РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В RL/RC ЦЕПЯХ ПРИ НАЧАЛЬНОМ ЗАПАСЕ ЭНЕРГИИ В НАКОПИТЕЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ.

2.1 Влияние начальных условий на характер протекания переходного процесса

Будем рассматривать цепь с накопительным элементом, который получил запас энергии от активного двухполюсника, и в момент $t=0$ подключается к другой части цепи. Используя метод эквивалентного источника такую цепь можно привести к цепи простой структуры (рис.1.1) и рассматривать решение уравнений таких цепей с учетом начального запаса энергии

$$\widehat{u}_C(t) = 1-(1-\widehat{u}_{C0})e^{-\widehat{t}}\,;\widehat{u}_{C0}=\widehat{u}_C(0)\,;\widehat{i}_C=(1-\widehat{u}_{C0})e^{-\widehat{t}} \qquad (2.1)$$

$$\widehat{u}_C = u_C/E_{nl}\ ,\ \widehat{t}=t/\tau\ ,\ \tau = CR_i\ ,\ \widehat{i}_C = i_C/I_{sc}$$

$$i_L(t) = 1-(1-\widehat{i}_{L0})e^{-\widehat{t}}\,;\ \widehat{i}_{L0}=\widehat{i}_L(0)\,; \qquad (2.2)$$

$$\widehat{u}_L = (1-\widehat{i}_{L0})e^{-\widehat{t}}$$

$$\widehat{u}_L = u_L/E_{nl}\,,\ \widehat{i}_L = i_L/I_{sc}\,,\ I_{sc}=E_{nl}/R_i\,,\quad \widehat{t}=t/\tau\,,\quad \tau = L/R_i$$

где E_{nl}, I_{sc}, R_i – напряжение ХХ, ток КЗ и внутреннее сопротивление эквивалентного источника.

Скорость запасания энергии в накопительных элементах определяется формулами

$$\widehat{p}_C(t) = (1-\widehat{u}_{C0})[e^{-\widehat{t}}-(1-\widehat{u}_{C0})e^{-2\widehat{t}}\,],\ \widehat{p}_C = p_C/P_{sc}\,, \qquad (2.3)$$

$$P_{sc}=E_{nl}{}^2/R_i$$

$$\widehat{p}_L(t) = (1-\widehat{i}_L)[e^{-\widehat{t}}-(1-\widehat{i}_L)e^{-2\widehat{t}}\,],\ \widehat{p}_L = p_L/P_{sc}\,, \qquad (2.4)$$

$$P_{sc}=I_{sc}{}^2R_i$$

Форма реакций и координаты экстремума t_e, p_e функций $p_C(t), p_L(t)$ зависят от начальных условий

$$t_{eRC} = \tau_{RC}\ln\left[2(1-u_{C0}/E_{nl})\right]\ ,\ p_{Ce}=P_{sc}/4\,; \qquad (2.5)$$

$$t_{eRL} = \tau_{RL}\ln\left[2(1-i_{L0}/I_{sc})\right] \qquad p_{Le}=P_{sc}/4$$

Рассмотрим влияние начальных условий на характер переходного процесса на примере цепи с емкостным накопителем. Кривые напряжения, тока, мощности и запасаемой энергии при нулевых начальных условиях рассмотрены в разделе 1 и показаны на рис. 1.3.

На рис. 2.1 показаны кривые переходного процесса при отрицательном значении начального напряжения $u_{C0}=-0.5E_{nl}$.

