

**Тема: «Решение задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа (Лапласа и Пуассона)»**

**Цель – освоить метод сеток для решения дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа**

Решим методом сеток задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области. Эта задача ставится следующим образом.

Найти непрерывную функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую внутри прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  (рис. 22), уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (32)$$

и принимающую на границе области  $\Omega$  заданные значения, т. е.

$$u(0, y) = \Gamma_1(y), \quad u(a, y) = \Gamma_3(y), \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$u(x, 0) = \Gamma_4(x), \quad u(x, b) = \Gamma_2(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

где  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  - заданные функции.

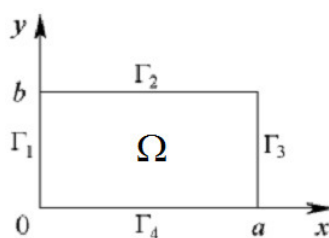


Рис. 22.

Будем считать, что  $u(x, y)$  непрерывна на границе области  $\Omega$ , т. е.  $\Gamma_1(0) = \Gamma_4(0)$ ,  $\Gamma_1(b) = \Gamma_2(0)$ ,  $\Gamma_3(0) = \Gamma_4(a)$ ,  $\Gamma_3(b) = \Gamma_2(a)$ . Выбрав шаги  $h_x, h_y$  по  $x$  и  $y$  соответственно, строим сетку  $x_i = i \cdot h_x$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $y_j = j \cdot h_y$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , где  $x_n = n \cdot h_x = a$ ,

$y_m = m \cdot h_y = b$ . Далее для упрощения расчетов положим  $h_x = h_y$ .

Уравнение (32) является уравнением эллиптического типа. Используя результаты раздела "Аппроксимация уравнений эллиптического типа" получаем, что решение таких уравнений можно получить, используя явную разностную схему:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 \cdot f_{i,j}), \quad f_{i,j} = f(x_i, y_j)$$

$$u_{i,m} = \Gamma_2(x_i), \quad u_{i,0} = \Gamma_4(x_i), \quad u_{0,j} = \Gamma_1(y_j), \quad u_{n,j} = \Gamma_3(y_j), \quad (33)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике состоит в нахождении приближенных значений  $u_{i,j}$  функции  $u(x, y)$  во внутренних узлах сетки. Для определения величин  $u_{i,j}$  требуется решить систему линейных алгебраических уравнений (33).

Эту систему будем решать итерационным методом Гаусса-Зейделя, который состоит в последовательности итераций вида

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(k+1)} &= \frac{1}{4} [u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k+1)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} - h^2 \cdot f_{i,j}] \\ f_{i,j} &= f(x_i, y_j). \end{aligned} \quad (34)$$

(верхним индексом  $k$  обозначен номер итерации). При  $k \rightarrow \infty$  последовательность  $u_{i,j}^k$  сходится к точному решению системы (33). В качестве условия окончания итерационного процесса можно принять

$$\max |u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq m-1.$$

Однако этот критерий недостаточно надежен, поскольку итерационный процесс сходится медленно.

На практике применяют более надежный критерий

$$\max_{ij} |u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}| < \varepsilon(1 - \nu),$$

где

$$\nu = \frac{\max_{ij} |u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}|}{\max_{ij} |u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k-1)}|}.$$

Таким образом, погрешность приближенного решения, полученного методом сеток, складывается из двух погрешностей: погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностными уравнениями; погрешности, возникающей в результате приближенного решения системы разностных уравнений (33).

Известно, описанная здесь разностная схема обладает свойством устойчивости и сходимости. Устойчивость схемы означает, что малые изменения в начальных данных приводят к малым изменениям решения разностной задачи. Только такие схемы имеет

смысл применять в реальных вычислениях. Сходимость схемы означает, при стремлении шага сетки к нулю (т. е. при  $h \rightarrow 0$ ) решение разностной задачи стремится в некотором смысле к решению исходной задачи. Таким образом, выбрав достаточно малый шаг  $h$ , можно как угодно точно решить исходную задачу.

