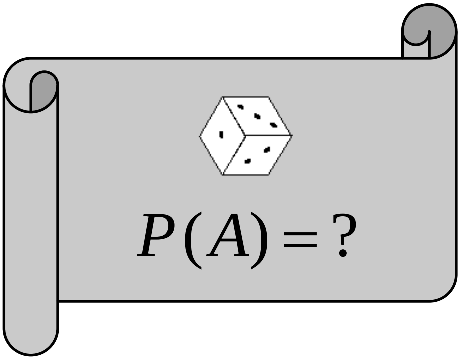
Н.М. ГУЛЕВИЧ, В.О. КУЗНЕЦОВ, М.Н. КУБЕНСКИЙ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург
Издательство ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова
2020

Федеральное агентство морского и речного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА
имени адмирала С. О. МАКАРОВА**

ИНСТИТУТ ВОДНОГО ТРАНСПОРТА
Кафедра высшей математики

Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов, М.Н. Кубенский

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие для студентов II курса технических и экономических специальностей и направлений бакалавриата очной формы обучения

Санкт-Петербург
Издательство ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова
2020

ББК 22.1
УДК 51
Б53

Б53 Н.М. Гулевич. Учебно-методическое пособие по теории вероятностей для студентов очного отделения технических и экономических специальностей и направлений бакалавриата по дисциплине «Математика». ¬ СПб, ГУМРФ, 2018 — 42 с.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования по направлениям подготовки

08.03.01 – Строительство

09.03.03 – Прикладная информатика

13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника

20.03.02 – Природообустройство и водопользование

23.03.01 - Технология транспортных процессов

23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов

26.03.01 – Управление водным транспортом и гидрографическое обеспечение судоходства

26.03.02 – Кораблестроение, океанотехника и системотехника объектов морской инфраструктуры

38.03.01 – Экономика

38.03.02 – Менеджмент

38.03.04 – Государственное и муниципальное управление

43.03.02 – Туризм

В пособии разобраны типовые задачи по теме «случайные события и величины» и даны образцы оформления решений этих задач с кратким перечнем необходимых формул.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов технических и экономических специальностей и направлений бакалавриата ГУМРФ.

Рекомендовано к изданию на заседании кафедры высшей математики.

Протокол № 2 от 29 октября 2019 г.

Рецензент:

Ястребов М.Ю., проф. кафедры высшей математики (ГУМРФ им. адм. С.О. Макарова).

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. *Некоторые определения и формулы*

Событие, наступление которого гарантируется условиями испытания, называется *достоверным* и обозначается Ω. Событие, которое не может наступить в условиях испытания, называется *невозможным* и обозначается $\varnothing$.

Если при наступлении события A событие B также наступает, то говорят, что событие A *благоприятствует* событию B или, что B есть *следствие* A и пишут $A \subset B$.

Событие, состоящее в том, что событие A не наступило, называется *противоположным* и обозначается $\overline{A}$.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в том, что **хотя бы одно** из этих событий наступило.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в том, что **все** эти события наступили (совместно).

События A и B *несовместны*, если $AB = \varnothing$.

События $A_1, \ldots, A_n$ образуют *полную группу*, если $A_1 + \cdots + A_n = \Omega$.

Некоторые свойства операций над событиями

1. $A + \overline{A} = \Omega$; **2.** $A\overline{A} = \varnothing$; **3.** $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$; **4.** $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

5. $\varnothing \subset A \subset A \subset \Omega$; **6.** $A \subset A + B$; **7.** $AB \subset A$.

Если $A \subset B$, то $AB = A$ и $A + B = B$. Поэтому:

8. $\varnothing A = \varnothing$; **9.** $AA = A$; **10.** $A\Omega = A$;

11. $\varnothing + A = A$; **12.** $A + A = A$; **13.** $A + \Omega = \Omega$.

Аксиомы теории вероятностей

1. Неотрицательность: $P(A) \geq 0$;

2. Нормированность: $P(\Omega) = 1$;

3. Аддитивность: если $A_1, A_2, \ldots$ — попарно несовместные события, то $P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$.

Следствия из аксиом

1. $P(\varnothing) = 0$; **2.** $0 \leq P(A) \leq 1$; **3.** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

4. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Формула классической вероятности

Если $B_1, \ldots B_n$ — полная группа попарно несовместных равновозможных исходов, m из которых благоприятствуют событию A, а остальные нет, то $P(A) = \frac{m}{n}$.

Формула гипергеометрического распределения вероятностей

Если m элементов множества A, состоящего из n элементов, обладают некоторым свойством X, а остальные $n - m$ элементов этим свойством не обладают, то вероятность того, что при случайном выборе k элементов множества A будет выбрано l элементов, обладающих свойством X, находится по формуле:

$$P(A) = \frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k},$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — число сочетаний из n элементов по m.

Теорема сложения вероятностей

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ — (для совместных событий);

$P(A+B)=P(A)+P(B)$ — для несовместных событий;

Условная вероятность

Вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B наступило, называется *условной* вероятностью и обозначается $P(A\,|\,B)$. По определению

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad (\,P(B)\neq 0\,).$$

Независимость событий

События A и B *независимы*, если $P(AB)=P(A)P(B)$. В этом случае $P(A\,|\,B)=P(A)$, $P(B\,|\,A)=P(B)$.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *независимы в совокупности*, если

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdot\ldots\cdot A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_k})$$

для любого набора $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$, содержащего k из этих событий, $k=2,3,\ldots,n$.

Теорема умножения вероятностей

$P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)$ — (для зависимых событий);

$P(ABC)=P(A)P(B\,|\,A)P(C\,|\,AB)$ — (для зависимых событий);

$P(AB)=P(A)P(B)$ — для независимых событий;

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ — для событий, независимых в совокупности.

Вероятность наступления хотя бы одного события

Вероятность наступления хотя бы одного из независимых в совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n).$$

Формула полной вероятности и формулы Бейеса

Если $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа попарно несовместных гипотез, то

$$P(H_1) + \cdots + P(H_n) = 1 \quad \text{(необходимое условие)};$$

для любого события A

$$P(A) = P(H_1)P(A | H_1) + \cdots + P(H_n)P(A | H_n)$$

(формула *полной вероятности*) и

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k)P(A | H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A | H_k)}{P(H_1)P(A | H_1) + \cdots + P(H_n)P(A | H_n)},$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, (формулы *Бейеса*).

Формула Бернулли

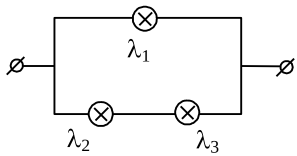
Пусть n_A — число появлений события A в серии из n испытаний, проводимых по схеме Бернулли. Тогда

$$p_n(k) = P\{n_A = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

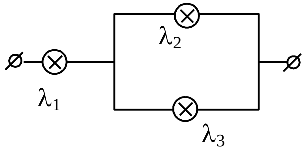
где p — это вероятность наступления события A в одном испытании, $q = 1 - p$.

2. *Задачи для самостоятельного решения*

1. Вероятность выхода из строя элементов электрической цепи, соответственно равна 0,1; 0,2; 0,3. Определить вероятность разрыва цепи.



2. Вероятность выхода из строя элементов электрической цепи, соответственно равна 0,2; 0,3; 0,4. Определить вероятность разрыва цепи.



3. В ящике 20 деталей, из которых 6 окрашены. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что, хотя бы одна из извлеченных деталей окрашена. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей не более одной окрашенной.

4. Два шара, вынутые наудачу из урны, содержащей 5 белых, 6 красных и 9 черных шаров, оказались одного цвета. Найти вероятность того, что вынуты красные шары.

5. Из урны, содержащей 5 белых, 6 красных и 9 черных шаров, последовательно вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара будут одного цвета.

6. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет 6 очков. Найти вероятность того, что игральную кость придется бросить не более пяти раз.

7. Игральную кость бросают до тех пор, пока число выпавших очков не будет кратно трем (очки не суммируются). Найти вероятность того, что требуемое число очков появится только при третьем броске.

8. Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет «орел». Найти вероятность того, что монету придется подбросить не более четырех раз. Найти вероятность того, что монету придется подбросить не менее трех раз.

9. Монета подбрасывается до тех пор, пока два раза подряд не выпадет «решка». Найти вероятность того, что монету придется подбросить не более трех раз. Найти вероятность того, что монету придется подбросить не менее четырех раз.

10. Два из трех независимо работающих элементов отказали. Найдите вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого второго и третьего элементов — соответственно 0,3; 0,2 и 0,1.

11. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность промаха для первого стрелка равна 0,1; для второго — 0,2; для третьего — 0,3. Найти вероятность того, что только один из стрелков поразит цель. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков промахнется.

12. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа внимание рабочего потребует первый станок, равна 0,2; второй — 0,3; третий — 0,4. Какова вероятность того, что в течение часа внимания рабочего потребуют не более двух станков?

13. В группе 10 отличных, 6 хороших и 4 посредственных стрелка. Отличный стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9; хороший — с вероятностью 0,8 и посредственный — с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что произвольно выбранный стрелок поразит мишень с первого выстрела?

