_A = f(\varphi)$ . Здесь  $\varphi_y$  – угол удаления,  $\varphi_d$  – угол дальнего стояния,  $\varphi_n$  – угол приближения,  $\varphi_b$  – угол ближнего стояния.

**Равноускоренный закон** (рис. 11.8, а) имеет ступенчатый характер изменения ускорения. В точках  $O, a, b, c, d, e$  при мгновенном изменении ускорения так же мгновенно изменяется и сила инерции, действующая на толкатель. Следовательно, при работе механизма будут иметь место удары.

**Линейно-убывающий закон** (рис. 11.8, б) и **косинусоидальный закон** (рис. 11.8, в), имея разный характер, сопровождаются мгновенным изменением ускорений и, соответственно, сил инерции только в начале и в конце фазы удаления, в начале и в конце фазы приближения.

**Синусоидальный закон** (рис. 11.8, в) характеризуется плавным изменением ускорения толкателя, удары отсутствуют.

Из сравнения приведённых законов следует, что с точки зрения снижения инерционных нагрузок оптимальным является закон с плавным изменением ускорения, например синусоидальный закон или при определённых условиях закон косинуса ( $\varphi_d = \varphi_b = 0$  и  $\varphi_y = \varphi_n$ ). Такой выбор закона движения справедлив для быстроходных механизмов, в которых инерционные нагрузки значительны. В других случаях выбор закона движения диктуется иными причинами, например, в ряде случаев требуется резкое изменение скорости движения рабочего звена машины, или же необходимо движение с постоянной скоростью толкателя (кулачок с профилем спирали Архимеда рис. 11.1, б), или же реализуется движение с постоянным углом давления  $\vartheta$  (кулачок с профилем логарифмической спирали рис. 11.1, д). Закон изменения ускорения может быть полиномиальным, трапециидальным и т. д. Закон движения может включать в себя несколько фаз **выстоя**, т.е. фаз при которых толкатель не перемещается.

Кинематические параметры кулачкового механизма в виде диаграмм аналога скорости  $S'_A = f(\varphi)$  и перемещения  $S = f(\varphi)$  толкателя, необходимые для решения задач синтеза кулачкового механизма, получают интегрированием заданных на фазах удаления и

приближения законов изменения аналога ускорения  $S''_A = f(\varphi)$  толкателя.

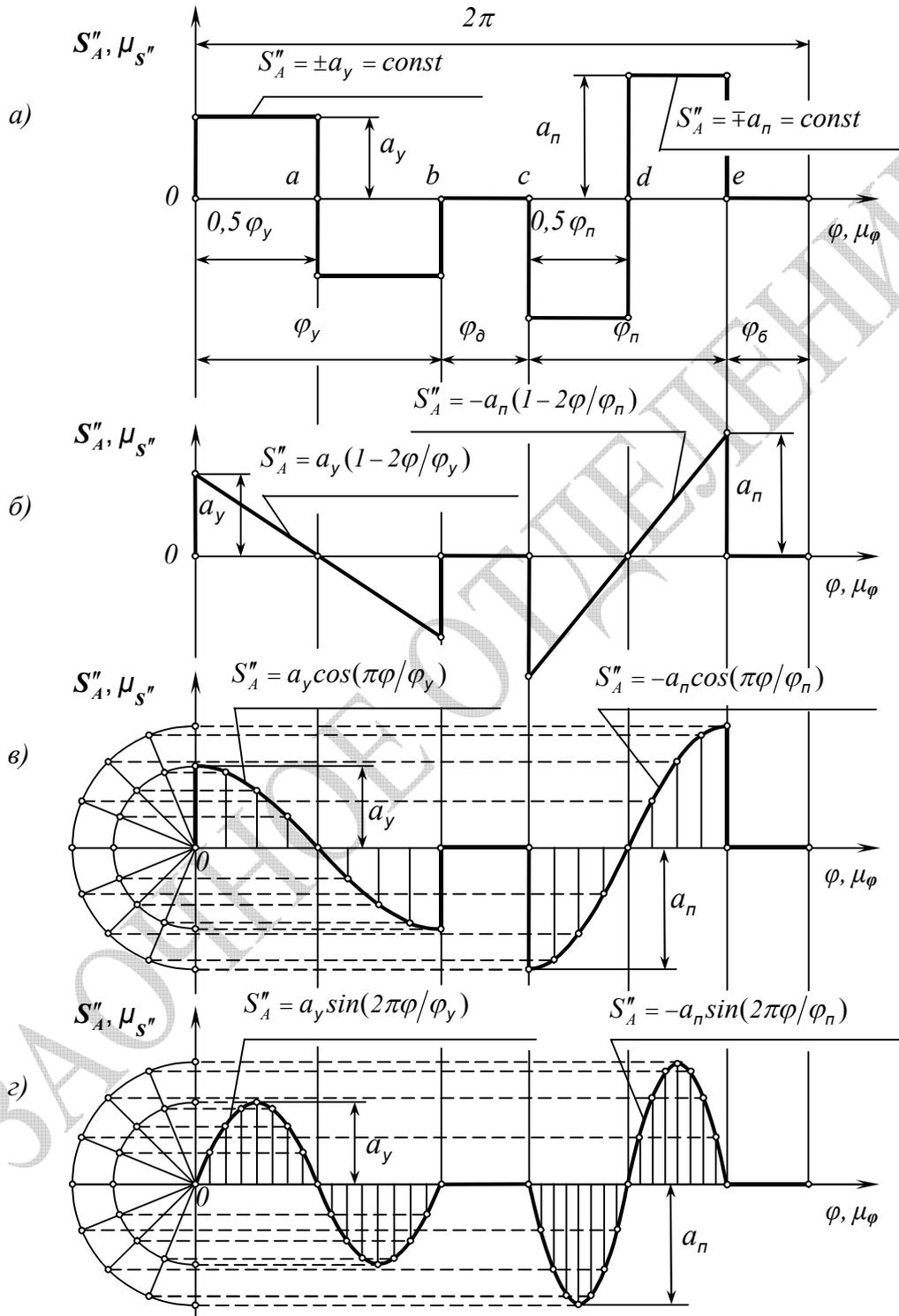


Рисунок 11.8

Рассмотрим пример построения диаграмм движения толкателя  $S'_A = f(\varphi)$  и  $S = f(\varphi)$ , если аналог ускорения на участке удаления и приближения задан в виде синусоидального закона (рис. 11.9). Для всех диаграмм устанавливают единый масштабный коэффициент  $\mu_\varphi$  (рад/мм) для угла поворота кулачка. Поскольку масштабы графиков по оси ординат для всех построений ( $S''_A = f(\varphi)$ ,  $S'_A = f(\varphi)$ ,  $S_A = f(\varphi)$ ) определяются лишь после их завершения, то, для зависимости  $S''_A = f(\varphi)$  максимальное значение ординаты аналога ускорения на фазе удаления  $a_y$  выбирается произвольно. Для получения в пределах каждой диаграммы одинакового масштаба по оси ординат для всех фаз движения, максимальную ординату аналога ускорения на фазе приближения  $a_n$  вычисляют по формуле:

$$a_n = ka_y \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_n} \right)^2, \quad (11.21)$$

где  $k$  – коэффициент, учитывающий сочетание законов движения на фазах удаления и приближения (см. табл.).

Таблица. – Определение коэффициента  $k$

Закон движения толкателя на фазе удаления	Закон движения толкателя на фазе приближения			
	равноускоренный	линейно-убывающий	синусоидальный	косинусоидальный
равноускоренный	1	3/2	$\pi/2$	$\pi^2/8$
линейно-убывающий	2/3	1	$\pi/3$	$\pi^2/12$
синусоидальный	2/ $\pi$	3/ $\pi$	1	$\pi/4$
косинусоидальный	8/ $\pi^2$	12/ $\pi^2$	4/ $\pi$	1

Необходимость согласования ординат  $a_y$  и  $a_n$  объясняется тем, что они определяют величину площади под кривыми диаграмм аналогов ускорения на участках удаления и приближения, т.е. данные площади – интегралы, в виде функции  $S''_A = f(\varphi)$ . В результате двукратного интегрирования функции  $S''_A = f(\varphi)$  определяются максимальные значения ординат  $S_{A \max}$ , которые пропорциональны соответствующим площадям, как на участке удаления, так и на участке приближения. При этом они должны быть одинаковыми и соответствовать в масштабе максимальному ходу толкателя  $H$ , т.е. должно выполняться соотношение:

$$S_{A_{max}} = \int_0^{\varphi_y} \int_0^{\varphi_y} S''_{Ay} d\varphi d\varphi = \int_0^{\varphi_n} \int_0^{\varphi_n} S''_{An} d\varphi d\varphi,$$

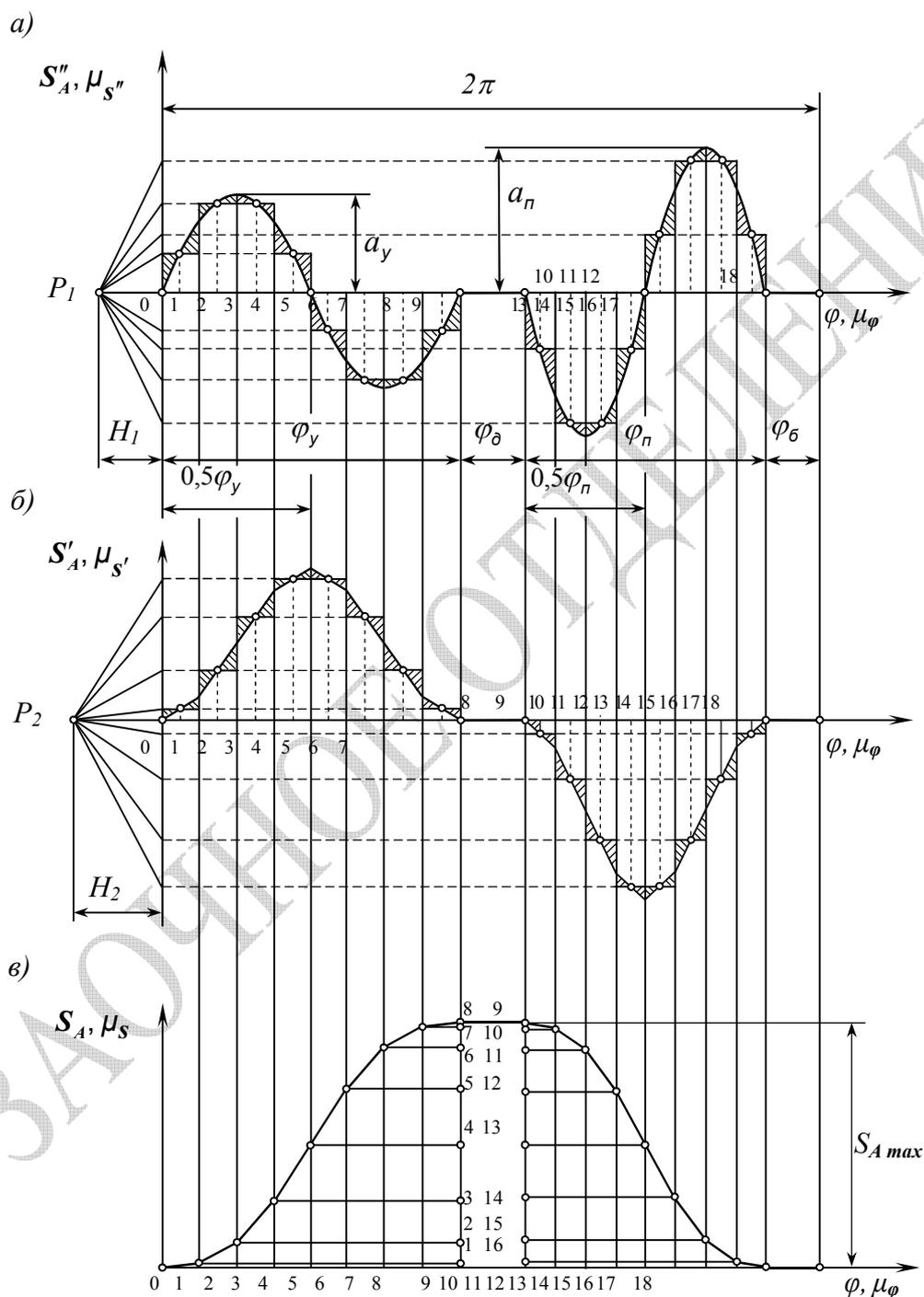


Рисунок 11.9

где  $S''_{Ay}$ ,  $S''_{An}$  – аналоги ускорений на участках удаления и приближения. Если предварительное согласование масштабов

диаграмм произвести не удастся, например, из-за того, что законы движения отличаются от приведенных в таблице, то для участков удаления и приближения масштабы на каждой диаграмме окажутся разными. Это обстоятельство не мешает решению задач синтеза.

