

## РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПЕРАТОРНЫХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ

**Цель работы** - составление операторных схем с использованием активных двухполосников, учитывающих начальные условия, нахождение операторных токов методами расчета цепей постоянного тока, применение теорем о начальном и предельном значении оригинала, нахождение оригинала с помощью разложения Хевисайда, экспериментальная проверка результатов расчета

### 1. Введение

Операторный метод расчета электрических цепей включает следующие этапы

- формирование операторных схем замещения цепи
- составление алгебраических уравнений относительно изображений напряжений и токов  $U(s)$  и  $I(s)$  по операторным схемам замещения цепи с использованием методов расчета цепей постоянного тока,
- решение системы полученных уравнений
- нахождение оригинала по полученному изображению путем разложения дробно рациональной функции  $I(s) = M(s)/N(s)$  на простые дроби вида  $A_k/(s - s_k)$ , где  $s_k$  - один из корней уравнения  $N(s) = 0$ .

Операторные схемы строятся на основе замены индуктивных и емкостных элементов активными двухполосниками, образованными операторными сопротивлениями и источниками напряжения / тока, учитывающих начальные условия.

Известно, что интегро-дифференциальные соотношения между напряжением и током дуальных  $L, C$  элементов имеют вид

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di}{dt}; & i_L &= \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt + i_{L_0}; \\ i_C &= C \frac{du_C}{dt}; & u_C &= \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + u_{C_0}; \end{aligned} \quad (1)$$

Запишем изображение производной и интеграла функции  $f(t) \leftrightarrow F(s)$

$$\begin{aligned} f_1(t) = \frac{df(t)}{dt} &\leftrightarrow F_1(s) = s \cdot F(s) - f(0) \\ f_2(t) = \int_0^t f(t) dt + f_2(0) &\leftrightarrow F_2(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{f(0)}{s} \end{aligned} \quad (2)$$

Применение формул (2) к выражениям (1) дает связь между изображениями тока и напряжения на индуктивности и емкости

$$\begin{aligned} U_L(s) &= Z_L(s)I_L(s) - Li_0; & I_L(s) &= Y_L(s)U_L(s) + i_0/s; \\ U_C(s) &= Z_C(s)I_C(s) + u_0/s; & I_C(s) &= Y_C(s)U_C(s) - Cu_0; \end{aligned} \quad (3)$$

где  $i_0, u_0$  - начальные значения тока индуктивности и напряжения емкости, соответственно.

Величинам  $Z(s)$  и  $Y(s)$  придается смысл операторного сопротивления и операторной проводимости

$$Z_L(s) = sL, \quad Z_C(s) = 1/sC \quad Y_L(s) = 1/sL, \quad Y_C = sC \quad (4)$$

Величины  $L \cdot i_0$  и  $u_0/s$  можно представить как операторные источники напряжения, величины  $Cu_0$  и  $i_0/s$  - как операторные источники тока.

Тогда уравнениям (3) можно рассматривать как уравнения связи между напряжением и током активных двухполосников, схемы которых показаны на рис.1.

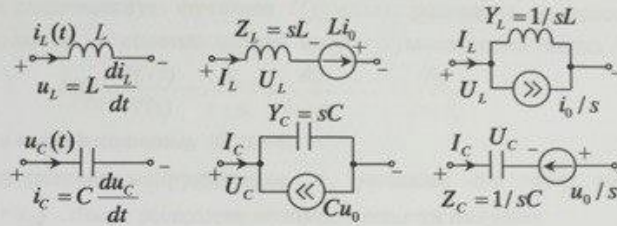


Рис.1. Операторные схемы замещения L- и C-элементов

Напряжения и токи индуктивно связанных элементов (ИСЭ) связаны соотношениями

$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \quad u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \quad (5)$$

Применение преобразования Лапласа к формулам (5) даст

$$U_1(s) = Z_{L1}(s) \cdot I_1(s) \pm Z_M(s) \cdot I_2(s) \mp L_1 \cdot i_{10} \mp M \cdot i_{20} \quad (6)$$

$$U_2(s) = Z_{L2}(s) \cdot I_2(s) \pm Z_M(s) \cdot I_1(s) \mp L_2 \cdot i_{20} \mp M \cdot i_{10}$$

Здесь  $i_{10}, i_{20}$  - начальные значения токов,  $Z_{L1}(s), Z_{L2}(s)$  - операторные сопротивления индуктивностей  $L_1, L_2$ ,  $Z_M(s)$  - операторное сопротивление взаимной индуктивности  $M$

$$Z_{L1}(s) = s \cdot L_1 \quad Z_{L2}(s) = s \cdot L_2 \quad Z_M(s) = s \cdot M \quad (7)$$

Формулам (6) соответствует схема замещения, показанная на рис.2

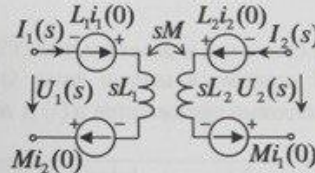


Рис.2. Схема замещения ИСЭ при согласном включении

Временным зависимостям напряжения /тока независимых источников  $e(t), j(t)$  ставятся в соответствие их операторные изображения  $E(s), J(s)$ . Для наиболее распространенных форм токов/напряжений это соответствие имеет вид

$$\begin{aligned} \delta(t) \leftrightarrow 1, \quad \delta_1(t) \leftrightarrow 1/s, \quad \exp(-\alpha \cdot t) \leftrightarrow 1/(s + \alpha), \quad t \leftrightarrow 1/s^2 \\ t \exp(-\alpha \cdot t) \leftrightarrow 1/(s + \alpha)^2, \quad \sin(\omega \cdot t) \leftrightarrow \omega/(s^2 + \omega^2), \quad \cos(\omega \cdot t) \leftrightarrow s/(\omega^2 + s^2) \quad (7) \\ e(t - t_d) \cdot \delta_1(t - t_d) \leftrightarrow E(s) \cdot \exp(-s \cdot t_d), \quad \exp(-\alpha \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) \leftrightarrow \omega/[(s + \alpha)^2 + \omega^2] \end{aligned}$$

После определения начальных значений переменных состояния  $u_C(0_-)$  и  $i_L(0_-)$  в исходной цепи и составления после коммутационной схемы замещения методы расчета операторных токов и напряжений формально не отличаются от методов расчета цепей постоянного тока и расчета установившегося режима цепей синусоидального тока методом комплексных амплитуд.