**Пример 4.** Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8 \cos^2(x + y) - 4, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3$$

$$u(0, y) = \sin^2(y), \quad u(2, y) = \sin^2(y + 2), \quad 0 \leq y \leq 3, \quad (35)$$

$$u(x, 0) = \sin^2(x), \quad u(x, 3) = \sin^2(x + 3), \quad 0 \leq x \leq 2,$$

Решение провести с оценкой погрешности  $\varepsilon = 0,0001$ .

Сравнить полученное решение с точным решением:

$$u(x, t) = \sin^2(x + y). \quad (36)$$

Решение проведем в математическом пакете MATHCAD. Результаты представлены на рис. 23-25.

```

n := 20  a := 2  b := 3  eps := 0.0001  f(x,y) := 8*cos(x+y)^2 - 4
Gamma1(y) := sin(y)^2  Gamma2(x) := sin(x+3)^2  Gamma3(y) := sin(y+2)^2  Gamma4(x) := sin(x)^2
Ellipt :=
  r2 ← 10^10
  h ← 1/n
  for i ∈ 0..n-a
    xi ← i·h
    U0,i ← Gamma4(xi)
    Un,b,i ← Gamma2(xi)
  for j ∈ 0..n-b
    yj ← j·h
    Uj,0 ← Gamma1(yj)
    Uj,n-a ← Gamma3(yj)
  for i ∈ 1..n-a-1
    for j ∈ 1..n-b-1
      Uj,i ← 1
  for i ∈ 0..n-a
    for j ∈ 0..n-b
      flj,i ← f(xi,yj)
  for n1 ∈ 0..10000
    r1 ← r2
    r2 ← 0
    for i ∈ 1..n-a-1
      for j ∈ 1..n-b-1
        x ← 0.25(Uj-1,i + Uj+1,i + Uj,i-1 + Uj,i+1 - h^2·flj,i)
        r ← |x - Uj,i|
        r2 ← r if r2 ≤ r
        Uj,i ← x
        te ← eps · (1 - r2/r1)
      break if r2 ≤ te
    continue
  (n1)
  (U)

```

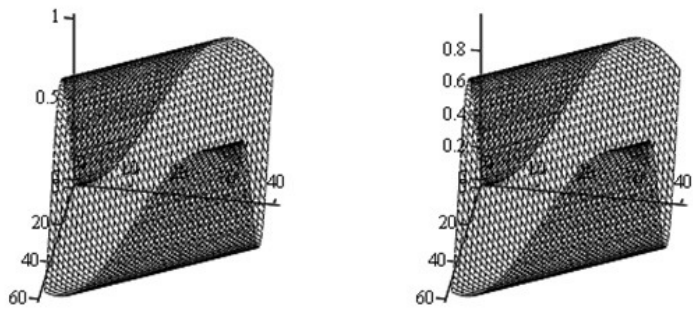
Рис. 23. Фрагмент рабочего документа MATHCAD с функцией, возвращающей решение задачи Дирихле (35) по формуле (34).

Ellipt<sub>0</sub> = 2044    n1 := 0..10    n2 := 0..10    SR<sub>n1,n2</sub> := (Ellipt<sub>1</sub>)<sub>6,n1,4,n2</sub>

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.039	0.152	0.319	0.515	0.708	0.869	0.971	0.999	0.948	0.827
1	0.087	0.23	0.415	0.614	0.795	0.929	0.995	0.984	0.896	0.745	0.556
2	0.319	0.515	0.708	0.869	0.972	1	0.949	0.827	0.654	0.456	0.266
3	0.614	0.794	0.929	0.995	0.984	0.896	0.745	0.556	0.358	0.183	0.057
4	0.869	0.971	0.999	0.949	0.827	0.654	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003
5	0.995	0.984	0.896	0.745	0.556	0.358	0.182	0.057	0.001	0.025	0.123
6	0.948	0.827	0.654	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374
7	0.745	0.556	0.358	0.182	0.057	0.001	0.024	0.123	0.28	0.473	0.67
8	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374	0.573	0.76	0.906
9	0.183	0.057	0.002	0.025	0.123	0.281	0.473	0.67	0.839	0.956	1
10	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374	0.573	0.76	0.906	0.987	0.992	0.92