Графическое интегрирование построенной зависимости  $S''_A = f(\varphi)$ , выполняют в следующем порядке:

1). График  $S''_A = f(\varphi)$  разбивается на восемь равных интервалов: 0-1, 1-2 и т. д. на фазе удаления и аналогично на фазе приближения; кривая заменяется ступенчатой аппроксимацией так, чтобы площади криволинейных трапеций были бы равны площадям прямоугольников (рис. 11.9, а). При этом обычно высота каждого прямоугольника принимается равной **ординате** проведенной из середины интервала до пересечения с кривой.

2). Точки пересечения ординат с кривой в виде **горизонталей** переносятся на вертикальную ось графика  $S''_A = f(\varphi)$ .

3). На оси абсцисс диаграммы  $S''_A = f(\varphi)$  отмечается точка  $P_1$  на расстоянии  $H_1$  (30 – 50 мм) от начала координат. Эта точка соединяется с точками пересечения горизонталей с вертикальной осью. В результате получают пучок лучей, исходящих из точки  $P_1$ .

4). В координатной системе  $S'_A = f(\varphi)$  на каждом интервале (0-1, 1-2 и т. д.) проводятся отрезки прямых параллельно соответствующим лучам на диаграмме  $S''_A = f(\varphi)$ , так чтобы начало последующего отрезка совпадало с концом предыдущего. Построенная ломаная линия (в пределе – кривая) в графической форме представляет собой диаграмму  $S'_A = f(\varphi)$  (рис. 11.9, б).

5). Аналогично, интегрируя кривую  $S'_A = f(\varphi)$ , строят диаграмму перемещения толкателя  $S_A = f(\varphi)$  (рис. 11.9, в). Причем, для получения одинаковых, хотя пока еще и неизвестных по величине, масштабных коэффициентов  $\mu_S = \mu_{S'}$  расстояние  $H_2$  от начала координат до точки  $P_2$  определяют по соотношению полученному из (11.24):

$$H_2 = \frac{I}{\mu_\varphi}. \quad (11.22)$$

6). При заданном ходе толкателя  $H$  вычисляются масштабные коэффициенты всех трех построенных графиков по следующим формулам:

$$\mu_S = \frac{H}{S_{A_{max}}}, \quad \left[ \frac{MM}{MM} \right] \quad (11.23)$$

$$\mu_{S'} = \frac{\mu_S}{H_2 \mu_\varphi}, \quad \left[ \frac{\text{мм}}{\text{рад} \cdot \text{мм}} \right] \quad (11.24)$$

$$\mu_{S''} = \frac{\mu_{S'}}{H_1 \mu_\varphi}, \quad \left[ \frac{\text{мм}}{\text{рад}^2 \cdot \text{мм}} \right]. \quad (11.25)$$

Масштабные коэффициенты используются для вычисления значений перемещения толкателя  $S_A$ , аналогов скоростей  $S'_A$  и аналогов ускорений  $S''_A$  в соответствии с произведенной разметкой. В свою очередь значения  $S'_A$ ,  $S''_A$  служат для определения скоростей и ускорений толкателя по формулам (11.13), (11.14).

Определение центра вращения кулачка сводится к графическому или численному решению уравнения (11.20) с построением диаграммы  $S'_A = f(S_A)$ , на которой выделяется геометрическая область, где может находиться искомый центр. По положению центра вращения кулачка относительно начала координат диаграммы  $S'_A = f(S_A)$  определяют такие значения радиуса  $r_0$  начальной окружности кулачка и эксцентриситета  $e$  толкателя, при которых отсутствует заклинивание толкателя в направляющих. При выборе минимально возможного радиуса начальной окружности  $r_0$  кулачка габариты всего механизма также становятся наименьшими.

Для графического решения уравнения (11.17) необходимо наличие двух графиков  $S_A = f(\varphi)$  и  $S'_A = f(\varphi)$ . Точки разметок на диаграммах  $S_A = f(\varphi)$  и  $S'_A = f(\varphi)$  соответствуют последовательному ряду значений угла поворота кулачка, как на участке удаления, так и на участке приближения. График  $S'_A = f(S_A)$  (рис. 11.10) получают путём графического исключения параметра  $\varphi$  из двух предыдущих графиков.

Для построения зависимости  $S'_A = f(S_A)$  первоначально проводятся оси абсцисс ( $S'_A$ ) и ординат ( $S_A$ ), устанавливают единый масштабный коэффициент  $\mu_S = \mu_{S'}$ . На оси ординат ( $S_A$ ) в пределах максимального перемещения  $S_{Amax}$  выполняют разметку положений точки  $A$  толкателя (0, 1, 2, ... 8) на участке удаления и (10, 11, 12, ... 16) на участке приближения соответствующих диаграмме  $S_A = f(\varphi)$ . Значения  $S'_A$ , соответствующие по разметке значениям  $S_A$ , на участке удаления откладываются в сторону вращения кулачка, а на участке приближения – наоборот. Отрезки, соответствующие значениям  $S'_A$ , откладываются на линиях проведенных перпендикулярно оси ординат

Полученные точки соединяются плавной замкнутой кривой. Для наглядности указанные построения выполнены при вращении кулачка

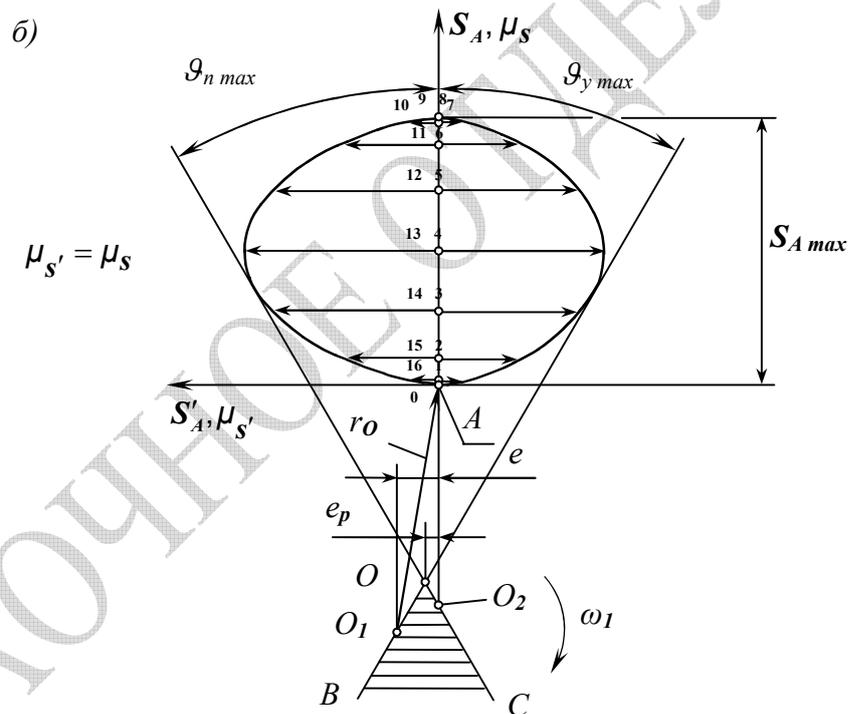
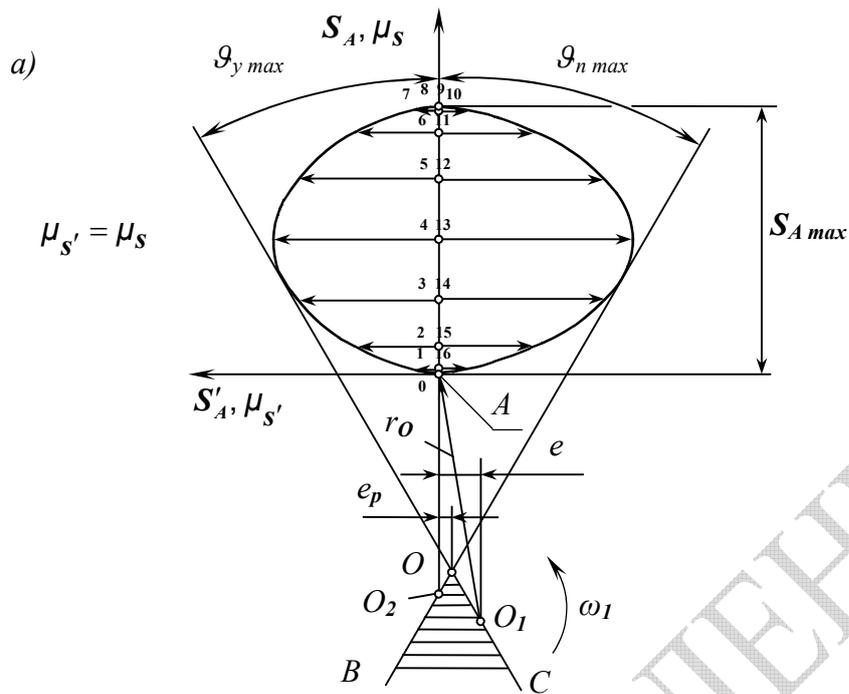


Рисунок 11.10

против часовой стрелки (рис. 11.10, а) и в обратном направлении (рис. 11.10, б).

К полученной замкнутой кривой под углами  $G_{y \max}$  и  $G_{n \max}$  проводятся касательные до пересечения в точке  $O$ . Ниже пересечения штриховкой выделяют область  $BOC$ , которая является областью возможного положения центра вращения кулачка. Центр

кулачка может находиться в любом месте заштрихованной области, и при этом перемещения толкателя не будут сопровождаться заклиниванием в направляющих. Для обеспечения минимальных габаритов механизма центр вращения располагают на границе области, т.е. на отрезке  $BO$  или  $CO$ .