Решение системы алгебраических уравнений, полученных, например, на основе законов Кирхгофа, представляет собой дробно рациональную функцию. Эта функция представляет собой отношение двух полиномов  $I(s) = M(s)/N(s)$ , причем степень числителя не превышает степень знаменателя  $m \leq n$ . В случае равенства степеней  $m = n$  выделяют целую часть путем деления числителя на знаменатель. Оригиналом целой части является дельта - функция.

Дробно рациональную функцию  $I(s)$  можно разложить на простые дроби. Если полином  $N(s)$  имеет  $n$  простых корней, тогда  $I(s)$  можно представить в виде

$$I(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_k}{s-s_n} \quad (8)$$

где  $s_j$  - один из корней полинома  $N(s) = 0$ .

Для определения коэффициентов  $A_j$  умножим обе части выражения (8) на множитель  $(s-s_j)$ . После раскрытия неопределенности получим

$$A_j = \lim_{s \rightarrow s_j} (F(s) \cdot (s-s_j)) = \frac{M(s_j)}{N'(s_j)} \quad (9)$$

Другая формула для определения вычетов вытекает из представления полинома знаменателя с помощью теоремы Виета

$$N(s) = (s-s_1)(s-s_2) \cdot \dots \cdot (s-s_n) \quad (10)$$

Если представить многочлен (10) в виде  $N(s) = (s-s_j) \cdot N_1(s)$ , тогда коэффициент  $A_j$  можно определить по формуле

$$A_j = \left[ \frac{M(s)}{N_1(s) \cdot (s-s_j)} \cdot (s-s_j) \right]_{s=s_j} = \frac{M(s_j)}{N_1(s_j)} \quad (11)$$

Другим методом вычисления коэффициентов  $A_j$  является метод неопределенных коэффициентов. Он заключается в приведении правой части выражения (8) к общему знаменателю и приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях переменной  $s$  слева и справа.

**2. Пример расчета цепи с RLC элементами и источниками постоянного напряжения.**  
Структура и параметры цепи заданы в таблице 1. Требуется найти переменные состояния - ток индуктивности  $i_L(t)$  и напряжение емкости  $u_C(t)$ .

Таблица 1

| $N$ | 1              | 2              | 3                  | 4             | 5              | 6             | 7               | 8             |
|-----|----------------|----------------|--------------------|---------------|----------------|---------------|-----------------|---------------|
|     | 1-5            | 1-2            | 2-3                | 3-4           | 5-4            | 5-6           | 6-7             | 2-7           |
| 31  | $E_1$<br>120 В | $R_1$<br>12 Ом | Кл. $S_1$<br>0 → 1 | $R_2$<br>6 Ом | $E_2$<br>240 В | $C$<br>50 мкФ | $L_3$<br>0.1 Гн | $R_3$<br>8 Ом |

Схема цепи показана на рис.3.

Независимые начальные условия определяются по схеме цепи до замыкания ключа. Напряжение емкости  $u_C(0_-)$  и ток индуктивности  $i_L(0_-)$  находятся в соответствии с положительными направлениями токов и напряжений, принятыми в цепи после коммутации,

$$i_L(0_-) = 0, \quad u_C(0_-) = -E_1 = -120$$

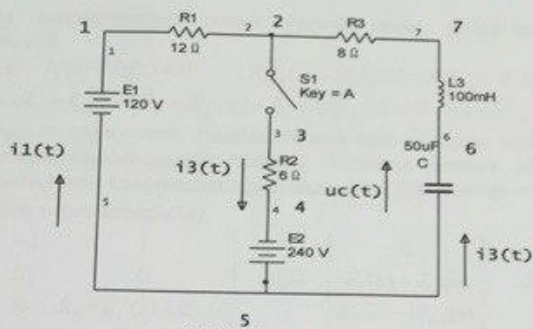


Рис.3. Схема цепи.

Для получения операторной схемы замещения цепи индуктивность заменяется пассивным двухполюсником в силу  $i_L(0_-) = 0$ , емкость при ненулевом начальном напряжении  $u_C(0_-) \neq 0$  - активным двухполюсником

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow U_L(s) = Z_L(s) \cdot I_L(s), \quad Z_L(s) = s \cdot L$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + u_C(0) \rightarrow U_C(s) = Z_C(s) I_C(s) + U_{C0}(s), \quad (12)$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC}, \quad U_{C0}(s) = \frac{u_C(0_-)}{s}$$

Напряжения независимых источников заменяются их изображениями

$$e_1(t) = E_1 \rightarrow E_1(s) = E_1/s \quad e_2(t) = E_2 \rightarrow E_2(s) = E_2/s$$

Операторная схема цепи показана на рис. 4, на которой пунктирной линией выделена схема замещения емкости.