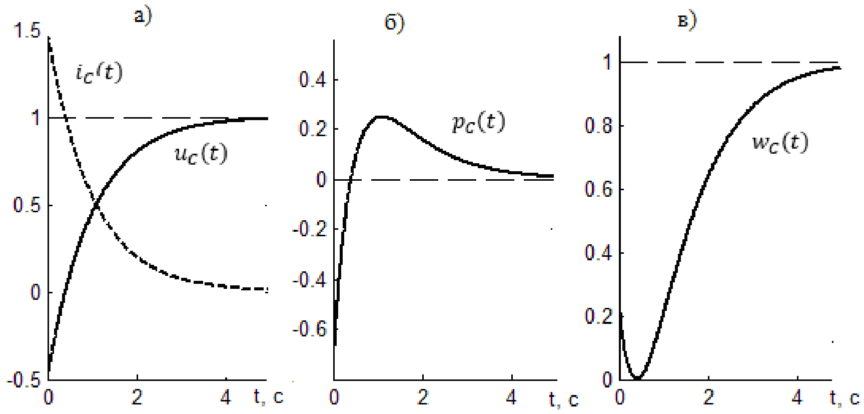

Рис.2.1 Осциллограммы напряжения и тока емкости – а), мощности – б) и запасаемой энергии – в) при начальном значении напряжения $\widehat{u}_0 = -0.5$

На интервале времени $0 \le t \le t_1$ мощность отрицательна, и емкость работает в режиме генератора. В момент времени $t = t_1$ происходит смена полярности напряжения

$$t_1 = \ln(1 - u_{C0}), \quad u_{C0} \prec 0$$

Далее емкость начинает работать в режиме накопления энергии. Скачок тока в начальный момент времени превышает бросок тока при нулевых начальных условиях на 50%

$$i_C(0) = \frac{E_{nl} - u_{C0}}{R_i} = \frac{1.5E_{nl}}{R_i}$$

Максимальная скорость запасания энергии в рассматриваемом случае имеет место в момент

$$t_e = \tau \ln[2(1 - \widehat{u}_{C0})] = 1.1\tau$$

На рисунке 2.2 показаны кривые переходного процесса при положительной полярности начального напряжения $\widehat{u}_0 = 0.4$. Из графиков видно, что скачок тока уменьшился в 2.5 раза и составляет 60% от броска тока в цепи с нулевыми начальными условиями, запасаемая энергия монотонно возрастает в отличие от случая $u_{C0} = -0.5E_{nl}$ (рис.2.1-в).

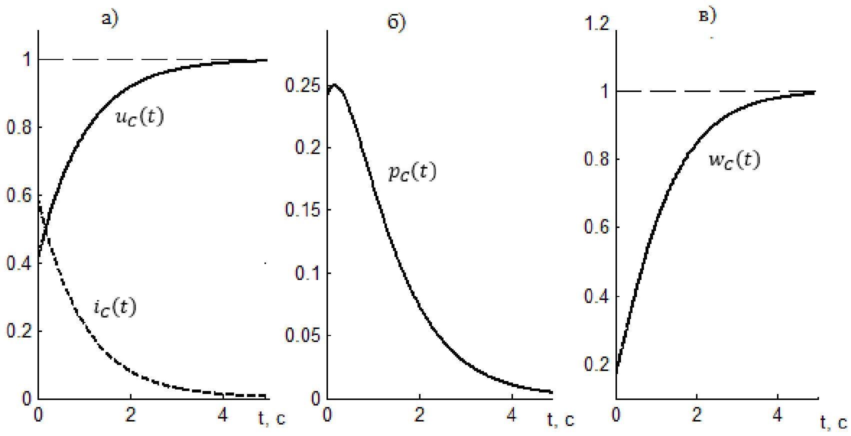

Рис.2.2 Осциллограммы напряжения и тока – а) мощности – б) и запасаемой энергии – в) при начальном значении напряжения емкости $\widehat{u}_0 = 0.4$.

2.2 Перенапряжения в цепях при отключении катушки индуктивности

Если при отключении источника в момент $t = 0$ индуктивность не имеет параллельных ветвей для замыкания тока i_{L0} и выделения на резисторе запасенной в индуктивности энергии, то коммутация цепи сопровождается перенапряжениями на индуктивности и контактах выключателя. Модель такой цепи должна учитывать межвитковую емкость катушки индуктивности и нелинейную вольтамперную характеристику $U = f(I)$ газоразрядного промежутка размыкаемых контактов. В зависимости от мощности цепи размыкание сопровождается образованием искры или дуги.

