

Введение

Типовые расчеты по математике для студентов 2-го курса (3-й семестр) содержат 2 типовых расчета по темам "Ряды", и "Теория функций комплексного переменного". Каждый из типовых расчетов содержит 30 вариантов заданий по 8 различным темам. В типовых расчетах перед заданиями помещены методические указания и примеры выполнения этих заданий.

В данных типовых расчетах наряду с обозначением e^x для показательной функции с основанием e применяется второе стандартное обозначение $\exp x$ в случае громоздких показателей, а также используются гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2, \operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2, \operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$$

и обратные к ним функции.

Типовой расчет "Ряды"

Методические указания

Содержание расчетных заданий

- I. Исследовать сходимость числовых рядов.
- II. Найти область сходимости функционального ряда.
- III. Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции в ряд Маклорена.
- IV. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 , используя разложения Маклорена элементарных функций. Указать область в которой разложение справедливо.
- V. Вычислить интеграл с точностью до 0,001, используя разложение в степенной ряд.
- VI. Найти решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения в виде ряда по степеням x .
- VII. Задать аналитически функцию, график которой изображен на рисунке. Построить для этой функции 4 ряда Фурье: общий тригонометрический, по синусам, по косинусам и в комплексной форме. Изобразить графики сумм построенных рядов.
- VIII. Найти преобразование Фурье.

Образцы выполнения заданий

I. Исследовать сходимость числовых рядов.

а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^4 - 1)}{n^6 + 5n + 6}.$$

Общий член данного ряда обозначим $u_n = \frac{(-1)^n(2n^4 - 1)}{n^6 + 5n + 6}.$

Очевидно, что $|u_n| = \frac{2n^4 - 1}{n^6 + 5n + 6} < \frac{2n^4}{n^6} = \frac{2}{n^2}.$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится на основании интегрального признака Коши: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1,$ то есть $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ тоже сходится, откуда, используя свойства сходящихся рядов, получаем, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}.$

Тогда на основании признака сравнения заключаем, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, а следовательно, по определению абсолютной сходимости исходный ряд сходится абсолютно.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^4 - 1)}{n^6 + 5n + 6}$ сходится абсолютно.

Замечание. Из абсолютной сходимости следует сходимость исходного ряда (абсолютная сходимость - более сильное свойство). В рассмотренном примере для доказательства абсолютной сходимости можно использовать и признак сравнения в предельной форме:

$$|u_n| = \frac{2n^4 - 1}{n^6 + 5n + 6} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2 - 1/n^4}{1 + 5/n^5 + 6/n^6} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{1/n^2} = 2,$$

следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^4 - 1}{n^6 + 5n + 6}$ сходится, так как сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$

б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^5 + n^3 + 5)}{n^6 + n^2 - 1}.$$

Пусть $\frac{(-1)^n(n^5 + n^3 + 5)}{n^6 + n^2 - 1} = u_n.$ Очевидно, что

$$|u_n| = \frac{n^5 + n^3 + 5}{n^6 + n^2 - 1} > \frac{n^5}{n^6 + n^2} \geq \frac{n^5}{2n^6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонический. Он расходится по интегральному признаку Коши: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty,$ значит, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ расходится, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Из расходимости гармонического ряда на основании признака сравнения следует, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + n^3 + 5}{n^6 + n^2 - 1}$ тоже расходится.

В предельной форме признак сравнения здесь применяется так:

$$|u_n| = \frac{n^5 + n^3 + 5}{n^6 + n^2 - 1} \sim \frac{1}{n} \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, так как расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ делаем вывод: исходный ряд абсолютно расходится. Теперь нужно выяснить: сходится ли он? Применим признак Лейбница, который утверждает, что знакопередающийся ряд сходится, если модуль его общего члена, монотонно убывая, стремится к нулю. Введем обозначения:

$$\phi(x) = \frac{x^5 + x^3 + 5}{x^6 + x^2 - 1}, \quad \text{тогда } \phi(n) = |u_n|.$$

Вычислим производную этой функции:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \frac{(5x^4 + 3x^2)(x^6 + x^2 - 1) - (6x^5 + 2x)(x^5 + x^3 + 5)}{(x^6 + x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{-x^{10} - 3x^6(x^2 - 1) - 30x^5 - 4x^4 - 3x^2 - 10x}{(x^6 + x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $\phi'(x) < 0$ при всех $x \geq 1$. Следовательно, функция $\phi(x)$ монотонно убывает на промежутке $[1, \infty)$, откуда имеем: $|u_n|$ монотонно убывает. Теперь достаточно найти предел этого модуля

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^3 + 5}{n^6 + n^2 - 1} = 0.$$

Таким образом, получили, что на основании признака Лейбница данный ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^5 + n^3 + 5)}{n^6 + n^2 - 1}$ сходится, но не абсолютно (такие ряды называются условно сходящимися).

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \arctg \frac{n+1}{2^n}$.

Обозначим $\arctg((n+1)/2^n) = u_n$ и, используя эквивалентность $\arctg x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, вычислим предел отношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)2^n}{2^{n+1}(n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится на основании признака Даламбера в предельной форме.

Ответ: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n+1}{2^n}$ сходится.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{2n^3 + 3}{5n^3 + 7}$.

Найдем предел общего члена этого ряда при $n \rightarrow \infty$:

$$|u_n| = \ln \frac{2n^3 + 3}{5n^3 + 7} \longrightarrow \ln \frac{2}{5} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0.$$

Таким образом, получили, что для данного ряда не выполнен необходимый признак сходимости, следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{2n^3 + 3}{5n^3 + 7}$ расходится.

II. Найти область сходимости функционального ряда.

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} (x+5)^n$.

Пусть $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} (x+5)^n$. Тогда $|u_n(x)| = \frac{|x+5|^n}{2^n}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+5|^{n+1} 2^n}{2^{n+1} |x+5|^n} = \frac{|x+5|}{2} = q(x).$$

По признаку Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится при $q(x) < 1$, расходится при $q(x) > 1$, а при $q(x) = 1$ требуется дополнительное исследование. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится при $|x+5| < 2$ и расходится при $|x+5| > 2$. Отсюда делаем вывод, что исходный ряд при $|x+5| < 2$ сходится абсолютно. При $|x+5| > 2$ исходный ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости. Интервал сходимости $(-7, -3)$.

В точках $x_1 = -7$ и $x_2 = -3$, то есть при $q(x) = 1$, проведем исследование сходимости возникающих числовых рядов при помощи каких-нибудь других достаточных признаков сходимости:

$$u_n(x_1) = (-1)^{2n+1} = -1, \text{ то есть } u_n(x_1) \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_1)$ расходится. Аналогично расходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Замечание. Расходимость этих рядов можно было бы доказать и по определению, рассматривая их частные суммы:

$$S_n(x_1) = -n - 1 \rightarrow -\infty \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и}$$

$$S_n(x_2) = \begin{cases} -1, & \text{если } n \text{ четное,} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетное,} \end{cases}$$

то есть $S_n(x_2)$ не имеет предела.

Ответ: в интервале $(-7, -3)$ данный ряд сходится абсолютно, вне интервала – расходится.

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)(2-x)^n}$. Обозначим:

$$u_n(x) = \frac{3^n}{(n+1)(2-x)^n}, \quad |u_n(x)| = \frac{3^n}{(n+1)|2-x|^n}, \quad \text{тогда}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^{n+1}|x-2|^n}{(n+2)3^n|x-2|^{n+1}} = \frac{3}{|x-2|} = q(x).$$

Применив признак Даламбера, видим, что условие сходимости $q(x) < 1$ эквивалентно неравенству $|x-2| > 3$, множеством решений которого является объединение интервалов $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$. В открытом интервале $(-1, 5)$ величина $q(x) > 1$ и, следовательно, не выполнен необходимый признак сходимости – исходный ряд расходится.

Величина $q(x) = 1$ при $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, в этих точках требуется провести дополнительное исследование. При $x_1 = -1$

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ – расходится (гармонический ряд). При $x_2 = 5$

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ – сходится по признаку Лейбница, но не абсолютно, так как ряд из модулей является гармоническим.

Ответ: исходный ряд сходится на множестве $(-\infty, -1) \cup [5, \infty)$, при этом в точке $x = 5$ ряд является условно сходящимся, в остальных точках сходится абсолютно.

III. Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции в ряд Маклорена.

а) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Ряд Маклорена имеет вид $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, где $f^{(n)}(0)$ – значение n -ой производной в нуле ($f^{(0)}(0) = f(x)$). Для заданной функции имеем: $f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$. Теперь найдем последовательно столько производных, сколько потребуется, чтобы три из них были отличны от нуля в точке $x = 0$.

$$f'(x) = 1/\cos^2 x, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = 2 \cos^{-3} x \cdot \sin x, \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = 2 \cos^{-2} x + 6 \cos^{-4} x \cdot \sin^2 x, \quad f'''(0) = 2;$$

$$f^{IV}(x) = 16 \cos^{-3} x \cdot \sin x + 24 \cos^{-5} x \cdot \sin^3 x, \quad f^{IV}(0) = 0;$$

$$f^V(x) = 8 \cos^{-2} x \cdot (2 + 15 \operatorname{tg}^4 x + 15 \operatorname{tg}^2 x), \quad f^V(0) = 16.$$

Ответ: $\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + \dots$

б) $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$.

Для этой функции имеем:

$$f(0) = 0; \quad f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{-\sin x(1 + \sin^2 x) - \cos x \cdot 2 \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2} =$$

$$= \sin x \cdot \frac{\sin^2 x - 3}{(\sin^2 x + 1)^2}, \quad f''(0) = 0;$$

обозначим: $\frac{\sin^2 x - 3}{(\sin^2 x + 1)^2} = \phi(x), \quad \frac{7 - \sin^2 x}{(\sin^2 x + 1)^3} = \psi(x),$

$$f'''(x) = \cos x \cdot \phi(x) + \sin x \cdot \sin 2x \psi(x), \quad f'''(0) = -3;$$

$$f^{IV}(x) = \psi(x)(-\sin x \cdot + 2 \cos x \cdot \sin 2x +$$

$$+ \sin x \cdot \cos 2x) + \sin x \cdot \sin 2x \cdot \psi'(x), \quad f^{IV}(0) = 0;$$

$$f^V(x) = -\cos x \cdot \phi(x) + 6 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \psi(x) +$$

$$+ \sin x \cdot [\psi''(x) \cdot \sin 2x + 2\psi'(x)(3 \cos^2 x + 2 \cos 2x) -$$

$$- 3 \sin 2x \cdot \psi(x)], \quad f^V(0) = 3 + 42 = 45.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}(\sin x) = x - x^3/2 + 3x^5/8 + \dots$

IV. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 , используя известные разложения Маклорена. Указать область, в которой разложение справедливо.

а) $f(x) = e^{3-x} + 5x, \quad x_0 = 2.$

Обозначим $x - x_0 = x - 2 = -t$, тогда $x = -t + 2$ и

$$e^{3-x} + 5x = e^{1+t} - 5t + 10 = e(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots) - 5t + 10 =$$

$$= e + 10 + (e - 5)t + e \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e + 10 + (5 - e)(x - 2) + e \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - 2)^n}{n!}.$$

Разложение получено. Теперь выясним, в какой области оно справедливо. Нам известно, что функция e^t представима своим рядом Маклорена при $t \in$

$(-\infty, +\infty)$. Так как $x = -t + 2$, то отсюда следует, что область, в которой полученное разложение справедливо, – вся вещественная ось.

$$\text{Ответ: } e^{3-x} + 5x = e + 10 + (5 - e)(x - 2) + e \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - 2)^n}{n!}$$

при $x \in (-\infty, +\infty)$.

$$\text{б) } f(x) = (x^2 + 2x - 3)^{-1}, \quad x_0 = 0.$$

Знаменатель данной дробно-рациональной функции имеет простые вещественные корни, из чего следует, что существует единственное представление этой функции в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x + 3} = \\ &= -\frac{1}{4} [(1 - x)^{-1} + (3 + x)^{-1}] = -\frac{1}{4} [(1 - x)^{-1} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-1}]. \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых $(1 - x)^{-1}$ и $(1 + x/3)^{-1}$ в последней квадратной скобке представим рядом Маклорена для $(1 + t)^\mu$, где $\mu = -1$, $t = -x$ в первом слагаемом и $t = x/3$ – во втором. Тогда получим следующие представления:

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3} \left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Первое разложение справедливо на интервале $(-1, 1)$ второе – на $(-3, 3)$ (те же разложения в ряд простейших дробей $(1 - x)^{-1}$ и $(1 + x/3)^{-1}$ можно получить, используя формулу для суммы бесконечно убывающей прогрессии). Сложив почленно два ряда и умножив на $-1/4$, получим следующее разложение:

$$f(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4} \left(1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 3^{n+1}}{4 \cdot 3^{n+1}} x^n,$$

которое справедливо на интервале $(-1, 1)$.

$$\text{Ответ: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 3^{n+1}}{4 \cdot 3^{n+1}} x^n \quad \text{при } x \in (-1, 1).$$

$$\text{в) } f(x) = \ln(-x^2 + 2x + 3), \quad x_0 = 2.$$

Сделаем замену переменных $x - 2 = t$; тогда, используя стандартное разложение Маклорена для функции $f(x) = \ln t =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad \text{будем иметь:}$$

$$f(x) = \ln [-(t + 2)^2 + 2(t + 2) + 3] = \ln [-(t^2 + 2t - 3)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left[3(1-t) \left(1 + \frac{t}{3} \right) \right] = \ln 3 + \ln(1-t) + \ln \left(1 + \frac{t}{3} \right) = \\
&= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n 3^n}.
\end{aligned}$$

Область представимости функции $\ln(1-t)$ рядом $\sum_{n=1}^{\infty} t^n/n$ есть полуоткрытый интервал $J_1 = [-1, 1)$, а функции $\ln(1+t/3)$ рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n 3^n}$ – интервал $J_2 = (-3, 3]$. Оба разложения справедливы в интервале J_1 , то есть при $-1 \leq t < 1$. Последнее неравенство, учитывая, что $t = x - 2$, эквивалентно неравенству $-1 \leq x - 2 < 1$ или $1 \leq x < 3$.

Складывая эти ряды почленно и переходя к переменной x , получим разложение (ответ)

$$\ln(-x^2 + 2x + 3) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^{n-1}}{n 3^n} (x-2)^2,$$

которое справедливо в интервале $[1, 3)$.

V. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001. Используя стандартный ряд Маклорена для функции $f(t) = e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, будем иметь:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

Интегрируя этот ряд почленно, получим

$$\int_0^t e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Полученный ряд является знакочередующимся. Отсюда, на основании признака Лейбница, следует, что абсолютная величина погрешности, возникающей при замене суммы ряда n -ой частичной суммой, не превосходит модуля первого отброшенного члена. Вычисляя последовательно слагаемые полученного числового ряда видим, что модуль пятого члена

$$|a_5| = \left| \frac{(-1)^5}{5!(2 \cdot 5 + 1)} \right| = \frac{1}{120 \cdot 11} < 0,001.$$

Ответ: $y(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (1 + 3(m-1))}{(3m)!} x^{3m}$.

Второй способ решения.

Ищем решение задачи Коши в виде степенного ряда $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = y'(0) = 0$ (эти два значения получены из начальных условий).

Считаем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в окрестности нуля и, следовательно, его в силу свойств степенного ряда можно почленно дифференцировать в области сходимости. Найдем y' и y'' :

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{(n-1)}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Подставим эти выражения в исходное дифференциальное уравнение:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Сложим эти ряды (то есть приведем подобные члены). Для этого можно, например, преобразовать первый из складываемых рядов: сначала заменим n - индекс суммирования - на m , затем положим $m - 2 = n + 1$, тогда $m = n + 3$, $m - 1 = n + 2$, откуда

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} = 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1}.$$

После этого произведем сложение рядов и получим тождество

$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n] x^{n+1} \equiv 0.$$

Так как мы предполагаем, что в некоторой окрестности нуля это тождество справедливо и его левая часть является степенным рядом, то этот ряд, в силу единственности представления функции степенным рядом, является рядом Маклорена функции $g(x) \equiv 0$. Следовательно, все коэффициенты этого ряда равны нулю, так как они имеют вид $c_{n+1} = (n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n = g^{(n)}(0)/n! = 0$, $n > 0$, $c_0 = 2a_2 = g(0) = 0$. Получили $a_2 = 0$ и рекуррентное соотношение $a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}$.