14. В группе 10 отличных, 7 хороших и 3 посредственных стрелка. При одном выстреле отличный стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8; хороший — 0,7 и посредственный — с вероятностью 0,5. Произвольно выбранный стрелок поразил мишень с первого выстрела. Какова вероятность того, что стрелял посредственный стрелок?

15. В группе 3 хороших и 7 посредственных стрелков. Хороший стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8; посредственный — с вероятностью 0,5. Произвольно выбранный стрелок делает два выстрела. Какова вероятность того, что он оба раза промахнется?

16. Имеется три урны. В первой находится 7 белых и 3 черных шара, во второй — 5 белых и 4 черных шара, а в третьей — 8 белых шаров. Из наугад выбранной урны извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется черным?

17. Имеется три урны. В первой находится 7 белых и 3 черных шара, во второй — 5 белых и 4 черных шара, а в третьей — 8 белых. Шар, извлеченный наудачу из наугад выбранной урны, оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар излечен из второй урны.

18. Из урны, содержащей 7 белых и 3 черных шара наугад извлекают один шар и перекладывают во вторую урну, содержащую 5 белых и 4 черных шара. После чего извлекают шар из второй урны. Какова вероятность того, что этот шар окажется черным? Какова вероятность того, что извлеченные шары были одного цвета? Какова вероятность того, что извлеченные шары были разного цвета?

19. Из урны, содержащей 7 белых и 3 черных шара наугад извлекают один шар и перекладывают во вторую урну, содержащую 5 белых и 4 черных шара. Шар, извлеченный после этого из второй урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны был переложен черный шар?

20. На двух станках изготавливаются однотипные изделия. Производительность первого станка в 3 раза выше, чем второго. Из общего числа изделий, изготовленных на двух станках, мастер берет наугад 2 изделия. Чему равна вероятность того, что эти изделия изготовлены на одном станке?

21. 50% телевизоров, поступающих в продажу, производится на первом заводе, 30% на втором и 20% на третьем. Продукция 1-го завода содержит 15% телевизоров со скрытым дефектом, 2-го — 10% и 3-го — 5%. Купленный телевизор скрытых дефектов не имел. Какова вероятность того, что он произведен на третьем заводе?

22. В продажу поступают телевизоры, изготовленные на трех заводах. Продукция 1-го завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, 2-го — 15% и 3-го — 10%. Какова вероятность приобретения исправного телевизора, если 10% телевизоров, находящихся в магазине, произведены 1-м заводом, 20% — 2-м и 70% — 3-м?

23. Вероятность того, что наудачу взятая деталь удовлетворяет стандарту, равна 0,8. Найти вероятность того, что среди 6 наудачу взятых деталей не менее 2-х деталей не удовлетворяют стандарту. Найти вероятность того, что среди 6 наудачу взятых деталей не более 4-х удовлетворяет стандарту.

24. Стрельба производится по двум мишеням типа A, трем мишеням типа B и четырем мишеням типа C. Вероятность попадания в мишень типа A при одном выстреле равна 0,4; в мишень типа B — 0,6; в мишень типа C — 0,8. Наудачу выбранная мишень поражена с первого выстрела. Найти вероятность того, что поражена мишень типа A.

25. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет бракованной, равна 0,2. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,1. На первом станке было изготовлено 2 детали, а на втором — 3. Найти вероятность того, что среди этих деталей не более одной бракованной. Найти вероятность того, что из этих деталей только две являются стандартными.

26. Найти вероятность того, что при 10 подбрасываниях монеты «орел» появится не более 8 раз. Найти вероятность того, что при 10 подбрасываниях монеты «орел» появится не менее 2 раз.

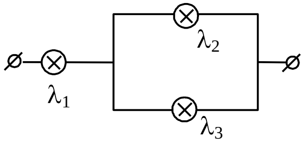
27. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

28. Чтобы поступить на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 69 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 69 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент A получит не менее 69 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,6, по иностранному языку — 0,6 и по обществознанию — 0,9. Найдите вероятность того, что абитуриент A сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

29. В магазине работают два продавца. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,4. Вероятность того, что оба продавца заняты — 0,3. Найдите вероятность того, что занят только один из продавцов. Найдите вероятность того, что оба продавца свободны.

3. *Решения задач*

1. Вероятность выхода из строя элементов λ_1, λ_2, λ_3 электрической цепи соответственно равна 0,3; 0,2; 0,1. Определить вероятность разрыва цепи.



Решение. Введем события: B — цепь разорвана; A_k — выход из строя k-го элемента, $k = 1,2.3$. Цепь будет разорвана, если наступит *хотя бы одно* из двух событий:

- выйдет из строя 1-й элемент;
- выйдут из строя 2-й и 3-й элементы *совместно*.

Поэтому $B = A_1 + A_2A_3$ и, поскольку события A_1, A_2, A_3 по смыслу задачи независимы в совокупности, то

$$P(B) = P(A_1 + A_2A_3) = P(A_1) + P(A_2A_3) - P(A_1A_2A_3) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 0{,}3 + 0{,}2\cdot 0{,}1 - 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}314\,.$$

2. В ящике 20 деталей, из которых 8 окрашены. Сборщик наудачу извлекает 6 деталей. Найти вероятность того, что окрашены не менее двух извлеченных деталей.

Решение. Пусть n_A — число извлеченных окрашенных деталей. Тогда

$$P\{n_A \ge 2\} = 1 - P\left(\overline{\{n_A \ge 2\}}\right) = 1 - P\{n_A < 2\} = 1 - P\left(\{n_A = 0\} + \{n_A = 1\}\right) =$$

$$= 1 - (P\{n_A = 0\} + P\{n_A = 1\}) = 1 - \left(\frac{C_{12}^6}{C_{20}^6} + \frac{C_8^1\cdot C_{12}^5}{C_{20}^6}\right) = 1 - \frac{121}{646} = \frac{525}{646}\,.$$

Здесь использована формула гипергеометрического распределения.

3. Два шара, вынутые наудачу из урны, содержащей 3 белых, 2 красных и 5 черных шаров, оказались одного цвета. Найти вероятность того, что вынуты белые шары.

Решение. Общее число шаров — 10. Введем события: A —вынуты шары одного цвета, B, C и D — вынуты два шара белого, красного и черного цветов соответственно. Тогда $A = B + C + D$, $B \subset A$ и, следовательно, $AB = B$. Поскольку события B, C и D попарно несовместны, то

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} + \frac{C_2^2}{C_{10}^2} + \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{3+1+10}{45} = \frac{14}{45}.$$

Следовательно,

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{3}{45} : \frac{14}{45} = \frac{3}{14}.$$

4. Игральная кость бросают до тех пор, пока не выпадет «шестерка». Найти вероятность того, что

a) игральную кость придется бросить четыре раза.

b) Найти вероятность того, что игральную кость придется бросить не более шести раз.

Решение. Пусть n_A — число сделанных бросков, и пусть B_k — событие, состоящее в том, что при k-м броске выпала «шестерка».

a) Событие $\{n_A = 4\}$ наступит в том случае, когда при первых трех бросках «шестерки» не будет, а при четвертом «шестерка» выпадет, т.е. $\{n_A = 4\} = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 B_4$. Поэтому

$$P\{n_A = 4\} = P(\bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 B_4) = P(\bar{B}_1) P(\bar{B}_2) P(\bar{B}_3) P(B_4) =$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^3}{6^4} = \frac{125}{1296} = 0{,}096\ldots$$

b) Имеем $P\{n_A \le 6\} = 1 - P\{n_A > 6\}$. Событие $\{n_A > 6\}$ наступит только в том случае, когда при первых шести бросках «шестерки» не будет, т.е. $\{n_A > 6\} = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4 \bar{B}_5 \bar{B}_6$. Поэтому

$$P\{n_A > 6\} = P(\bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4 \bar{B}_5 \bar{B}_6) = P(\bar{B}_1) P(\bar{B}_2) P(\bar{B}_3) P(\bar{B}_4) P(\bar{B}_5) P(\bar{B}_6) =$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^6}{6^6} = \frac{15625}{46656} = 0{,}335\ldots \approx \frac{1}{3};$$

$$P\{n_A \le 6\} = 1 - P\{n_A > 6\} = 1 - \frac{15625}{46656} = \frac{31031}{46656} = 0{,}665\ldots \approx \frac{2}{3}\,.$$

5. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность промаха для первого стрелка равна 0,2; для второго — 0,1; для третьего — 0,3.

a) Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков поразит цель.

b) Только два стрелка поразили цель. Найти вероятность того, что цель поразили второй и третий стрелки.

c) Два стрелка поразили цель. Найти вероятность того, что второй и третий стрелки цель поразили.