Для оценки перенапряжений рассмотрим цепь (рис.2.3), в которой параллельно контактам идеального выключателя включен резистор R_2.

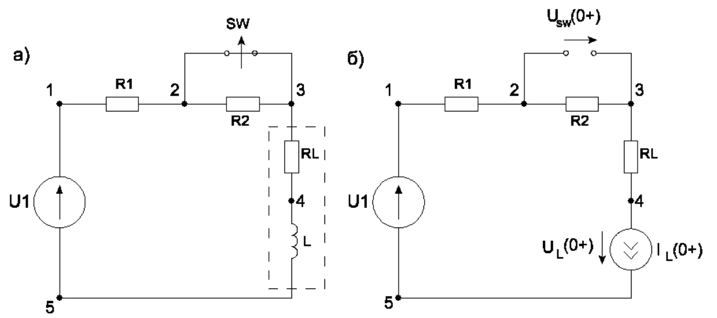

Рис.2.3 Схема коммутируемой цепи - а) и расчетная схема в момент $t = 0_+$ – б)

В исходном состоянии в цепи протекает установившейся ток, который определяет накопленную в индуктивности энергию W_{L0}

$$i_L(0_-) = I_{L0} = E/R, \quad R = R_1 + R_L, \quad W_{L0} = LI_{L0}^2/2$$

Переходной процесс после размыкания ключа описывается выражением

$$i_L(t) = I_{Ls} - (I_{Ls} - i_{L0}) \cdot e^{-t/\tau}, \quad \tau = L/(R_1 + R_2 + R_L), \qquad (2.6)$$
$$I_{Ls} = E/(R_1 + R_2 + R_L)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_L} \cdot e^{-t/\tau} \qquad (2.7)$$

где τ - время релаксации, I_s – установившееся значение тока, $I_s \prec i_0$.

Перенапряжения на катушке индуктивности $u_{RL}(0_+)$ и контактах выключателя $u_{sw}(0_+)$ определяются по расчетной схеме для момента $t = 0+$, показанной на рис.2.3-б.

$$u_{RL}(0_+) = i_{L0}R_L - E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_L}, u_{sw}(0_+) = i_{L0}R_2 \qquad (2.8)$$

При параметрах цепи $E = 50$, $R_L = 2$, $R_1 = 3, R_2 = 45$, $L = 0.15$ имеем: $i_0 = 10$, $\tau = 0.003$, $I_s = 1$. Напряжения на индуктивности и контактах выключателя в момент времени $t = 0_+$ в 9 раз превышают напряжение источника: $u_L(0_+) = -450$, $u_{sw}(0_+) = 450$. Графики тока и напряжений для указанных параметров цепи показаны на рис.2.4.

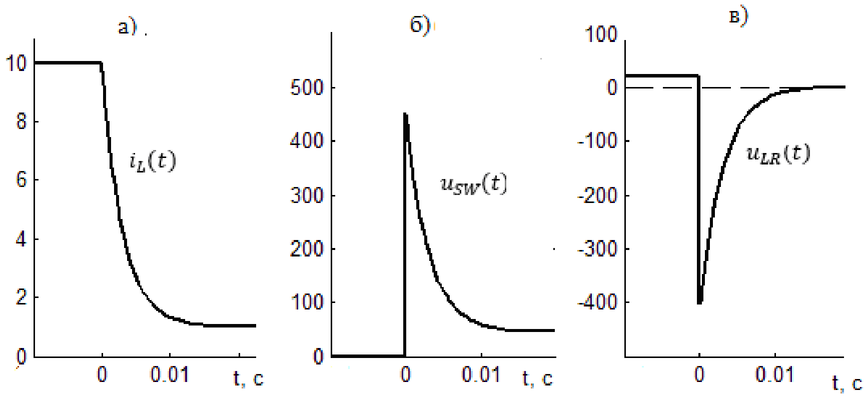

Рис.2.4. Ток цепи– а) , напряжение на контактах выключателя – б) и напряжение на катушке индуктивности – в)

Увеличение сопротивления R_2 приводит к росту кратности перенапряжений на катушке индуктивности и контактах выключателя.