u(x,y) := sin(x+y)<sup>2</sup>    i := 0..10    j := 0..10    x<sub>i</sub> := 0.2\*i    y<sub>j</sub> := 0.3\*j    u<sub>i,j</sub> := u(x<sub>i</sub>,y<sub>j</sub>)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.039	0.152	0.319	0.515	0.708	0.869	0.971	0.999	0.948	0.827
1	0.087	0.23	0.415	0.614	0.794	0.928	0.995	0.983	0.895	0.745	0.556
2	0.319	0.515	0.708	0.869	0.971	0.999	0.948	0.827	0.654	0.456	0.266
3	0.614	0.794	0.928	0.995	0.983	0.895	0.745	0.556	0.358	0.183	0.057
4	0.869	0.971	0.999	0.948	0.827	0.654	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003
5	0.995	0.983	0.895	0.745	0.556	0.358	0.183	0.057	0.002	0.025	0.123
6	0.948	0.827	0.654	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374
7	0.745	0.556	0.358	0.183	0.057	0.002	0.025	0.123	0.281	0.473	0.67
8	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374	0.573	0.76	0.906
9	0.183	0.057	0.002	0.025	0.123	0.281	0.473	0.67	0.839	0.956	1
10	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374	0.573	0.76	0.906	0.987	0.992	0.92



Ellipt<sub>1</sub>

u<sup>T</sup>

Рис. 24. Фрагмент рабочего документа МАТНСАД. Результаты вычислений: приближенное и точное решение

```

M := | r0,0 ← |SR0,0 - (u^T)0,0|
      | max ← r0,0
      | s ← 0
      | c ← 0
      | for n ∈ 1..10
      |   for n1 ∈ 1..10
      |     | rn,n1 ← |SRn,n1 - (uT)n,n1|
      |     | if rn,n1 > max
      |     |   | max ← rn,n1
      |     |   | s ← n
      |     |   | c ← n1
      |     | (max s c)T
      |     | M0 = 0.000458
      |     | M1 = 3    M2 = 4
      |     | | SRM1,M2 - (uT)M1,M2 |
      |     | | SRM1,M2 | = 0.000466
  
```

Рис. 25. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Сравнение приближенного и точного решений.

На рис.23 задаются начальные значения, число узлов сетки по  $x$  и  $y$ , границы сетки, оценка погрешности, начальные условия и функция Ellipt, решающая задачу Дирихле для уравнения в частных производных эллиптического типа (35) по явной разностной схеме (33) и уточняющее решение методом Гаусса-Зейделя по формуле (34). На рис. 24 представлены результаты вычислений приближенного и точного решений: таблицы значений и графики вычислений. На рис. 25 проведено сравнение приближенного и точного решений. Анализ результатов сравнения указывает на совпадение приближенного и точного решений. Максимальная относительная погрешность отклонения от точного решения составила 0,0466 %.

Пакет MATHCAD не содержит встроенных функций, решающих уравнения эллиптического типа в прямоугольной области. На квадратной области уравнение Лапласа в случае ненулевых граничных условий решается с помощью функции relax.

Обращение к функции:

$$\text{relax}(a, b, c, d, e, f, u, rjac),$$

где  $a, b, c, d, e$  - квадратные матрицы одинакового размера, содержащие коэффициенты аппроксимирующего уравнения;  $f$  - квадратная матрица, содержащая значения правой части уравнения в каждой точке области, где ищется решение;  $u$  - квадратная матрица, содержащая граничные значения решения на границах квадратной области и начальное приближение для решения внутри области;  $rjac$  - спектральный радиус итераций Якоби. Это число между 0 и 1, которое управляет сходимостью процесса релаксации.

**Пример 5.** Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(0, y) = \sin(y), \quad u(1, y) = e \cdot \sin(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (37)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = e^x \cdot \sin(1), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Решение провести с оценкой погрешности  $\varepsilon = 0,00001$ .

Построить график решения.