Решение. Введем события: B — хотя бы один из стрелков поразил цель; C — только два стрелка поразили цель; D — два стрелка поразили цель; E — второй и третий стрелки цель поразили; A_k — k-й стрелок поразил цель, $k = 1,2,3$.

a) Поскольку $B = A_1 + A_2 + A_3$, то по формуле наступления хотя бы одного события

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}994\,.$$

b) Имеем $C = \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3$, $E = A_2 A_3$. События $\bar{A}_1 A_2 A_3$, $A_1 \bar{A}_2 A_3$, $A_1 A_2 \bar{A}_3$ — попарно несовместны. Поэтому

$$P(C) = P\left(\bar{A}_1 A_2 A_3\right) + P\left(A_1 \bar{A}_2 A_3\right) + P\left(A_1 A_2 \bar{A}_3\right) =$$

$$= P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) =$$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}398\,.$$

Далее $CE = \left(\bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3\right) A_2 A_3 = \bar{A}_1 A_2 A_3$. Поэтому

$$P(E \mid C) = \frac{P(EC)}{P(C)} = \frac{P(\bar{A}_1 A_2 A_3)}{P(C)} = \frac{0{,}126}{0{,}398} = \frac{63}{199}\,.$$

c) Из того, что два стрелка цель поразили, не следует, что кто-то из стрелков промахнулся! Поэтому

$$D = \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 A_2 A_3 = C + A_1 A_2 A_3\,;$$

$$P(D) = P(C) + P(A_1 A_2 A_3) = P(C) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}398 + 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}902\,.$$

Далее $P(E)=P(A_2A_3)=P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}9\cdot 0{,}7=0{,}63$. Поскольку событие E благоприятствует событию D ($E\subset D$), то $ED=E$. Поэтому

$$P(E\,|\,D)=\frac{P(ED)}{P(D)}=\frac{P(E)}{P(D)}=\frac{0{,}63}{0{,}902}=\frac{315}{451}\,.$$

6. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет бракованной, равна 0,1. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,2. На первом станке было изготовлено 4 детали, а на втором — 2. Найти вероятность того, что среди этих деталей не более одной бракованной.

Решение. Введем события: A — среди изготовленных деталей не более одной бракованной; B_k — на первом станке изготовлено k бракованных деталей; C_k — на втором станке изготовлено k бракованных деталей. Событие A наступит только в двух случаях:

- среди деталей, изготовленных на первом станке бракованных нет, а на втором — не более одной бракованной детали;

- среди деталей, изготовленных на первом станке 1 бракованная деталь, а на втором — все детали стандартные.

Следовательно, применяя, далее, формулу Бернулли

$$A=B_0\bar{C}_2+B_1C_0\,;$$

$$P(A)=P(B_0\bar{C}_2+B_1C_0)=P(B_0\bar{C}_2)+P(B_1C_0)=$$

$$=P(B_0)\big(1-P(C_2)\big)+P(B_1)P(C_0)=$$

$$=C_4^0(0{,}1)^0(0{,}9)^4\Big(1-C_2^2(0{,}2)^2(0{,}8)^0\Big)+C_4^1(0{,}1)^1(0{,}9)^3\cdot C_2^0(0{,}2)^0(0{,}8)^2=$$

$$=(0{,}9)^4(1-(0{,}2)^2)+4\cdot 0{,}1\cdot(0{,}9)^3\cdot(0{,}8)^2=0{,}816\ldots$$

7. В группе 5 отличных и 15 хороших стрелков. Отличный стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9; хороший — 0,7. Какова вероятность того, что произвольно выбранный стрелок поразит мишень (с первого выстрела)?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что стрелок поразил мишень. Введем гипотезы: H_1 — стрелял отличный стрелок, H_2 — стрелял хороший стрелок. Тогда

$$P(H_1)=\frac{5}{20};\;\; P(H_2)=\frac{15}{20};\;\; P(H_1)+P(H_2)=1$$

и по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A\,|\,H_1)+P(H_2)P(A\,|\,H_2)=$$

$$=\frac{5}{20}\cdot 0{,}9+\frac{15}{20}\cdot 0{,}7=\frac{3}{4}.$$

8. Имеется две урны. В первой находится 5 белых и 4 черных шара, во второй — 6 белых и 3 синих. Из наугад выбранной урны извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что извлечен белый шар. Введем гипотезы: H_k — шар извлечен из k-й урны, $k=1,2$. Тогда

$$P(H_1)=\frac{1}{2};\;\; P(H_2)=\frac{1}{2};\;\; P(H_1)+P(H_2)=1;$$

$$P(A)=P(H_1)P(A\,|\,H_1)+P(H_2)P(A\,|\,H_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}=\frac{11}{18}.$$

9. На двух станках изготавливаются одинаковые детали. Производительность первого станка в 4 раза выше, чем второго. Из общего числа изделий, изготовленных на двух станках за одно и то же время, берут наугад 2 детали. Чему равна вероятность того, что они изготовлены на одном станке? Чему равна вероятность того, что они изготовлены на разных станках?

Решение. Введем события: A — обе детали изготовлены на одном станке; B — детали изготовлены на разных станках. Можем считать, что детали выбираются последовательно. Введем гипотезы: H_k — первая деталь изготовлена на k-м станке, $k=1,2$. Поскольку производительность первого станка в 4 раза выше, то число деталей, изготовленных на 1-м станке в 4 раза больше, чем на втором, и, следовательно, $P(H_1)=\frac{4}{1+4}=\frac{4}{5}$, $P(H_2)=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$. $P(H_1)+P(H_2)=1$. По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)\,.$$

Здесь $P(A|H_k)$ равна вероятности того, что вторая деталь *тоже* изготовлена на k-м станке. По смыслу задачи число изготовленных деталей велико, поэтому $P(A|H_k)=P(H_k)$, $k=1,2$. Значит

$$P(A)=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{17}{25}\,.$$

Аналогично,

$$P(B)=P(H_1)P(B|H_1)+P(H_2)P(B|H_2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{25}\,.$$

Здесь $P(B|H_1)$ равна вероятности того, что вторая деталь изготовлена на 2-м станке и, следовательно, $P(B|H_1)=P(H_2)$. Аналогично, $P(B|H_2)=P(H_1)$.

Замечание. Поскольку $B=\overline{A}$, то $P(B)$ можно найти так: $P(B)=1-P(A)=1-\frac{17}{25}=\frac{8}{25}$.

10. 40% машин производится на первом заводе, 50% — на втором и 10% — на третьем. Продукция 1-го завода содержит 1% машин с дефектом, 2-го — 2% и 3-го — 0,5%. Купленная машина дефектов не имела. Какова вероятность того, что она произведена на втором заводе?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что купленная машина дефектов не имеет. Введем гипотезы: H_k — купленная машина изготовлена на k-м заводе, $k=1,2,3$. Тогда

$$P(H_1)=0{,}4;\;\; P(H_2)=0{,}5;\;\; P(H_3)=0{,}1;\;\; P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1\,;$$

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=$$

$$=0{,}4\cdot 0{,}99+0{,}5\cdot 0{,}98+0{,}1\cdot 0{,}995=0{,}9855\,.$$

По формуле Бейеса получаем

$$P(H_2\,|\,A)=\frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}98}{0{,}9855}=0{,}4972...$$

11. Из урны, содержащей 2 белых и 8 черных шаров, извлекают наудачу один шар и перекладывают в урну, в которой находится 3 белых и 6 синих шаров. После чего из второй урны наудачу также извлекают один шар. Какова вероятность того, что извлекались шары разного цвета?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что извлекались шары разного цвета. Введем гипотезы: H_1 и H_2 — первый вынутый шар был белого и черного цветов соответственно. Тогда

$$P(H_1)=\frac{2}{10};\;\; P(H_2)=\frac{8}{10};\;\; P(H_1)+P(H_2)=1.$$

$P(A|H_1)$ — это вероятность вытащить из урны, содержащей 4 белых и 6 синих шаров, шар синего цвета $\Rightarrow$ $P(A|H_1)=\frac{6}{10}$; Аналогично, $P(A|H_2)$ — это вероятность вытащить из урны, содержащей 1 черный, 3 белых и 6 синих шаров, шар синего или белого цветов $\Rightarrow$ $P(A|H_1)=\frac{9}{10}$. Поэтому

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{2}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{8}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{84}{100}=0{,}84.$$

12. Стрельба производится по двум мишеням типа A, трем мишеням типа B и пяти мишеням типа C. Вероятность попадания в мишень типа A при одном выстреле равна 0,5; в мишень типа B — 0,6; в мишень типа C — 0,7. Наудачу выбранная мишень поражена с первого выстрела. Найти вероятность того, что выбрана мишень типа B.

Решение. Пусть D — событие, состоящее в том, что выбранная мишень поражена с первого выстрела. Общее число мишеней — $2+3+5=10$. Введем гипотезы: H_1, H_2 и H_3 — выбрана мишень типа A, B и C соответственно. Тогда

$$P(H_1)=\frac{2}{10};\;\; P(H_2)=\frac{3}{10};\;\; P(H_3)=\frac{5}{10};\;\; P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1;$$

$$P(D)=P(H_1)P(D|H_1)+P(H_2)P(D|H_2)+P(H_3)P(D|H_3)=$$

$$=\frac{2}{10}\cdot 0{,}5+\frac{3}{10}\cdot 0{,}6+\frac{5}{10}\cdot 0{,}7=0{,}54;$$

$$P(H_2 \mid D) = \frac{P(H_2)P(D \mid H_2)}{P(D)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6}{0{,}54} = \frac{1}{3}.$$

13. Найти вероятность того, что при 8 подбрасываниях монеты орел выпадет не менее 2 раз.