При проектировании механизма эксцентриситет может быть заранее задан ( $e = 0$ , или  $e \neq 0$ ) или же не определен. В последнем случае, принимая в качестве центра вращения точку  $O$  (рис. 11.10), находят наименьший радиус начальной окружности  $r_o$  кулачка, который пропорционален отрезку  $OA$  ( $r_o = OA \cdot \mu_S$ ), и расчетный эксцентриситет  $e_p$ . Если по заданию на проектирование эксцентриситет отсутствует ( $e = 0$ ), то центр вращения располагается на оси ординат диаграммы в точке  $O_2$ . В этом случае радиус  $r_o$  (отрезок  $O_2A$ ) оказывается больше, чем в предыдущем варианте. Если же в задании эксцентриситет определен, то на диаграмме центр вращения располагают в точке  $O_1$  правее (рис. 11.10, а) или левее (рис. 11.10, б) оси ординат на величину эксцентриситета  $e$  так, чтобы радиус  $r_o$  (отрезок  $O_1A$ ) оказывался бы минимально возможным при заданном эксцентриситете.

Построение профиля кулачка, т.е. его **профилирование** проводят с использованием метода **инверсии** (**метода обращённого движения**). Всему кулачковому механизму сообщается угловая скорость  $\omega'_1$ , равная угловой скорости кулачка, но обратно ей направленная. В таком обращённом движении кулачок становится неподвижным, а стойка вместе с направляющей толкателя будет вращаться вокруг неподвижного кулачка с угловой скоростью  $\omega'_1$ . В итоге толкатель будет совершать сложное движение, вращаясь вместе со стойкой и одновременно совершая собственное поступательное движение относительно неё, т.е. вдоль направляющей.

Если для каждого положения стойки (направляющей толкателя) в обращённом движении знать положение острия толкателя, а для толкателей с роликом – центра ролика, т.е. точки  $A$ , то геометрическое место таких точек определит **теоретический профиль** кулачка. Положение точки  $A$  однозначно определяется ранее найденными параметрами  $S_A = f(\varphi)$ ,  $r_o$ ,  $e$ .

Построение профиля кулачка (рис. 11.11 и 11.12) выполняется в произвольно выбранном масштабе  $\mu_l$  (или используется масштаб  $\mu_l = \mu_S$  диаграммы  $S_A = f(\varphi)$ ) в следующем порядке:

- 1). Вычерчивается начальная окружность радиусом  $r_o$  и на расстоянии расчетного или заданного эксцентриситета  $e$  от её центра проводится линия  $y-y$ . Точкой  $A$  отмечается их пересечение.



точками 1, 2, 3 и т.д. на то же число частей, на которое фазовые углы разбиты на диаграмме движения  $S_A = f(\varphi)$ .

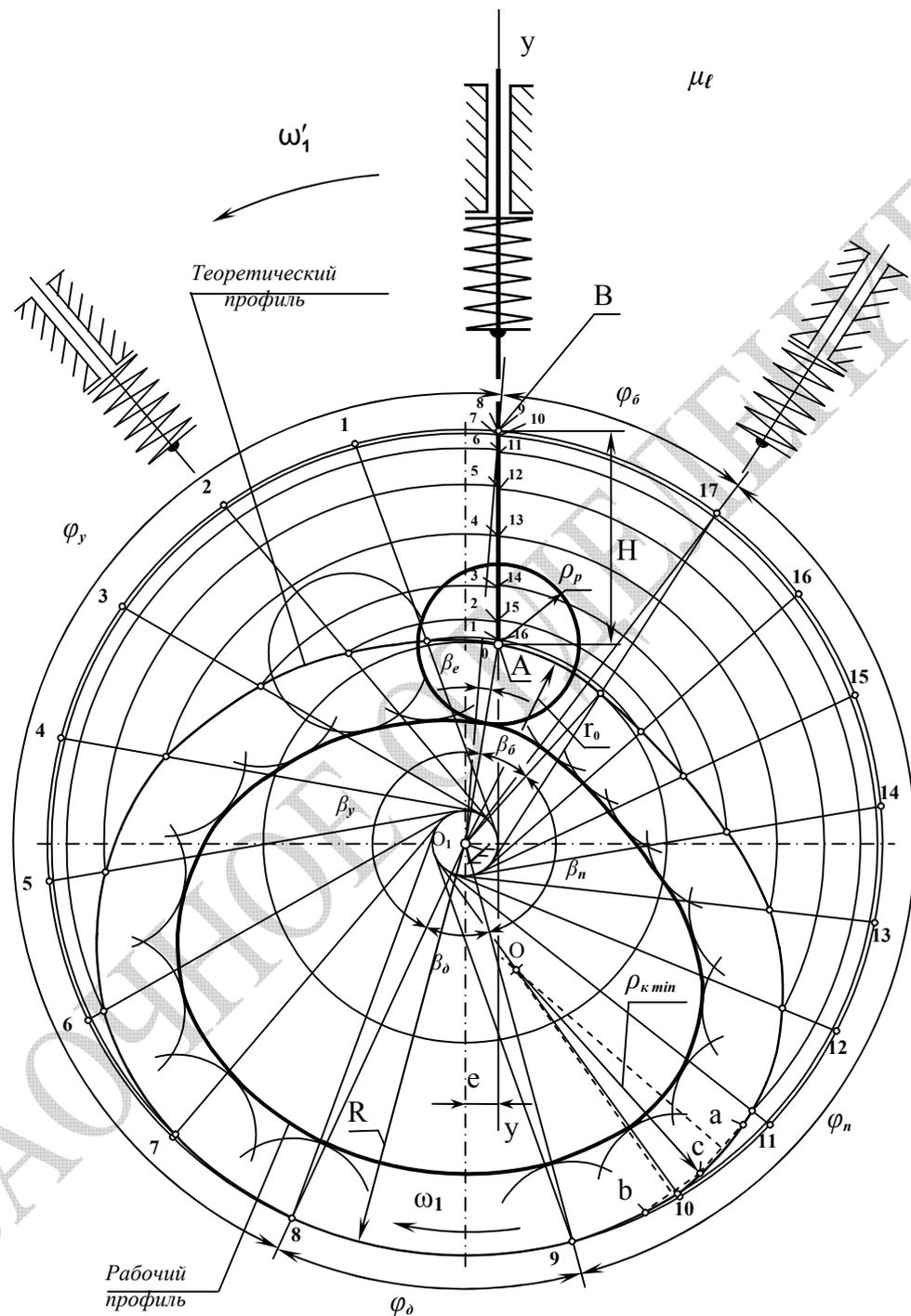


Рисунок 11.12

4). Из центра кулачка  $O_1$  описывается окружность радиусом, равным эксцентриситету  $e$ , а из точек 1, 2, 3... проводятся к этой окружности касательные. Они представляют ряд последовательных

положений линии движения толкателя в обращённом движении механизма.

5). На каждой  $i$ -ой касательной, изображающей положения толкателя в обращенном движении, отмечаются  $i$ -е положения точки  $A$  толкателя в соответствии с диаграммой  $S_A = f(\varphi)$ . Для этого радиусами равными расстоянию от  $O_1$  до точек 1, 2, 3, отмеченных на отрезке  $AB$ , проводятся дуги до пересечения с соответствующими  $i$ -ми касательными. Соединив полученные точки плавной кривой, получают теоретический профиль кулачка.

Построение профиля кулачка завершается вычерчиванием рабочего профиля. **Рабочий профиль кулачка** – профиль, по которому перекачивается ролик толкателя. Этот профиль – **эквидистанта**, т.е. кривая равноудаленная от теоретического профиля на величину радиуса ролика. Рабочий профиль – внутренняя огибающая к семейству окружностей радиусом ролика  $\rho_p$ , центром которых является теоретический профиль кулачка (рис. 11.11 и 11.12).

Если радиус ролика  $\rho_p$  в задании отсутствует, то его выбирают из двух условий:

$$\rho_p \leq \min \{ 0,4r_o; 0,7\rho_{k \min} \}, \quad (11.26)$$

где  $\rho_{k \min}$  – минимальный радиус кривизны профиля кулачка (в местах с наибольшей кривизной).

Для нахождения величины  $\rho_{k \min}$  предварительно на выпуклой части теоретического профиля кулачка визуально определяется участок наибольшей кривизны и на нем отмечается точка  $c$  (рис. 11.11, 11.12). В границах этого участка из точки  $c$  проводятся две хорды равной длины  $ac$  и  $cb$ , из середин которых восстанавливаются перпендикуляры. Точка пересечения этих перпендикуляров  $O$  – центр кривизны профиля. Длина отрезка  $Oc$  – искомый радиус кривизны  $\rho_{k \min}$  в точке  $O$ .

В заключение сформулируем последовательность синтеза кулачкового механизма. Исходными данными являются: Схема механизма; закон движения кулачка (величина и направление угловой скорости); закон движения толкателя  $a = f(\varphi)$ , фазовые углы  $\varphi_y$ ,  $\varphi_{\partial}$ ,  $\varphi_n$ , ход толкателя  $H$ ; предельные значения углов давления на участке удаления толкателя  $\vartheta_{y \max}$  и его приближения  $\vartheta_n \max$ .

Проектирование механизма включает следующие этапы:

1. Построение диаграммы закона движения толкателя в виде изменение аналога ускорения толкателя в зависимости от угла поворота кулачка  $S''_A = f(\varphi)$ .

2. Построение методом графического интегрирования диаграммы изменения аналога скорости толкателя от угла поворота кулачка  $S'_A = f(\varphi)$ .

3. Построение повторным графическим интегрированием диаграммы перемещения толкателя в зависимости от угла поворота кулачка  $S_A = f(\varphi)$ .

4. Определение масштабных коэффициентов построенных графиков  $S_A = f(\varphi)$ ,  $S'_A = f(\varphi)$ ,  $S''_A = f(\varphi)$ .

5. Вычерчивание диаграммы  $S'_A = f(S_A)$  и определение минимального радиуса начальной окружности из условия незаклинивания толкателя в направляющих.

6. Вычерчивание теоретического профиля кулачка.

7. Определение радиуса ролика.

8. Вычерчивание рабочего профиля кулачка.

9. Оформление схемы кулачкового механизма – т.е. дополнение построения профиля кулачка изображением ролика, направляющих, пружины для исходного положения толкателя.

10. Составление таблицы исходных и расчетных параметров механизма с указанием угловой скорости кулачка, фазовых углов, хода толкателя, минимального и максимального радиусов кулачка, предельных углов давления на фазах удаления и приближения толкателя, эксцентриситета, радиуса ролика, эксцентриситетных и профильных углов кулачка, минимального радиуса кривизны кулачка.

11. Составление таблицы кинематических параметров движения толкателя, в которой для каждого из фиксированных углов поворота кулачка указывают значения перемещений, аналогов и самих скоростей и ускорений толкателя.

#### 11.4. Контрольные вопросы

1. Назовите основные элементы кулачка и кулачкового механизма.
2. Укажите назначение кулачковых механизмов.
3. Перечислите признаки, по которым классифицируются кулачковые механизмы. Приведите примеры.
4. Рассчитайте число степеней свободы кулачкового механизма с остроконечным толкателем и механизма с толкателем оснащенным роликом. Объясните физический смысл результатов расчета.
5. Назовите основные группы законов движения толкателя и приведите их сравнения.
6. Дайте определение фазовым углам.