Из рекуррентного соотношения и равенств $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$ следует, что все коэффициенты $a_{3m+1} = a_{3m+2} = 0$ при $m = 0, 1, 2, \dots$. Коэффициенты же с номерами, кратными трем, отличны от нуля и равны

$$a_{3m} = \frac{a_{3(m-1)}}{3m(3m-1)} = \frac{a_0}{3m(3m-1)(3m-3)(3m-4) \dots 3 \cdot 2} =$$

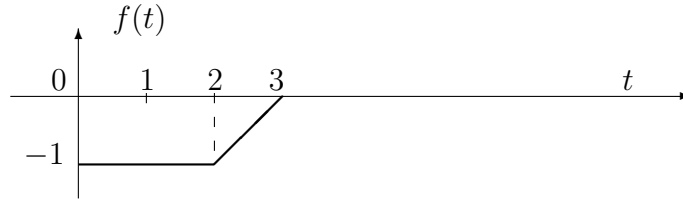
$$= \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (1 + 3(m-1))}{(3m)!} \cdot a_0,$$

где $a_0 = 1$.

Ответ: $y(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (1 + 3(m-1))}{(3m)!} \cdot x^{3m}.$

VII. Задать аналитически функцию, график которой изображен на рисунке. Построить для этой функции 4 ряда Фурье: общий тригонометрический, по синусам, по косинусам и в комплексной форме. Изобразить графики сумм построенных рядов.

Дано:



Решение:

1. Зададим функцию, график которой изображен на рисунке, аналитически. Прежде всего заметим, что определена она только на отрезке $[0, 3]$. Видим, что на промежутке $[0, 2]$ функция постоянна и все значения ее равны -1 , то есть $f(t) = -1$ при $t \in [0, 2]$. На интервале $[2, 3]$ график функции есть отрезок прямой L , проходящей через точки $(2, -1)$ и $(3, 0)$. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) имеет вид $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Подставив в это уравнение величины $x = t$, $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, $x_2 = 3$, $y_2 = 0$ получим уравнение $y = t - 3$ прямой L в координатах t, y .

Окончательно, аналитическое задание данной функции будет иметь следующий вид:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 2, \\ t - 3, & 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

2. Построим общий тригонометрический ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t,$$

где $\omega = 2\pi/T$, T — длина промежутка $[a, b]$, на котором задана исходная, интегрируемая на нем, функция $f(t)$, а также период суммы ряда Фурье. Коэффициенты a_n, b_n вычисляются по функции $f(t)$ следующим образом:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \cos n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \sin n\omega t dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

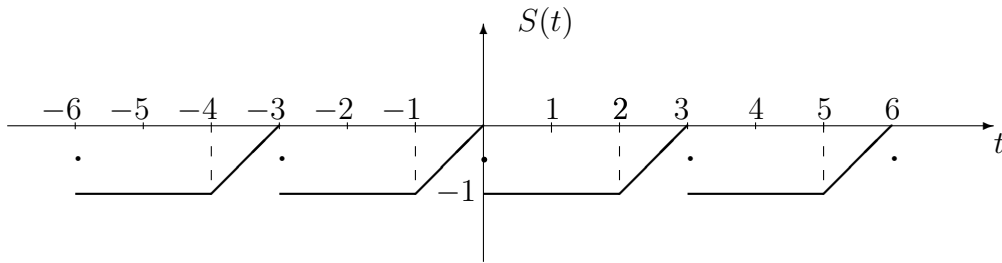
Так как функция задана на интервале $[0, 3]$, то $a = 0$, $b = 3$,
 $T = b - a = 3$. Вычислим коэффициенты $a_n, n \geq 0$; $b_n, n > 0$.

$$a_0 = \frac{2}{3} \left(\int_0^2 (-1) dt + \int_2^3 (t-3) dt \right) = \frac{2}{3} \left(-2 + \left(\frac{t^2}{2} - 3t \right) \Big|_2^3 \right) = -\frac{5}{3}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3} \left(- \int_0^2 \cos \frac{2\pi n t}{3} dt + \int_2^3 (t-3) \cos \frac{2\pi n t}{3} dt \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(- \frac{3}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n t}{3} dt \Big|_0^2 + \frac{3}{2\pi n} (t-3) \sin \frac{2\pi n t}{3} \Big|_2^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{(2\pi n)^2} \cos \frac{2\pi n t}{3} \Big|_2^3 \right) = -\frac{3}{2\pi^2 n^2} \left(1 - \cos \frac{4\pi n}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{3} \left(- \int_0^2 \sin \frac{2\pi n t}{3} dt + \int_2^3 (t-3) \sin \frac{2\pi n t}{3} dt \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2\pi n} \cos \frac{2\pi n t}{3} dt \Big|_0^2 - \frac{3}{2\pi n} (t-3) \cos \frac{2\pi n t}{3} \Big|_2^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{(2\pi n)^2} \sin \frac{2\pi n t}{3} \Big|_2^3 \right) = -\frac{1}{\pi n} - \frac{3}{2\pi^2 n^2} \sin \frac{4\pi n}{3}. \end{aligned}$$

Затем, используя, например, теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный нами ряд Фурье сходится к периодическому (с периодом $T = 3$) продолжению исходной функции при всех $t \neq 3n$, и $S(3n) = -1/2$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где через $S(t)$ обозначена сумма ряда Фурье. График функции $S(t)$ имеет следующий вид:



Ответ: $f(t) = -\frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2\pi^2 n^2} (1 - \cos \frac{4\pi n}{3}) \cos \frac{2\pi n t}{3} - \left(\frac{1}{\pi n} + \frac{3}{2\pi^2 n^2} \sin \frac{4\pi n}{3} \right) \sin \frac{2\pi n t}{3}$, $t \neq 3n$; $S(3n) = -\frac{1}{2}$, при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3. Построим ряд Фурье по синусам.

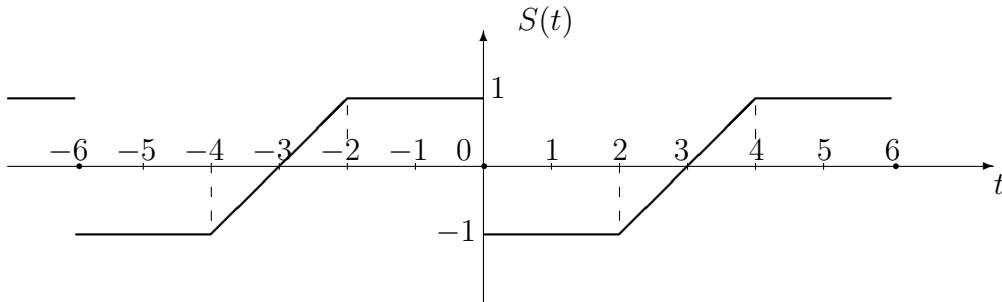
Ряд Фурье по синусам в общем случае существует только для нечетной функции. Для того чтобы построить ряд по синусам для нашей функции, продолжим ее нечетным образом на промежуток $[-3, 0]$. Затем, считая, что $T = 6$, воспользуемся стандартным видом ряда Фурье для нечетной функции:

$$f(t) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin n\omega t, \quad \text{где } \tilde{b}_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вычислим коэффициенты \tilde{b}_n :

$$\begin{aligned} \tilde{b}_n &= \frac{2}{3} \left[- \int_0^2 \sin \frac{\pi n t}{3} dt + \int_2^3 (t-3) \sin \frac{\pi n t}{3} dt \right] = \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n t}{3} \Big|_0^2 - \frac{3}{\pi n} (t-3) \cos \frac{\pi n t}{3} \Big|_2^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{(\pi n)^2} \sin \frac{\pi n t}{3} \Big|_2^3 \right] = -\frac{2}{\pi n} - \frac{3}{4\pi^2 n^2} \sin \frac{2\pi n}{3}. \end{aligned}$$

Применив теорему Дирихле, видим, что $f(t) = S(t)$ при $t \neq 6k$, и $S(6k) = 0$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Таким образом, график суммы этого ряда имеет вид:



Ответ: $f(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n} + \frac{3}{4\pi^2 n^2} \sin \frac{2\pi n}{3} \right) \sin \frac{\pi n t}{3}$ при $t \neq 6k$, и $S(6k) = 0$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4. Построим ряд Фурье по косинусам.