Сравнить полученное решение с решением с помощью встроенной функции `relax` и с точным решением:

$$u(x, t) = e^x \cdot \sin(y). \quad (38)$$

Решение проведем в математическом пакете MATHCAD. Результаты представлены на рис. 26-31.

```

n := 10   a := 1   b := 1   eps := 0.00001   f(x,y) := 0
Gamma1(y) := sin(y)   Gamma2(x) := e^x * sin(1)   Gamma3(y) := e * sin(y)   Gamma4(x) := 0
Ellipt :=
  r2 ← 10^10
  h ← 1/n
  for i ∈ 0..n-a
    xi ← i * h
    U0,i ← Gamma4(xi)
    Un-b,i ← Gamma2(xi)
  for j ∈ 0..n-b
    yj ← j * h
    Uj,0 ← Gamma1(yj)
    Uj,n-a ← Gamma3(yj)
  for i ∈ 1..n-a-1
    for j ∈ 1..n-b-1
      Uj,i ← 1
  for i ∈ 0..n-a
    for j ∈ 0..n-b
      flj,i ← f(xi,yj)
  for n1 ∈ 0..10000
    r1 ← r2
    r2 ← 0
    for i ∈ 1..n-a-1
      for i ∈ 1..n-b-1
        x ← 0.25 * (Uj-1,i + Uj+1,i + Uj,i-1 + Uj,i+1 - h^2 * flj,i)
        r ← |x - Uj,i|
        r2 ← r if r2 ≤ r
        Uj,i ← x
        te ← eps * (1 - r2/r1)
      break if r2 ≤ te
    continue
  (n1)
  (U)

```

Рис. 26. Фрагмент рабочего документа MATHCAD с функцией, возвращающей решение задачи Дирихле (37) по формуле (34).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.1	0.11	0.122	0.135	0.149	0.165	0.182	0.201	0.222	0.246	0.271
2	0.199	0.22	0.243	0.268	0.296	0.328	0.362	0.4	0.442	0.489	0.54
3	0.296	0.327	0.361	0.399	0.441	0.487	0.539	0.595	0.658	0.727	0.803
4	0.389	0.43	0.476	0.526	0.581	0.642	0.71	0.784	0.867	0.958	1.059
5	0.479	0.53	0.586	0.647	0.715	0.791	0.874	0.966	1.067	1.179	1.303
6	0.565	0.624	0.69	0.762	0.842	0.931	1.029	1.137	1.257	1.389	1.535
7	0.644	0.712	0.787	0.87	0.961	1.062	1.174	1.297	1.434	1.585	1.751
8	0.717	0.793	0.876	0.968	1.07	1.183	1.307	1.445	1.597	1.764	1.95
9	0.783	0.866	0.957	1.057	1.169	1.292	1.427	1.577	1.743	1.927	2.129
10	0.841	0.93	1.028	1.136	1.255	1.387	1.533	1.695	1.873	2.07	2.287

Рис. 27. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Результаты численного решения

$i := 0..10 \quad j := 0..10 \quad x_i := 0.1 \cdot i \quad y_j := 0.1 \cdot j \quad u(x,y) := e^{-x} \cdot \sin(y) \quad u_{i,j} := u(x_i, y_j)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.1	0.11	0.122	0.135	0.149	0.165	0.182	0.201	0.222	0.246	0.271
2	0.199	0.22	0.243	0.268	0.296	0.328	0.362	0.4	0.442	0.489	0.54
3	0.296	0.327	0.361	0.399	0.441	0.487	0.538	0.595	0.658	0.727	0.803
4	0.389	0.43	0.476	0.526	0.581	0.642	0.71	0.784	0.867	0.958	1.059
5	0.479	0.53	0.586	0.647	0.715	0.79	0.874	0.965	1.067	1.179	1.303
6	0.565	0.624	0.69	0.762	0.842	0.931	1.029	1.137	1.257	1.389	1.535
7	0.644	0.712	0.787	0.87	0.961	1.062	1.174	1.297	1.434	1.585	1.751
8	0.717	0.793	0.876	0.968	1.07	1.183	1.307	1.445	1.597	1.764	1.95
9	0.783	0.866	0.957	1.057	1.169	1.291	1.427	1.577	1.743	1.927	2.129
10	0.841	0.93	1.028	1.136	1.255	1.387	1.533	1.695	1.873	2.07	2.287