7. Для чего используются профильные углы?
8. Дайте формулировку угла давления.
9. Покажите угол давления для произвольного положения толкателя.
10. Что называется предельным углом давления?
11. Как габариты кулачкового механизма влияют на его КПД?
12. Какая существует взаимосвязь между углом давления, начальным радиусом кулачка и величиной эксцентриситета?
13. Напишите выражения для аналогов скорости и ускорения.
14. Какова последовательность проектирования кулачкового механизма?
15. Объясните графическое построение при определении начального радиуса кулачка.
16. Объясните порядок построения профиля кулачка центрального кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.
17. В чём заключается сущность метода обращённого движения?
18. Что называется теоретическим и рабочим профилем кулачка?
19. Как определяется характер движения толкателя в любой момент времени путём использования построенных диаграмм движения?

## Глава 12. Варианты контрольных заданий, методика и примеры их решения

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Техническая механика» студенты должны выполнить и защитить шесть контрольных работ. Защита каждой контрольной работы проводится в форме собеседования, в результате которого преподаватель должен убедиться в том, что студент удовлетворительно усвоил материал соответствующей темы. Контрольные работы посвящены следующим темам:

- контрольная работа № 1 – «Статика»;
- контрольная работа № 2 – «Кинематика»;
- контрольная работа № 3 – «Динамика»;
- контрольная работа № 4 – «Кинетический анализ плоского рычажного механизма»;
- контрольная работа № 5 – «Кинетостатический анализ плоского рычажного механизма»;
- контрольная работа № 6 – «Динамический анализ механизма».

Задание по каждой контрольной работе включает две части: расчетную схему и численные значения исходных данных. Расчетные схемы представлены в виде рисунков, исходные данные – в виде числовых таблиц. Номер задания для конкретного студента определяется преподавателем.

В оформленном виде каждая контрольная работа состоит из пояснительной записки и графической части. В пояснительной записке приводятся все вычисления и построения по каждой из задач, входящих в задание. Кратко излагаются комментарии и пояснения к вычислениям. На титульном листе пояснительной записки необходимо указать название федерального агентства, института, кафедры, тему контрольной работы, номер варианта задания. Кроме того, здесь же приводятся фамилии и инициалы студента - автора работы.

Графическая часть представляет собой чертежи, выполненные на листах формата А3. На чертежах должны быть приведены расчетные схемы с обязательным указанием численных значений и направления заданных внешних нагрузок и опорных реакций. Под расчетной схемой приводятся конечные результаты в виде эпюр, построений или графиков. Графические построения должны выполняться с соблюдением масштаба.

Ниже для каждой контрольной работы из раздела «Теоретическая механика» после вариантов расчетных схем и таблицы исходных данных приведен пример решения аналогичного задания, который может служить в качестве некоторого образчика ее выполнения. Для заданий из раздела «Теория механизмов и машин» подробно изложена методика их выполнения со ссылками на соответствующие

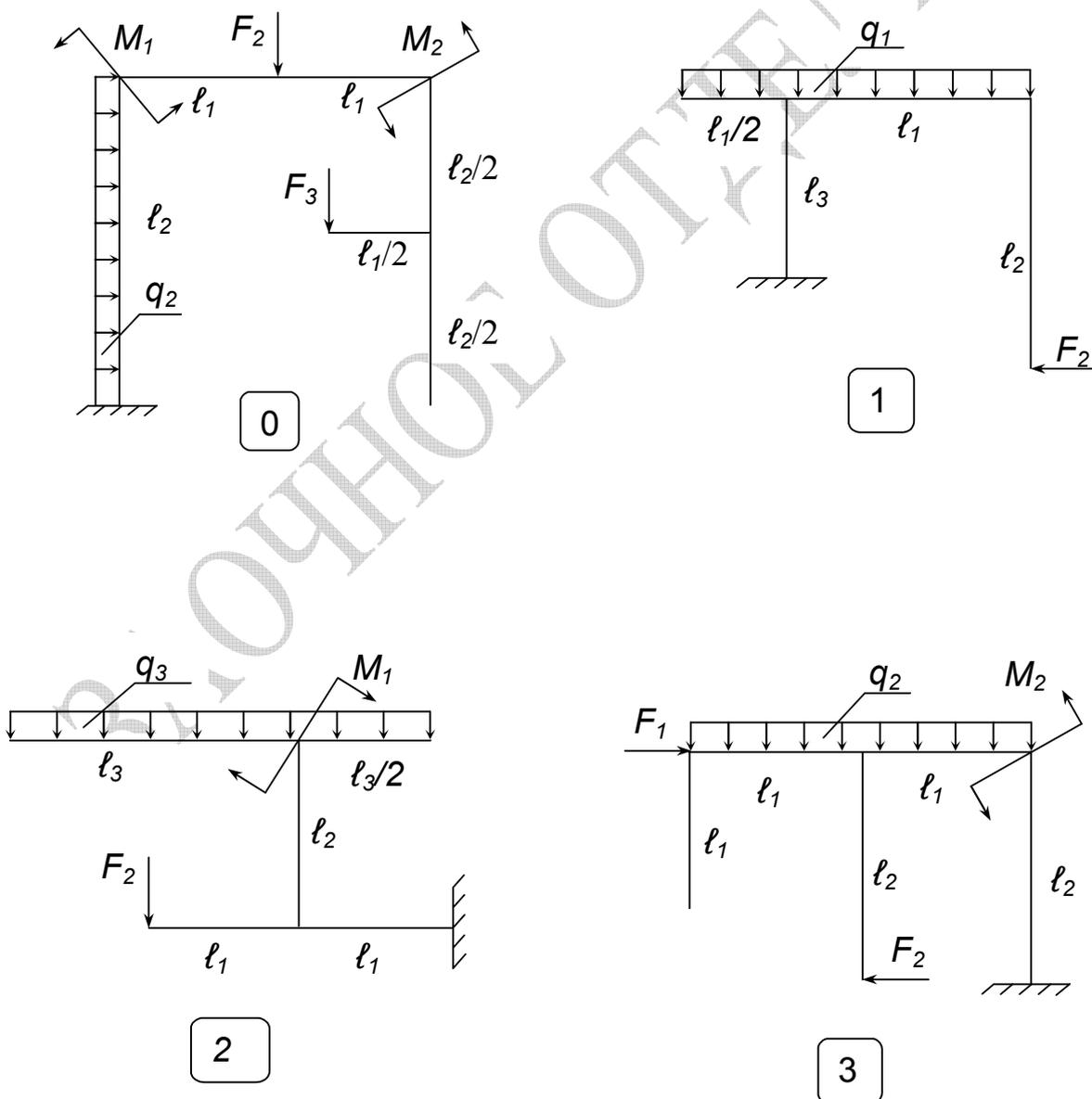
параграфы настоящего пособия. Примеры численного решения заданий и графических построений при анализе механизмов разбираются на практических занятиях.

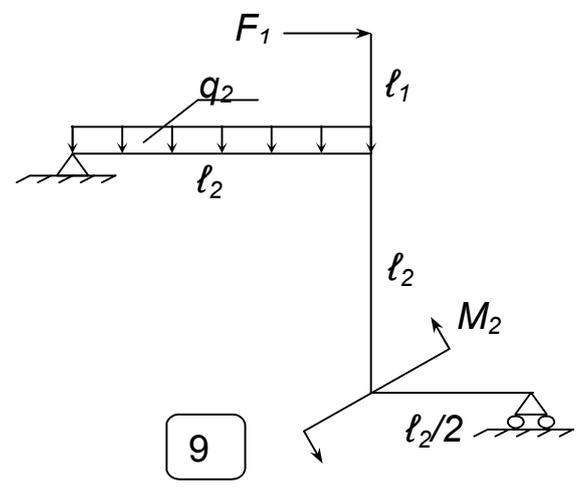
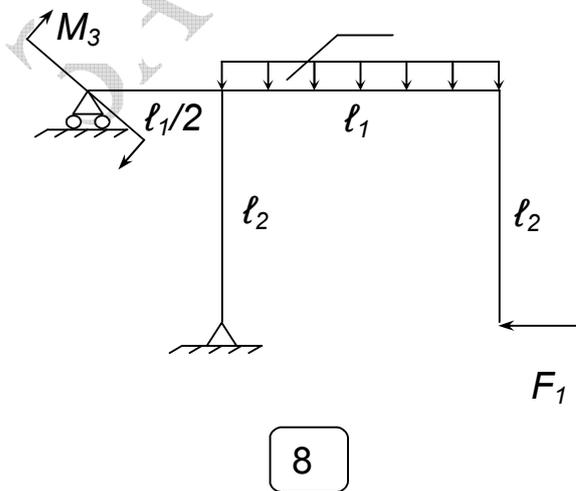
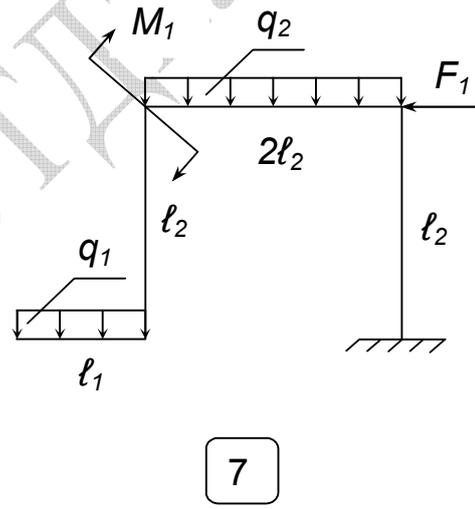
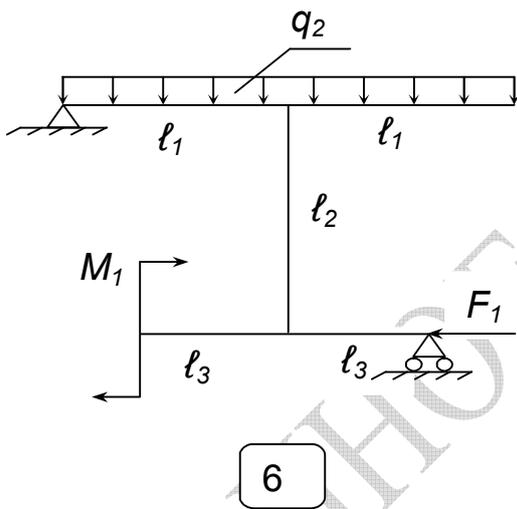
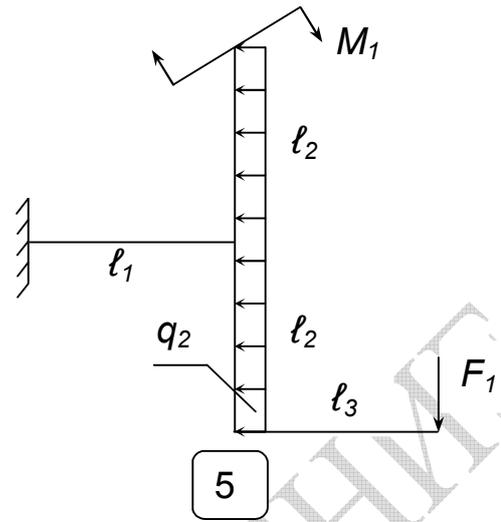
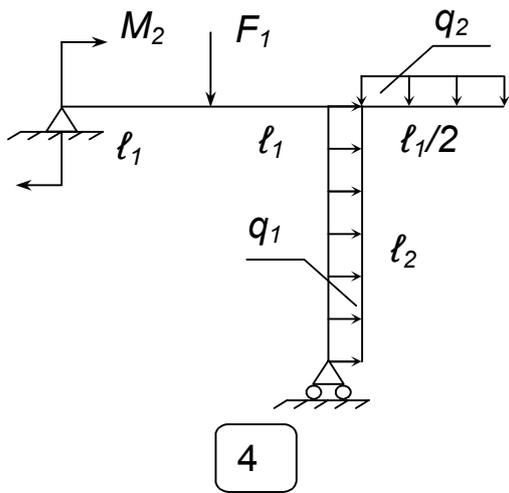
### Контрольная работа № 1.