Решение. Пусть n_A — число выпавших орлов. Тогда

$$P\{n_A \geq 2\} = 1 - P\left(\overline{\{n_A \geq 2\}}\right) = 1 - P\{n_A < 2\} = 1 - P\left(\{n_A = 0\} + \{n_A = 1\}\right) =$$

$$= 1 - (P\{n_A = 0\} + P\{n_A = 1\}) = 1 - \left(p_8(0) + p_8(1)\right) =$$

$$= 1 - \left(C_8^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^7\right) = 1 - \frac{\left(C_8^0 + C_8^1\right)}{2^8} = 1 - \frac{1+8}{256} = \frac{247}{256}.$$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. *Некоторые определения и формулы*

Функция распределения

Функция распределения случайной величины X определена на всей числовой оси формулой $F(x) = P\{X < x\}$.

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$;

2. $P\{a \le X < b\} = P\{X \in [a,b)\} = F(b) - F(a)$;

3. $F(x)$ не убывает на $(-\infty, +\infty)$, т.е. $F(a) \le F(b)$ при $a < b$;

4. $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$;

5. Функция $F(x)$ непрерывна слева: $F(x-0) = F(x)$;

6. Если все значения случайной величины принадлежат промежутку $[a,b]$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x > b$.

Дискретные случайные величины (ДСВ)

Случайная величина X является *дискретной*, если множество всех ее возможных значений можно представить в виде конечной или бесконечной последовательности $x_1, x_2, \ldots$, такой, что $p_k = P\{X = x_k\} > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ [1])
Закон соответствия $x_k \mapsto p_k$, записанный в виде таблицы

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_k	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

($x_1 < x_2 < \cdots < x_n$), называется рядом распределения ДСВ X.

Свойство ряда распределения: $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

[1]) Мы ограничимся ДСВ с конечным множеством значений.

Если множество значений ДСВ конечно, то функция распределения этой случайной величины кусочно-постоянна.

Непрерывные случайные величины (НСВ)

Случайная величина X является *непрерывной*, если существует неотрицательная на $(-\infty, +\infty)$ функция $f(x)$, называемая *плотностью распределения*, такая что $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. [2])

Свойства непрерывной случайной величины:

1. $F(x)$ непрерывна на всей оси;
2. $F'(x) = f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$;
3. $P\{X = a\} = 0$ для любого $a \in (-\infty, +\infty)$;
4. $P\{X \in \langle a, b \rangle\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$;
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Математическое ожидание

Математическое ожидание случайной величины характеризует ее среднее значение и выражается формулами:

- $MX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ — для ДСВ;
- $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ — для НСВ.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

Дисперсия случайной величины характеризует величину разброса ее значений и выражается формулой: $DX = M(X - MX)^2$.

---

[2]) Для наших целей достаточно предполагать, что функция $f(x)$ непрерывна на всей оси, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

Свойства дисперсии:

1. $DX \geq 0$; 2. $DX = M\left(X^2\right) - (MX)^2$.

Таким образом,

- $DX = \sum_{k=1}^{n}(x_k - MX)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k - (MX)^2$ — для ДСВ;
- $DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - MX)^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2$ — для НСВ.

Если все возможные значения случайной величины X принадлежат промежутку $[a, b]$, то $MX \in [a, b]$, $DX \leq \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины также характеризует величину разброса ее значений и выражается формулой: $\sigma X = \sqrt{DX}$. В отличие от дисперсии имеет ту же размерность, что и исходная случайная величина.

Мода и медиана

Модой M_o ДСВ называют ее наиболее вероятное значение; *модой* НСВ называют значение аргумента, при котором плотность распределения имеет максимум. *Медианой* m случайной величины называют значение аргумента m такое, что $F(m) \leq \frac{1}{2} \leq F(m+0)$.

2. *Задачи для самостоятельного решения*

Дискретные случайные величины

Задание: Составить ряд распределения случайной величины X, построить график функции распределения, найти математическое ожидание, моду, медиану, дисперсию, и среднее квадратическое отклонение.

1. В аудитории 5 ламп. Студент последовательно включает их до тех пор, пока не найдет исправную лампу. Для любой лампы вероятность того, что она исправна, равна 0,8. X — число включенных ламп.

2. В аудитории 6 ламп. Студент последовательно включает их до тех пор, пока не найдет неисправную лампу. Для любой лампы вероятность того, что она исправна, равна 0,8. X — число ламп, оставшихся не включенными.

3. В урне 3 белых и 5 черных шара. Из урны вытаскивают 4 шара. X — число вытащенных черных шаров.

4. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из урны последовательно вытаскивают по одному шару до тех пор, пока не будет вытащен черный шар. X — число вытащенных шаров.

5. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны последовательно вытаскивают по одному шару до тех пор, пока не будет вытащен черный шар. X — число шаров, оставшихся в урне.

6. В урне 4 белых и 2 черных шара. Из урны вытаскивают 4 шара. X — произведение числа вытащенных черных шаров на число вытащенных белых шаров.

7. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из урны вытаскивают 4 шара. X — разность между числом вытащенных черных шаров и числом вытащенных белых шаров.

8. Некто делает 5 выстрелов в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле — 0,6. X — произведение числа попаданий на число промахов.

9. Некто делает 5 выстрелов в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле — 0,6. X — разность между числом попаданий и числом промахов.

10. Некто, имея 4 патрона, стреляет в мишень до первого попадания. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле — 0,6. X — число сделанных выстрелов.

11. Некто, имея 5 патронов, стреляет в мишень до первого попадания. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле — 0,7. X — число неизрасходованных патронов.

Непрерывные случайные величины

Задание: Найти значения параметров $(a,b,c,\ldots)$, плотность распределения $f(x)$, функцию распределения $F(x)$, построить их графики. Найти математическое ожидание, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и указанные в задаче вероятности.

1. $f(x)=\begin{cases}1+\lambda x, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right];\\ 0, & x\notin\left[0,\frac{1}{2}\right].\end{cases}$ $P\left\{X>\frac{1}{4}\right\}=?$ $P\left\{X\in\left[\frac{1}{4},1\right]\right\}=?$

2. $f(x)=\begin{cases}\lambda x, & x\in[1,2];\\ 0, & x\notin[1,2].\end{cases}$ $P\left\{X\in\left[-1,\frac{3}{2}\right]\right\}=?$ $P\left\{X>\frac{3}{2}\right\}=?$

3. $f(x)=\begin{cases}\lambda+x, & x\in[1,2];\\ 0, & x\notin[1,2].\end{cases}$ $P\left\{X\in\left[-1,\frac{3}{2}\right]\right\}=?$ $P\left\{X>\frac{3}{2}\right\}=?$

4. $f(x)=\begin{cases}\lambda+x^2, & x\in[-1,1];\\ 0, & x\notin[-1,1].\end{cases}$ $P\{X\in[0,3]\}=?$ $P\{X>0\}=?$

5. $f(x)=\begin{cases}\lambda x+x^2, & x\in[0,1];\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$ $P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=?$ $P\left\{X\in\left[\frac{1}{2},2\right]\right\}=?$

6. $f(x)=\begin{cases}\lambda, & x\in[0,1];\\ 2\lambda, & x\in(1,2];\\ 0, & x\notin[0,2].\end{cases}$ $P\{X\in[1,3]\}=?$ $P\{X>1\}=?$

7. $f(x)=\begin{cases}\frac{\lambda}{x}, & x\in[1,e^2];\\ 0, & x\notin[1,e^2].\end{cases}$ $P\{X\in[0,e]\}=?$ $P\{X>e\}=?$

8. $f(x)=\begin{cases}\lambda\cos x, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];\\ 0, & x\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$ $P\{X>0\}=?$ $P\{X\in[-\pi,0]\}=?$

9. $f(x)=\begin{cases}\lambda\sin 2x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\\ 0, & x\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$ $P\left\{X>\frac{\pi}{4}\right\}=?$ $P\left\{X\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right\}=?$

10. $f(x)=\begin{cases}12x^2, & x\in[-\lambda,\lambda];\\ 0, & x\notin[-\lambda,\lambda].\end{cases}$ $\quad P\{X\in[0,2\lambda]\}=?\quad P\{X>0\}=?$

11. $f(x)=\begin{cases}\lambda\left(x-\dfrac{1}{x^3}\right), & x\in[1,3];\\ 0, & x\notin[1,3].\end{cases}$ $\quad P\{X\in[-1,2]\}=?\quad P\{X>2\}=?$

12. $F(x)=\begin{cases}a, & x<1;\\ cx+bx^2, & x\in[1,3);\\ d, & x\geq 3.\end{cases}$ $\quad P\{X\in[-1,2]\}=?\quad P\{X>2\}=?$

13. $F(x)=\begin{cases}a, & x<-1;\\ c+bx^3, & x\in[-1,1);\\ d, & x\geq 1.\end{cases}$ $\quad P\{X\in[-2,0]\}=?\quad P\{X>0\}=?$