Рис. 28. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Результаты точного решения по формуле (38)

На рис. 26 задаются начальные значения, число узлов сетки по  $x$  и  $y$ , границы сетки, оценка погрешности, начальные условия и функция Ellipt, решающая задачу Дирихле для уравнения в частных производных эллиптического типа (37) по явной разностной схеме (33) и уточняющее решение методом Гаусса-Зейделя по формуле (34). На рис. 27 представлены результаты численных вычислений. На рис. 28 представлены результаты точного решения по формуле (38). Далее на рис. 29 приведено решение задачи Дирихле (37) с помощью встроенной в пакет MATHCAD функции relax. На рис. 30 приведены графики приближенных решений с помощью функции Ellipt и с помощью встроенной функции relax. На рис. 31 проведено сравнение приближенных решений с точным решением.

$n := 10$     $i := 0..n$     $j := 0..n$   
 $a_{i,j} := 1$     $b := a$     $c := a$     $d := a$     $e := -4 \cdot a$

$S_{i,j} := 0$       Граничные условия  
 на верхней границе    $f_{n,j} := \exp\left(\frac{j}{n}\right) \cdot \sin(1)$   
 на нижней границе    $f_{0,j} := 0$   
 по бокам    $f_{i,0} := \sin\left(\frac{i}{n}\right)$     $f_{i,n} := \exp(1) \cdot \sin\left(\frac{i}{n}\right)$

Спектральный радиус Якоби    $r := 1 - \frac{\pi}{n}$     $r = 0.686$

Решение уравнения       $F := \text{relax}(a, b, c, d, e, S, f, r)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.1	0.11	0.122	0.135	0.149	0.165	0.182	0.201	0.222	0.246	0.271
2	0.199	0.22	0.243	0.268	0.296	0.328	0.362	0.4	0.442	0.489	0.54
3	0.296	0.327	0.361	0.399	0.441	0.487	0.539	0.595	0.658	0.727	0.803
4	0.389	0.43	0.476	0.526	0.581	0.642	0.71	0.784	0.867	0.958	1.059
5	0.479	0.53	0.586	0.647	0.715	0.791	0.874	0.966	1.067	1.179	1.303
6	0.565	0.624	0.69	0.762	0.842	0.931	1.029	1.137	1.257	1.389	1.535
7	0.644	0.712	0.787	0.87	0.961	1.062	1.174	1.297	1.434	1.585	1.751
8	0.717	0.793	0.876	0.968	1.07	1.183	1.307	1.445	1.597	1.764	1.95
9	0.783	0.866	0.957	1.057	1.169	1.292	1.427	1.577	1.743	1.927	2.129
10	0.841	0.93	1.028	1.136	1.255	1.387	1.533	1.695	1.873	2.07	2.287

Рис. 29. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Решение задачи Дирихле (37) с помощью встроенной функции relax

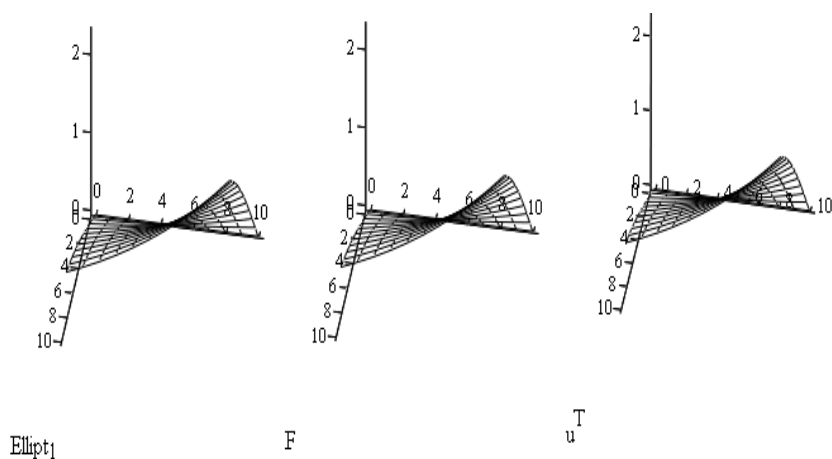


Рис. 30. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Графики численных решений с помощью функций Ellipt и relax и график точного решения