2.3. Расчет переходных процессов. Задание.

1) Восстановить схему цепи в соответствии с данными таблицы 2.1.

2) Определить независимые начальные условия.
3) Найти напряжение/ток накопительных элементов и реакцию цепи, указанную в таблице вариантов
4) Определить мощность и энергию накопительного элемента
5) Построить графики найденных величин. Определить время переходного процесса. Таблица 2.1.

Таблица вариантов

№вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	Найти
1	1-6 U_1=24	1-2 R_2=2	2-4 R_3=2	2-3 L_4=3	3-5 R_5=2	6-5 U_6=9	4-6 SW_7, 0→1	-	$u_3(t)$
2	1-4 I_1=8	1-4 R_2=2	1-3 R_3=3	2-4 R_4=2	1-2 R_5=4	1-2 L_6=6	3-4 SW_7, 1→0	-	$u_4(t)$
3	1-6 U_1=10	1-2 C_2=3	2-3 R_3=2	3-5 R_4=4	3-4 R_5=4	4-6 U_6=4	5-6 SW_7, 0→1	-	$i_4(t)$
4	1-5 U_1=9	1-2 R_2=3	4-5 R_3=1	2-4 R_4=1	2-3 R_5=1	3-4 L_6=1,5	1-2 SW_7, 0→1	-	$i_3(t)$
5	1-5 U_1=24	1-2 R_2=4	2-3 R_3=3	2-4 R_4=6	3-4 L_5=3	4-5 R_6=6	1-2 SW_7, 0→1	-	$u_4(t)$
6	4-1 I_1=6	1-4 R_2=4	1-4 C_3=3	1-2 R_4=2	2-3 U_5=12	3-4 R_6=2	1-2 SW_7, 0→1	-	$i_6(t)$
7	1-4 U_1=6	2-3 R_2=2	2-3 L_3=0,5	1-2 R_4=1	3-4 I_5=6	3-4 R_6=1	1-2 SW_7, 1→0	-	$i_1(t)$
8	5-1 I_1=24	1-5 R_2=2	1-2 R_3=2	2-3 R_4=2	3-4 R_5=2	2-5 C_6= 0,125	4-5 L_7=1	3-5 SW_8, 0→1	$i_3(t)$
9	2-1 I_1=18	1-4 R_2=2	1-3 R_3=2	4-2 L_4=1	3-2 U_5=12	2-5 R_6=2	1-5 SW_7, 0→1	-	$i_3(t)$
10	1-5 U_1=24	1-2 R_2=2	2-5 R_3=2	3-5 R_4=4	4-5 R_5=4	2-3 L_6=1	4-5 C_7= 0,5	3-4 SW_8, 0→1	$u_3(t)$
11	1-4 U_1=9	1-2 R_2=1	2-4 R_3=1	1-3 R_4=1	3-4 C_5=0,5	2-3 SW_6, 0→1	-	-	$u_2(t)$
12	4-1 I_1=3	1-2 R_2=2	1-3 R_3=2	2-4 R_4=2	3-4 C_5=1/3	2-3 SW_6, 1→0	-	-	$i_2(t)$