#### Статика

Для статически определимых рам, представленных на расчетных схемах, определить реакции опор.

#### Расчетные схемы





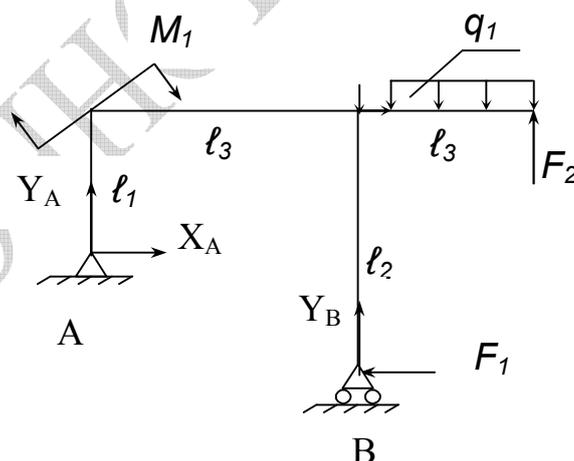
## Исходные данные

Номер варианта	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$F_3$ , кН	$M_1$ , кН	$M_2$ , кН	$M_3$ , кН	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$l_3$ , м
0	40	30	20	10	30	20	20	40	60	2,5	3	1,5
1	20	10	30	40	20	30	30	50	20	1	2	1
2	20	30	20	40	30	20	30	50	10	3	4	2
3	40	20	20	60	50	30	20	40	30	3	5	3
4	30	40	20	50	30	60	20	50	10	2	4	2
5	30	50	20	20	40	60	40	20	40	2	4	1
6	30	50	40	40	20	40	20	20	40	2	5	2
7	30	50	10	60	40	20	40	20	20	2	5	1
8	30	50	5	60	20	60	20	40	20	2	4	2
9	30	50	20	40	20	60	10	20	40	2	5	2

В графической части привести расчетную схему рамы с указанием направления и численного значения опорных реакций.

### Пример решения.

Определим опорные реакции для статически определимой рамы, представленной на рисунке.



**Исходные данные:**  $F_1 = 20$  кН;  $F_2 = 30$  кН;  $q_1 = 40$  кН/м;  $M_1 = 30$  кН·м;  $l_1 = 2$  м;  $l_2 = 4$  м;  $l_3 = 3$  м.

**Решение.** В шарнирно-неподвижной опоре (опора А) реакция опоры будет иметь две составляющие (см. подраздел 1.2.): горизонтальную  $X_A$  и вертикальную  $Y_A$ . В шарнирно-подвижной опоре

(опора В) реакция опоры будет иметь только вертикальную составляющую  $Y_B$ . Отмечаем искомые реакции на расчетной схеме.

Составим уравнения равновесия рамы в форме условий (1.9). По силам в проекциях на горизонтальную ось:

$$X_A - F_1 = 0,$$

откуда  $X_A = 20$  кН. По моментам относительно опоры А:

$$M_1 - F_2 \cdot 2 l_3 + F_1 \cdot (l_2 - l_1) + q_1 l_3 \cdot 1.5 l_3 - Y_B \cdot l_3 = 0.$$

Подставив численные значения усилий и длин грузовых участков, получаем  $Y_B = 143.33$  кН.

По моментам относительно опоры В:

$$M_1 - F_2 \cdot l_3 + q_1 l_3 \cdot 0.5 l_3 + X_A \cdot (l_2 - l_1) + Y_A \cdot l_3 = 0.$$

После подстановки численных значений получаем  $Y_A = -53.33$  кН.

**Проверка.** Используя найденные значения опорных реакций, составим уравнение равновесия по силам в проекциях на вертикальную ось:

$$Y_A + Y_B + F_2 - q_1 l_3 = -53.33 + 143.33 + 30 - 120 = 0.$$

Как и должно быть в соответствии с условиями равновесия, получили ноль.

**Ответ.**  $X_A = 20$  кН (направление как на рисунке);  $Y_A = 53.33$  кН (направление, противоположное показанному на рисунке);  $Y_B = 143.33$  кН (направление как на рисунке).

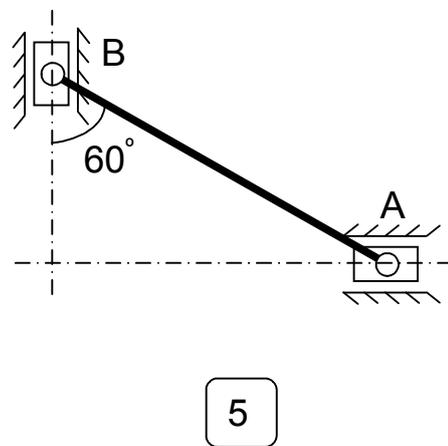
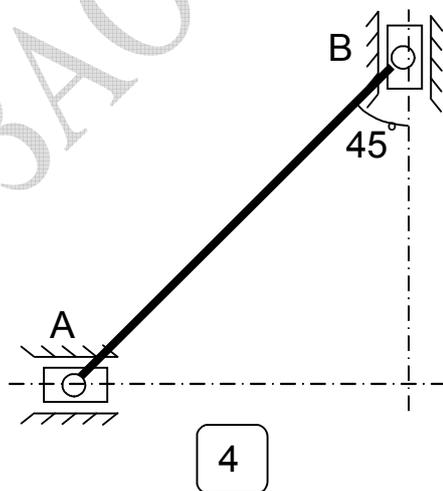
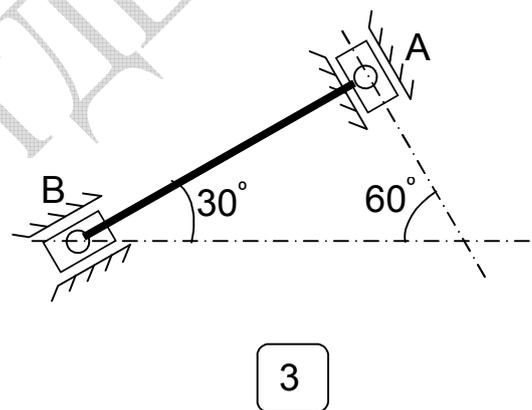
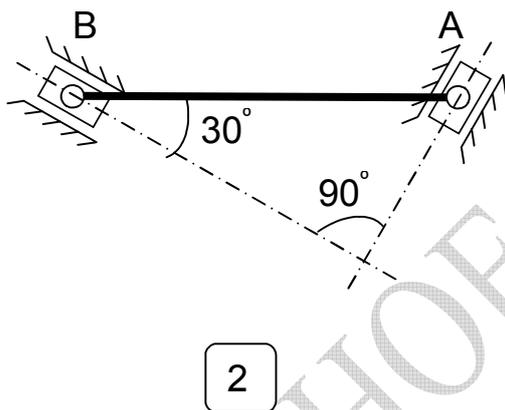
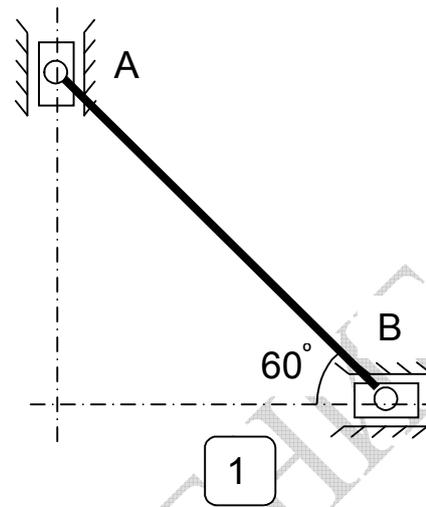
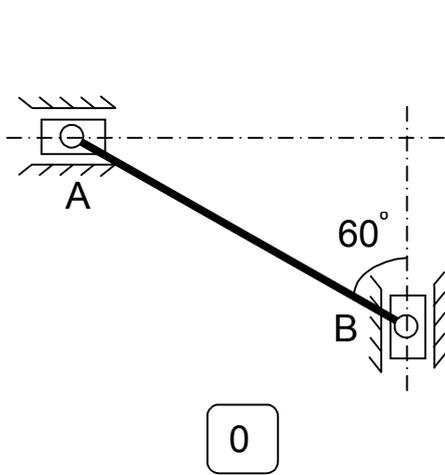
## Контрольная работа № 2.

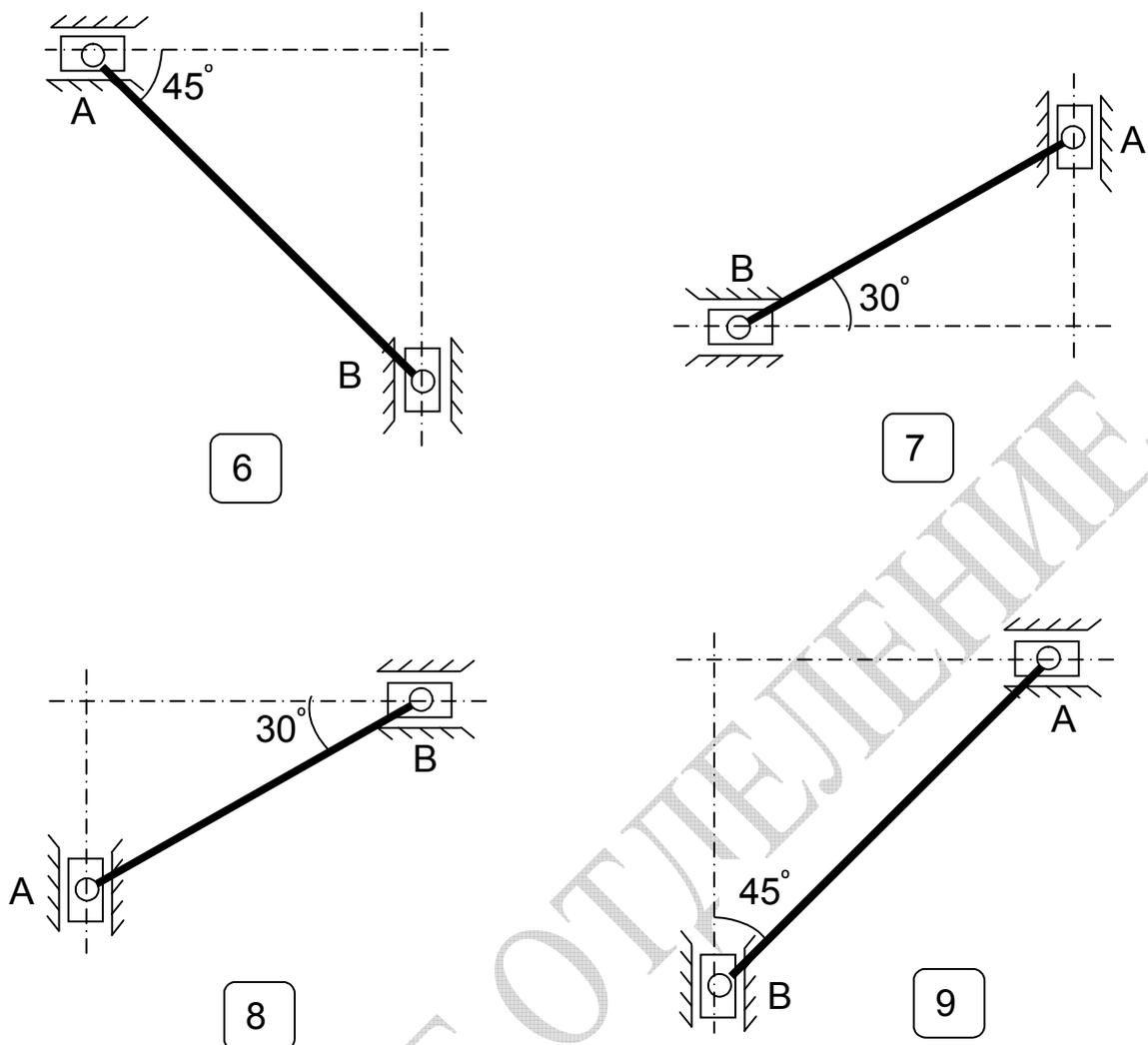
### Кинематика

По известной расчетной схеме (см. следующую стр.) и заданным значениям скорости и ускорения ползуна А найти скорость и ускорение ползуна В, а также угловую скорость и ускорение шатуна АВ. Направление скорости ползуна А и направление его ускорения задать самостоятельно.