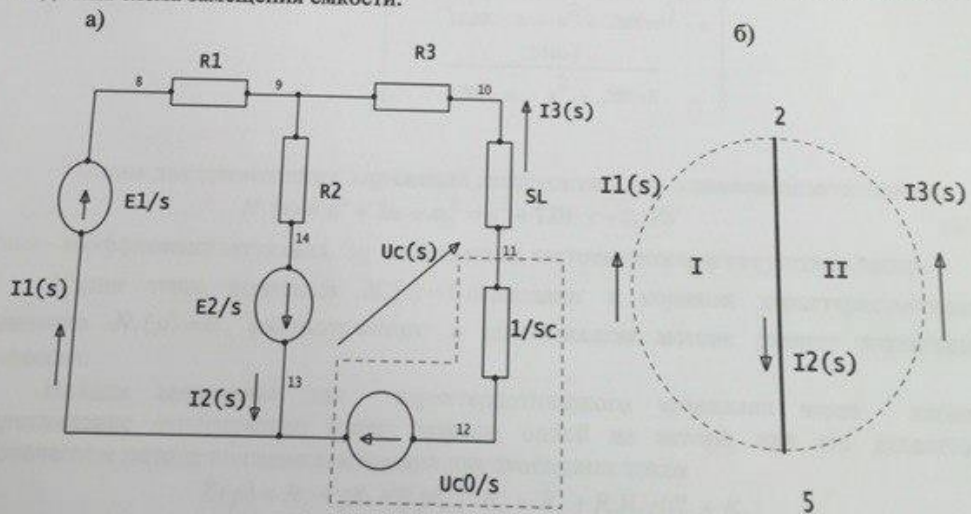


Рис. 4 Операторная схема замещения цепи - а) и ее ориентированный граф - б).

Токи ветвей можно определять одним из методов расчета цепей постоянного тока. Воспользуемся законами Кирхгофа для узла 5 и контуров I, II, направление обхода

которых задается направлениями токов ветвей связи ориентированного графа, показанного на рис. 2-6.

$$I_1(s) - I_2(s) + I_3(s) = 0 \quad R_1 I_1(s) + R_2 I_2(s) = E_1(s) + E_2(s) \quad (13)$$

$$I_2(s) R_2 + I_3(s) \cdot [R_3 + Z_L(s) + Z_C(s)] I_3(s) = E_2(s) - U_{C0}(s)$$

Для исключения трудоемких преобразований при решении полученной системы воспользуемся вычислительной средой *Mathcad*. Решение системы найдем матричным способом. Запишем матрицу коэффициентов уравнений  $Z(s)$ , вектор столбец источников  $E(s)$  и вектор столбец токов ветвей  $I(s)$

$$Z(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 + Z_L(s) + Z_C(s) \end{bmatrix} \quad E(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ E_1(s) + E_2(s) \\ E_2(s) - U_{C0}(s) \end{bmatrix} \quad I(s) = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Система уравнений (13) в матричной форме и ее решение имеет вид

$$Z(s) \cdot I(s) = E(s) \quad I(s) = Z^{-1}(s) \cdot E(s) \quad (15)$$

где  $Z^{-1}(s)$  - обратная матрица.

Приведем решение для напряжения емкости  $U_C(s)$  и вектора  $I(s)$  в виде фрагмента листинга вычислений

$$U_C(s) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow (-120) \cdot \frac{120 \cdot s + s^2 - 200e6}{s \cdot (120 \cdot s + s^2 + 200e6)}$$

$$I(s) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} 20 \cdot \frac{s^2 + 200e6 + 80 \cdot s}{(120 \cdot s + s^2 + 200e6) \cdot s} \\ 20 \cdot \frac{s^2 + 200e6 + 200 \cdot s}{(120 \cdot s + s^2 + 200e6) \cdot s} \\ \frac{240e4}{120 \cdot s + s^2 + 200e6} \end{bmatrix}$$

Общим для приведенных выражений является наличие в знаменателе полинома

$$N_1(s) = s^2 + 2\alpha + \omega_0^2 = s^2 + 120 \cdot s + 2 \cdot 10^5 \quad (16),$$

где  $\alpha$  - коэффициент затухания,  $\omega_0$  - собственная частота цепи при отсутствии потерь.

Корни этого полинома  $N_1(s) = 0$  совпадают с корнями характеристического уравнения  $N_1(p) = 0$ , рассмотренного в классическом методе расчета переходных процессов.

Найдем выражение для характеристического уравнения через входное сопротивление относительно точек разрыва одной из ветвей, как это делается в классическом методе по схеме замещения для свободных токов

$$Z(p) = R_e + pL + 1/pC, \quad R_e = R_3 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$$

Для параметров цепи  $L = 0.1$ ,  $C = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $R_e = 12$  получим

$$Z(p) = \frac{100}{p} \cdot (p^2 + 120p + 2 \cdot 10^5) = \frac{100}{p} \cdot N_1(p)$$

Характеристическое уравнение получается из условия  $Z(p) = 0$ , что эквивалентно уравнению  $N_1(p) = N_1(s) = 0$ .