13	1-4 $U_1=8$	1-2 $R_3=2$	1-3 $R_3=2$	2-4 $R_4=1$	3-4 $L_5=4$	2-3 SW_6, $0\to1$	-	-	$i_3(t)$
14	4-1 $L_1=12$	1-2 $R_2=3$	1-3 $R_3=1$	2-4 $R_4=1$	3-4 $R_5=3$	3-4 $C_6=0{,}8$	2-3 SW_7, $1\to0$	-	$i_2(t)$
15	4-1 $I_1=15$	1-2 $R_2=2$	2-4 $R_3=2$	1-3 $R_4=2$	2-5 $R_5=2$	3-4 $C_6=3$	3-5 SW_7, $0\to1$	-	$i_4(t)$
16	1-4 $U_1=36$	1-2 $R_2=2$	2-5 $R_3=2$	2-3 $R_4=1$	3-4 $R_5=1$	3-4 $L_6=0{,}25$	4-5 SW_7, $1\to0$	-	$i_5(t)$
17	4-1 $I_1=15$	1-2 $R_2=2$	2-4 $R_3=3$	1-3 $R_4=3$	2-5 $R_5=3$	3-4 $L_6=3$	3-5 SW_7, $1\to0$	-	$u_4(t)$
18	1-5 $U_1=16$	1-2 $R_2=4$	2-5 $R_3=4$	2-3 $R_4=2$	4-5 $R_5=4$	3-5 $C_6=1$	3-4 SW_7, $0\to1$	-	$u_3(t)$
19	1-4 $U_1=12$	1-2 $R_2=2$	2-4 $R_3=2$	2-4 $C_4=3$	4-3 $I_5=6$	3-4 $R_6=2$	2-3 SW_7, $0\to1$	-	$i_6(t)$
20	1-5 $U_1=12$	1-2 $R_2=4$	2-3 $L_3=3$	4-3 $R_4=2$	4-3 $I_5=6$	3-4 SW_6, $1\to0$	4-5 $R_8=2$	-	$i_4(t)$
21	1-4 $U_1=10$	1-2 $R_2=2$	2-4 $R_3=2$	2-3 $L_4=4$	3-4 $R_5=2$	4-3 $I_6=6$	2-3 SW_7, $0\to1$	-	$i_2(t)$
22	4-1 $I_1=3$	1-4 $R_2=2$	1-2 $C_3=1/3$	2-3 $R_4=4$	3-4 $U_5=5$	1-4 SW_6, $1\to0$	-	-	$u_2(t)$
23	1-5 $U_1=12$	2-3 $R_2=2$	3-5 $R_3=2$	3-4 $I_4=12$	3-4 $R_5=2$	4-5 $C_6=1/6$	1-2 SW_7, $0\to1$	-	$i_3(t)$
24	4-1 $I_1=6$	1-4 $R_2=2$	1-2 $R_3=2$	2-4 $L_4=4$	2-3 $R_5=2$	3-4 $U_6=6$	1-4 SW_7, $1\to0$	-	$u_3(t)$

2.4. Пример расчета

Схема цепи, составленная по данным таблицы 2.2, показана на рис.2.5

Таблица 2.2

Параметры цепи

№	Номер и параметры элемента							Найти
	1	2	3	4	5	6	7	
25	I_1=6	R_2=1	R_3=1	R_4=1	C_5=3	U_6=3	SW_7, 1→0	i_2 (t)
	4-1	1-4	1-2	2-3	2-4	3-4	1-4	

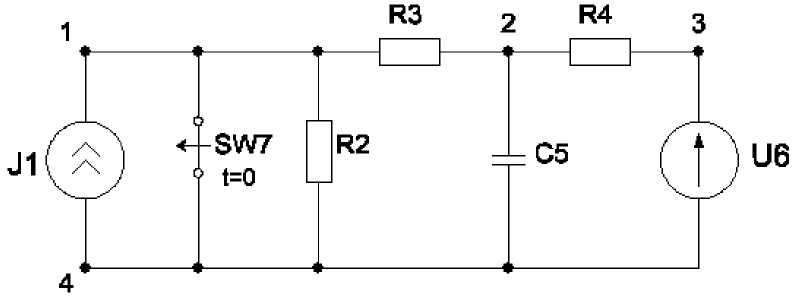

Рис.2.5. Схема цепи с емкостными накопителем

Расчет переходного процесса заключается в определении начального состояния цепи до коммутации при t<0 и вычислении параметров X_S X_t, и p переходных токов и напряжений, закон изменения которых определяется видом решения дифференциального уравнения первого порядка

$$x(t) = X_S + X_t e^{pt}, \tag{2.9}$$

где X_S – установившееся значение реакции, X_t – начальное значение свободной составляющей реакции, p – корень характеристического уравнения

Расчет производится по схемам замещения цепи для различных интервалов времени $t<0$, $t=0_+$, $t \to \infty$ и схеме цепи для свободных токов.

