

5. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАДАЧА ПО ДИНАМИКЕ ТОЧКИ

Задание. Решить комплексную задачу по динамике точки с помощью метода кинестатики и теоремы об изменении кинетической энергии точки.

Пример: Тело массой 10 кг, имея скорость 25 м/с, начинает двигаться по дуге M_0M окружности радиуса 5 м (рис. 5.1). Найти скорость тела, а также давление его на поверхность в положении M_1 , определяемом углом $M_0OM_1 = 60^\circ$. Трением пренебречь.

Решение. На тело, которое мы примем за материальную точку, действуют силы: \vec{P} – вес и \vec{N} – реакция поверхности.

Скорость тела найдем с помощью теоремы об изменении кинетической энергии точки:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \quad (5.1)$$

где A – работа равнодействующей силы, по теореме о работе равнодействующей $A = A_P + A_N$; A_P – работа силы тяжести; A_N – работа реакции.

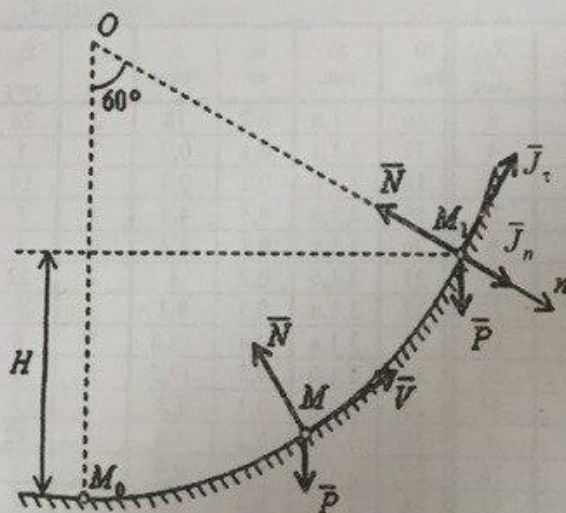


Рис. 5.1

Реакция \vec{N} перпендикулярна скорости \vec{v} в любом положении тела, поэтому $A_N = 0$. Работа силы тяжести $A_P = -PH$, где $H = R - R \cdot \cos 60^\circ = R/2$. Знак минус поставлен потому, что конечное положение тела выше начального.

Тогда $A_P = -PR/2 = -mgR/2$. Подставим полученные результаты в равенство (5.1):

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg \frac{R}{2},$$

откуда $v_1 = \sqrt{v_0^2 - gR}$, а подставив заданные значения, получим $v_1 = \sqrt{625 - 9,8 \cdot 5} = \sqrt{576} = 24 \text{ м/с}$.

Чтобы найти давление тела на поверхность в положении M_1 , применим метод кинестатики для точки. Приложим к телу тангенциальную силу инерции \vec{J}_τ и центробежную силу \vec{J}_n и рассмотрим мысленное равновесие тела в положении M_1 . Тогда

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{J}_\tau + \vec{J}_n = 0. \quad (5.2)$$

Спроектируем это векторное равенство на направление внешней нормали: $P \cdot \cos 60^\circ + J_n - N = 0$, откуда $N = P \cdot \cos 60^\circ + J_n$. Имея в виду, что $J_n = mv_1^2 / R$, можно написать $N = P/2 + mv_1^2 / R$ или $N = 10 \cdot 9,8/2 + 10 \cdot 576/5 = 49 + 1152 = 1201 \text{ Н}$.

Мы нашли реакцию опорной поверхности. Искомое давление тела на поверхность имеет ту же величину, но направлено в противоположную сторону.

Задачи 5.1-5.5. Тело движется из положения M_0 по шероховатой горизонтальной плоскости, а затем по гладкому круговому желобу радиуса r (рис.5.2). Найти:

5.1. Скорость тела в момент отделения, а также коэффициент трения, если в момент отделения $\varphi = 120^\circ$, а $v_0 = 7 \text{ м/с}$, $r = 1 \text{ м}$, $M_0B = 10 \text{ м}$.

