Расчетно-графическое задание

4.1. Общие методические указания

Цель расчетно-графической работы – освоение физики колебательных процессов, изучение их основных характеристик и получение практических навыков решения задач по теме «Механические колебания. Электрические колебания».

Расчётно-графическая работа оформляется на компьютере. Оформление титульного листа производится по правилам, которые применяются на кафедре общей и технической физики при выполнении и оформлении результатов лабораторных работ. Необходимо указать наименование дисциплины, название работы и номер варианта, фамилию и инициалы студента с указанием курса и группы, фамилию, инициалы и должность преподавателя, проверяющего РГР, дату выполнения работы. Перед выполнении работы следует привести краткое теоретическое обоснование выполняемой работы: указать используемые физические законы и области их применения, записать необходимые формулы с пояснением всех входящих в формулу физических величин. Необходимо полностью переписать задачу своего варианта. При получении расчётной формулы приведите её полный вывод. Проверить единицы измерения полученных величин по расчетной формуле и тем самым подтвердить ее правильность. Произвести вычисления (в единицах СИ) с точностью не более 2-3 значащих цифр.

При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 6340 надо записать $6{,}34\cdot10^3$.

Полученные функциональные зависимости следует изобразить графически. Выбрать удобный масштаб и указать его на осях координат, а так же физические величины и единицы их измерения. На координатной плоскости обязательно должны быть нанесены экспериментальные точки.

В выводах надо отразить выполнение поставленной задачи, дать анализ полученных результатов.

4.2. Примеры решения задач

Задача. Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода задана функцией $\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{a}}$, где a – боровский радиус. Определите:

1) Нормировочный множитель А;

2) Среднее расстояние частицы до силового центра;

3) Наиболее вероятное расстояние частицы до силового центра;

4) Среднее значение кулоновской силы, действующей на электрон со стороны ядра;

5) Среднее значение потенциальной энергии электрона в поле ядра;

6) Объемную плотность вероятности нахождения частицы в сферически симметричной области локализации. Постройте зависимость объемной плотности вероятности от r;

Дано:	
$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{a}}$	*Примечание:* Для нахождения средних значений величин необходимо воспользоваться теоремой о математическом ожидании. Решение задачи целесообразно начать с нахождения нормировочного множителя: Из условия нормировки получим:
A - ? $\langle r_{cp}\rangle$ - ? $R_{вер}$ -?	$\int\limits_V \lvert\psi\rvert^2 dV = \int\limits_V \psi\psi^{*} dV = 1$;

$<F>$ - ?
$<U_{cp}>$ -?

Задача сферически симметрична, поэтому элемент объема, в котором находится электрон:

$dV = 4\pi r^2 dr$, подставим в условие нормировки:

$\int_0^\infty A^2 e^{-\frac{2r}{a}} 4\pi r^2 dr = 1$. Произведем вычисление интеграла:

$$4\pi A^2 \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{a}} dr = 4\pi A^2 \frac{2!}{\left(\frac{2}{a}\right)^3} = 4\pi A^2 \frac{a^3}{4};$$

$$4\pi A^2 \frac{a^3}{4} = 1; \qquad A = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}}$$

Определим среднее расстояние частицы до силового центра:

$$\langle r\rangle = \int_0^\infty \langle r\rangle |\Psi|^2 dV = \int_0^\infty r\Psi\Psi^* dV = \int_0^\infty \frac{4\pi r^3}{\pi a^3} e^{\frac{-2r}{a}} dr =$$

$$= \frac{4}{a^3}\int_0^\infty r^3 e^{\frac{-2r}{a}} dr = \frac{3}{2}a$$

Найдем среднее значение кулоновской силы. По закону Кулона сила, действующая на электрон со стороны положительно заряженного ядра, равна:

$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2}$, введем обозначение $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ и учтем, что в атоме водорода зарядовое число $Z = 1$, тогда $F(r) = k \cdot \frac{e^2}{r^2}$.

Определим среднее значение кулоновской силы:

$$\langle F\rangle = \int_0^\infty F(r) \cdot |\Psi|^2 dV =$$

$$= \int_0^\infty k \cdot \frac{4\pi r^2 e^2 \Psi^2}{r^2} dr = \int_0^\infty ke^2\left(A^2 \exp\left(\frac{-2r}{a}\right)\right) 4\pi dr =$$

$$= 2ke^2 A^2 \pi a = \frac{2ke^2}{a^2}$$

$$\langle F \rangle = \int_0^{\infty} F(r) \cdot |\Psi|^2 dV = \int_0^{\infty} k \cdot \frac{4\pi r^2 e^2 \Psi^2}{r^2} dr =$$

$$= 2ke^2 A^2 \pi a = \frac{2ke^2}{a^2}$$

проведем замену k и получим, что $\langle F \rangle = \dfrac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$.