Независимые начальные условия $u_C(0_-)$, $i_L(0_-)$ определяются по схеме цепи до коммутации (рис. 2.6)

$$u_C(0\_) = U_6 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} = \frac{3}{2},$$

Энергия, запасенная в емкости до размыкания ключа, равна:

$$W_C(0\_) = \frac{C \cdot u_C(0\_)^2}{2} = 3{,}375.$$

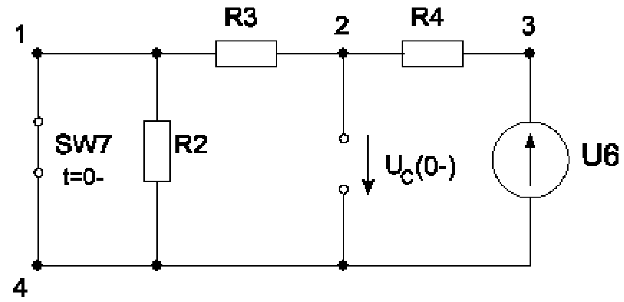

Рис.2.6. Установившийся режим цепи до размыкания ключа SW_7

Установившийся режим цепи после размыкания ключа SW_7 рассчитывается по схеме для времени $t \to \infty$ (рис. 2.7). Напряжение U_{Cs}, I_{2s} вычисляются по методу наложения. Частные реакции находятся с помощью коэффициентов передачи напряжения/тока и закона Ома:

$$U_{Cs} = \frac{R_2 + R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot U_6 + I_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot R_4 = 4\,.$$

$$I_{2s} = \frac{U_6}{R_2 + R_3 + R_4} + I_1 \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 5\,.$$

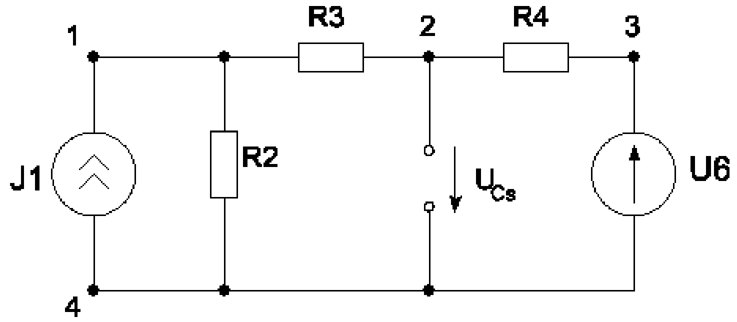

Рис.2.7. Расчетная схема для установившегося режима

Для получения характеристического уравнения используется расчетная схема цепи для свободных токов (рис. 2.8), которые изменяются по закону $i_t(t) = I_t e^{pt}$.

Определим эквивалентное сопротивление R_e относительно узлов 2-4, к которым подключена емкость C:

$$R_e = \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{2}{3}\,.$$

Из закона Кирхгофа для преобразованной цепи $I_t Z(p) = 0$ и условия $I_t \neq 0$ вытекает характеристическое уравнение:

$$Z(p) = R_e + 1/pC = 0\,.$$

Корень уравнения и время релаксации цепи равны

$$p = -1/R_e C = -0.5\,,\ \tau = 1/|p| = R_e C = 2\,.$$

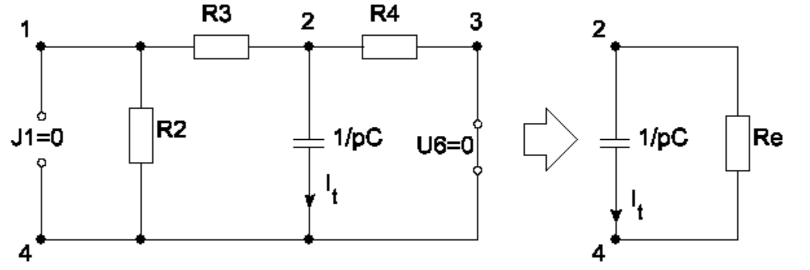

Рис.2.8. Исходная схема - а) и преобразованная схема для свободных токов-б).

Амплитуды свободных составляющих реакций X_t определяются по начальным значениям реакций $x(0_+)$ в момент времени $t = 0_+$:

$$x(0_+) = X_S + X_t;\ X_t = x(0_+) - X_S.$$

Значение $x(0_+)$ находится по расчетной схеме, показанной на рис.2.9. В этой схеме независимое начальное условие $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 1{,}5$ учтено источником напряжения.

Токи $i_2(0_+)$ и $i_C(0_+)$ найдем по методу наложения:

$$i_2(0_+) = I_1 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} + u_C(0_+) \cdot \frac{1}{R_2 + R_3} = 3{,}75.$$

$$i_C(0_+) = I_1 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} - u_C(0_+) \cdot \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_4 \cdot (R_2 + R_3)} + \frac{U_6}{R_4} = 3{,}75$$

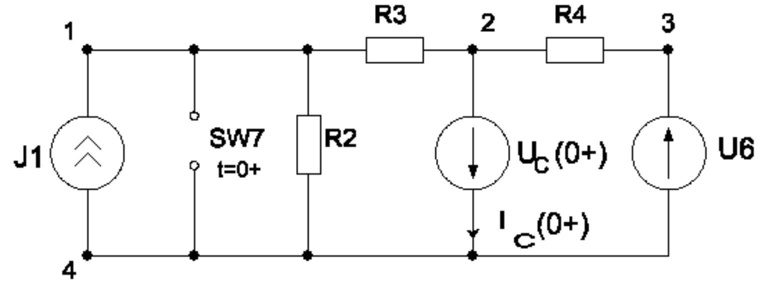

Рис.2.9. Схема цепи для момента $t = 0_+$

Для определения амплитуд U_{Ct}, I_{Ct} и I_{2t} используются начальные значения токов $i_2(0_+)$, $i_C(0_+)$ и независимое начальное условие $u_C(0_+)$.

$$U_{Ct} = u_C(0_+) - U_{Cs} = 1{,}5 - 4 = -2{,}5,$$

$$I_{Ct} = i_C(0_+) = 3{,}75\,\text{А},$$

$$I_{2t} = i_2(0_+) - I_{2s} = 3{,}75 - 5 = -1{,}25.$$

Запишем зависимость реакций от времени:

$$u_C(t) = 4 - 2{,}5e^{-t/2}, i_C(t) = 3{,}75e^{-t/2}, i_2(t) = 5 - 1{,}25e^{-t/2}. \quad (2.10)$$

Время переходного процесса по уровню 5% составляет $t_s = 3\tau = 6$, по уровню 1% – $t_{s1} = 5\tau = 10$.

Из графиков реакций (рис. 2.10) видно, что напряжение емкости изменятся непрерывно, токи в момент коммутации изменяются скачком.

