

Задача 1. С помощью условий Коши-Римана проверить, в каких точках комплексной плоскости будут дифференцируемыми и в каких точках аналитическими функции:

- | | |
|---|---|
| Вар. 1. а) $w = z$. | б) $w = z \cdot z $. |
| Вар. 2. а) $w = z^{2+3i}$. | б) $w = z^2 \cdot \bar{z}$. |
| Вар. 3. а) $w = \operatorname{ctg} z$. | б) $w = \frac{z}{\bar{z}}$. |
| Вар. 4. а) $w = z^2$. | б) $w = z - 2 z $. |
| Вар. 5. а) $w = \operatorname{ch} z$. | б) $w = \frac{z}{1 + \bar{z}}$. |
| Вар. 6. а) $w = z^3$. | б) $w = z + \operatorname{Re} z - 2i \operatorname{Im} z$. |
| Вар. 7. а) $w = \frac{i-3}{z}$. | б) $w = z + 5 \cdot (\operatorname{Im} z)^2$. |
| Вар. 8. а) $w = 2^z$. | б) $w = z + z^2$. |
| Вар. 9. а) $w = \cos z$. | б) $w = z + z $. |
| Вар. 10. а) $w = \operatorname{tg} z$. | б) $w = \frac{z}{ z }$. |
| Вар. 11. а) $w = \operatorname{sh} z$. | б) $w = z \cdot \arg z$. |
| Вар. 12. а) $w = e^z$. | б) $w = z \cdot \bar{z}^2$. |
| Вар. 13. а) $w = \frac{1}{z^2}$. | б) $w = z + 3 \operatorname{Re} z$. |
| Вар. 14. а) $w = \sin z$. | б) $w = z + 2\bar{z}$. |
| Вар. 15. а) $w = \operatorname{th} z$. | б) $w = \bar{z}$. |
| Вар. 16. а) $w = \frac{1-i}{5z-7}$. | б) $w = z - 2 \operatorname{Im} z$. |
| Вар. 17. а) $w = \frac{1}{z}$. | б) $w = \bar{z} - 3z$. |
| Вар. 18. а) $w = \operatorname{Ln} z$. | б) $w = 3z + \arg z$. |
| Вар. 19. а) $w = \frac{1}{2z+i}$. | б) $w = z - 3i(\operatorname{Re} z)^2$. |
| Вар. 20. а) $w = \operatorname{cth} z$. | б) $w = e^{\bar{z}}$. |
| Вар. 21. а) $w = (2-2i)^z$. | б) $w = z - 5 \arg z$. |
| Вар. 22. а) $w = \frac{3+2i}{z^2}$. | б) $w = \operatorname{Re} z + i(2 \operatorname{Re} z + (\operatorname{Im} z)^2)$. |

Задача 2. Задана вещественная или мнимая часть функции $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$. Задания:

- а) убедиться, что заданная часть функции w является гармонической функцией;
 б) найти аналитическую функцию $w(z)$;

в) проверить, что $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ или $w'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$.

Вар. 1. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $w(1 + 2i) = 1 - i$.

Вар. 2. $v(x, y) = e^x (y \cos y + x \sin y)$, $w(\pi i) = 2 - i$.

Вар. 3. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $w(1 + i) = 2 - 3i$.

Вар. 4. $v(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$, $w\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 7 - 3i$.

Вар. 5. $u(x, y) = 2^x \cos(y \ln 2)$, $w(1) = 3 - 5i$.

Вар. 6. $v(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$, $w\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 + 5i$.

Вар. 7. $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$, $w(1 + 2i) = 2 + i$.

Вар. 8. $v(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, $w(2) = 1 + i$.

Вар. 9. $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $w(2i) = 3 - 2i$.

Вар. 10. $v(x, y) = 2xy + 3x$, $w(2i - 5) = 1 + i$.

Вар. 11. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$, $w(1 - i) = 3 + i$.

Вар. 12. $v(x, y) = 3e^x \sin y - x$, $w\left(1 + \frac{\pi}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} - i$.

Вар. 13. $v(x, y) = 5x - 2y$, $w(7 - 3i) = 6 + 5i$.

