

## Лабораторная работа 6

### Линейная аппроксимация

**Цель работы:** найти линейную функцию, отражающую зависимость между экспериментальными данными.

Допустим, в результате некоторых исследований были получены эмпирические данные. Например, была получена таблица совместно наблюдаемых значений  $x_i, y_i$ , где величины  $y_1, y_2, \dots, y_i$  зависят от величин  $x_1, x_2, \dots, x_i$ :

$x$	$x_1$	$x_2$				$x_i$		$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$				$y_i$		$y_n$

Требуется найти некоторую функцию, описывающую зависимость  $y$  от  $x$ . Приближенное представление исходной функции с помощью другой функции называется ее **аппроксимацией**.

Выбор вида аппроксимирующей функции остается за исследователем. Как правило, предпочтение отдается достаточно простым функциям: линейной, квадратичной, экспоненциальной и др.

Рассмотрим технологию **линейной аппроксимации**.

В данном случае искомая функция  $y=f(x)$  имеет вид  **$y=a_1+a_2x$** .

Согласно методу наименьших квадратов, **нахождение коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$**  сводится к решению системы линейных уравнений (1):

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (1)$$

где  $n$  – число измерений

### 1. Выполнение расчетов в Excel

Оформляем таблицу по образцу (Табл. 1):

- 1) Заполняем столбец **B** значениями  $x_i$
- 2) Заполняем столбец **C** значениями  $y_i$

Таблица 1

#### Исходные данные

	A	B	C	D	E
1	i	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i \cdot y_i$
2	1	2,889	1,286		
3	2	3,265	1,537		
4	3	3,292	1,556		
5	4	3,409	1,673		
6	5	3,468	1,685		
7	6	3,497	1,707		
8	7	3,607	1,79		
9	8	3,695	1,859		
10	9	3,731	1,927		
11	10	3,864	1,995		
12	<b>сумма</b>				
13		$\Sigma x_i$	$\Sigma y_i$	$\Sigma x_i^2$	$\Sigma x_i y_i$

3) В ячейку **D2** вводим формулу: **=B2\*B2**

4) В ячейку **E2** вводим формулу: **=B2\*C2**

- 5) Копируем формулы в нижележащие ячейки для всех номеров  $i$
- 6) В строке «сумма» вычисляем суммы столбцов с именами от **В** до **Е**: для этого в ячейке **В12** применяем значок **Автосуммирование** или вводим формулу: **=СУММ(В2:В11)**, а затем копируем полученные формулы в ячейки этой строки на всю ширину таблицы.

В ходе вычислений получим следующие результаты (Табл. 2)

Таблица 2

	A	B	C	D	E
1	i	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i \cdot y_i$
2	1	2,889	1,286	8,346321	3,715254
3	2	3,265	1,537	10,66023	5,018305
4	3	3,292	1,556	10,83726	5,122352
5	4	3,409	1,673	11,62128	5,703257
6	5	3,468	1,685	12,02702	5,84358
7	6	3,497	1,707	12,22901	5,969379
8	7	3,607	1,79	13,01045	6,45653
9	8	3,695	1,859	13,65303	6,869005
10	9	3,731	1,927	13,92036	7,189637
11	10	3,864	1,995	14,9305	7,70868
12	<b>сумма</b>	34,717	17,015	121,2355	59,59598
13		$\Sigma x_i$	$\Sigma y_i$	$\Sigma x_i^2$	$\Sigma x_i y_i$

7) Для нахождения коэффициентов линейной аппроксимации  $a_1$  и  $a_2$  необходимо

решить СЛАУ

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (1)$$

Решение проведем **матричным способом**. Для этого формируем матрицу коэффициентов системы **A** и матрицу свободных членов **B**:

Матрица коэффициентов A		Столбец св. членов B
$n$	$\Sigma x_i$	$\Sigma y_i$
$\Sigma x_i$	$\Sigma x_i^2$	$\Sigma x_i y_i$

где  $n$  – число измерений (опытов)

Для рассмотренного примера получим:

Матрица коэффициентов A		Столбец св. членов B
10	34,717	17,015
34,717	121,2355	59,59598

8) Далее находим обратную матрицу  $A^{-1}$  (применяя матем. функцию **МОБР**).