Аналогично, ряд Фурье по косинусам существует только для четной функции. Для того чтобы построить ряд по косинусам для нашей функции, продолжим ее четным образом на промежуток $[-3, 0]$. Затем, как и в предыдущем случае, считая, что $T = 6$, воспользуемся стандартным видом ряда Фурье для четной функции:

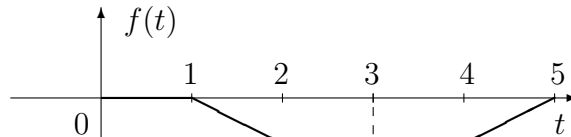
$$f(t) \doteq \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos n\omega t, \quad \tilde{a}_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Вычислим коэффициенты \tilde{a}_n :

$$\begin{aligned}\tilde{a}_0 &= \frac{2}{3} \left[-\int_0^2 dt + \int_2^3 (t-3) dt \right] = -\frac{5}{3}, \\ \tilde{a}_n &= \frac{2}{3} \left[-\int_0^2 \cos \frac{\pi n t}{3} dt + \int_2^3 (t-3) \cos \frac{\pi n t}{3} dt \right] = \\ &= \frac{6}{\pi^2 n^2} \left[(-1)^n - \cos \frac{2\pi n}{3} \right]\end{aligned}$$

Применив теорему Дирихле, видим, что $f(t) = S(t)$ при всех вещественных значениях аргумента t . Таким образом, график суммы этого ряда имеет вид:

13.



Ответ: $f(t) = -\frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - \cos \frac{2\pi n}{3}] \cos \frac{\pi n t}{3}$ при всех вещественных t .

5. Построим ряд Фурье в комплексной форме.

Ряд Фурье для функции $f(t)$ в комплексной форме имеет вид:

$$f(t) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t}, \quad \text{где } c_n = T^{-1} \int_a^b f(t) e^{-i\omega n t} dt, \quad \omega = 2\pi/T.$$

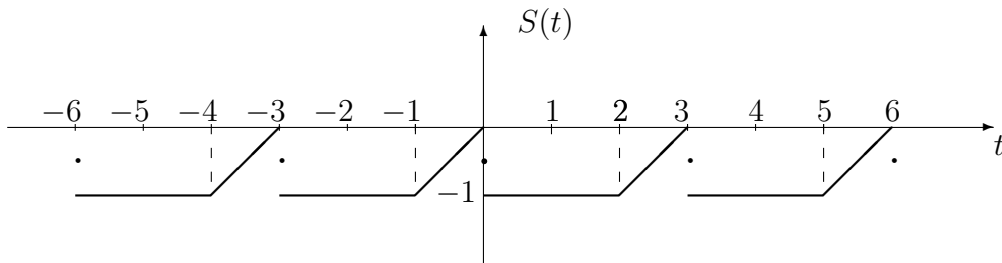
В нашем примере, считая, как и ранее, что $a = 0$, $b = 3$, $T = 3$, $\omega = 2\pi/3$, находим коэффициенты c_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned}c_0 &= 3^{-1} \int_0^3 f(t) dt = a_0/2 = -5/6, \\ c_n &= 3^{-1} \left(-\int_0^2 e^{-i\omega n t} dt + \int_2^3 (t-3) e^{-i\omega n t} dt \right) = \\ &= 3^{-1} \left\{ -\frac{3i}{2\pi n} e^{-i\omega n t} \Big|_0^2 + \frac{3i}{2\pi n} [(t-3)e^{-i\omega n t} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3i}{2\pi n} e^{-i\omega n t}] \Big|_2^3 \right\} = \frac{i}{2\pi n} + \frac{3}{4\pi^2 n^2} (1 - e^{-2\omega n i}) = \\ &= \frac{3}{4\pi^2 n^2} \left(1 - \cos \frac{4\pi n}{3} \right) + \frac{i}{2\pi n} \left(1 + \frac{3}{2\pi n} \sin \frac{4\pi n}{3} \right).\end{aligned}$$

Отметим, что коэффициенты c_n связаны с коэффициентами a_n, b_n общего ряда Фурье следующим образом:

$$c_n = \begin{cases} 2^{-1}(a_n - ib_n), & n \leq 0, \\ 2^{-1}(a_n + ib_n), & n < 0. \end{cases}$$

Затем, как и ранее, используя теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный нами ряд Фурье в комплексной форме сходится к периодическому, периода $T = 3$, продолжению исходной функции при всех $t \neq 3n$, и $S(3n) = -1/2$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. График суммы этого ряда Фурье имеет следующий вид (поведение ряда Фурье и его график в этом случае совпадают с поведением и графиком ряда Фурье для случая общего тригонометрического ряда Фурье):



Ответ:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{3}{4\pi^2 n^2} \left(1 - \cos \frac{4\pi n}{3} \right) + \frac{i}{2\pi n} \left(1 + \frac{3}{2\pi n} \sin \frac{4\pi n}{3} \right) \right] e^{i2\pi n t/3} \quad \text{при } t \neq 3n$$

и $S(3n) = -1/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

VIII. Найти преобразование Фурье $F(\omega)$ для заданной функции $f(t)$. Используя обратное преобразование Фурье, найти соответствующий несобственный интеграл.

а) $f(t) = e^{-3|t|}$.

Прямое преобразование Фурье в комплексной форме для функции $f(t)$ имеет вид:

$$F(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt.$$

В нашем случае находим:

$$F(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|t|} e^{-i\omega t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(3-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(3+i\omega)t} dt \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{3-i\omega} + \frac{1}{3+i\omega} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3}{9+\omega^2}.
\end{aligned}$$

Затем рассмотрим обратное преобразование Фурье. Оно представляет из себя выражение исходной функция $f(t)$ через найденное нами прямое преобразование Фурье $F(\omega)$:

$$f(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega,$$

подставляя в эту формулу найденное выражение для $F(\omega)$ и исходную функцию $f(t)$, получаем значение несобственного интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{9+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{3} e^{-3|t|}.$$

В силу теоремы о поточечной сходимости интеграла Фурье, полученное равенство справедливо при всех t .

$$\text{б) } f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

В этом случае преобразование Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-1}^1 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}.
\end{aligned}$$

Снова, используя обратное преобразование Фурье и теорему о поточечной сходимости интеграла Фурье, будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} \pi, & t \in (-1, 1), \\ \pi/2, & t = \pm 1, \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

В этой формуле $\pi/2$ – значение интеграла Фурье в точках разрыва первого рода функции $f(t)$.

Расчетные задания

I. Исследовать сходимость числовых рядов.

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n! 2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n + n^2}$;
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$.
2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{5^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n + \sqrt{n})}{(n+1)(n+3)}$;
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} (n^3 + 1)}{(2n+1)!}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.
3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{n! (n+1) 2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{3n}{n^2 - 2n + 2}$;
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + 3}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+3) \ln^3(n+3)}$.
4. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n! \sqrt{n^2 + 1}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/(n+1))}{\sqrt{n+3}}$;
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2 + 1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3^n + \sqrt{n})}{4^n + 1}$.
5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3/n)}{1/n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + \sqrt{n^2 + 1}}{2^{n^2+n}}$;
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n(n+1)}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)! 5^n}$.
6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^3} + 5}{n^3 + 6}$; b) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{4^{n+2} (n-5)!}$;
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccos} \frac{4}{n^2 + 1}$; d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1) \ln(n-1)}$.
7. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\right)$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}$;
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n + e^{-n}}$; d) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{7}{(n-2) \ln^{3/2}(n-2)}$.

8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^4 + n}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{n^4 + 2n + 1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - n^2}{n + 1}\right)$.
9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{3^n + n^3}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n - 2)}{7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n + 5)}$;
c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(n^2 + 2)$.
10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n + 2)!}{10^n n^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{2n + 3}{3n + 1}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2}{5^n + n}$; d) $\sum_{n=5}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n - 4}}\right)$.
11. a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n - 7}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{3^n + 2}{3^n}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \sqrt[3]{n}}{5^n + 1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n^2 - 1}}{6^n + n^6}$.
12. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n + n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$.
13. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + n \ln n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n + 5}{n + 3}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^{n^2}}{5^{n^3}}$.
14. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{5}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n + 9}{n^2 + 9n + 20}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n)! n^2}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{3/2}\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2 + 1}\right)$.
15. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + n\sqrt{n}}{n^3 + n^2 - 1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{3n - 2}{6n + 1}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{2^n + 3}}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n^2 - n + 1)!}{3^{n^2 + 1}}$.

16. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + n^3}{(3n)!}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n+1}}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2^n}{3^n + 5}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} (1 - \cos \frac{1}{n})$.
17. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \sin^4 n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{\ln(n+4)}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n^4}{e^{n^2+1}}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{5^n (n+3)!}$.
18. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{3n-1}{5n+2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{3}{\sqrt{n+1}}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \sqrt{n^2+5}}{(2n-1)!}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2+n} - 2^n}{7^{6n+2}}$.
19. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1+n) \sin \frac{1}{n}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + \cos n}{5^n + n^2}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n/(n^2+1))}{n+1}$.
20. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ctg} \frac{5}{\sqrt{n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$;
c) $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n \ln \ln n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{3^{n^2} + 2^n}) \cdot 5^n$.
21. a) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{2n+1}}{n^2+2}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}})$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$.
22. a) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{2n-5}{2n+3}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!(2n+3)!}{(3n-2)!}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n + \operatorname{tg}^2(1/n)}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^3+2n}$.
23. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \ln \frac{2n}{2n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 4n}{3 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (5n-2)}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^{n+2}}{2^{n^2+1}}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [(1+1/n)^{10} - 1]$.

24. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (2n-1)!}{(3n-1)!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{3n^2 + n^3}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt{n+1}}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{n}{n^2 + 1}\right)$.
25. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2 - 1)}{(2n+1)!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\sin(1/n)}$;
 c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3 + n + 1}}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{3^n + 6^{n+2}}$.
26. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{2n+3}{2n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{(3n)!}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{3^n + n^2}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^{3/4} n}$.
27. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}$;
 c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2^n}{7^n + n^2 + 1}$.
28. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n^2 + 3}{n^2 + 1}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n\sqrt{n}}{5^n - 1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n^2 + 1)!}{4^{n^2 + n}}$.
29. a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$;
 c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n + \ln n}{2n^2}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{3^n (n+3)!}$.
30. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n+2)! 4^n}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^5$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2} + n^3}{3^{n+7}}$.

II. Найти область сходимости функционального ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x+1)^{2n+1}}{n+2\sqrt{n}}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^2+3}}{2^n} (x+5)^{2n}$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n (x-2)^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{3^n n^3}$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n + n^2}$.
6. $\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^{n^2} 3^{n^2}$.
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x-3)^n}{3^{2n}}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (3x-2)^{2n}}{2n+\sqrt{n}}$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(x-5)^{2n+1} (2n+7)}$.
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+2)^{2n}}{(2n+1) 5^n}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+2) (x-3)^{2n}}$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (2x-3)^n}{(n^4+1)^2}$.
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+4n}{2^n (x-1)^n}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n (x+3)^{2n}}$.
17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n (2x+3)^n}$.
18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+n}{(x+1)^{2n}}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-4n) 5^n}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3 (x-2)^{3n}}$.
21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{(n+4) \ln(n+4)}$.
22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2) (x-3)^{2n}}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n (x-1)^{2n} n}$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^{2n}}{n 9^n}$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}$.
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(x-1)^{4n}}$.
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (2x+1)^{2n}}{n}$.
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^{2n+1}}{5^n}$.
29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+1}{(3n+7) (x+3)^n}$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n+3)}$.

III. Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции в ряд Маклорена.

1. $f(x) = \ln(5 + e^{-2x})$.
2. $f(x) = \operatorname{arccctg}(2 + 3x)^{-1}$.
3. $f(x) = \exp(\operatorname{arctg} 3x)$.
4. $f(x) = \exp(x^2 + 4x + 7)$.
5. $f(x) = \exp(5 - x)^{-1}$.
6. $f(x) = (1 + \operatorname{ctg}(x + 1))^{-1}$.
7. $f(x) = x \sin(1 + 2x)$.
8. $f(x) = 1 + x \operatorname{arctg}(x + 1)$.
9. $f(x) = \ln \cos 3x$.
10. $f(x) = \exp(\arcsin 3x)$.
11. $f(x) = (\cos 3x)^{-1}$.
12. $f(x) = \ln(1 - \sin x)^{-1}$.
13. $f(x) = e^x \cos^{-1} 2x$.
14. $f(x) = \exp(1 + \sin \frac{x}{2})$.
15. $f(x) = \operatorname{arctg} e^{-3x}$.
16. $f(x) = \exp(1 + \sin x)$.
17. $f(x) = \exp(\operatorname{tg} 3x)$.
18. $f(x) = \sqrt{3 + 5x - x^2}$.
19. $f(x) = x \operatorname{ctg}(3 - x)$.
20. $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{arctg} 2x}$.
21. $f(x) = \ln^2(1 - 5x)$.
22. $f(x) = \ln \cos(1 - 3x)$.
23. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 3}$.
24. $f(x) = \ln(3 - \sin 2x)$.
25. $f(x) = x \operatorname{tg}(x + 1)$.
26. $f(x) = \operatorname{arctg}(1 - 2x)$.
27. $f(x) = \sqrt[3]{1 + \cos x}$.
28. $f(x) = \operatorname{arctg}(2 + e^{-x})$.
29. $f(x) = \sin^3(1 + x)$.
30. $f(x) = \sqrt[3]{2 + 3x + x^3}$.

IV. Построить ряд Тейлора данной функции в окрестности точки x_0 , используя стандартные разложения Маклорена основных элементарных функций. Указать область в которой разложение справедливо.

1. a) $f(x) = \sin 3x$, $x_0 = \pi$;
b) $f(x) = xe^{3+x}$, $x_0 = 1$.
2. a) $f(x) = e^{2+3x}$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = 6 \sin x^3 + x^2(6 - x^4)$, $x_0 = 0$.
3. a) $f(x) = \ln(6 + 3x)$, $x_0 = -1$;
b) $f(x) = 2 - 3(x^5 - x) + 3 \cos x^2$, $x_0 = 0$.
4. a) $f(x) = 5(2 - x)^{-1/3}$, $x_0 = 1$;
b) $f(x) = x^2 \cos(x + 1)$, $x_0 = -1$.
5. a) $f(x) = \cos(x/4)$, $x_0 = \pi$;
b) $f(x) = x^2(1 + x)^{-2}$, $x_0 = 0$.

6. a) $f(x) = 2^{3(x+1)}$, $x_0 = -2$;
b) $f(x) = x(x+2)^{-1}$, $x_0 = 1$.
7. a) $f(x) = e^{x^2-4x}$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = 1 + x^2 - \ln(2-x)$, $x_0 = 1$.
8. a) $f(x) = (4-3x)^{-1}$, $x_0 = -1$;
b) $f(x) = (x+2)(e^{x^2}-1)$, $x_0 = 0$.
9. a) $f(x) = (5-2x)^{1/3}$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = x \sin(x+1)$, $x_0 = -1$.
10. a) $f(x) = (x^2-3x+2)^{-1}$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = xe^{2x}$, $x_0 = 1$.
11. a) $f(x) = \ln(2-5x)$, $x_0 = -3$;
b) $f(x) = \operatorname{sh}2x$, $x_0 = 1$.
12. a) $f(x) = (7+3x)^{-1/4}$, $x_0 = -1$;
b) $f(x) = \operatorname{ch}3x$, $x_0 = 2$.
13. a) $f(x) = e^{x^2-6x+7}$, $x_0 = 3$;
b) $f(x) = x(x^2-2x+5)^{-1}$, $x_0 = 1$.
14. a) $f(x) = (5+x^2)^{-1/2}$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = x^2e^x$, $x_0 = 1$.
15. a) $f(x) = (2x-5)^{-1}$, $x_0 = -3$;
b) $f(x) = x+2+xe^x$, $x_0 = 1$.
16. a) $f(x) = \cos(\pi x/3)$, $x_0 = -3/2$;
b) $f(x) = x \ln(1+3x)$, $x_0 = 1$.
17. a) $f(x) = e^{-3(x^2+5)}$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = x(x+3)^{-1}$, $x_0 = 1$.
18. a) $f(x) = x^3 \cos^2 3x$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = (x+1)(x-2)^{-1}$, $x_0 = 1$.
19. a) $f(x) = e^x + x + 3$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = (1+x) \ln(3+x)$, $x_0 = -2$.
20. a) $f(x) = x^2 + 3 + 1/x$, $x_0 = 1$;
b) $f(x) = \operatorname{ch}2x$, $x_0 = -1$.