В графической части работы привести расчетную схему с указанием направления и численных значений скоростей и ускорений ползунов и шатуна.

# Расчетные схемы





Исходные данные

Номер варианта исходных данных	Длина шатуна АВ, м	Скорость ползуна А – $v_A$ , м/с	Ускорение ползуна А – $W_A$ , м/с <sup>2</sup>
0	2	1	2
1	2	1	2
2	2	1	2
3	2	0,3	1
4	2	2	4
5	2	2	2
6	2	3	2
7	2	2	2
8	2	1	4
9	2	0,8	4

### Пример решения.

Определим скорость и ускорение ползуна В, угловую скорость и угловое ускорение шатуна АВ по известной скорости и ускорению ползуна А (см. рисунок).

**Исходные данные:** длина шатуна АВ равна 4 м;  $V_A = 1$  м/с;  $W_A = 3$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение.** Шатун совершает плоскопараллельное движение (подраздел 2.4.). Направление векторов скорости ползунов А и В известны: они движутся вдоль направляющих.

Восстановим перпендикуляры к векторам скоростей ползунов. Точка пересечения перпендикуляров даст положение мгновенного центра скоростей Р (см. рис.). Следовательно,

$V_A = \omega_{AB} |AP|$  и  $V_B = \omega_{AB} |PB|$ , где  $\omega_{AB}$  – угловая скорость шатуна АВ.

Из решения треугольника АВР находим:  $|AP| = |PB| = 4/\sqrt{3}$ . Тогда  $\omega_{AB} = V_A / |AP| = \sqrt{3}/4$  с<sup>-1</sup>, а  $V_B = 1$  м/с. Перейдем к определению ускорения  $W_B$  ползуна В и углового ускорения шатуна  $\epsilon_{AB}$ . Для этого воспользуемся формулой сложения ускорений при плоскопараллельном движении

твердого тела (см. подраздел 2.4), взяв теперь в качестве полюса точку А. Тогда имеем:

$$W_B = W_A + W_{BA},$$

где  $W_{BA}$  – ускорение точки В в ее вращательном движении вокруг полюса А. Последнее, в соответствии с формулой (2.15), является суммой касательного ускорения  $W_m$  и нормального ускорения  $W_n$ . Все четыре ускорения связаны векторным соотношением:

$$W_B = W_A + W_m + W_n \quad (\spadesuit)$$

Нормальное ускорение в нашем случае направлено вдоль шатуна к точке А. Его величина согласно (2.26) равна:  $W_n = \omega_{AB}^2 \cdot |AB| = 3/4$  м/с<sup>2</sup>. Вектор касательного ускорения  $W_m$  перпендикулярен шатуну АВ. Отметим на рисунке направления всех ускорений. При этом



направления векторов  $\mathbf{W}_B$  и  $\mathbf{W}_m$  пока что не могут быть определены однозначно, поскольку неизвестно, ускоренным или замедленным является поворот шатуна.

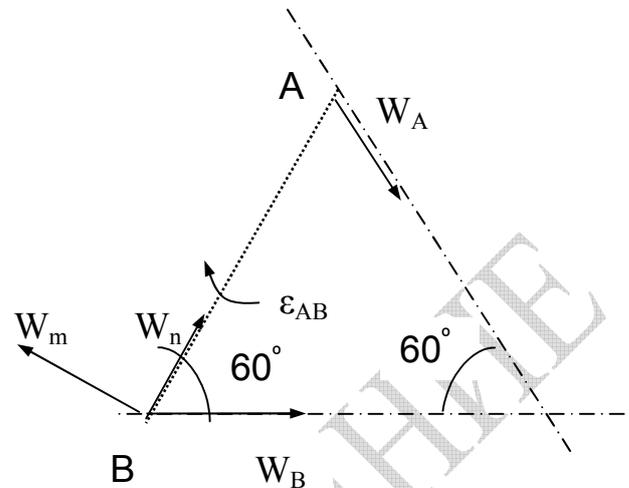
Спроектируем равенство (♠) на горизонтальную и вертикальную оси:

$$W_B = W_A \sin 30^\circ - W_m \cos 30^\circ +$$

$$+ W_n \cos 60^\circ;$$

$$0 = -W_A \cos 30^\circ + W_m \sin 30^\circ +$$

$$+ W_n \sin 60^\circ.$$



Получили два уравнения относительно неизвестных  $W_B$  и  $W_m$ . Последовательно решая эти уравнения, получаем:  $W_m = 9\sqrt{3}/4 \text{ м/с}^2$  и  $W_B = -(15 - 3\sqrt{3})/8 \text{ м/с}^2$ . Отрицательное значение ускорения означает, что его истинное направление противоположно первоначально принятому (см. рис.).

Угловое ускорение шатуна  $\epsilon_{AB}$  найдем с помощью формулы (2.25):

$$\epsilon_{AB} = \frac{W_m}{|AB|} = 9\sqrt{3}/16 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ:  $V_B = 1 \text{ м/с}$ ;  $W_B = (15 - 3\sqrt{3})/8 \text{ м/с}^2$ ;  $\omega_{AB} = \sqrt{3}/4 \text{ с}^{-1}$ ;  $\epsilon_{AB} = 9\sqrt{3}/16 \text{ с}^{-2}$ .

### Контрольная работа № 3.

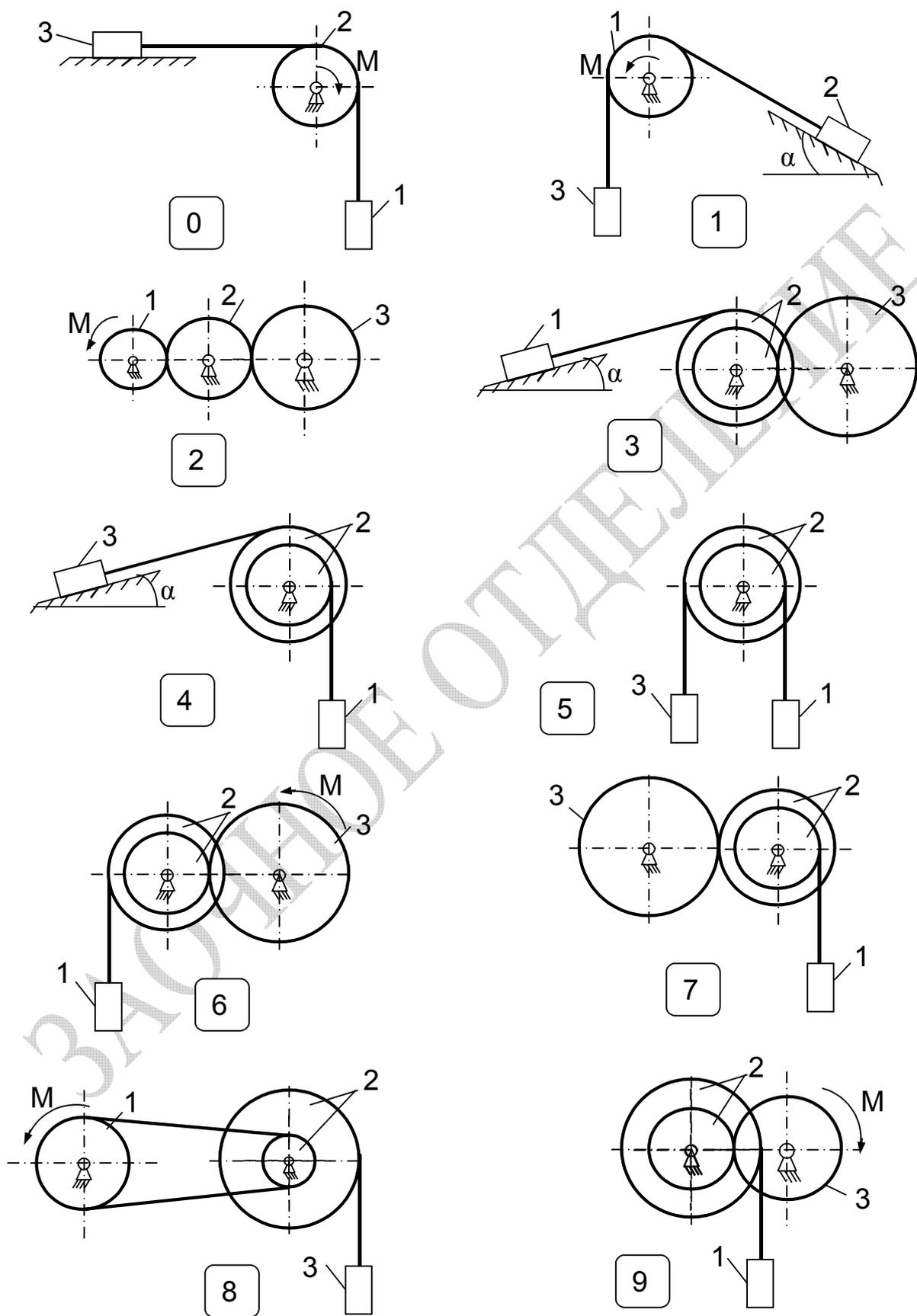
#### Динамика

В приведенных ниже расчетных схемах механическая система состоит из трех тел. Движение тел происходит либо за счет приложенного вращающего момента, либо за счет веса груза. С помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы требуется найти ускорение всех трех тел.

В таблице исходных данных приняты следующие обозначения:  $m$  – масса тела;  $R$  и  $r$  – радиусы большого и малого барабана соответственно;  $f$  – коэффициент трения скольжения;  $\alpha$  – угол наклона поверхности, по которой перемещается груз;  $M$  – вращающий момент.

Сила и коэффициент трения скольжения связаны соотношением:  $F_{\text{тр}} = f \cdot N$ , где  $N$  – проекция веса тела на нормаль к поверхности (см. подраздел 2.8).