Корни уравнения  $N_1(s) = 0$  являются полюсами операторных функций

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d = -60 \pm j443.2. \quad (18)$$

Обобщенный коэффициент демпфирования  $\beta = \alpha/\omega_0$  определяется из уравнения

$$\beta/\sqrt{1-\beta^2} = 64/443.2 \rightarrow \beta = 0.134$$

Найдем оригинал тока индуктивности  $i_L(t) \leftrightarrow I_L(s) = I_L(s)$

$$I_L(s) = \frac{2.4 \cdot 10^3}{s^2 + 120 \cdot s + 2 \cdot 10^5} = \frac{2.4 \cdot 10^3}{(s-s_1) \cdot (s-s_2)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2}$$

Вычеты  $A_1, A_2$  являются комплексно сопряженными

$$A_1 = \frac{2.4 \cdot 10^3}{(s_1 - s_2)} = \frac{2.4 \cdot 10^3}{2 \cdot j \cdot 443.2} = -j2.708 \quad A_2 = A_1^* = j2.708$$

$$i_L(t) = 2.708 \cdot \exp(-\alpha \cdot t) \cdot [\exp(j\omega_d \cdot t - \pi/2) + \exp(-j\omega_d \cdot t + \pi/2)] = 5.416 \exp(-60t) \cdot \sin(443.2t) \quad (19)$$

Для нахождения тока  $i_L(t) \leftrightarrow I_L(s)$  можно воспользоваться теоремой смещения  $\exp(-\alpha \cdot t) \cdot f(t) \leftrightarrow F(s + \alpha)$

$$I_L(s) = \frac{M}{s^2 + 2 \cdot \alpha \cdot s + \omega_0^2} = \frac{M}{(s + \alpha)^2 + (\omega_0^2 - \alpha^2)} = \frac{M}{\omega_d} \cdot \frac{\omega_d}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2} \leftrightarrow \frac{M}{\omega_d} \cdot \exp(-\alpha \cdot t) \cdot \sin(\omega_d t)$$

$$\alpha = 60 \quad \omega_d = 443.4 \quad M/\omega_d = 2400/443.4 = 5.416$$

Найдем напряжение емкости  $u_C(t) \leftrightarrow U_C(s)$ . Изображение  $U_C(s)$  имеет три полюса  $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d = -60 \pm j443.2$  и  $s_3 = 0$ , которые определяют свободные составляющие реакции и установившийся режим, соответственно. Представим  $U_C(s)$  в виде суммы простых дробей и найдем вычеты  $B_1, B_2, B_3$

$$U_C(s) = -120 \cdot \frac{s^2 + 120 \cdot s - 2 \cdot 10^5}{s \cdot (s^2 + 120 \cdot s + 2 \cdot 10^5)} = \frac{M(s)}{s \cdot N_1(s)} = \frac{B_3}{s} + \frac{B_1}{s-s_1} + \frac{B_2}{s-s_2}$$

$$B_3 = \frac{M(0)}{N_1(0)} = 120 \quad B_1 = \frac{M(s_1)}{s_1 \cdot (s_1 - s_2)} = 122 \exp(j3) \quad B_2 = 122 \exp(-j3)$$

Учитывая формулу  $\cos(x) = 0.5 \cdot [\exp(jx) + \exp(-jx)]$ , получим

$$u_C(t) = 120 + 242.2 \exp(-60t) \cdot \cos(443.2t + 3) \quad (20)$$

Выразим начальную фазу затухающих колебаний  $\psi_n = 3$  в градусах  $\psi_{nd} = \psi_n \cdot 180/\pi = 172.5^\circ$ .

Проверим полученный результат по формулам начального и предельного значений оригинала

$$u_C(0) = s \cdot U_C(s)|_{s \rightarrow \infty} = -120 \quad u_C(\infty) = s \cdot U_C(s)|_{s \rightarrow 0} = 120$$

Такие же значения получаются непосредственно из формулы (20)

$$u_C(0) = 120 + 242.2 \cdot \cos(3) = -120 \quad u_C(\infty) = 120$$

Графики тока индуктивности и напряжения емкости показаны на рис.5.

Переходной процесс носит колебательный характер. Период  $T_d$  и постоянная времени  $\tau$  затухающих колебаний равны

$$T_d = 2\pi/\omega_d = 2\pi/443.2 = 0.014 \quad \tau = 1/\alpha = 1/60 = 0.017$$

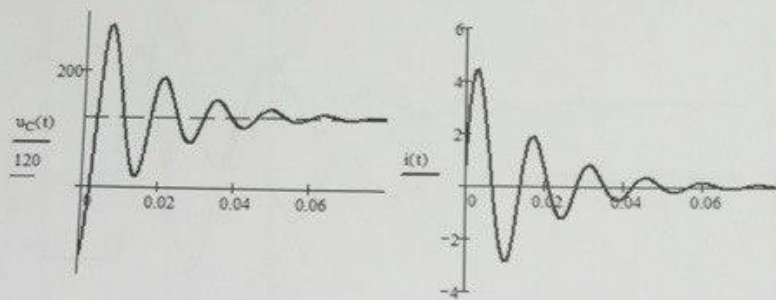


Рис.5. Напряжение емкости – а) и ток индуктивности/емкости – б) в ветви с последовательно включенными элементами  $R_3, L_3, C$ .

Найдем логарифмический декремент затухания  $d$  и число периодов колебаний  $N_T$  за время  $\tau$

$$d = \ln[i(t_1)/i(t_1 + T_d)] = T_d/\tau = 0.824 \quad N_T = 1/d = 1/214$$

Сравним результаты расчета с результатами измерений, полученными на лабораторном стенде *Electronics Workbench*, схема которого показана на рис.6. Напряжение емкости и ток индуктивности/емкости измеряются с помощью осциллографа XSC1. Для преобразования «ток-напряжение» используется источник напряжения  $V_1$ , управляемый током.