Вар. 14. $u(x, y) = -3^x \sin(y \ln 3)$, $w(2) = 3 - 2i$.

Вар. 15. $v(x, y) = y^3 - 3x^2y + 2x$, $w(3 - i) = 1 + 5i$.

Вар. 16. $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $w(-2i) = 2 + 3i$.

Вар. 17. $v(x, y) = \operatorname{ch} x \cos y$, $w(0) = 7 - 4i$.

Вар. 18. $v(x, y) = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$, $w(-1 + 2i) = 1 - 2i$.

Вар. 19. $u(x, y) = e^y \cos x$, $w(\pi) = 3 - 2i$.

Вар. 20. $u(x, y) = 2e^x \sin y$, $w\left(\frac{\pi}{2}i\right) = 3 - 2i$.

Вар. 21. $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$, $w(5 - 3i) = 1 + 4i$.

Вар. 22. $v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y$, $w\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5 - 4i$.

Задача 3. Дано отображение $w = w(z)$, где $z = x + iy$. Задания:

- а) найти угол поворота α и коэффициент растяжения k при заданном отображении в точках z_1 и z_2 ;
- б) определить, какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается при заданном отображении;
- в) определить, на какие линии плоскости w с помощью заданной функции отображаются следующие линии плоскости z : 1) $x = 0$; 2) $y = 0$; 3) $x = 1$; 4) $y = 1$ и 5) $x^2 + y^2 = 1$.

Вар. 1. $w = (z + i)^2$; $z_1 = 0$; $z_2 = 3 - 2i$.

Вар. 2. $w = \frac{1}{z + 1}$; $z_1 = 0$; $z_2 = 3 - 2i$.

Вар. 3. $w = e^z$; $z_1 = 0$; $z_2 = 1 - \pi i$.

Вар. 4. $w = \ln(z - 1)$; $z_1 = 0$; $z_2 = 3 - 2i$.

Вар. 5. $w = z^2 - 4z$; $z_1 = 0$; $z_2 = 2 + i$.

Вар. 6. $w = \frac{1}{z + i}$; $z_1 = 0$; $z_2 = 2 + i$.

Вар. 7. $w = e^{3z-1}$; $z_1 = 0$; $z_2 = 1 - \frac{\pi}{2}i$.

Вар. 8. $w = \ln(z + 3i)$; $z_1 = 0$; $z_2 = 1 - 2i$.

Вар. 9. $w = z^2 + 5z - i$; $z_1 = 0$; $z_2 = 2i - 3$.

Вар. 10. $w = \frac{1}{2z + 3i}$; $z_1 = 0$; $z_2 = 2 - i$.

Вар. 11. $w = e^{2-z}$; $z_1 = 0$; $z_2 = 1 - \frac{\pi}{3}i$.

Вар. 12. $w = \ln(z + 1 - 2i)$; $z_1 = 1$; $z_2 = 3 + 2i$.

Вар. 13. $w = z^3$; $z_1 = -i$; $z_2 = 2i - 3$.

Вар. 14. $w = (z - 1)^2 + 2i$; $z_1 = 0$; $z_2 = 3i - 5$.

Вар. 15. $w = \frac{3}{2 - z}$; $z_1 = 0$; $z_2 = 3i - 5$.

Вар. 16. $w = 2^z$; $z_1 = 0$; $z_2 = \frac{\pi}{4}i - 1$.

Вар. 17. $w = \ln(1 - 2z)$; $z_1 = 1$; $z_2 = 2 + \frac{3}{2}i$.

Вар. 18. $w = z^4$; $z_1 = -i$; $z_2 = 2i - 3$.

Вар. 19. $w = (3i - z)^2 + 5$; $z_1 = 0$; $z_2 = 4 + i$.

Вар. 20. $w = \frac{2}{1 - 3z}$; $z_1 = 0$; $z_2 = 4 + i$.

Вар. 21. $w = \ln(1 - i + z)$; $z_1 = -1$; $z_2 = 3i - 3$.

Вар. 22. $w = z^3 - 3z$; $z_1 = -i$; $z_2 = 4 + i$.