14. $F(x)=\begin{cases}a, & x<1;\\ cx+\dfrac{b}{x}, & x\in[1,3);\\ d, & x\geq 3.\end{cases}$ $\quad P\{X\in[2,5]\}=?\quad P\{X>2\}=?$

15. $F(x)=\begin{cases}a, & x<-3;\\ c+\dfrac{b}{x^2}, & x\in[-3,-1);\\ d, & x\geq -1.\end{cases}$ $\quad P\{X\in[-2,4]\}=?\quad P\{X>-2\}=?$

16. $F(x)=\begin{cases}a, & x<-\pi;\\ c+b\sin\dfrac{x}{2}, & x\in[-\pi,\pi);\\ d, & x\geq \pi.\end{cases}$ $\quad P\{X\in[-2\pi,0]\}=?\quad P\{X>0\}=?$

17. $F(x)=\begin{cases}a+\dfrac{b}{x^3}, & x<-1;\\ c, & x\geq -1.\end{cases}$ $\quad P\{X\in[-2,0]\}=?\quad P\{X>-2\}=?$

18. $F(x)=\begin{cases} a+\dfrac{b}{(x-1)^3}, & x<0; \\ c, & x\ge 0. \end{cases}$ $\quad P\{X\in[-2,1]\}=?\quad P\{X>-1\}=?$

19. $f(x)=\begin{cases} \lambda(1+x), & x\in[-1,0]; \\ 0, & x\notin[-1,0]. \end{cases}$ $\quad P\left\{X>-\frac{1}{2}\right\}=?\quad P\left\{X\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right\}=?$

20. $f(x)=\begin{cases} \lambda\left(x^2+1\right), & x\in[-2,2]; \\ 0, & x\notin[-2,2]. \end{cases}$ $\quad P\{X\in[0,3]\}=?\quad P\{X>0\}=?$

21. $f(x)=\begin{cases} \lambda x^2, & x\in[-2,2]; \\ 0, & x\notin[-2,2]. \end{cases}$ $\quad P\{X\in[0,3]\}=?\quad P\{X>0\}=?$

22. $f(x)=\begin{cases} \lambda x(x+1), & x\in[0,2]; \\ 0, & x\notin[0,2]. \end{cases}$ $\quad P\{X\in[1,3]\}=?\quad P\{X>1\}=?$

23. $f(x)=\begin{cases} x+\lambda x^2, & x\in[0,1]; \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$ $\quad P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=?\quad P\left\{X\in\left[\frac{1}{2},2\right]\right\}=?$

24. $f(x)=\begin{cases} \lambda|x|, & x\in[-2,2]; \\ 0, & x\notin[-2,2]. \end{cases}$ $\quad P\{X\in[0,3]\}=?\quad P\{X>0\}=?$

25. $f(x)=\begin{cases} \lambda\sin x, & x\in[0,\pi]; \\ 0, & x\notin[0,\pi]. \end{cases}$ $\quad P\left\{X>\frac{\pi}{2}\right\}=?\quad P\left\{X\in\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]\right\}=?$

26. $f(x)=\begin{cases} \lambda e^x, & x\in[0,2]; \\ 0, & x\notin[0,2]. \end{cases}$ $\quad P\{X\in[-1,1]\}=?\quad P\{X>1\}=?$

27. $f(x)=\begin{cases} \lambda\cos\frac{x}{2}, & x\in[-\pi,\pi]; \\ 0, & x\notin[-\pi,\pi]. \end{cases}$ $\quad P\{X>0\}=?\quad P\{X\in[-2\pi,0]\}=?$

28. $f(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,\lambda];\\ 0, & x\notin[0,\lambda].\end{cases}$ $P\left\{X\in\left[\frac{\lambda}{2},2\lambda\right]\right\}=?$ $P\left\{X>\frac{\lambda}{2}\right\}=?$

29. $f(x)=\begin{cases}\lambda\left(x+\frac{1}{x^2}\right), & x\in[2,4];\\ 0, & x\notin[2,4].\end{cases}$ $P\{X\in[0,3]\}=?$ $P\{X>3\}=?$

30. $F(x)=\begin{cases}a, & x<-3;\\ c+bx^2, & x\in[-3,-1);\\ d, & x\geq -1.\end{cases}$ $P\{X\in[-2,4]\}=?$ $P\{X>-2\}=?$

31. $F(x)=\begin{cases}a, & x<2;\\ cx+bx^3, & x\in[2,4);\\ d, & x\geq 4.\end{cases}$ $P\{X\in[-1,3]\}=?$ $P\{X>3\}=?$

32. $F(x)=\begin{cases}a, & x<1;\\ cx^2+bx^3, & x\in[1,3);\\ d, & x\geq 3.\end{cases}$ $P\{X\in[-1,2]\}=?$ $P\{X>2\}=?$

33. $F(x)=\begin{cases}a, & x<1;\\ cx^2+\frac{b}{x}, & x\in[1,3);\\ d, & x\geq 3.\end{cases}$ $P\{X\in[-1,2]\}=?$ $P\{X>2\}=?$

34. $F(x)=\begin{cases}a, & x<0;\\ c+b\cos\frac{x}{2}, & x\in[0,2\pi);\\ d, & x\geq 2\pi.\end{cases}$ $P\{X\in[-2\pi,\pi]\}=?$ $P\{X>\pi\}=?$

35. $F(x)=\begin{cases}a, & x<1;\\ c+\frac{b}{x^3}, & x\geq 1.\end{cases}$ $P\{X\in[-2,2]\}=?$ $P\{X>2\}=?$

36. $F(x)=\begin{cases} a, & x<0; \\ c+\dfrac{b}{(x+1)^4}, & x\ge 0. \end{cases}$ $\quad P\{X\in[-1,1]\}=?\quad P\{X>1\}=?$

3. *Решения задач*

Во всех задачах на ДСВ требуется составить ряд распределения случайной величины X, построить график функции распределения, найти математическое ожидание, моду, медиану, дисперсию, и среднее квадратическое отклонение.

1. Четыре прибора испытываются последовательно на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, когда предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,6. X — число испытанных приборов.

Решение. Пусть A_k — событие, состоящее в том, что k-й прибор оказался надежным. Тогда

$P\{X=1\}=P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=0,4$;

$P\{X=2\}=P(A_1\overline{A_2})=P(A_1)(1-P(A_2))=0,6\cdot 0,4=0,24$;

$P\{X=3\}=P(A_1A_2\overline{A_3})=P(A_1)P(A_2)(1-P(A_3))=0,6\cdot 0,6\cdot 0,4=0,144$;

$P\{X=4\}=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0,6^3=0,216$.

Проверка: $0,4+0,24+0,144+0,216=1$.

X	1	2	3	4
p_k	0,4	0,24	0,144	0,216

Ищем функцию распределения.

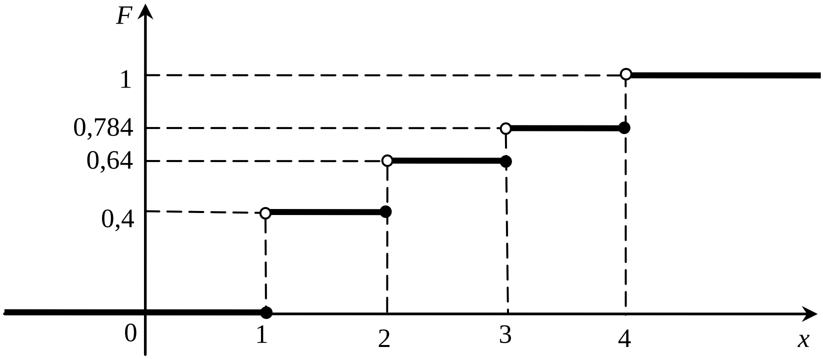
a). $x\le 1 \Rightarrow F(x)=P\{X<x\}=P(\varnothing)=0$;

b). $x\in(1,2] \Rightarrow F(x)=P\{X<x\}=P\{X=1\}=0,4$;

c). $x \in (2,3] \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P(\{X = 1\} + \{X = 2\}) = = 0,4 + 0,24 = 0,64$;

d). $x \in (3,4] \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P(\{X \le 2\} + \{X = 3\}) =$
$= 0,64 + 0,144 = 0,784$;

e). $x > 4 \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P(\Omega) = 1$.



$MX = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot 0,144 + 4 \cdot 0,216 = 2,176 \in [1,4]$.

$M(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,24 + 3^2 \cdot 0,144 + 4^2 \cdot 0,216 = 6,112$.

$DX = M(X^2) - (MX)^2 = 6,112 - (2,176)^2 \approx 1,377 < (4-1)^2 / 4 = 2,25$.

$\sigma X = \sqrt{DX} \approx 1,173$.

$\max\{p_k\} = 0,4 = P\{X = 1\} \Rightarrow M_o = 1$.

$F(2) = 0,4 < 1/2 < F(2+0) = 0,64 \Rightarrow m = 2$.

2. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны вытаскивают 3 шара. X — число вытащенных белых шаров.

Решение. Вероятности находим по формуле гипергеометрического распределения.

$$P\{X = 0\} = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1 \cdot 20}{120} = \frac{1}{6}; \quad P\{X = 1\} = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4 \cdot 15}{120} = \frac{1}{2};$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{6 \cdot 6}{120} = \frac{3}{10}; \quad P\{X = 3\} = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4 \cdot 1}{120} = \frac{1}{30}$$

Проверка: $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=1$.