$$\begin{array}{l}
 M := \left| \begin{array}{l}
 r_{0,0} \leftarrow \left| (\text{Ellipt1})_{0,0} - (u^T)_{0,0} \right| \\
 \max \leftarrow r_{0,0} \\
 s \leftarrow 0 \\
 c \leftarrow 0 \\
 \text{for } n \in 1..10 \\
 \quad \text{for } n1 \in 1..10 \\
 \quad \quad r_{n,n1} \leftarrow \left| (\text{Ellipt1})_{n,n1} - (u^T)_{n,n1} \right| \\
 \quad \quad \text{if } r_{n,n1} > \max \quad M_0 = 0.000092 \\
 \quad \quad \quad \max \leftarrow r_{n,n1} \quad M_1 = 6 \quad M_2 = 6 \\
 \quad \quad \quad s \leftarrow n \\
 \quad \quad \quad c \leftarrow n1 \\
 \quad \quad \quad \left| \frac{(\text{Ellipt1})_{M_1, M_2} - (u^T)_{M_1, M_2}}{(\text{Ellipt1})_{M_1, M_2}} \right| = 0.0001 \\
 (\max \ s \ c)^T
 \end{array} \right. \\
 \\
 M := \left| \begin{array}{l}
 r_{0,0} \leftarrow \left| F_{0,0} - (u^T)_{0,0} \right| \\
 \max \leftarrow r_{0,0} \\
 s \leftarrow 0 \\
 c \leftarrow 0 \\
 \text{for } n \in 1..10 \\
 \quad \text{for } n1 \in 1..10 \\
 \quad \quad r_{n,n1} \leftarrow \left| F_{n,n1} - (u^T)_{n,n1} \right| \\
 \quad \quad \text{if } r_{n,n1} > \max \quad M_0 = 0.000092 \\
 \quad \quad \quad \max \leftarrow r_{n,n1} \quad M_1 = 6 \quad M_2 = 6 \\
 \quad \quad \quad s \leftarrow n \\
 \quad \quad \quad c \leftarrow n1 \\
 \quad \quad \quad \left| \frac{F_{M_1, M_2} - (u^T)_{M_1, M_2}}{F_{M_1, M_2}} \right| = 0.0001 \\
 (\max \ s \ c)^T
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рис. 31. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Сравнение численных решений с помощью функций Ellipt и relax с точным решением

Анализ результатов вычислений говорит о совпадении численных решений как по схеме (34) так и с помощью встроенной в MATHCAD функции relax с точным решением по формуле (38). В обоих приближенных решениях максимальная относительная погрешность отклонения от точного решения составила 0,01 %.

**Задание 3.** Найти решение  $u(x, y)$  задачи Дирихле в прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  (смотри ранее приведенный рис. 22) для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

с краевыми условиями вида

$$\begin{aligned}
 u(0, y) &= \Gamma_1(y), & u(a, y) &= \Gamma_3(y), & 0 \leq y \leq b, \\
 u(x, 0) &= \Gamma_4(x), & u(x, b) &= \Gamma_2(x), & 0 \leq x \leq a,
 \end{aligned}$$

Решение провести с оценкой погрешности  $\varepsilon = 0,00001$ . Построить график решения.

Варианты заданий с исходными данными представлены ниже.