21. a) $f(x) = \ln(x^2 + 6x + 5)$, $x_0 = 0$;
 b) $f(x) = xe^{1-x}$, $x_0 = 1$.
22. a) $f(x) = e^{2-x} + 3x$, $x_0 = 4$;
 b) $f(x) = (7 - 2x)(x^2 - x - 2)^{-1}$, $x_0 = 0$.
23. a) $f(x) = x^2 + \cos 2x$, $x_0 = -\pi$;
 b) $f(x) = x \ln(4 + 3x)$, $x_0 = -1$.
24. a) $f(x) = (x^2 + x)^{-1}$, $x_0 = -2$;
 b) $f(x) = (2x + 3)(e^{x^2} - 1)$, $x_0 = 0$.
25. a) $f(x) = x^2 e^{-6x}$, $x_0 = 0$;
 b) $f(x) = x^3 + \ln(2 - x)$, $x_0 = 1$.
26. a) $f(x) = x^2 \cos(x^3 + \pi/4)$, $x_0 = 0$;
 b) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{-1}$, $x_0 = -3$.
27. a) $f(x) = (2 + 7x^5)^{-1/2}$, $x_0 = 0$;
 b) $f(x) = \operatorname{sh}x$, $x_0 = 2$.
28. a) $f(x) = (4x)^{1/3}$, $x_0 = -1$;
 b) $f(x) = x^2 + \sin(1 - x)$, $x_0 = 1$.
29. a) $f(x) = \sin(x^2 + \pi/4)$, $x_0 = 0$;
 b) $f(x) = x \ln(3 + x)$, $x_0 = -1$.
30. a) $f(x) = (2x + 3)^{-2/3}$, $x_0 = -2$;
 b) $f(x) = \operatorname{ch}x$, $x_0 = 1$.

V. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

1. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} dx$. 2. $\int_0^{0,4} \frac{1 - e^{-x/2}}{x} dx$.
3. $\int_0^{1,5} \sqrt[4]{81 + x^4} dx$. 4. $\int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx$.
5. $\int_0^{0,4} \sin(5x/2)^2 dx$. 6. $\int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx$.

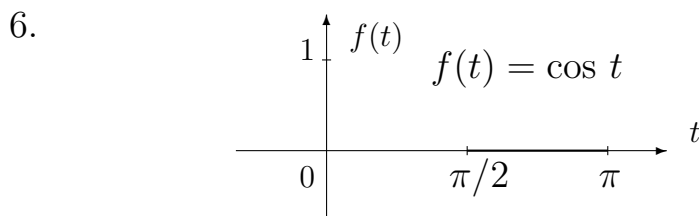
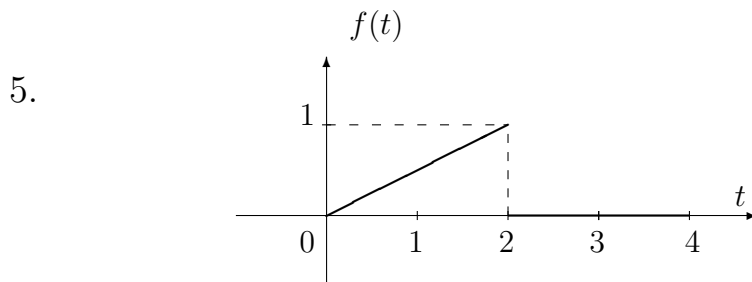
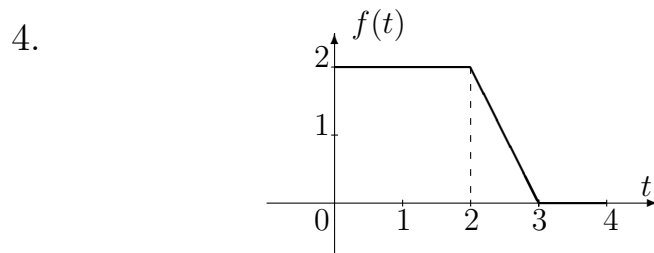
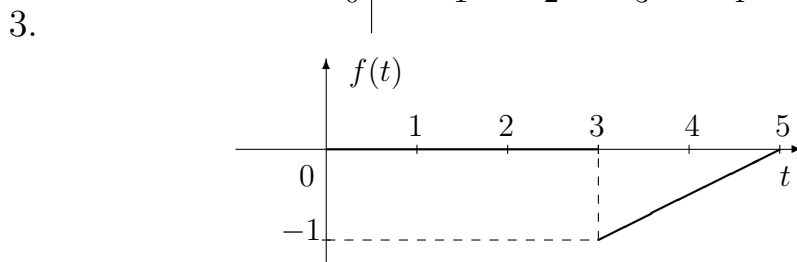
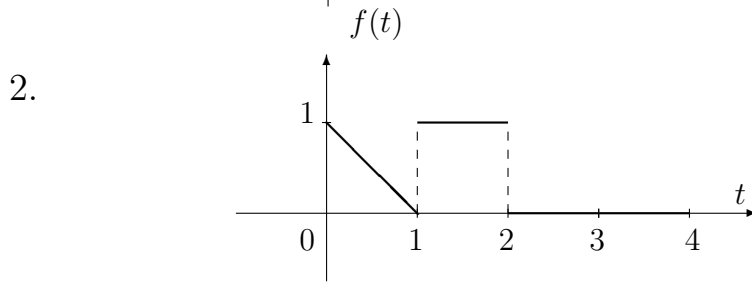
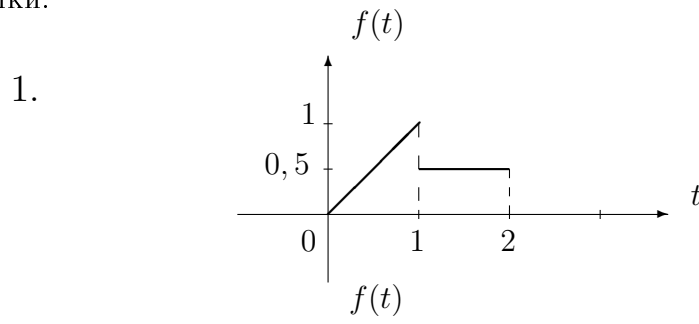
$$\begin{array}{ll}
7. \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{64+x^3}} dx. & 8. \int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x} dx. \\
9. \int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx. & 10. \int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx. \\
11. \int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx. & 12. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}} dx. \\
13. \int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx. & 14. \int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx. \\
15. \int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx. & 16. \int_0^{1,5} \frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}} dx. \\
17. \int_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx. & 18. \int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx. \\
19. \int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx. & 20. \int_0^1 \cos x^2 dx. \\
21. \int_0^{2,5} \frac{1}{\sqrt[3]{125+x^3}} dx. & 22. \int_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx. \\
23. \int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx. & 24. \int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx. \\
25. \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[4]{256+x^4}} dx. & 26. \int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx. \\
27. \int_0^{2,5} \frac{1}{\sqrt[4]{625+x^4}} dx. & 28. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}} dx. \\
29. \int_0^{0,5} e^{-3x^2/25} dx. & 30. \int_0^1 \sin x^2 dx.
\end{array}$$

VI. Найти решение задачи Коши в виде ряда.

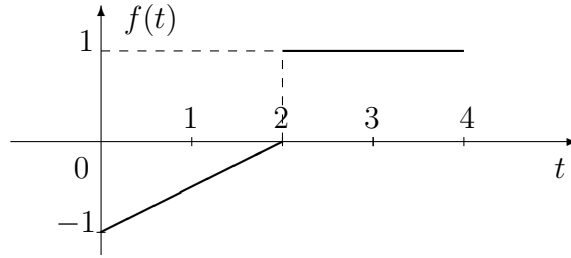
1. $2y'' + xy' + 10y = x - x^2; y(0) = 1/30, y'(0) = 0.$
2. $y'' + 2xy' + 4y = 1 + x + x^2; y(0) = 3/16, y'(0) = 0.$
3. $5y'' - 2xy' - 2y = -2x^2; y(0) = 1, y'(0) = 0.$