Определим среднее значение потенциальной энергии:

Потенциальная энергия электрона в поле ядра:

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r} = -k\frac{e^2}{r};$$

$$\langle U_p \rangle = -\int_0^{\infty} ke^2 \cdot |\Psi|^2 dV =$$

$$= -\int_0^{\infty} k\frac{A^2 e^2}{r} \exp\left(\frac{-2r}{a}\right) 4\pi r^2 dr = -ke^2 A^2 \pi a^2,$$

Подставим A и k и получим окончательный результат: $\langle U_p \rangle = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

Определим наиболее вероятное расстояние электрона от ядра:

Вероятность нахождения электрона в объеме dV:

$$dW = 4\pi A^2 r^2 \exp\left(\frac{-2r}{a}\right) dr$$

Плотность вероятности $\dfrac{dW}{dr} = w = 4\pi A^2 r^2 \exp\left(\dfrac{-2r}{a}\right)$

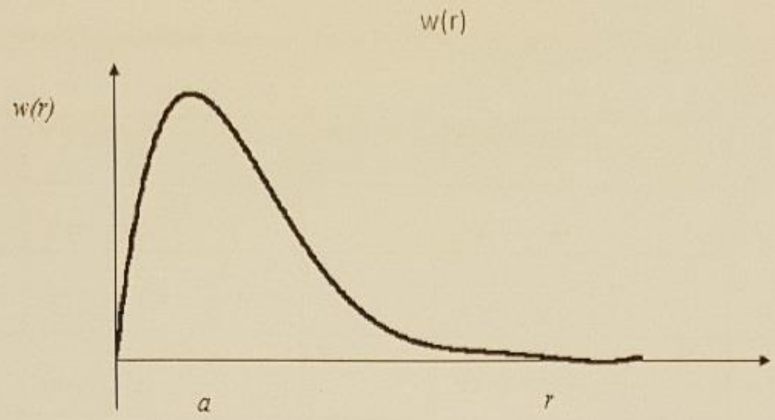
наиболее вероятное расстояние электрона от ядра найдем из условия:

$\dfrac{dw}{dr} = 0$, $8\pi A^2 r^2 \exp\left(\dfrac{-2r}{a}\right)\left(1 - \dfrac{r}{a}\right) = 0$. Откуда $r = a$

Построим график плотности вероятности нахождения частицы в зависимости от r

$$w(r) = \frac{4}{a^3} r^2 \exp\left(\frac{-2r}{a}\right).$$

График имеет максимум при $r = a$.



4.3 Задание на расчетно-графическую работу

Волновая функция, описывающая электрон в кулоновском поле ядра $\Psi(r)$. Частица локализована в области $0 \leq r \leq a$, где a – боровский радиус.
Определите:

1) Нормировочный множитель;
2) Среднее расстояние частицы до силового центра;
3) Среднее значение квадрата расстояния до силового центра;
4) Наиболее вероятное расстояние частицы до силового центра;
5) Среднее значение кулоновской силы;
6) Среднее значение потенциальной энергии;
7) Объемную плотность вероятности нахождения частицы в сферически симметричной области локализации. Постройте зависимость объемной плотности вероятности от r;

Запишите условие задачи согласно Вашему варианту.

Задания 1), 2), 5)

№ варианта	Ψ-функция	№ варианта	Ψ-функция
1	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-3r}{a}}$	16	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{a}}$
2	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-5r}{a}}$	17	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-4r}{a}}$
3	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-2r}{a}}$	18	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{3a}}$
4	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-4r}{a}}$	19	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{4a}}$
5	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{2a}}$	20	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{5a}}$
6	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{6a}}$	21	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{2a}}$
7	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-3r}{a}}$	22	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{a}}$
8	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-5r}{a}}$	23	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-4r}{a}}$
9	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-2r}{a}}$	24	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{3a}}$

10	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-4r}{a}}$	25	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{4a}}$
11	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{2a}}$	26	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{5a}}$
12	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-3r}{a}}$	27	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-3r}{a}}$
13	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-4r}{a}}$	28	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{5a}}$
14	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{2a}}$	29	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-r}{3a}}$
15	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-4r}{a}}$	30	$\Psi(r) = Ae^{\frac{-4r}{a}}$