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Ищем функцию распределения.

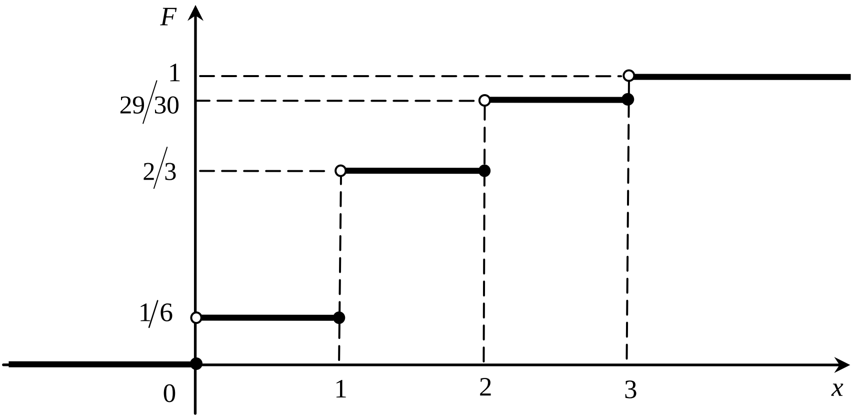
a). $x \le 0 \;\Rightarrow\; F(x)=P\{X<x\}=P(\varnothing)=0$;

b). $x \in (0,1] \;\Rightarrow\; F(x)=P\{X<x\}=P\{X=0\}=1/6$;

c). $x \in (1,2] \;\Rightarrow\; F(x)=P\{X<x\}=P(\{X=0\}+\{X=1\})=2/3$;

d). $x \in (2,3] \;\Rightarrow\; F(x)=P\{X<x\}=P(\{X\le 1\}+\{X=2\})=$
$=2/3+3/10=29/30$;

e). $x>4 \;\Rightarrow\; F(x)=P\{X<x\}=P(\Omega)=1$.



$MX=0\cdot 1/6+1\cdot 1/2+2\cdot 3/10+3\cdot 1/30=6/5\in[0,3]$.

$M(X^2)=0^2\cdot 1/6+1^2\cdot 1/2+2^2\cdot 3/10+3^2\cdot 1/30=2$.

$DX=M(X^2)-(MX)^2=2-(6/5)^2=14/25<(3-0)^2/4=2{,}25$.

$\sigma X=\sqrt{DX}=\sqrt{14}/5$.

$\max\{p_k\} = 1/2 = P\{X = 1\} \Rightarrow M_o = 1$.

$F(1) = 1/6 < 1/2 < F(1+0) = 2/3 \Rightarrow m = 1$.

3. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны последовательно вытаскивают по одному шару, пока не будет вытащено два белых шара. X — число вытащенных шаров.

Решение. Пусть A_k — событие, состоящее в том, что k-й вытащенный шар оказался белым, B_k — событие, состоящее в том, что среди первых k вытащенных шаров только один белый шар. Вероятности событий B_k находим по формуле гипергеометрического распределения. Имеем

$$P\{X = 2\} = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5};$$

$$P\{X = 3\} = P(B_2 A_3) = P(B_2)P(A_3 \mid B_2) = \frac{C_3^1 \cdot C_3^1}{C_6^2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3 \cdot 3}{15} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10};$$

$$P\{X = 4\} = P(B_3 A_4) = P(B_3)P(A_4 \mid B_3) = \frac{C_3^1 \cdot C_3^2}{C_6^3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{20} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{10};$$

$$P\{X = 5\} = P(B_4) = P(B_4) = \frac{C_3^1 \cdot C_3^3}{C_6^4} = \frac{3 \cdot 1}{15} = \frac{1}{5};$$

Проверка: $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = 1$.

X	2	3	4	5
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

Ищем функцию распределения.

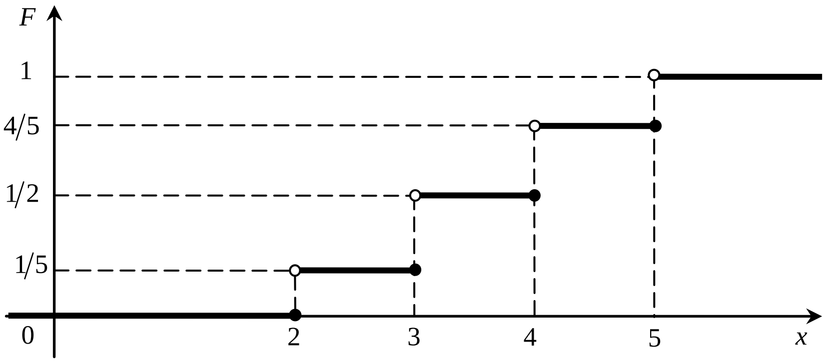
a). $x \le 2 \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P(\varnothing) = 0$;

b). $x \in (2, 3] \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 2\} = 1/5$;

c). $x \in (3, 4] \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P(\{X = 2\} + \{X = 3\}) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$;

d). $x \in (4,5] \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P(\{X \le 3\} + \{X = 4\}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$;

e). $x > 5 \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P(\Omega) = 1$.



$MX = 2 \cdot 1/5 + 3 \cdot 3/10 + 4 \cdot 3/10 + 5 \cdot 1/5 = 3{,}5 \in [2,5]$.

$M(X^2) = 2^2 \cdot 1/5 + 3^2 \cdot 3/10 + 4^2 \cdot 3/10 + 5^2 \cdot 1/5 = 13{,}3$

$DX = M(X^2) - (MX)^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05 < (5-2)^2/4 = 2{,}25$.

$\sigma X = \sqrt{DX} \approx 1{,}025$.

$\max\{p_k\} = 3/10 = P\{X = 3\} = P\{X = 4\} \Rightarrow M_o = 3,\ M_o = 4$.

$F(x) \le \frac{1}{2} \le F(x+0)$ при любом $x \in [3,4] \quad \Rightarrow \quad m \in [3,4]$.

4. Два орудия делают по два выстрела по одной цели. Вероятность попадания для первого орудия — 0,4, для второго — 0,5. X — произведение числа попаданий в цель 1-го орудия на число попаданий в цель 2-го орудия.

Решение. Пусть A_k — событие, состоящее в том, что 1-е орудие попало в цель ровно k раз, B_k — событие, состоящее в том, что 2-е орудие попало в цель ровно k раз. Вероятности событий A_k и B_k находим по формуле Бернулли. Имеем

$$P(A_k) = C_2^k (0,4)^k (0,6)^{2-k} = \begin{cases} 0,36 & \text{при } k = 0, \\ 0,48 & \text{при } k = 1, \\ 0,16 & \text{при } k = 2. \end{cases}$$

$$P(B_k) = C_2^k (0,5)^2 = \begin{cases} 0,25 & \text{при } k = 0, \\ 0,5 & \text{при } k = 1, \\ 0,25 & \text{при } k = 2. \end{cases}$$

$$P\{X = 0\} = P(A_0 + B_0) = P(A_0) + P(B_0) - P(A_0 B_0) =$$

$$= 0,36 + 0,25 - 0,36 \cdot 0,25 = 0,52 \;;$$

$$P\{X = 1\} = P(A_1 B_1) = P(A_1) P(B_1) = 0,48 \cdot 0,5 = 0,24 \;;$$

$$P\{X = 2\} = P(A_2 B_1 + A_1 B_2) = P(A_2) P(B_1) + P(A_1) P(B_2) =$$

$$= 0,16 \cdot 0,5 + 0,48 \cdot 0,25 = 0,2 \;;$$

$$P\{X = 4\} = P(A_2 B_2) = P(A_2) P(B_2) = 0,25 \cdot 0,16 = 0,04 \,.$$

Проверка: $0,52 + 0,24 + 0,2 + 0,04 = 1$.

X	0	1	2	4
p_k	0,52	0,24	0,2	0,04

Ищем функцию распределения.

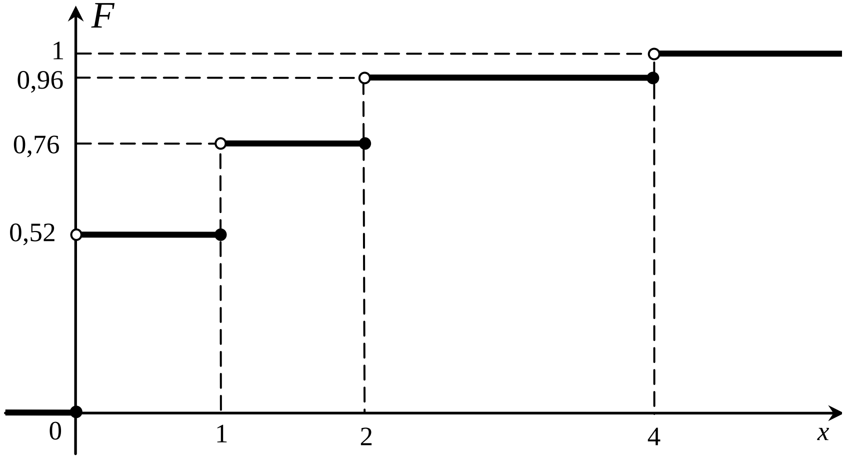
a). $x \le 0 \;\Rightarrow\; F(x) = P\{X < x\} = P(\varnothing) = 0$;

b). $x \in (0,1] \;\Rightarrow\; F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} = 0,52$;

c). $x \in (1,2] \;\Rightarrow\; F(x) = P\{X < x\} = P(\{X = 0\} + \{X = 1\}) =$
$= 0,52 + 0,24 = 0,76$;

d). $x \in (2,4] \;\Rightarrow\; F(x) = P\{X < x\} = P(\{X \le 1\} + \{X = 2\}) =$
$= 0,76 + 0,2 = 0,96$;

e). $x > 4 \;\Rightarrow\; F(x) = P\{X < x\} = P(\Omega) = 1$.