4. $2y'' - xy' + 2y = 1; y(0) = -1, y'(0) = -12.$
5. $2y'' + xy' + 10y = 11x; y(0) = 2, y'(0) = 1.$
6. $2y'' - xy' + 2y = x - 4x^2; y(0) = -1, y'(0) = 1.$
7. $3y'' - xy' + 2y = 1 + 2x^2; y(0) = 5, y'(0) = 0.$
8. $3y'' - xy' + 3y = 1; y(0) = 0, y'(0) = 1.$
9. $4y'' - 2xy' - 4y = 3x^3; y(0) = 0, y'(0) = 2.$
10. $3y'' + 2xy' + 4y = 1; y(0) = 1, y'(0) = 0.$
11. $4y'' - 3xy' + 3y = 1; y(0) = 0, y'(0) = 0.$
12. $4y'' - 3xy' - 3y = 2x + 2x^3; y(0) = 0, y'(0) = 3.$
13. $3y'' - 4xy' + 4y = 3x^2; y(0) = 0, y'(0) = 1/2.$
14. $5y'' + 2xy' - 4y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 1.$
15. $5y'' + 2xy' - 4y = -7x; y(0) = 1, y'(0) = 1.$
16. $4y'' + 3xy' - 6y = -x; y(0) = 2, y'(0) = 0.$
17. $2xy'' + (x - 1)y' + y = 1 + 5x; y(0) = 2, y'(0) = 1.$
18. $2xy'' + (x - 1)y' + y = 6x^2; y(0) = 1, y'(0) = 1.$
19. $2xy'' + (x + 2)y' + y = 2x + 1; y(0) = -1, y'(0) = 1.$
20. $2xy'' + (x + 4)y' + y = x + 1; y(0) = 0, y'(0) = 1/4.$
21. $xy'' + (x + 1)y' + y = 10x; y(0) = 2, y'(0) = -2.$
22. $xy'' - (x - 1)y' - y = x + 1; y(0) = -1, y'(0) = 0.$
23. $xy'' + (2x^2 + 1)y' + 2xy = 2; y(0) = 0, y'(0) = 2.$
24. $2xy'' + (2x + 1)y' + y = x; y(0) = 1, y'(0) = -1.$
25. $xy'' + (x + 2)y' + 2y = -1; y(0) = 0, y'(0) = -1/2.$
26. $xy'' + (x^2 + 1)y' + 2xy = 10x; y(0) = 0, y'(0) = 0.$
27. $xy'' + (x^2 + 1)y' + 2xy = 1; y(0) = 0, y'(0) = 1.$
28. $2y'' + 2xy' + 4y = 3x; y(0) = 1, y'(0) = 1/2.$
29. $y'' - 2xy' - 4y = 8x^2; y(0) = -1/2, y'(0) = 1.$
30. $xy'' + (1 - x)y' - y = 1 + x; y(0) = -1, y'(0) = 0.$

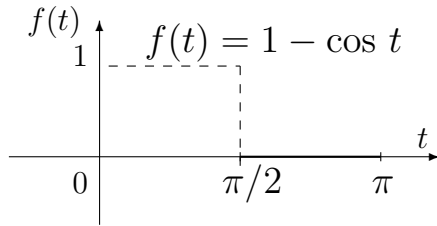
VII. Для заданной графически функции $f(x)$ построить 4 ряда Фурье и их графики.



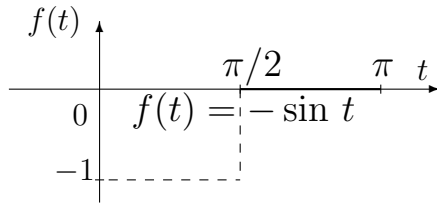
7.



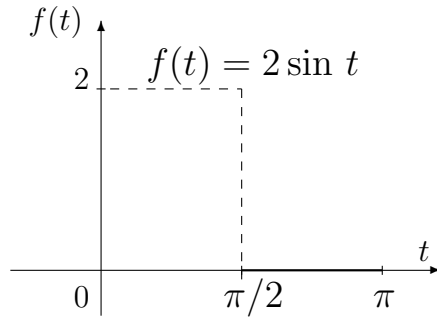
8.



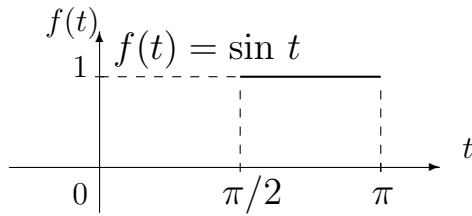
9.



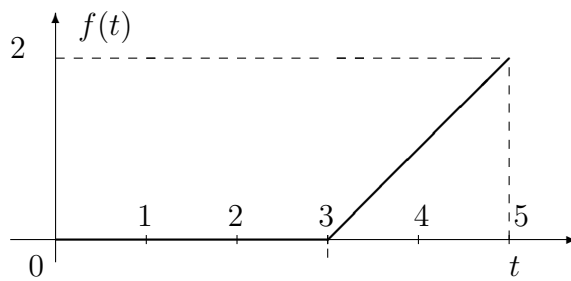
10.



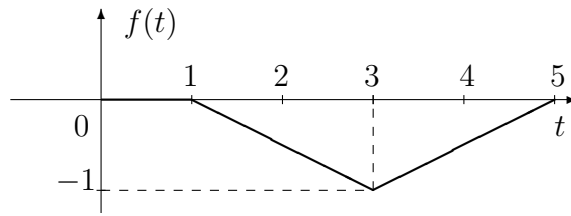
11.



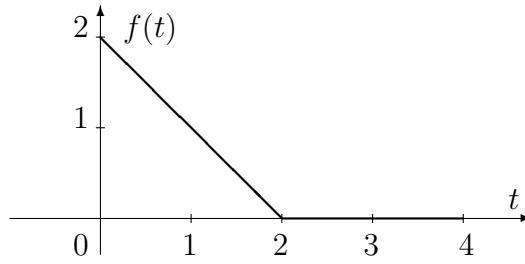
12.



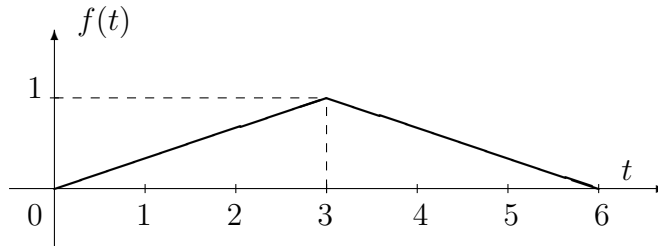
13.



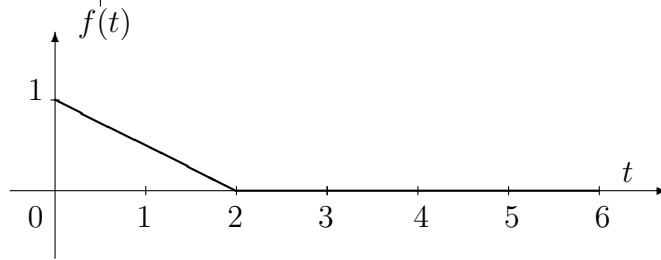
14.



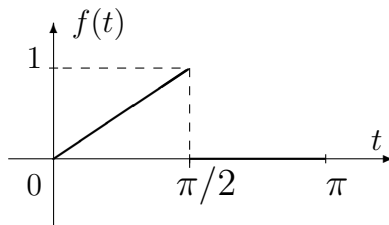
15.



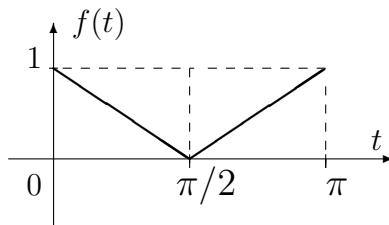
16.