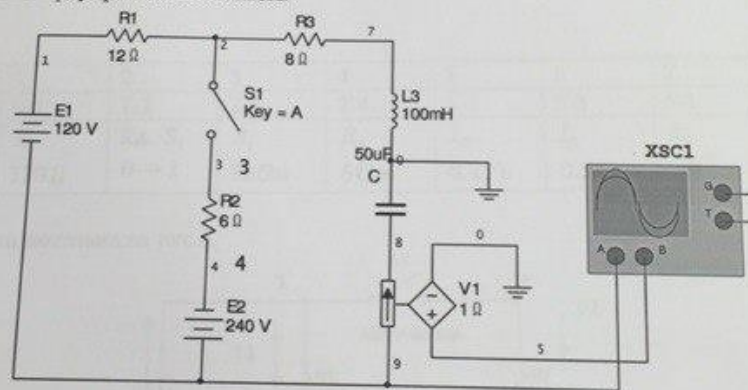


Рис.6. Схема лабораторного стенда

Осциллограммы напряжения и тока, показанные на рис.7, имеют тот же вид, что и расчетные кривые на рис.5.

С помощью курсоров измеряется период колебаний  $T_d$ , амплитуды тока  $I_{m1}, I_{m2}$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2 = t_1 + T_d$ , рассчитывается коэффициент демпфирования  $d = \ln(I_{m1}/I_{m2})$  и определяется время релаксации  $\tau$ , коэффициент затухания  $\alpha$  и круговая частота  $\omega_d$

$$\alpha = d/T_d \quad \tau = 1/\alpha \quad \omega_d = 2\pi/T_d$$

Результаты измерений совпадают с результатами расчета.

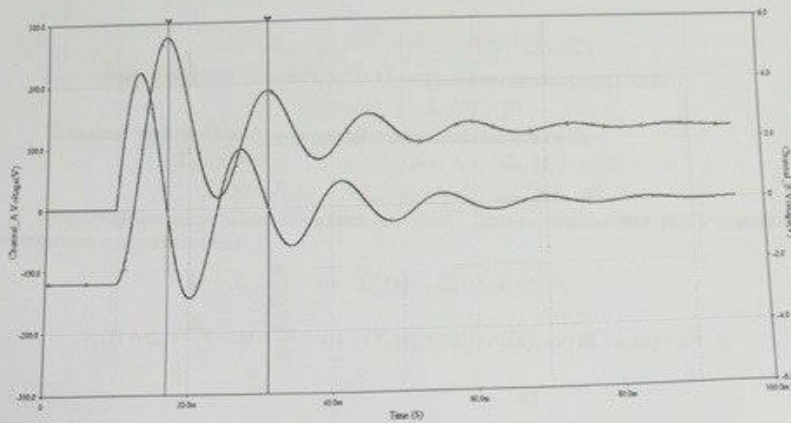


Рис.7 Осциллограммы тока (1) и напряжения (2)

### 3. Пример расчета цепи с индуктивно связанными элементами.

Структура и параметры цепи заданы в таблице 2. В столбце 7 дано значение коэффициента магнитной связи  $k_M$  и указаны номера узлов, к которым магнитно-связанные катушки  $W_1, W_2$  подключены одноименными/однополярными зажимами. Требуется найти переменные состояния – токи индуктивно связанных элементов  $i_{L1}(t)$  и  $i_{L2}(t)$

Таблица 2

| $N$ | 1              | 2                  | 3              | 4             | 5               | 6               | 7                     | 8             |
|-----|----------------|--------------------|----------------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------------|---------------|
| 32  | 1-5            | 1-2                | 2-3            | 2-4           | 5-4             | 5-3             | 5-4                   | 2-7           |
|     | $E_1$<br>120 В | Кл. $S_1$<br>0 → 1 | $R_1$<br>12 Ом | $R_2$<br>6 Ом | $L_2$<br>0.2 Гн | $L_1$<br>0.5 Гн | $k_M$<br>$\sqrt{0.1}$ | $R_3$<br>8 Ом |

Схема цепи показана на рис.8.

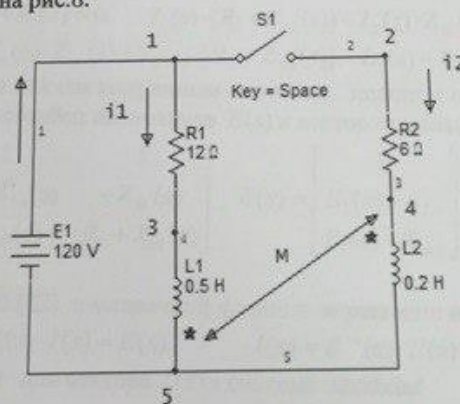


Рис.8 Схема цепи с магнитно-связанными элементами

Взаимная индуктивность индуктивно связанных элементов (ИСЭ) определяется через коэффициент магнитной связи



$$M = k_M \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = \sqrt{0.1} \cdot \sqrt{0.5 \cdot 0.2} = 0.1$$

Начальное значение тока катушки  $W_1$  определяется по закону Ома

$$i_0 = i_1(0) = E_1/R_1 = 10$$

Запишем параметры операторной схемы замещения цепи

$$Z_{L1}(s) = s \cdot L_1, \quad Z_{L2}(s) = s \cdot L_2, \quad Z_M(s) = s \cdot M,$$

$$E_1(s) = E_1/s, \quad E_{L0} = i_0 \cdot L_1, \quad E_{M0} = i_0 \cdot M.$$

Операторная схема цепи показана на рис.9. Схема замещения ИСЭ составлена в соответствии с уравнениями

$$u_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} \leftrightarrow U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 \cdot i_0 \quad (21)$$

$$u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M \cdot \frac{di_1}{dt} \leftrightarrow U_2(s) = sL_2 \cdot I_2(s) - s \cdot M \cdot I_1(s) + M \cdot i_0$$