### Варианты заданий

#### Вариант 1.

$$a = 4, \quad b = 5,$$

$$\Gamma_1(y) = \cos\left(\frac{y}{2}\right), \quad \Gamma_3(y) = e^{-4} \cos\left(\frac{y}{2}\right), \quad \Gamma_2(x) = e^{-x} \cos\left(\frac{5}{2}\right),$$

$$\Gamma_4(x) = e^{-x}, \quad f(x, y) = \frac{3}{4} \cdot e^{-x} \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right).$$

**Вариант 2.**

$$a = 2, \quad b = 3,$$

$$\Gamma_1(y) = e^{2y}(2y^2 + 1), \quad \Gamma_3(y) = e^{2y}(2y^2 + 3), \quad \Gamma_2(x) = e^6(x + 19),$$

$$\Gamma_4(x) = x + 1, \quad f(x, y) = 4 \cdot e^{2y} \cdot (2y^2 + 4y + x + 2).$$

**Вариант 3.**

$$a = 0.9, \quad b = 0.4,$$

$$\Gamma_1(y) = tg^2 y, \quad \Gamma_3(y) = tg^2(y + 0.9), \quad \Gamma_2(x) = tg^2(x + 0.4),$$

$$\Gamma_4(x) = tg^2(x), \quad f(x, y) = 4 \cdot [3tg^2(x + y) + 1] \cdot [tg^2(x + y) + 1].$$

**Вариант 4.**

$$a = 3, \quad b = 2,$$

$$\Gamma_1(y) = \cos(2y + \cos(3y)), \quad \Gamma_3(y) = e^6 \cos(3y) + e^9 \cos(2y),$$

$$\Gamma_2(x) = \cos(4) \cdot e^{3x} + \cos(6) \cdot e^{2x}, \quad \Gamma_4(x) = e^{2x} + e^{3x},$$

$$f(x, y) = 5 \cdot e^{3x} \cdot \cos(2y) - 5 \cdot e^{2x} \cdot \cos(3y).$$

**Вариант 5.**

$$a = 6, \quad b = 0.8,$$

$$\Gamma_1(y) = 0, \quad \Gamma_3(y) = 36 \cdot \sin(y) + \sin(6) \cdot y^2,$$

$$\Gamma_2(x) = \sin(x) + \sin(1) \cdot x^2, \quad \Gamma_4(x) = 0,$$

$$f(x, y) = (2 - y^2) \cdot \sin(x) + (2 - x^2) \sin(y).$$

**Вариант 6.**

$$a = 3, \quad b = 5,$$

$$\Gamma_1(y) = -\cos(y), \quad \Gamma_3(y) = 62 \cos(y),$$

$$\Gamma_2(x) = \cos(5) \cdot (2x^3 + 3x - 1), \quad \Gamma_4(x) = 2x^3 + 3x - 1,$$

$$f(x, y) = (9x - 2x^3 + 1) \cdot \cos(y).$$

**Вариант 7.**

$$a = 3, \quad b = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = 5y \cdot (y - 1), \quad \Gamma_3(y) = 11y \cdot (y - 1),$$

$$\Gamma_2(x) = 12x \cdot (x - 1) + 60, \quad \Gamma_4(x) = 0,$$

$$f(x, y) = 2x \cdot (x - 1) + 2y \cdot (y - 1) + 10.$$

**Вариант 8.**

$$a = 2, \quad b = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = -y^3, \quad \Gamma_3(y) = -(y - 4) \cdot (y^2 - 2),$$

$$\Gamma_2(x) = -(x - 16) \cdot (x^2 - 4), \quad \Gamma_4(x) = -x^3,$$

$$f(x, y) = 2x \cdot (x - 3) + 2y \cdot (y - 3).$$

**Вариант 9.**

$$a = 5, \quad b = 2,$$

$$\Gamma_1(y) = -3y^3, \quad \Gamma_3(y) = -(y - 40) \cdot (3y^2 + 10),$$

$$\Gamma_2(x) = 2 \cdot (x + 6) \cdot (x^2 + 3x - 2), \quad \Gamma_4(x) = 2x^2 \cdot (x + 3),$$

$$f(x, y) = 6x \cdot (x + 5) + 6y \cdot (y - 3) + 12.$$

**Вариант 10.**

$$a = 6, \quad b = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = -(y^2 + 2), \quad \Gamma_3(y) = 35 \cdot (y^2 + 2),$$