9) Решение системы (1) находим умножением матрицы  $A^{-1}$  на матрицу **B** (применяя матем. функцию **МУМНОЖ**).

Обратная матрица $A^{-1}$		решение	
17,11287	-4,90044	$a_1$	-0,87125
-4,90044	1,41154	$a_2$	0,741063

10) Подставим значения  $a_1$  и  $a_2$  в уравнение линейной функции  $y = a_1 + a_2 x$

Получим уравнение линейной аппроксимации:  $y = -0,8712 + 0,7411x$

## 2. Графическое решение в Excel

1. Строим точечный график функции  $y=f(x)$ , выделив ячейки с исходными данными В2:С11.

2. Нажав по одной из точек на графике правой кнопкой мыши, выбираем: **Добавить линию тренда**; тип – **линейный**; во вкладке **ПАРАМЕТРЫ** активируем «показать уравнение» и «поместить на диаграмму  $R^2$ »; **ОК**.

В результате получим уравнение искомой функции и значение коэффициента детерминированности  $R^2$  (рис. 1).

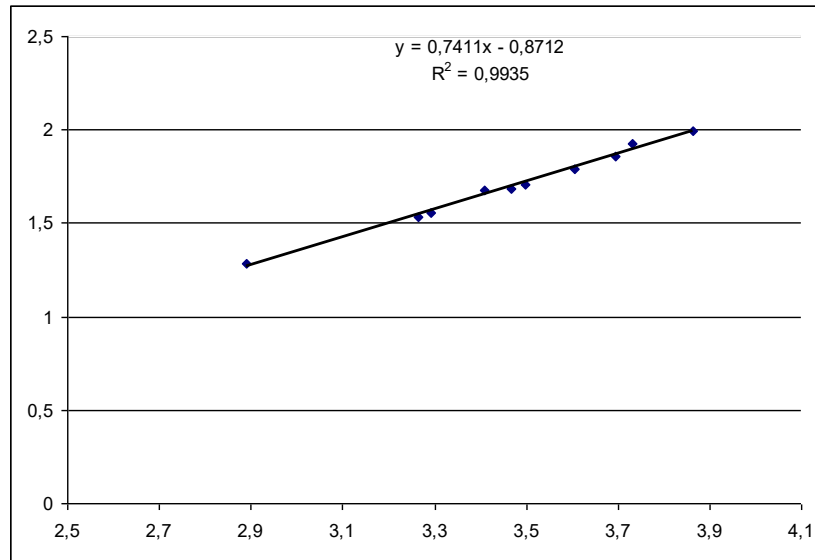


Рис. 1. Линейный тренд

Из рис. 1 видно, что уравнение линейной аппроксимации имеет следующий вид:

$$y = 0,7411x - 0,8712$$

Коэффициент детерминированности линейной регрессии:  $R^2=0,9935$

Следовательно, **графическое решение совпало с результатами расчетов.**

### **Вывод:**

1. В результате вычислений было получено уравнение линейной аппроксимации. Расчетное решение совпало с графическим. Следовательно, зависимость между экспериментальными данными выражается линейной функцией вида:  $y(x) = 0,7411x - 0,8712$

2. Было получено значение коэффициента детерминированности:  $R^2=0,9935$ . Исходя из величины коэффициента детерминированности, которое достаточно близко к 1, можно сделать вывод, что в данном случае линейная аппроксимирующая функция **достаточно точно** отражает зависимость между экспериментальными данными.

**Примечание.** Если  $0,71 < R^2 < 0,9$ , то линейная аппроксимирующая функция **не достаточно точно** отражает зависимость между экспериментальными данными. Если  $R^2 < 0,7$ , то линейная аппроксимирующая функция **не точно** отражает зависимость между экспериментальными данными (ее нельзя использовать; нужно искать другую функцию, например, квадратичную).

**ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ  
«АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ»**

**Примечание:** первый столбец – аргумент  $x$ , второй столбец - функция  $y=f(x)$

1	0,013	-12,417	2	3,065	-19,695
	4,760	-33,795		4,016	-22,225
	1,538	0,345		4,417	-28,186
	3,161	-11,662		4,398	-27,889
	4,821	-34,842		1,374	0,972
	3,836	-19,758		1,820	-0,985
	0,869	2,228		4,858	-35,484
	2,883	-8,857		4,387	-27,718
	1,883	-1,325		2,358	-4,404
	3,923	-20,934		2,815	-8,218
3	0,812	13,322	4	1,946	7,030
	2,550	-5,905		0,705	2,416
	3,108	-11,103		0,902	2,177
	4,418	-28,201		0,200	2,320
	0,677	2,437		4,027	-22,379
	1,028	1,942		2,960	-9,603
	4,118	-23,680		2,731	-7,455
	4,929	-36,732		4,531	-29,998
	2,673	-6,944		2,823	-8,293
	1,037	1,923		4,331	-26,853

5	0,081	-6,359	6	0,945	-4,563
	4,160	-24,291		2,935	-9,358
	0,976	2,047		0,434	2,491
	3,723	-18,275		1,954	-1,728
	4,050	-22,705		0,142	2,244
	0,165	2,276		0,482	2,499
	2,889	-8,915		1,803	-0,896
	4,840	-35,171		1,850	-1,145
	1,023	1,953		2,080	-2,493
	2,139	-2,873		3,926	-20,975
7	2,980	7,896	8	0,278	0,117
	0,960	2,077		1,226	1,446
	0,492	2,500		1,661	-0,196
	4,915	-36,484		2,819	-8,256
	4,617	-31,399		0,124	2,217
	1,564	0,236		1,756	-0,655
	0,768	2,356		3,833	-19,718
	1,679	-0,280		2,468	-5,246
	3,946	-21,250		3,256	-12,691
	0,946	2,102		2,142	-2,892

9	0,351	5,809	10	1,964	0,632
	0,947	2,100		0,129	2,225
	0,511	2,500		3,736	-18,443
	1,190	1,548		0,559	2,493
	2,349	-4,338		4,224	-25,236
	4,593	-31,005		0,399	2,480
	2,686	-7,057		4,798	-34,446
	2,568	-6,053		2,543	-5,848
	4,532	-30,014		4,988	-37,784
	0,911	2,162		1,277	1,293
11	2,256	0,942	12	1,626	1,896
	4,030	-22,422		0,617	2,473
	4,931	-36,768		1,008	1,984
	2,779	-7,888		0,808	2,310
	0,978	2,043		4,071	-23,004
	2,267	-3,745		1,615	0,014
	2,025	-2,151		0,228	2,352
	4,638	-31,746		3,173	-11,790
	0,610	2,476		2,647	-6,719
	1,301	1,217		1,160	1,629

13	4,673	-28,856	14	1,672	3,496
	2,816	-8,228		2,902	-9,039
	2,493	-5,444		3,252	-12,647
	0,715	2,408		2,882	-8,848
	3,802	-19,306		4,374	-27,516
	4,773	-34,017		0,494	2,500
	0,533	2,498		0,609	2,476
	3,930	-21,030		4,007	-22,098
	3,727	-18,327		2,931	-9,320
	4,929	-36,732		1,376	0,965
15	4,248	-22,442	16	0,020	7,800
	3,708	-18,083		1,938	-1,636
	1,002	1,996		0,177	2,291
	0,924	2,140		4,546	-30,240
	4,557	-30,418		4,883	-35,921
	2,630	-6,574		4,682	-32,478
	3,433	-14,705		0,101	2,182
	3,240	-12,515		0,475	2,499
	3,652	-17,370		1,978	-1,869
	1,727	-0,511		4,713	-32,999
17	1,036	3,079	18	4,385	-20,539
	1,359	1,024		2,898	-9,001
	0,649	2,456		3,460	-15,023
	3,115	-11,176		4,937	-36,874
	2,170	-3,078		3,097	-10,989
	2,180	-3,145		2,176	-3,118
	0,227	2,351		1,443	0,722
	0,816	2,300		0,680	2,435
	2,963	-9,633		4,522	-29,853
	0,188	2,305		3,410	-14,436