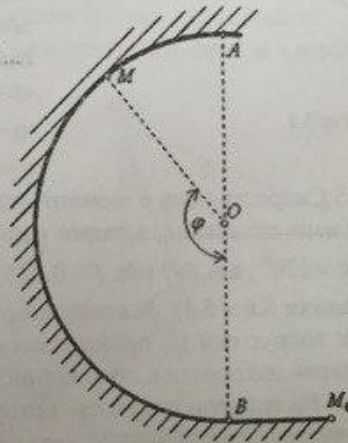


Рис.5.2

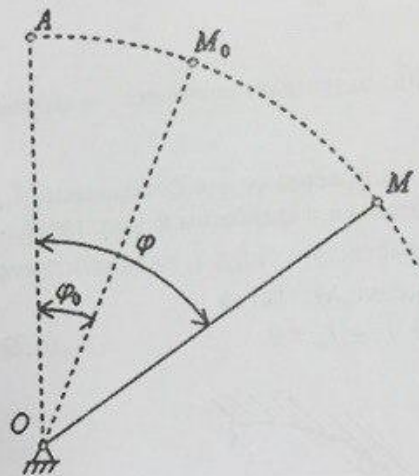


Рис.5.3

5.2. скорость тела в момент отделения, а также начальную скорость, если отделение произошло в точке А, а $f = 0,1$, $r = 50$ см, $M_0B = 3,5$ м.

5.3. Значение угла φ , при котором тело отделится от желоба, и его скорость в этом положении, если $v_0 = 6,3$ м/с, $r = 50$ см, $f = 0,025$, $M_0B = 31$ м.

5.4. Скорость тела в момент отделения, а также расстояние M_0B , если в момент отделения, а также радиус желоба, если в момент отделения $\varphi = 120^\circ$, а $v_0 = 7$ м/с, $f = 0,05$, $r = 1$ м.

5.5. Скорость тела в момент отделения, а также радиус M_0B , если в момент отделения, а также радиус желоба, если в момент отделения $\varphi = 120^\circ$, а $v_0 = 7$ м/с, $f = 0,025$, $M_0B = 30$ м.

Задачи 5.6 – 5.11. К концу стержня длиной l , который может вращаться вокруг оси O , прикреплен шарик массы m , в начальный момент шарик находится в положении M_0 (рис. 5.3). Найти:

5.6. Начальную скорость, которую нужно сообщить шарiku для того, чтобы в положении M давление на ось стало равным нулю, и скорость шарика в этом положении, если $l = 25$ см, $\varphi_0 = 0$, $\varphi = \arccos 4/5$.

5.7. Длину стержня, при которой давление на ось не превышает 98 Н, если $m = 1$ кг, $v_0 = 7$ м/с, $\varphi_0 = 0$, $\varphi = 60^\circ$.

5.8. Наибольшую начальную скорость, которую можно сообщить шарiku для того, чтобы давление на ось не превышало 882 Н, и максимальную скорость шарика, если $l = 1$ м, $m = 10$ кг, $\varphi_0 = 0$.

5.9. Максимальное давление стержня на ось и максимальную скорость шара, если $l = 1,25$ м, $m = 10$ кг, $v_0 = 3,5$ м/с, $\varphi_0 = 60^\circ$.

5.10. Длину стержня, при которой в положении М давление на ось равно нулю, и скорость шарика в этом положении, если $v_0 = 1,4$ м/с, $\varphi_0 = \arccos 13/20$, $\varphi = 60^\circ$.

5.11. Положение, при котором давление стержня на ось обращается в нуль, и скорость шарика в этом положении, если $l = 1$ м, $v_0 = 70$ см/с, $\varphi_0 = \arccos 29/40$.

Задачи 5.12 – 5.16. Нить с грузом на конце при своем движении из положения OM_0 встречает в точке O_1 тонкую проволочку, расположенную перпендикулярно плоскости чертежа, после чего груз начинает вращаться вокруг точки O_1 (рис. 5.4). Найти:

5.12. Дину нити, если известно, что при $\varphi = \arccos(-2/3)$ натяжение нити равно нулю, и скорость груза в этом положении, если $\beta = 0$, $OO_1 = 0,5OM_0$, $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 2,8$ м/с.

5.13. Значение угла φ , при котором натяжение нити равно нулю, и скорость груза в этом положении, если $\beta = \arccos 3/4$, $OM_0 = 40$ см, $OO_1 = 1/3OM_0$, $v_0 = 1,4$ м/с, $\alpha = 60^\circ$.

5.14. Начальную скорость, которую нужно сообщить грузу для того, чтобы

натяжение нити стало равным нулю при $\varphi = 120^\circ$, и скорость груза в этом положении, если $\beta = \arccos 4/5$, $OM_0 = 1,56$ м, $OO_1 = 0,78$ м, $\alpha = \arccos 3/5$.