$MX = 0\cdot 0{,}52+1\cdot 0{,}24+2\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}04=0{,}8\in[0,4]$.

$M(X^2)=0^2\cdot 0{,}52+1^2\cdot 0{,}24+2^2\cdot 0{,}2+4^2\cdot 0{,}04=1{,}68$.

$DX = M(X^2)-(MX)^2 = 1{,}68-(0{,}8)^2 = 1{,}04<(4-0)^2/4=4$.

$\sigma X=\sqrt{DX}\approx 1{,}02$.

$\max\{p_k\}=0{,}52=P\{X=0\} \;\Rightarrow\; M_o=0$.

$F(0)=0<F(0+0)=0{,}52 \;\Rightarrow\; m=0$.

5. Функция распределения случайной величины задана формулой

$$F(x)=\begin{cases} a, & x<0; \\ c+\dfrac{b}{(x+1)^3}, & x\ge 0. \end{cases}$$

Найти: параметры a,b,c; $f(x)$; MX, DX, σX, M_o, m; $P\{X>1\}$, $P\{X\in[-1,1]\}$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение.

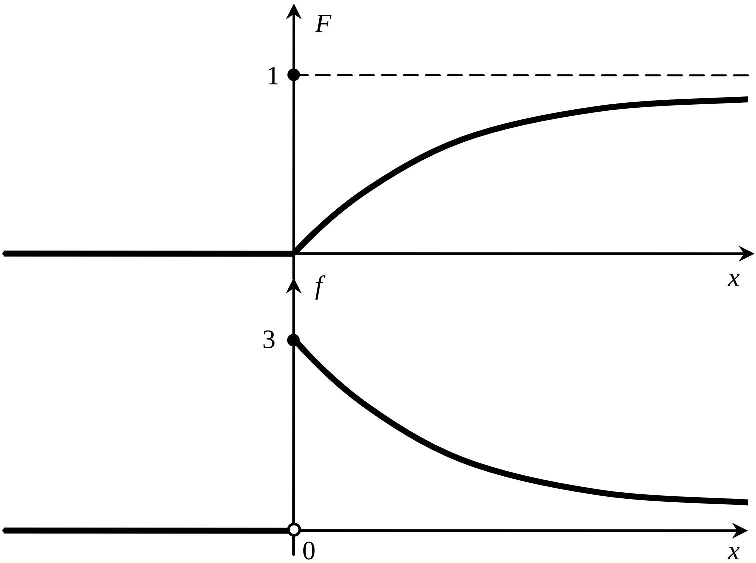
1. Имеем $F(-\infty)=a=0$; $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(c+\dfrac{b}{(x+1)^3}\right)=c=1$. Поскольку функция распределения непрерывна слева, то

$$a=F(0-0)=F(0)=b+c \;\Rightarrow\; b=a-c=-1.$$

Следовательно, $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-\dfrac{1}{(x+1)^3}, & x\ge 0.\end{cases}$

2. $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{3}{(x+1)^4}, & x\ge 0.\end{cases}$

3. $x=0$ — точка максимума плотности $f(x)$ $\Rightarrow$ $M_o=0$. Медиана: $F(m)=\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $(m+1)^3=2$ $\Leftrightarrow$ $m=\sqrt[3]{2}-1$.



4. $$MX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{3x}{(x+1)^4}dx=3\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(x+1)-1}{(x+1)^4}dx=$$

$$=3\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{(x+1)^4}\right)dx=3\left(\frac{-1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{3(x+1)^3}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=$$

$$=3\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{3(x+1)^3}\right)-3\left(\frac{-1}{2\cdot 1^2}+\frac{1}{3\cdot 1^3}\right)=3\cdot 0-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

5. $M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{3x^2}{(x+1)^4}dx=3\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{((x+1)-1)^2}{(x+1)^4}dx=$

$$=3\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(x+1)^2-2(x+1)+1}{(x+1)^4}dx=3\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^4}\right)dx=$$

$$=3\left(\frac{-1}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-1}{3(x+1)^3}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=$$

$$=3\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)^3}\right)-3\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3\cdot 1^3}\right)=\ =3\cdot 0-3\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)=1\,;$$

$$DX=M(X^2)-(MX)^2=1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4},\quad \sigma X=\sqrt{DX}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Проверим, что $MX=\frac{1}{2}\in[0,+\infty)$, $DX=\frac{3}{4}>0$.

6. Поскольку функция распределения $F(x)$ непрерывна, то

$$P\{X\in[-1,1]\}=P\{X\in[-1,1)\}=F(1)-F(-1)=\left(1-\frac{1}{2^3}\right)-0=\frac{7}{8}\,;$$

$$P\{X>1\}=1-P\{\overline{X>1}\}=1-P\{X\le 1\}=1-P\{X<1\}=1-F(1)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}\,.$$

6. Функция распределения случайной величины задана формулой

$$F(x)=\begin{cases} a, & x<-3;\\ c+\dfrac{b}{x}, & x\in[-3,-1);\\ d, & x\ge -1.\end{cases}$$

Найти: параметры a,b,c,d; $f(x)$; MX, DX, σX, M_o, m; $P\{X\in[-2,4]\}$, $P\{X>-2\}$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение.

1. Имеем $F(-\infty)=a=0$; $F(+\infty)=d=1$. Поскольку функция распределения непрерывна слева, то

$$\begin{cases} a = F(-3-0) = F(-3) = c - \frac{b}{3}; \\ d = F(-1) = F(-1-0) = c + \frac{b}{-1}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c - \frac{b}{3} = 0; \\ c - b = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2}; \\ c = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3; \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2x}, & x \in [-3, -1); \\ 1, & x \ge -1. \end{cases}$

2. $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-3, -1]; \\ \frac{3}{2x^2}, & x \in [-3, -1]. \end{cases}$

3. $x = -1$ — точка максимума плотности $f(x)$ $\Rightarrow$ $M_o = -1$. Медиана: $F(m) = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2m} = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $m = -\frac{3}{2}$.

4. $MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{-3} x \cdot 0 \cdot dx + \int\limits_{-3}^{-1} \frac{3x}{2x^2} dx + \int\limits_{-1}^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = \frac{3}{2} \int\limits_{-3}^{-1} \frac{dx}{x} =$

$$= \frac{3}{2} \ln|x| \Big|_{-3}^{-1} = \frac{3}{2}(\ln 1 - \ln 3) = -\frac{3}{2} \ln 3 .$$

5. $M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int\limits_{-3}^{-1} \frac{3x^2}{2x^2} dx = \frac{3}{2} \int\limits_{-3}^{-1} dx = \frac{3}{2} x \Big|_{-3}^{-1} = 3$;

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = 3 - \frac{9}{4} \ln^2 3, \quad \sigma X = \sqrt{DX} \approx 0{,}533 .$$

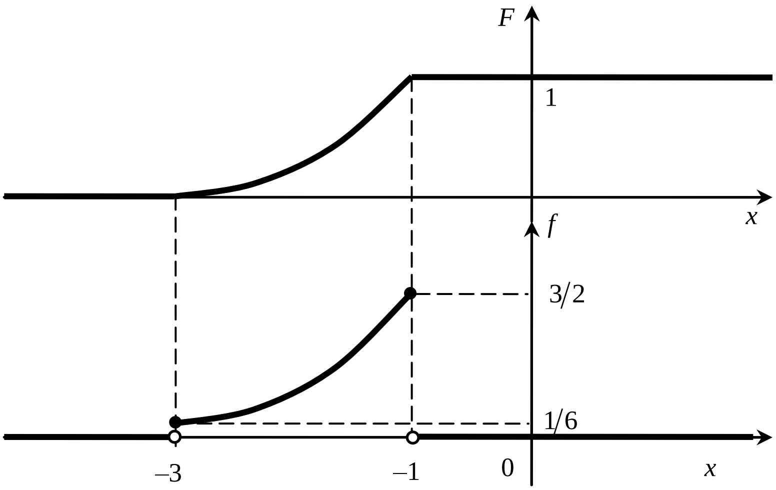
Проверим, что $MX = -\frac{3}{2} \ln 3 \approx -1{,}65 \in [-3; -1]$,

$0 < DX = 3 - \frac{9}{4} \ln^2 3 \approx 0{,}28 < \frac{(-1-(-3))^2}{4} = 1$.