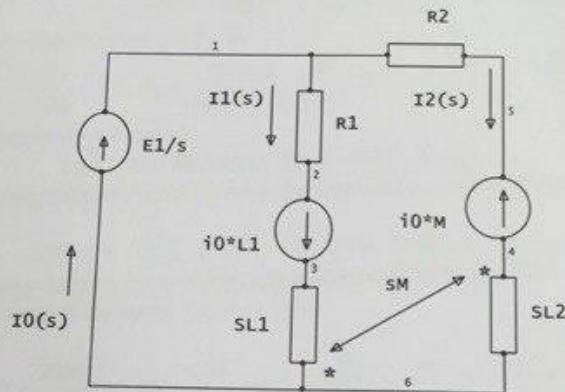


Рис.9. Операторная схема цепи

Уравнения Кирхгофа для цепи имеют вид

$$-I_0(s) + I_1(s) + I_2(s) = 0, \quad I_1(s) \cdot [R_1 + Z_{L1}(s)] - I_2(s) \cdot Z_M(s) = E_1(s) + E_{L0} \quad (22)$$

$$-I_1(s) \cdot Z_M(s) + I_2(s) \cdot [R_2 + Z_{L2}(s)] = E_1(s) - E_{M0}.$$

Решение системы найдем матричным способом. Запишем матрицу коэффициентов уравнений  $Z(s)$ , вектор столбец источников  $E(s)$  и вектор столбец токов ветвей  $I(s)$

$$Z(s) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & R_1 + Z_{L1}(s) & -Z_M(s) \\ 0 & -Z_M(s) & R_2 + Z_{L2}(s) \end{bmatrix} \quad E(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ E_1(s) + E_{L0} \\ E_1(s) - E_{M0} \end{bmatrix} \quad I(s) = \begin{bmatrix} I_0(s) \\ I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

Система уравнений (22) в матричной форме и ее решение имеет вид

$$Z(s) \cdot I(s) = E(s) \quad I(s) = Z^{-1}(s) \cdot E(s)$$

Приведем решение для вектора  $I(s)$  в системе *Mathcad*

$$I(s) \xrightarrow[\text{float, 3}]{\text{simplify}} \left[ \begin{array}{l} 10 \cdot \frac{120 + s}{(s + 40) \cdot s} \\ 3.33 \cdot \frac{240s + 220 \cdot s + 3 \cdot s^2}{(800 + 60 \cdot s + s^2) \cdot s} \\ 667 \cdot \frac{24 + s}{(800 + 60 \cdot s + s^2) \cdot s} \end{array} \right]$$

Найдем ток первой катушки  $i_1(t) \leftrightarrow I_1(s)$ . Полином знаменателя  $N(s) = s \cdot N_1(s)$  дробно рациональной функции  $I_1(s)$  имеет три корня  $s_1 = -20$ ,  $s_2 = -40$ ,  $s_3 = 0$ , которым соответствует три слагаемых в разложении  $I_1(s)$  на простые дроби

$$I_1(s) = \frac{10}{3} \cdot \frac{3 \cdot s^2 + 220 \cdot s + 2400}{s \cdot (s^2 + 60 \cdot s + 800)} = \frac{M_1(s)}{s \cdot N_1(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \frac{A_3}{s}$$

Вычислим коэффициенты  $A_1, A_2, A_3$

$$A_3 = \frac{M(0)}{N_1(0)} = 10, \quad A_1 = \frac{M(s_1)}{s_1(s_1 - s_2)} = \frac{20}{3}, \quad A_2 = \frac{M(s_2)}{s_2(s_2 - s_1)} = -\frac{20}{3}$$

Ток  $i_1(t)$  изменяется по закону

$$i_1(t) = 10 + 20/3 \cdot [\exp(-20 \cdot t) - \exp(-40 \cdot t)] \quad (23)$$

Проверим полученный результат по формулам начального и предельного значений оригинала

$$i_1(0) = s \cdot I_1(s)|_{s \rightarrow \infty} = 10 \quad i_1(\infty) = s \cdot I_1(s)|_{s \rightarrow 0} = 10$$

Такие же значения получаются непосредственно из формулы (23)

Найдем ток второй катушки  $i_2(t) \leftrightarrow I_2(s)$ .

$$I_2(s) = \frac{2000}{3} \cdot \frac{s + 24}{s \cdot (s^2 + 60 \cdot s + 800)} = \frac{M_2}{s \cdot N_1} = \frac{B_1}{s - s_1} + \frac{B_2}{s - s_2} + \frac{B_3}{s}$$

$$B_3 = \frac{M_2(0)}{N_1(0)} = 20, \quad B_1 = \frac{M_2(s_1)}{s_1 \cdot (s_1 - s_2)} = -\frac{20}{3}, \quad B_2 = \frac{M_2(s_2)}{s_2 \cdot (s_2 - s_1)} = -\frac{40}{3}$$

$$i_2(t) = 20 - 20/3 \cdot \exp(-20 \cdot t) - 40/3 \cdot \exp(-40 \cdot t) \quad (24)$$

Графики токов  $i_1(t), i_2(t)$  представлены на рис.10. Ток идеального источника напряжения изменяется в соответствии законами цепей первого порядка

$$i_0(t) = i_1(t) + i_2(t) = 30 - 20 \exp(-40t) \quad (25)$$

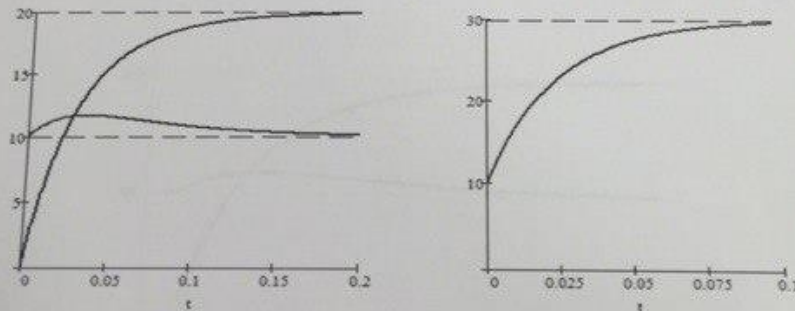


Рис.10. Токи индуктивно связанных элементов - а) и ток источника напряжения - б)