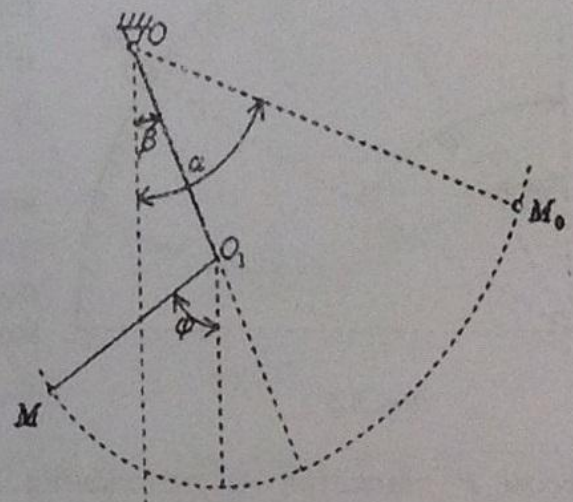


Рис.5.4

5.15. Величину угла α , если при $\varphi = 120^\circ$ натяжение стало равным нулю, и также скорость груза в этом положении при $\beta = 60^\circ$, $OM_0 = 1,2$ м, $OO_1 = 40$ см, $v_0 = 2,8$ м/с.

5.16. Величину угла β из условия, что при $\varphi = \arccos(-1/3)$ натяжение нити обращается в нуль, и скорость груза в этом положении, если $\alpha = 90^\circ$, $OM_0 = 1$ м, $OO_1 = 50$ см, $v_0 = 0$.

Задачи 5.17 - 5.19. Шарик движется из положения M_0 по круговому желобу радиуса r (рис. 5.5). Определить:

5.17. В каком месте шарик покинет желоб и какова скорость шарика в этом положении, если $r = 1$ м, $v_0 = 70$ см/с, $\varphi = \arccos 29/40$.

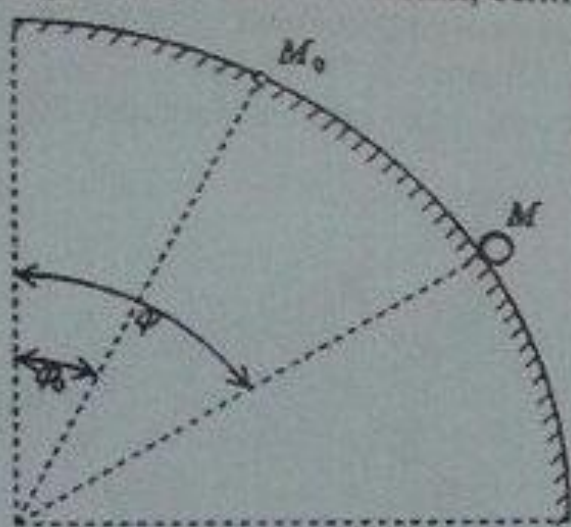


Рис. 5.5

5.18. Радиус желоба и скорость шарика в момент отделения от желоба, если известно, что шарик покинул желоб в положении M и что $v_0 = 1,4$ м/с, $\varphi_0 = 60^\circ$, $\varphi = \arccos 5/13$.

5.19. Начальную скорость, которую нужно сообщить шарик, чтобы он отделился от желоба в положении M , и скорость шарика в момент отделения, если $\varphi_0 = \arccos 13/20$, $r = 1$ м, $\varphi = 60^\circ$.

Задачи 5.20 - 5.27. Тело весом P движется из положения M_0 по шероховатой наклонной плоскости AB и гладкому круговому желобу радиуса r (рис. 5.6). Определить:

5.20. Наименьшую начальную скорость, которую нужно сообщить телу для того, чтобы оно прошло весь желоб, не отделяясь от него, и скачок давления тела на поверхность при прохождении им точки B , если $P = 200$ Н, $r = 2,4$ м, $f = 0$, $\alpha = 30^\circ$, $M_0B = 4,16$ м.

5.21. Радиус желоба, если известно, что тело отделилось от желоба в точке М, и скорость тела в этом положении, если $v_0 = 2,8 \text{ м/с}$, $\alpha = 60^\circ$, $\varphi = 120^\circ$, $M_0B = 1 \text{ м}$, $f = 0$.

5.22. Точку, в которой тело отделился от желоба, и скорость тела в момент отделения, если $v_0 = 2,1 \text{ м/с}$, $r = 15 \text{ см}$, $f = 0$, $\alpha = 45^\circ$, $M_0B = 15 \text{ см}$.

5.23. Точку, в которой тело отделился от желоба, и скорость его в этом положении, если $v_0 = 2,8 \text{ м/с}$, $r = 1 \text{ м}$, $f = \sqrt{3}/2$, $\alpha = 60^\circ$, $M_0B = 2 \text{ м}$.