# Расчетные схемы



## Исходные данные

№ вар.	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$m_3$ , кг	$R_1$ , см	$R_2$ , см	$R_3$ , см	$r_2$ , см	$f$	$\alpha$ , °	$M$ , Н·м
0	20	10	40	30	45	60	25	0,12	30	70
1	24	40	20	35	50	80	30	0,15	15	40
2	15	35	42	15	55	75	35	0,20	45	120
3	20	8	15	45	60	70	40	0,10	60	60
4	10	20	50	20	55	65	20	0,25	20	220
5	45	20	15	30	40	50	15	0,15	40	90
6	20	30	50	40	50	85	25	0,20	35	480
7	15	30	70	25	45	45	30	0,12	25	180
8	40	20	100	20	60	40	40	0,25	50	270
9	15	32	30	25	40	55	20	0,10	55	100

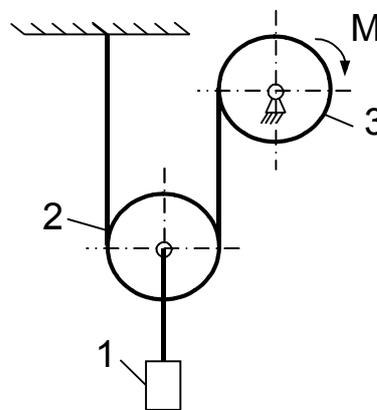
### Пример решения.

Определим ускорение груза 1 в механической системе, изображенной на рисунке. Нити невесомы и нерастяжимы.

**Исходные данные:**  $m_1 = 40$  кг;  $m_2 = 10$  кг;  $m_3 = 20$  кг;  $R_2 = 20$  см;  $R_3 = 50$  см;  $M = 100$  Н·м.

**Решение.** Данная механическая система состоит из трех движущихся тел: груза 1, блока 2 и барабана 3. Согласно (3.52) производная по времени от кинетической энергии механической системы равна алгебраической сумме мощностей всех сил, вызывающих движение:

$$\frac{dT}{d\tau} = \sum_{i=1}^n N_i \quad (\clubsuit)$$



Для раскрытия составляющих этого равенства выясним, направление движения всех элементов механической системы. Барабан 3 находится под действием двух моментов: заданного момента  $M$  и момента, обусловленного натяжением нити. Натяжение нити равно половине веса груза и блока. Поэтому момент  $M_T$ , вызванный натяжением нити, равен:

$$M_T = 0,5 (m_1 + m_2) g R_3 \approx 125 \text{ Нм} > M.$$

Следовательно, барабан 3 будет вращаться против часовой стрелки, груз 1 и блок 2 будут опускаться вниз.

С учетом направления движения элементов механической системы определим левую и правую части этого равенства. Кинетическая энергия системы  $T$  включает энергию поступательного движения груза, энергию вращательного движения барабана и кинетическую энергию блока, который будет совершать и поступательное, и вращательное движение. С учетом формул (3.48) – (3.50) для кинетической энергии всей системы имеем:

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2}.$$

Моменты инерции блока и барабана равны (см. подраздел 3.6):

$$J_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} = 0,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad J_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2} = 2,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

В выражении для кинетической энергии выразим все скорости через скорость груза. Скорости поступательного движения груза и блока одинаковы:  $V_1 = V_2 = V$ . Угловые скорости вращения блока и барабана, очевидно, связаны соотношением:  $\omega_3 R_3 = 2 \omega_2 R_2$ , откуда с учетом численных значений радиусов  $\omega_3 = 0,8 \omega_2$ . В свою очередь  $\omega_2 = V / R_2$ . Подставляя последние соотношения в выражение для кинетической энергии, получаем следующую связь энергией и скоростью груза:  $T = 47,5 V^2$ .

Раскроем теперь правую часть (♣). Для этого рассмотрим действующие в системе силы и их мощности. Мощность будут иметь сила тяжести груза –  $N_1$ , сила тяжести блока –  $N_2$  и вращающий момент –  $N_3$ . Используя формулы (3.35) и (3.41), имеем:

$$N_1 = m_1 g V = 400 V; \quad N_2 = m_2 g V = 100 V; \quad N_3 = M \omega_3 = - 400 V.$$

Мощность заданного момента  $M$  отрицательна, поскольку направление его действия противоположно направлению движения барабана. Подставим полученные выражения в (♣), продифференцируем и сократим на  $V$ . В результате для ускорения груза получим:

$$W = \frac{dV}{d\tau} = 1,05 \text{ м/с}^2.$$

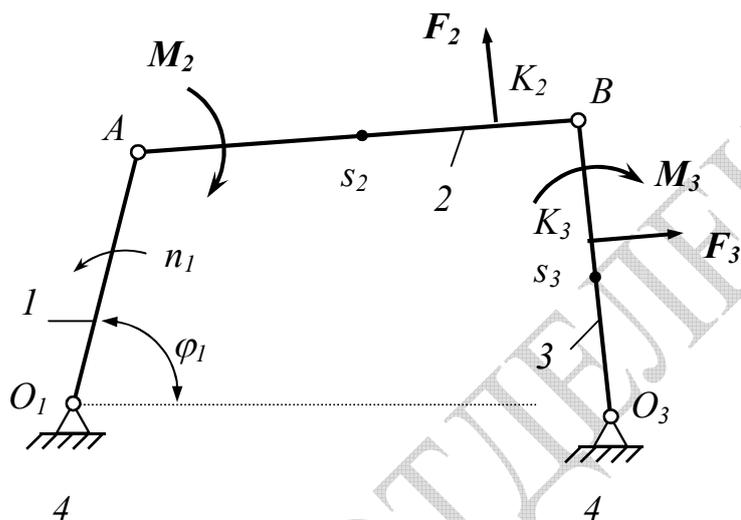
Ответ:  $W_1 = 1,05 \text{ м/с}^2$ .

## Контрольная работа № 4.

### Кинематический анализ плоского рычажного механизма

Провести кинематический анализ плоского рычажного механизма методом планов.

#### Шарнирный четырехзвенный механизм



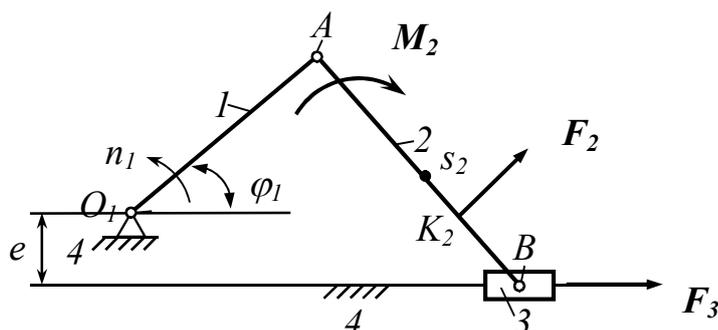
$$AK_2 = 0,3 AB; \quad BK_3 = 0,4 BO_3$$

Таблица исходных данных

№	Длины звеньев и расстояния между осями, мм				Массы звеньев, кг			Внешние силы, Н		Внешние моменты пар сил, Нм		Частота вращения $n_1$ , об/мин	Угол $\varphi_1$ , град
	$O_1A$	$AB$	$O_3B$	$O_1O_2$	$O_1A$	$AB$	$O_3B$	$F_2$	$F_3$	$M_2$	$M_3$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	50	150	180	250	1,0	3,0	3,7	500	800	380	750	20	0
2	50	150	150	200	1,0	3,0	3,5	550	850	780	850	25	45
3	50	140	160	200	1,0	2,8	3,3	450	700	800	350	30	90
4	50	140	190	250	1,0	2,8	4,2	350	400	500	600	35	135
5	50	190	140	250	1,0	3,5	2,7	580	550	600	700	40	180
6	50	160	140	220	1,0	3,8	3,5	600	450	800	950	45	225
7	70	170	200	280	1,4	3,4	4,0	370	450	850	700	20	0
8	70	200	170	280	1,4	4,0	3,4	330	450	780	550	25	45
9	70	200	180	270	1,4	3,4	3,6	250	480	580	750	30	90
10	70	220	200	270	1,4	4,2	4,0	280	380	520	470	35	135
11	70	200	220	280	1,4	4,0	4,2	380	550	650	780	40	180
12	70	180	230	250	1,4	3,6	4,8	330	450	780	680	45	225
13	80	230	270	400	1,6	4,6	5,2	600	750	800	950	20	0
14	80	270	230	400	1,6	4,6	5,4	700	650	120	900	25	45
15	80	250	250	400	1,6	5,0	5,0	650	750	950	900	30	90

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	80	260	260	400	1,6	5,2	5,2	580	770	800	850	35	135
17	80	230	290	400	1,6	4,6	5,8	380	580	700	900	40	180
18	80	200	300	400	1,6	4,0	6,0	330	470	950	870	45	225
19	100	250	180	300	2,0	3,0	3,6	600	700	800	630	20	0
20	100	280	150	300	2,0	3,3	3,0	530	470	800	810	25	45
21	100	260	170	300	2,0	3,2	3,5	430	570	950	760	30	90
22	100	270	160	300	2,0	3,7	3,2	380	480	750	800	35	135
23	100	250	200	300	2,0	3,0	4,0	500	400	900	640	40	180
24	100	200	250	300	2,0	4,0	5,0	600	550	700	680	45	225
25	120	350	280	480	2,4	7,0	9,6	800	900	950	990	20	0
26	120	380	250	480	2,4	7,6	9,6	700	800	600	770	25	45
27	120	360	270	480	2,4	7,5	9,6	650	750	800	900	30	90
28	120	370	260	480	2,4	7,9	9,6	900	600	760	880	35	135
29	120	390	240	480	2,4	7,7	9,6	770	870	660	840	40	180
30	120	340	290	480	2,4	6,8	9,6	950	920	560	790	45	225
31	140	300	380	520	2,8	6,0	7,6	800	900	980	700	20	0
32	140	380	300	520	2,8	7,6	6,0	780	880	900	760	25	45
33	140	390	300	520	2,8	7,8	6,0	670	830	870	820	30	90
34	140	300	390	520	2,8	6,0	7,8	650	950	670	920	35	135
35	140	400	280	520	2,8	8,0	4,6	550	750	950	900	40	180
36	140	230	400	520	2,8	4,6	8,0	450	850	990	760	45	225
37	160	400	450	640	3,2	8,0	9,0	950	850	840	870	20	0
38	160	450	400	640	3,2	9,0	8,0	990	860	570	970	25	45
39	160	400	470	640	3,2	8,0	9,4	940	800	610	700	30	90
40	160	470	400	640	3,2	9,4	8,0	930	760	780	750	35	135
41	160	400	480	640	3,2	8,0	9,5	920	580	560	980	40	180
42	160	480	400	640	3,2	9,6	8,1	890	980	950	480	45	225
43	180	350	380	540	3,6	7,0	7,6	690	760	910	520	20	0
44	180	380	350	540	3,6	7,6	7,1	770	590	930	560	25	45
45	180	340	400	540	3,6	6,8	7,9	790	670	870	700	30	90
46	180	400	340	540	3,6	8,0	6,7	810	760	880	870	35	135
47	180	400	350	540	3,6	8,0	7,5	830	880	650	670	40	180
48	180	350	400	540	3,6	7,0	8,0	940	990	930	980	45	225
49	200	500	530	800	4,0	9,9	9,7	970	920	960	800	20	0
50	200	530	500	800	4,0	9,8	8,9	920	780	990	890	25	45