Проверка результатов расчета выполнена на лабораторном стенде *Electronics Workbench*, схема которого показана на рис.11. Индуктивная связь катушек моделируется с помощью источников напряжения, управляемых током, и блоками дифференцирования в соответствии с выражениями

$$u_{M1}(t) = \pm M \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \quad u_{M2}(t) = \pm M \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

где  $u_{M1}(t), u_{M2}(t)$  - напряжения взаимной индукции.

Источники, соответствующие этим напряжениям, включены последовательно с индуктивностями  $L_1, L_2$  так, чтобы выполнялись соотношения между напряжениями и токами ИСЭ (5)

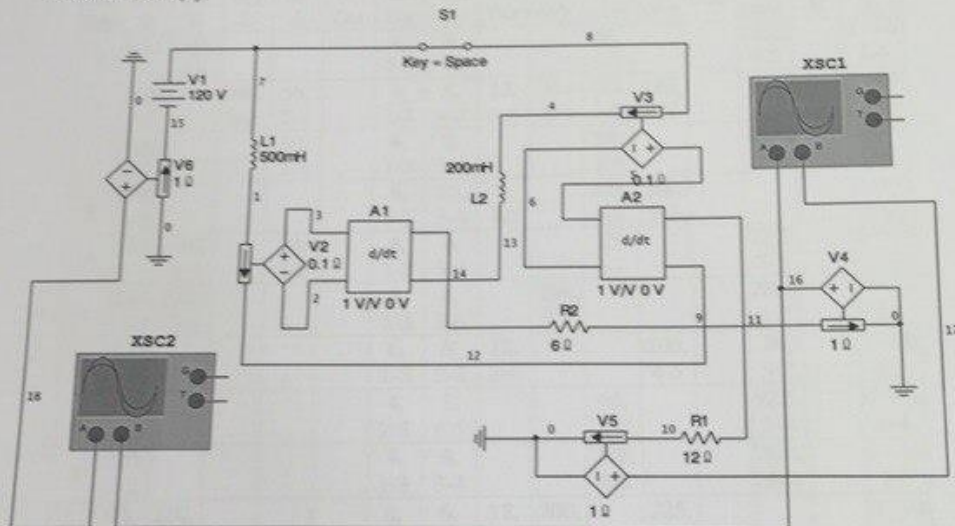


Рис.11. Лабораторный стенд для исследования МСЭ

На рис. 10 показан фрагмент осциллограммы, полученный с помощью осциллографа XSC1. Сравнение рисунков 12 и 10 показывает, что результаты расчета и эксперимента совпадают.

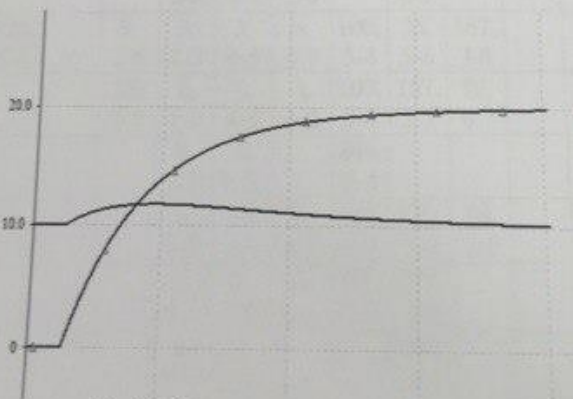


Рис. 12. Осциллограммы токов ИСЭ

#### 4. Задание

Найти начальные значения переменных состояния и составить операторную схему замещения.

Сформировать уравнения цепи относительно изображений токов. Записать уравнения в матричном виде и найти решение.

Найти оригиналы переменных состояния с помощью формул Хевисайда. Проверить результат с помощью теорем о начальном и предельном значении оригинала.

Построить графики полученных зависимостей  
Структура и параметры цепи заданы в таблице 3