6. Поскольку функция распределения $F(x)$ непрерывна, то

$$P\{X \in [-2, 4]\} = P\{X \in [-2, 4)\} = F(4) - F(-2) = 1 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2(-2)}\right) = \frac{3}{4};$$

$$P\{X > -2\} = 1 - P\{X \le -2\} = 1 - P\{X < -2\} = 1 - F(-2) = \frac{3}{4}.$$



7. $f(x)=\begin{cases}\lambda\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right), & x\in[1,3];\\ 0, & x\notin[1,3].\end{cases}$ Найти: λ; $F(x)$; MX, DX, σX, M_o, m; $P\{X\in[-1,2]\}$; $P\{X>2\}$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение.

1. $$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{1}0\cdot dx+\int_{1}^{3}\lambda\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_{3}^{+\infty}0\cdot dx=$$

$$=\lambda\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^3=\frac{10}{3}\lambda \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{3}{10} \quad\Rightarrow\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{10}\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right), & x\in[1,3];\\ 0, & x\notin[1,3].\end{cases}$$

2. $$x\le 1 \quad\Rightarrow\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0\cdot dt=0;$$

$$x\in(1,3] \quad\Rightarrow\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1}0\cdot dx+\int_{1}^{x}\frac{3}{10}\left(t-\frac{1}{t^2}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{10}\left(\frac{t^2}{2}+\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^x=\frac{3}{10}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\right);$$

$$x > 3 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{3} f(t)\,dt + \int_{3}^{x} 0 \cdot dx = F(3) + 0 =$$

$$= \frac{3}{10}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\right)\Bigg|_{x=3} = 1\,.$$

Следовательно, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \frac{3}{10}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\right), & x \in (1, 3]; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

3. $x = 3$ — точка максимума плотности $f(x) \quad \Rightarrow \quad M_o = 3$. Медиана:

$F(m) = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{m^2}{2} + \frac{1}{m} - \frac{3}{2} = \frac{5}{3} \;\Leftrightarrow\; 3m^3 - 19m + 6 = 0 \;\Rightarrow\; m = 2{,}34...$

4. $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{1}^{3} \frac{3}{10} x\left(x - \frac{1}{x^2}\right)dx + \int_{3}^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$

$$= \frac{3}{10}\int_{1}^{3}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{3}{10}\left(\frac{x^3}{3} - \ln|x|\right)\Bigg|_{1}^{3} = \frac{3}{10}\left(\frac{26}{3} - \ln 3\right) = 2{,}6 - \frac{3}{10}\ln 3 \approx 2{,}27\,.$$

5. $MX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{1}^{3} \frac{3}{10} x^2\left(x - \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{3}{10}\int_{1}^{3}(x^3 - 1)\,dx =$

$$= \frac{3}{10}\left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Bigg|_{1}^{3} = \frac{3}{10}\left(\frac{81}{4} - 3 - \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3}{10} \cdot 18 = 5{,}4\,;$$

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 \approx 5{,}4 - (2{,}27)^2 \approx 0{,}247\,, \qquad \sigma X = \sqrt{DX} \approx 0{,}487\,.$$

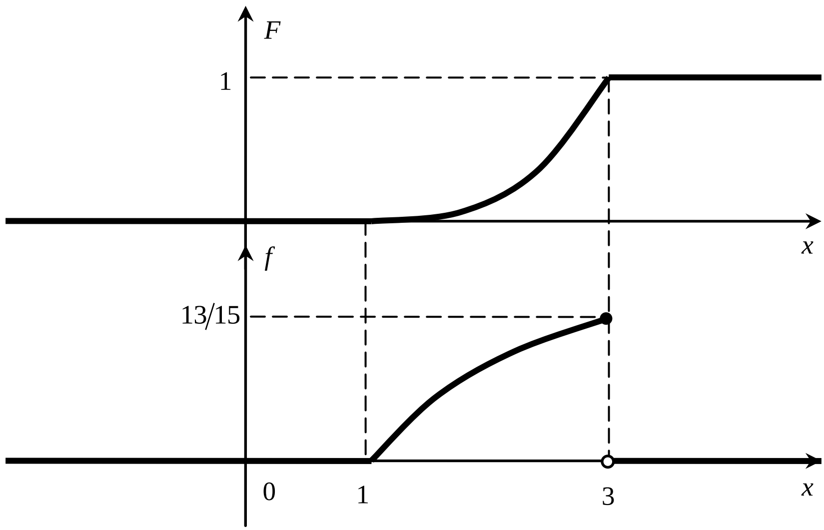
Проверим, что $MX = 2{,}6 - \frac{3}{10}\ln 3 \approx 2{,}27 \in [1; 3]$,

$0 < DX \approx 0{,}247 < \frac{(3-1)^2}{4} = 1$.

6. Поскольку случайная величина является непрерывной, то

$$P\{X \in [-1, 2]\} = F(2) - F(-1) = \frac{3}{10}\left(\frac{2^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) - 0 = 0{,}3\,;$$

$$P\{X>2\}=1-P\{X\le 2\}=1-P\{X<2\}=1-F(2)=1-0{,}3=0{,}7\ .$$



8. $f(x)=\begin{cases}\lambda\sin\frac{x}{2}, & x\in[0,2\pi];\\ 0, & x\notin[0,2\pi].\end{cases}$ Найти: λ; $F(x)$; MX, DX, σX, M_o, m; $P\{X\in[-\pi,\pi]\}$; $P\{X>\pi\}$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение.

1. $$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{2\pi}\lambda\sin\frac{x}{2}dx+\int_{2\pi}^{+\infty}0\cdot dx=$$

$$=-2\lambda\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi}=4\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}, & x\in[0,2\pi];\\ 0, & x\notin[0,2\pi].\end{cases}$$

2. $x\le 0\quad\Rightarrow\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x}0\cdot dt=0$;

$x\in(0,2\pi]\quad\Rightarrow\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}\sin\frac{t}{2}dt=$

$$-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\Big|_0^x=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right);$$

$$x>2\pi \quad \Rightarrow \quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{2\pi} f(t)\,dt+\int_{2\pi}^{x} 0\cdot dx=F(2\pi)+0=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=2\pi}=1.$$

Следовательно, $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right), & x\in(0,2\pi];\\ 1, & x>2\pi.\end{cases}$

3. График плотности $f(x)$ симметричен относительно прямой $x=\pi$ и имеет там максимум. Поэтому $MX=M_o=m=\pi$.

4. $M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} x^2\sin\frac{x}{2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^2 d\cos\frac{x}{2}=$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(x^2\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2x\cos\frac{x}{2}dx\right]=-\frac{1}{2}\left[-4\pi^2-4\int_0^{2\pi}x\,d\sin\frac{x}{2}\right]=$$

$$=2\pi^2+2\left[\left(x\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{2}dx\right]=2\pi^2+2\left(0+2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)=2\pi^2-8;$$

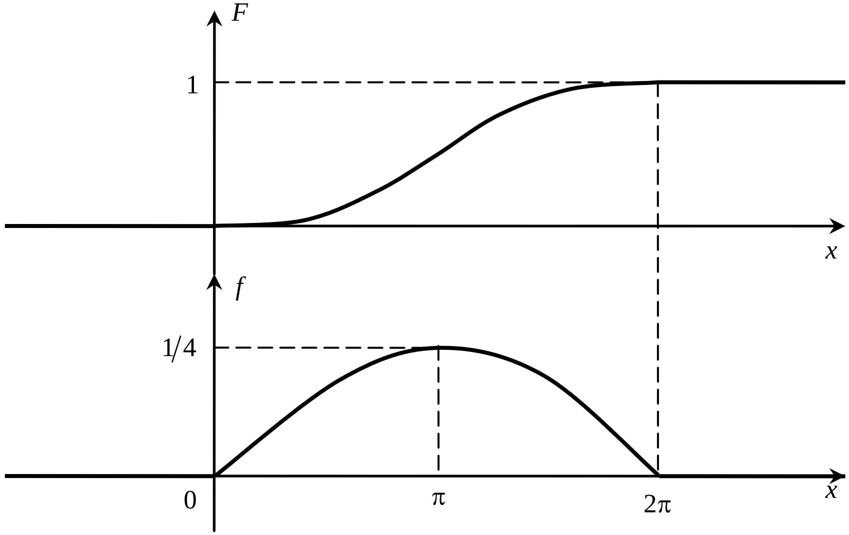
$$DX=M(X^2)-(MX)^2=2\pi^2-8-\pi^2=\pi^2-8, \quad \sigma X=\sqrt{DX}\approx 1{,}367.$$

Проверим, что $MX=\pi\in[0,2\pi]$, $0<DX=\pi^2-8<\frac{(2\pi-0)^2}{4}=\pi^2$.

5. Поскольку случайная величина является непрерывной, то

$$P\{X\in[-\pi,\pi]\}=F(\pi)-F(-\pi)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)-0=\frac{1}{2};$$

$$P\{X>\pi\}=1-P\{X\le\pi\}=1-P\{X<\pi\}=1-F(\pi)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$



ОГЛАВЛЕНИЕ