Кривошипно-ползунный механизм



$$AK_2 = 0,35 AB$$

Таблица исходных данных

№	Длины звеньев и расстояния между осями, мм			Массы звеньев, кг			Внешние силовые факторы, Н; Нм			Частота вращения $n_1$ , об/мин	Угол $\varphi_1$ , град
	$O_1A$	AB	e	$O_1A$	AB	B	$F_2$	$F_3$	$M_2$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	50	200	40	1,2	4,8	6,0	350	450	500	20	45
2	50	210	50	1,2	4,9	6,0	300	500	600	25	135
3	50	215	60	1,2	5,0	6,0	500	300	700	30	225
4	50	220	70	1,2	6,0	6,0	450	350	800	35	45
5	70	200	50	1,4	4,8	7,0	550	400	900	40	135
6	70	210	60	1,4	4,9	7,0	550	600	1000	45	225
7	70	215	70	1,4	5,0	7,0	600	400	800	20	45
8	70	220	80	1,4	6,0	7,0	650	450	850	25	225
9	80	240	100	1,6	6,5	8,0	700	600	1000	30	45
10	80	350	120	1,6	6,4	8,0	750	650	1200	35	135
11	80	330	130	1,6	6,2	8,0	800	600	1300	40	225
12	80	300	80	1,6	6,0	8,0	780	670	1200	45	45
13	60	250	70	1,3	6,3	6,5	480	870	1000	20	135
14	60	250	80	1,3	6,8	6,5	370	460	670	25	225
15	60	270	90	1,3	7,0	6,5	380	590	780	30	45
16	60	280	100	1,3	7,5	6,5	380	400	850	35	135
17	90	380	100	1,7	8,8	9,0	700	880	950	40	225
18	90	320	120	1,7	6,1	9,0	600	400	1000	45	45
19	90	300	140	1,7	6,0	9,0	650	450	950	20	135
20	90	350	150	1,7	7,7	9,0	550	650	1050	25	225
21	100	400	80	2,0	8,0	10,0	400	600	800	30	45
22	100	420	100	2,0	7,5	10,0	450	650	850	35	135
23	100	430	120	2,0	7,7	10,0	500	750	870	40	225
24	100	450	140	2,0	7,8	10,0	550	640	950	45	45
25	100	400	150	2,0	8,5	12,0	600	530	860	20	135
26	120	360	200	2,2	8,0	12,0	650	470	920	25	225
27	120	380	220	2,2	8,0	12,0	700	610	1200	30	45
28	120	400	240	2,2	8,0	12,0	750	540	650	35	135
29	120	370	210	2,2	8,0	13,0	800	350	730	40	225
30	140	400	200	2,4	9,0	14,0	850	450	800	45	45
31	140	420	250	2,4	9,2	14,0	900	540	840	20	135
32	140	450	260	2,4	9,4	15,0	700	800	1150	25	225
33	140	430	255	2,4	4,2	6,0	600	800	1100	30	45
34	160	500	150	3,2	9,6	6,5	800	600	1000	35	135
35	160	520	160	3,2	9,5	6,7	700	640	910	40	225
36	160	540	170	3,2	10,0	12,0	700	670	830	45	45
37	160	550	180	3,2	9,8	11,0	750	770	970	20	135
38	180	500	200	3,6	10,2	12,0	580	850	700	25	225
39	180	520	220	3,6	9,8	10,0	470	560	780	30	45
40	180	600	230	3,6	10,8	13,0	500	430	870	35	135
41	180	550	240	3,6	9,6	11,0	550	980	970	40	225
42	200	700	300	4,0	11,0	13,0	600	1200	1200	45	45
43	200	750	350	4,0	12,0	13,0	750	1100	1100	20	135
44	200	780	380	4,0	12,5	15,0	850	1300	1300	25	225

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	200	800	400	4,0	12,0	14,0	800	1400	1400	30	45
46	100	450	300	2,0	8,5	12,0	840	1500	1500	35	135
47	100	470	250	2,0	8,7	12,0	780	1600	1600	40	225
48	100	480	200	2,0	8,8	12,5	860	1400	1500	45	45
49	100	500	300	2,0	9,0	13,0	490	1350	1350	20	135
50	100	550	200	2,0	9,5	14,0	720	1650	1650	25	225

### Порядок выполнения задания по теме «Кинематический анализ плоского рычажного механизма»

1. Построить на миллиметровой бумаге формата А4 план положений механизма методом засечек при заданном положении ведущего звена (кривошипа).
2. Построить на том же листе план скоростей и план ускорений механизма. Определить численные значения линейных скоростей и линейных ускорений точек А и В механизма, а также значения угловых скоростей и угловых ускорений всех звеньев, совершающих вращательное или сложное плоскопараллельное движение. Полученные данные оформить в виде таблицы.

При выполнении задания целесообразно руководствоваться материалом подраздела 5.2 настоящего пособия при анализе кривошипно-ползунного механизма и материалом подраздела 5.3 – при анализе шарнирного четырехзвенника.

### Контрольная работа № 5.

#### Кинетостатический анализ плоского рычажного механизма

Для того же механизма, используя результаты предыдущего контрольного задания, провести силовой анализ. Последовательность его проведения для кривошипно-ползунного механизма и механизма шарнирного четырехзвенника подробно изложена в разделе 6.

### Порядок выполнения задания по теме «Кинематический анализ плоского рычажного механизма»

1. На плане положений соответствующего механизма проставить векторы сил тяжести и сил инерции, приложенных к центрам масс  $s_i$  (см. схему механизма), а также заданные моменты пар сил  $M_i$ . При определении сил инерции и моментов пар сил инерции следует воспользоваться ранее построенным планом ускорений исследуемого механизма. Центры масс звеньев 2 и 3 в механизме шарнирного четырехзвенника, а также центр масс звена 2 в кривошипно-ползунном механизме находятся посередине их длин. Центр масс ведущего звена 1 находится на оси его вращения.

Момент инерции кривошипа 1 относительно оси его вращения взять равным:

$$J_{O_1} = \frac{m_1 l_1^2}{3} .$$

По аналогичной формуле вычисляется момент инерции звена 3 в механизме шарнирного четырехзвенника относительно оси его вращения  $O_3$ . Момент инерции шатуна 2 относительно центра масс  $s_2$  равен:

$$J_{s_2} = \frac{m_2 l_2^2}{12} .$$

2. Провести разбиение механизма на базовый механизм, состоящий из кривошипа 1 и стойки 4, и структурную группу (группу Ассур), состоящую из звеньев 2 и 3.
3. Провести силовой расчет группы Ассур методом планов сил (см. подраздел 6.3).
4. Провести силовой расчет базового механизма и определить уравнивающий момент, приложенный к ведущему звену (см. подраздел 6.4).
5. Полученные в результате расчетов реакции во всех кинематических парах механизма, а также уравнивающий момент, приложенный к базовому механизму, свести в таблицу.

$R_{14} = -R_{41}, \text{ Н}$	$R_{12} = -R_{21}, \text{ Н}$	$R_{23} = -R_{32}, \text{ Н}$	$R_{34} = -R_{43}, \text{ Н}$	$M_y, \text{ Нм}$

6. Определить путем построения «рычага Жуковского» (см. подраздел 6.5) уравнивающую силу  $F_y$ , приложенную в центре масс плоского шарнира А и направленную перпендикулярно звену  $O_1A$ . Численное значение полученного уравнивающего момента  $M_y = F_y l_{O_1A}$  сопоставить с ранее полученным значением. Расхождение не должно превышать 10%. Настоящий пункт задания выполняется по указанию преподавателя.

### Контрольная работа № 6.

#### Динамический анализ плоского рычажного механизма

Для того же механизма, используя результаты предыдущих контрольных заданий, провести динамический анализ. Последовательность его проведения для кривошипно-ползунного

механизма и механизма шарнирного четырехзвенника подробно изложена в разделе 8.

Порядок выполнения задания по теме «Динамический анализ механизма»

1. Определить приведенный момент инерции механизма при заданном положении кривошипа. При этом величины угловых скоростей звеньев, совершающих вращательное или сложное плоскопараллельное движение, следует взять по результатам кинематического анализа.
2. Рассчитать приведенный момент пары сил от моментов пар сил, приложенных к звеньям механизма.
3. Графически изобразить одномассовую динамическую модель механизма и указать на ней приведенный момент инерции и приведенный момент пары сил.
4. Приведение осуществить к оси вращения кривошипа.

Основная литература

1. Диевский В.А. Теоретическая механика: Учебное пособие. – СПб.: изд-во «Лань», 2005. – 320 с.
2. Диевский В.А., Малышева И.А. Теоретическая механика. Сборник заданий: Учебное пособие. СПб.: изд-во «Лань», 2007. – 192 с.
3. Поляков А.А. Механика химических производств. Учебное пособие для вузов. 2-е издание стереотипное. М.: ООО «Путь», ООО ТИД «Альянс», 2005. – 392 с.
4. Бегун П.И., Кормилицын О.П. Прикладная механика. СПб.: «Политехника», 2006. – 368 с.
5. Смелягин А.И. Структура механизмов и машин: Учебное пособие. – М.: Высш. шк., 2006. – 304 с.
6. Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К., Тимофеев Г.А., Никоноров В.А. Теория механизмов и машин: Учебник для вузов. - М.: Высш. шк. , 2003. – 496 с.
7. Попов С.А., Тимофеев Г.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2004. – 458 с.

## Дополнительная литература

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. - М.: Наука, 1985.
2. Матюшин Е.Г. Кинематический анализ плоских рычажных механизмов. – СПб.: СПбГТИ (ТУ), 2001.
3. Расчет и построение профиля кулачка: Метод. Указания /Сост. В.В.Федотов, Б.А.Маркелов - Л.: ЛТИ им.Ленсовета, 1983.- 28 с.
4. Мильченко А.И., Федотов В.В. Изучение структуры и динамики машин химических производств: Метод. указания/Сост.: А.И.Мильченко, В.В.Федотов; ЛТИ им.Ленсовета. Л., 1991. 32 с.
5. Проектирование цилиндрической эвольвентной зубчатой передачи: Метод. указания к курсовому проекту по теории механизмов и машин/Сост. В.А.Заплетохин - СПбТИ. СПб., 1992. - 24с.
6. Построение эвольвентных профилей зубьев методом обката: Метод. указания/ Сост.: А.Н.Луцко - СПбТИ. СПб., 1993. –13 с.
7. Построение картины эвольвентного зацепления: Метод. Указания/ Сост. А.Н. Луцко; СПбГТИ(ТУ). СПб, 2000. 19 с.
8. Исследование кинематики кривошипно-ползунного механизма методом векторного контура: Метод. указания/ Сост.: А.Н. Луцко - СПбТИ. СПб., 1993. -13 с.

Марцулевич Н.А., Матюшин Е.Г., Федотов В.В.,  
Луцко А.Н., Телепнев М.Д.

Техническая механика Часть I.  
Теоретическая механика, Теория механизмов и машин  
Учебное пособие

Отпечатано с оригинал-макета 29.09.2009. Формат 60x84/16  
Усл. печ. л. 20.6 Тираж 200 экз. Заказ №219 от 29.09.2009.  
Издательство «Синтез»  
198013, Санкт-Петербург, Московский пр., д. 26