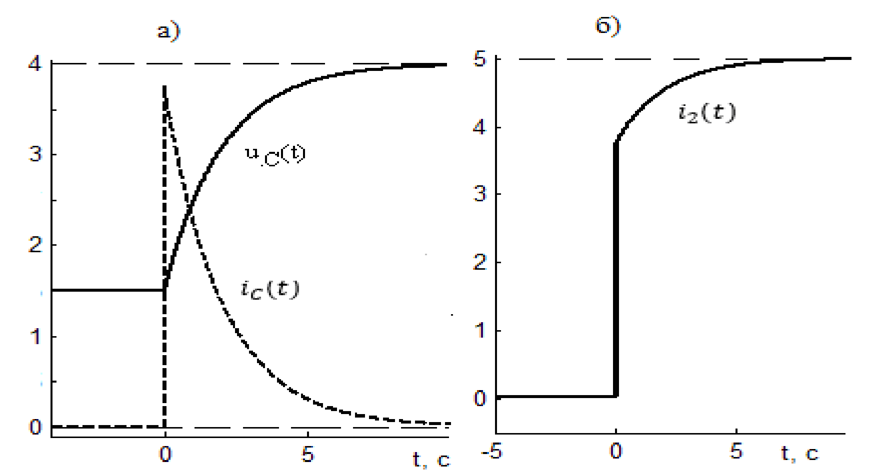

Рис2.10. Напряжение и ток емкости – а) и ток резистора R_2 – б)

Энергия емкости $w_C(t)$ и скорость ее запасания $p_C(t)$ определяются формулами:

$$w_C(t) = \frac{C \cdot u_C(t)^2}{2}, \ p_C(t) = u_C(t) \cdot i_C(t).$$

Запищем выражение для мощности

$$p_C(t) = P_{sc} \cdot (1 - \hat{u}_{C0}) \cdot [e^{-t/\tau} - (1 - \hat{u}_{C0}) \cdot e^{-2t/\tau}], \quad (2.11)$$
$$P_{sc} = U_{nl}^2 / R_i, \ \hat{u}_{C0} = u_{C0} / U_{nl},$$

где P_{sc} – мощность эквивалентного источника.

В рассматриваемом примере величины, входящие в формулу (2.11), принимают следующие значения:

$$u_{C0} = 1{,}5B, \ U_{Cs} = 4B, \ \hat{u}_{C0} = 0{,}375, \ P_{sc} = U_{nl}^2 / R_e = 24.$$

Графики $p_C(t)$ и $w_C(t)$ показаны на рисунке 2.11.

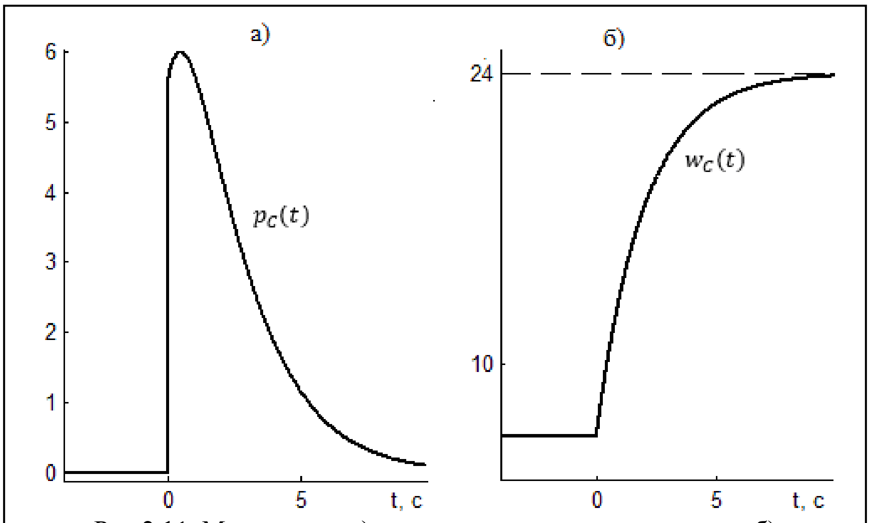

Рис.2.11. Мощность – а) и энергия заряда конденсатора – б)

Зависимость $p_C(t)$ имеет экстремум, координаты которого совпадают со значениями, определенными по формулам (2.5)

$$t_e = \tau \cdot \ln 2 \cdot (1 - \hat{u}_0) = 0{,}45 \ , \ P(t_e) = P_S / 4 = 6 \ .$$