5.24. Коэффициент трения, если известно, что тело отделилось от желоба в точке М, и скорость тела в этом положении, если $v_0 = \sqrt{7}/2 \text{ м/с}$, $r = 5 \text{ м}$, $\alpha = 60^\circ$, $\varphi = 120^\circ$, $M_0B = 2,89 \text{ м}$.

5.25. Величину угла α при условии, что в положении М давление тела на желоб обращается в нуль, и скачок давления тела на поверхность при прохождении им точки В, если $P = 100 \text{ Н}$, $r = 1 \text{ м}$, $f = 0$, $\varphi = 90^\circ$, $M_0B = 1,73 \text{ м}$, $v_0 = 0$.

5.26. Расстояние M_0B , если известно, что тело отделилось от желоба в точке М, и скорость тела в этом положении, если $r = 10 \text{ см}$, $f = 0,5$, $v_0 = 0$, $\alpha = 30^\circ$, $\varphi = 120^\circ$.

5.27. Расстояние M_0B , если известно, что тело отделилось от желоба в положении D, и скачок давления тела на поверхность при

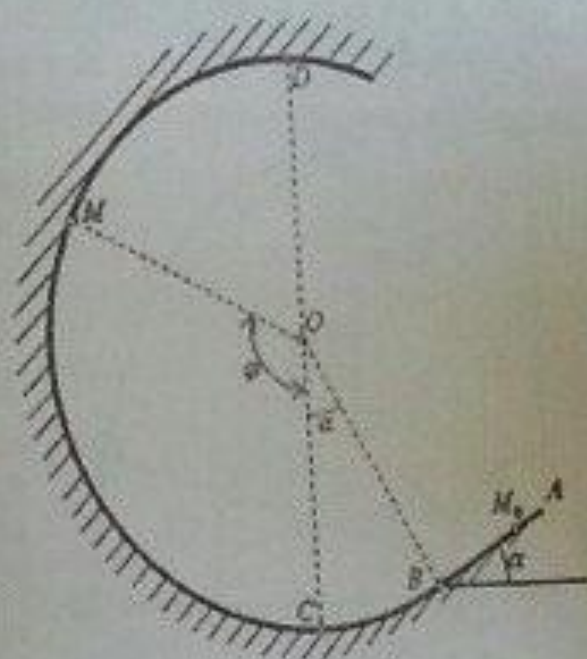


Рис 5.6

прохождении им точки В, если $P = 50 \text{ Н}$, $v_0 = 4,2 \text{ м/с}$, $r = 60 \text{ см}$, $f = 0$, $\alpha = 45^\circ$.

Задачи 5.28-5.30. Шарик массой m движется из точки А по желобу АВ, состоящему из двух сопряженных в точке С дуг окружностей; OD и O₁A – вертикальные отрезки (рис. 5.7). Найдите:

5.28. Значение угла φ , при котором шарик отделится от желоба, и скорость шарика в момент отделения, если $\alpha = \arccos 7/10$, $r = 1/6 \text{ м}$, $R = 1 \text{ м}$, $v_0 = 0$.

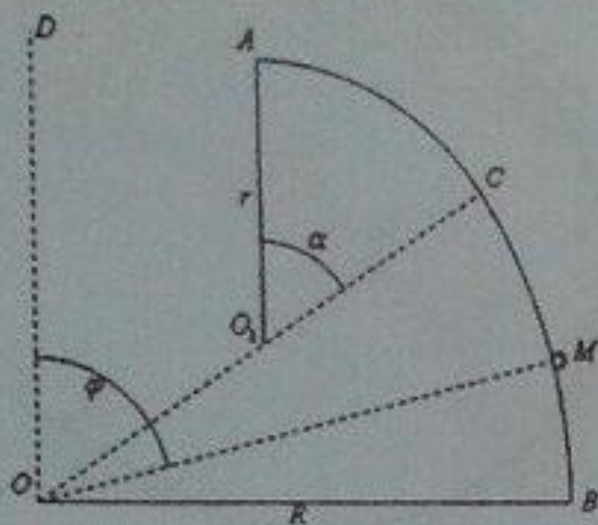


Рис. 5.7

5.29. Начальную скорость, которую нужно сообщить шарика, чтобы он отделился от желоба в точке М, и скорость его в момент отделения, если $\alpha = \arccos 7/10$, $\varphi = 60^\circ$, $r = 1/6 \text{ м}$, $R = 1 \text{ м}$.

5.30. Скачок давления шарика на желоб при прохождении им точки С и значение угла φ , при котором шарик отделился от желоба, если $m = 2 \text{ кг}$, $v_0 = 0$, $\alpha = \arccos 13/18$, $r = 20 \text{ см}$, $R = 2 \text{ м}$.