Таблица №3

| № Вар | $U_{01}$<br>В | $U_{02}$<br>В | $U_{03}$<br>В | $I_0$<br>А | R,<br>Ом  | $R_1$ ,<br>Ом | $R_2$ ,<br>Ом | $R_3$ ,<br>Ом | $L_1$ ,<br>мГн | $L_2$ ,<br>мГн | $L_3$ ,<br>мГн | Км | C,<br>мкФ    | $U_{C(0)}$<br>В | Ключ<br>$S_1$ |
|-------|---------------|---------------|---------------|------------|-----------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----|--------------|-----------------|---------------|
| 1     | 120,<br>1-2   | 240,<br>3-4   |               |            |           | 4,<br>1-3     | 8,<br>4-5     |               |                | 65,<br>5-2     |                |    |              | 92,5,<br>4-2    | 1→0<br>1-4    |
| 2     | 200,<br>1-2   |               | 240,<br>7-2   | 50,<br>2-3 |           | 4,<br>2-3     | 6,<br>4-5     | 13,<br>4-6    | 50,<br>3-4     | 145,<br>5-2    | 110,<br>6-7    |    |              |                 | 1→0<br>3-2    |
| 3     | 120,<br>1-2   |               |               | 80,<br>3-2 |           | 4,<br>1-3     | 8,<br>3-4     |               |                | 296,<br>2-4    |                |    | 20,4,<br>3-2 |                 | 1→0<br>3-2    |
| 4     | 120,<br>1-2   |               |               |            |           | 6,<br>1-3     | 12,<br>3-4    | 6,<br>3-5     |                | 225,<br>4-2    | 200,<br>5-2    |    |              |                 | 1→0<br>1-3    |
| 5     | 120,<br>1-2   | 240,<br>2-5   |               | 90,<br>3-2 |           | 4,<br>1-3     | 8,<br>3-4     |               |                | 65,<br>4-2     |                |    | 92,5,<br>3-5 |                 | 1→0<br>3-2    |
| 6     | 120,<br>1-2   | 240,<br>2-6   |               |            |           | 8,<br>1-3     | 4,<br>5-6     |               | 296,<br>3-4    |                |                |    | 20,4,<br>4-2 |                 | 0→1<br>4-5    |
| 7     | 120,<br>1-2   |               |               |            |           | 6,<br>1-3     | 6,<br>3-2     | 12,<br>3-4    |                |                | 100,<br>4-5    |    | 20,<br>5-2   |                 | 1→0<br>5-2    |
| 8     | 120,<br>1-2   |               |               |            |           | 4,<br>1-3     | 8,<br>4-5     |               |                | 65,<br>5-2     |                |    | 92,5,<br>3-2 |                 | 0→1<br>3-4    |
| 9     | 120,<br>1-2   |               |               |            |           | 4,<br>1-3     | 8,<br>3-4     |               |                | 296,<br>4-2    |                |    | 20,4,<br>3-2 |                 | 1→0<br>1-3    |
| 10    | 90,<br>1-2    | 210,<br>7-2   |               |            |           | 6,<br>1-3     | 6,<br>6-7     | 12,<br>4-5    | 200,<br>3-4    |                | 225,<br>5-2    |    |              |                 | 0→1<br>4-6    |
| 11    | 120,<br>1-2   | 240,<br>2-6   |               |            |           | 4,<br>1-3     | 8,<br>4-5     |               |                | 65,<br>5-6     |                |    | 92,5,<br>3-2 |                 | 0→1<br>3-4    |
| 12    | 180,<br>1-2   | 240,<br>5-6   |               |            |           | 6,<br>1-3     | 12,<br>3-4    | 6,<br>3-2     |                | 100,<br>2-6    |                |    | 20,<br>4-5   |                 | 1→0<br>4-6    |
| 13    | 120,<br>1-2   | 240,<br>5-2   |               |            |           | 12,<br>1-3    | 4,<br>4-5     | 11,<br>3-6    |                | 100,<br>6-7    |                |    | 25,<br>7-2   |                 | 0→1<br>3-4    |
| 14    | 180,<br>1-2   |               | 120,<br>8-6   | 9,<br>2-6  | 3,<br>1-3 | 3,<br>4-5     | 6,<br>4-7     | 100,<br>3-4   | 55,<br>5-6     | 167,<br>7-8    |                |    |              |                 | 1→0<br>2-6    |
| 15    | 168,<br>1-2   |               |               | 10,<br>2-7 | 2,<br>1-3 | 6,<br>4-5     | 3,<br>4-6     | 100,<br>3-4   | 167,<br>5-7    | 55,<br>6-7     |                |    |              |                 | 1→0<br>2-7    |
| 16    | 120,<br>1-2   |               |               |            |           | 8,<br>1-3     | 4,<br>5-2     |               | 296,<br>3-4    |                |                |    | 20,4,<br>4-2 |                 | 0→1<br>4-5    |
| 17    | 180,<br>1-2   |               |               |            |           | 6,<br>1-3     | 12,<br>4-5    | 4,<br>6-7     | 145,<br>3-4    | 110,<br>5-2    | 50,<br>7-2     |    |              |                 | 0→1<br>4-6    |
| 18    | 180,<br>1-2   |               |               |            |           | 6,<br>1-3     | 12,<br>4-5    | 6,<br>6-2     | 200,<br>3-4    | 225,<br>5-2    |                |    |              |                 | 0→1<br>4-6    |
| 29    | 120,<br>1-2   |               |               |            |           | 4,<br>1-3     | 8,<br>3-4     |               |                | 296,<br>4-2    |                |    | 20,4,<br>2-5 | 40              | 0→1<br>3-5    |
| 20    | 160,<br>1-2   |               |               |            |           | 12,<br>1-3    | 4,<br>4-5     | 12,<br>3-5    |                |                | 100,<br>5-6    |    | 20,<br>6-2   |                 | 0→1<br>3-4    |

|    |             |             |             |  |  |            |            |           |            |             |             |  |              |    |            |
|----|-------------|-------------|-------------|--|--|------------|------------|-----------|------------|-------------|-------------|--|--------------|----|------------|
| 22 | 80,<br>1-2  |             | 240,<br>8-3 |  |  | 4,<br>1-3  | 12,<br>4-5 | 6,<br>6-7 | 50,<br>3-4 | 110,<br>5-3 | 145,<br>7-8 |  |              |    | 0→1<br>4-6 |
| 23 | 120,<br>1-2 |             | 120,<br>2-6 |  |  | 4,<br>1-3  | 8,<br>3-4  |           |            | 65,<br>4-2  |             |  | 92,5,<br>5-6 | 40 | 0→1<br>3-5 |
| 24 | 120,<br>1-2 | 240,<br>2-4 |             |  |  | 12,<br>1-3 | 6,<br>7-4  | 8,<br>3-5 |            |             | 100,<br>5-6 |  | 50,<br>6-2   |    | 0→1<br>3-7 |