$$\Gamma_2(x) = 18 \cdot (x^2 - 1), \quad \Gamma_4(x) = 2 \cdot (x^2 - 1),$$

$$f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + 1).$$

**Вариант 11.**

$$a = 4, \quad b = 3,$$

$$\Gamma_1(y) = \frac{\ln(4 - y)}{\ln(10)}, \quad \Gamma_3(y) = \frac{\ln(12 - y)}{\ln(10)},$$

$$\Gamma_2(x) = \frac{\ln(2x + 1)}{\ln(10)}, \quad \Gamma_4(x) = \frac{\ln(2x + 4)}{\ln(10)},$$

$$f(x, y) = \frac{5}{\ln(10) \cdot (2x - y + 4)^2}.$$

**Вариант 12.**

$$a = 2, \quad b = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = y, \quad \Gamma_3(y) = \sqrt{5} \cdot y,$$

$$\Gamma_2(x) = 4 \cdot \sqrt{x^2 + 1}, \quad \Gamma_4(x) = 0, \quad f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}.$$

**Вариант 13.**

$$a = 24, \quad b = 10,$$

$$\Gamma_1(y) = 20, \quad \Gamma_3(y) = 100,$$

$$\Gamma_2(x) = 20 + 80 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2, \quad \Gamma_4(x) = 20 + 80 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2, \quad f(x, y) = 0.$$

**Вариант 14.**

$$a = 6, \quad b = 5$$

$$\Gamma_1(y) = 10, \quad \Gamma_3(y) = 0,$$

$$\Gamma_2(x) = 10 - 10 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2, \quad \Gamma_4(x) = 10 - 10 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2, \quad f(x, y) = -40.$$

**Вариант 15.**

$$a = 2, \quad b = 1,$$

$$\Gamma_1(y) = \sin(3y), \quad \Gamma_3(y) = \sin(3y + 4),$$

$$\Gamma_2(x) = \sin(x^2 + 3), \quad \Gamma_4(x) = \sin(x^2),$$

$$f(x, y) = -(4x^2 + 9) \cdot \sin(x^2 + 3) + 2 \cos(x^2 + 3).$$

**Вариант 16.**

$$a = 12, \quad b = 8,$$

$$\Gamma_1(y) = \ln(y + 1), \quad \Gamma_3(y) = \ln(y + 25),$$

$$\Gamma_2(x) = \ln(2x + 9), \quad \Gamma_4(x) = (2x + 1),$$

$$f(x, y) = \frac{5}{\ln(10) \cdot (2x + y + 1)^2}.$$

**Вариант 17.**

$$a = 5, \quad b = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = y^2, \quad \Gamma_3(y) = \cos(5) \cdot y^2,$$

$$\Gamma_2(x) = 16 \cdot \cos(x), \quad \Gamma_4(x) = 0, \quad f(x, y) = -\cos(x) \cdot (y^2 - 2).$$

**Вариант 18.**

$$a = 1, \quad b = 3,$$

$$\Gamma_1(y) = 0, \quad \Gamma(y) = \ln(2) \cdot y,$$

$$\Gamma_2(x) = 3 \cdot \ln(x+1), \quad \Gamma_4(x) = 0, \quad f(x, y) = -\frac{y}{(x+1)^2}.$$

**Вариант 19.**

$$a = 1, \quad b = 1,$$

$$\Gamma_1(y) = y \cdot (9 - 5y), \quad \Gamma_3(y) = y \cdot (9 - 5y) + 12,$$

$$\Gamma_2(x) = x \cdot (5x + 7) + 4, \quad \Gamma_4(x) = x \cdot (5x + 7), \quad f(x, y) = 0.$$

**Вариант 20.**

$$a = 1, \quad b = 1,$$

$$\Gamma_1(y) = -4y^2, \quad \Gamma_3(y) = 4 \cdot (1 - y^2),$$

$$\Gamma_2(x) = 4 \cdot (x^2 - 1), \quad \Gamma_4(x) = -4x^2, \quad f(x, y) = 0.$$