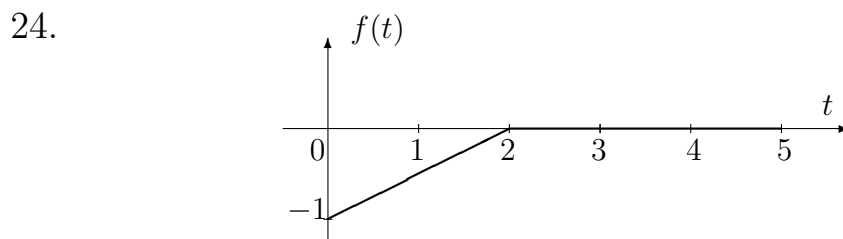
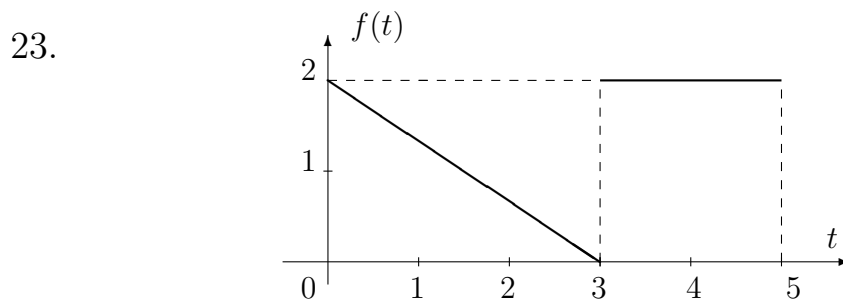
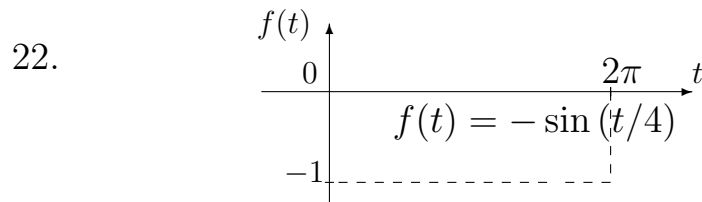
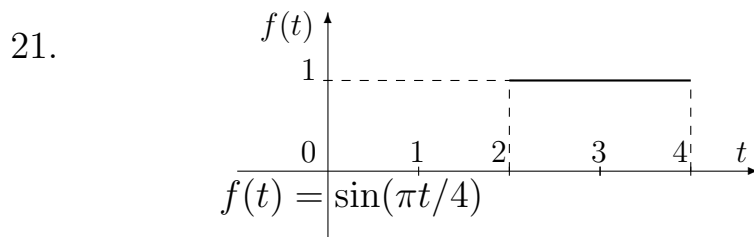
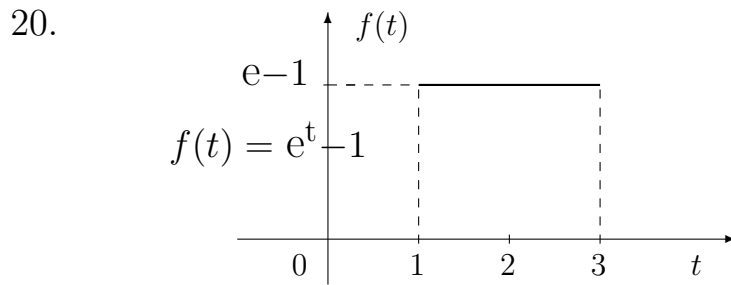
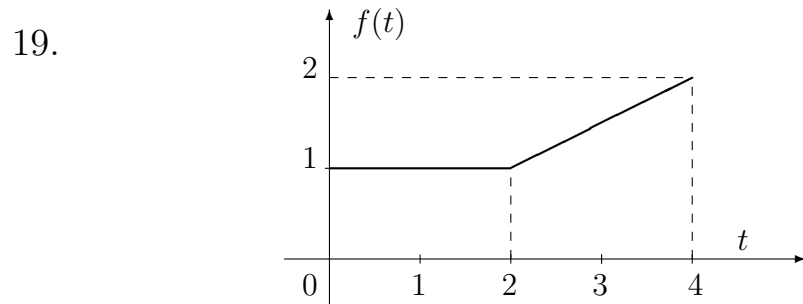


17.

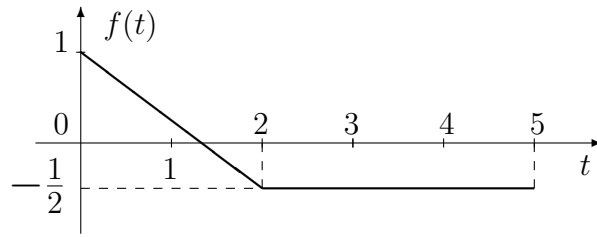


17.

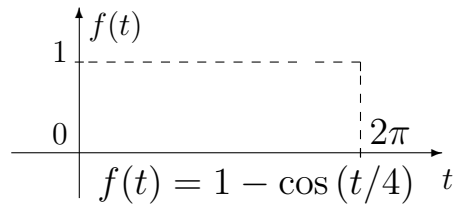




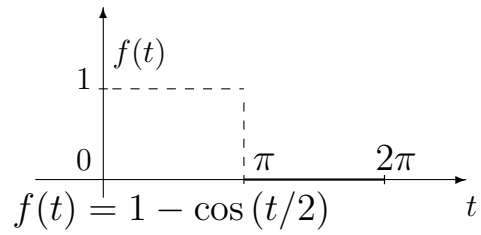
25.



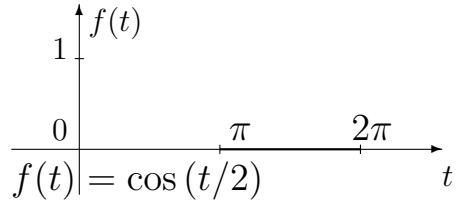
26.



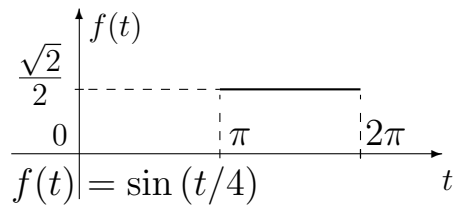
27.



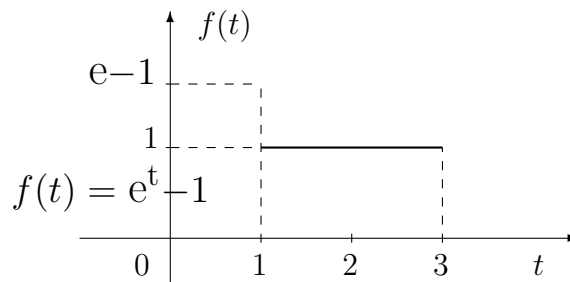
28.



29.



30.



VIII. Найти преобразование Фурье.

1. $f(x) = \begin{cases} e^t, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \cos 2t - 1, & t \in [-\pi, \pi], \\ 0, & t \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [0, 1]. \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \sin 2t, & t \in [0, \pi], \\ 0, & t \notin [0, \pi]. \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} e^t, & t \in (-\infty, 0], \\ e^{-t}, & t \in (0, +\infty). \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} \sin 2t, & t \in [-\pi, \pi], \\ 0, & t \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0], \\ e^{-t}, & t \in (0, +\infty). \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} e^{-2t}, & t \in [-\pi, 0], \\ 0, & t \notin [-\pi, 0]. \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} e^t, & t \in (-\infty, 0], \\ e^{-t} \sin t, & t \in (0, +\infty). \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} \cos 2t - 1, & t \in [-\pi, 0], \\ 0, & t \notin [-\pi, 0]. \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} 2e^{2(\pi-t)}, & t \in [0, \pi], \\ 0, & t \notin [0, \pi]. \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0), \\ e^{-t}, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$
13. $f(x) = \begin{cases} 2e^{2(t+1)}, & t \in [-2, 0], \\ 0, & t \notin [-2, 0]. \end{cases}$
14. $f(x) = \begin{cases} e^{-t}, & t \in [-\pi, \pi], \\ 0, & t \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$
15. $f(x) = \begin{cases} \cos t, & t \in [-\pi, \pi], \\ 0, & t \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$
16. $f(x) = \begin{cases} e^t + e^{-t}, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$
17. $f(x) = \begin{cases} 3e^{t+1}, & t \in [-2, 0], \\ 0, & t \notin [-2, 0]. \end{cases}$
18. $f(x) = \begin{cases} e^t \sin t, & t \in (-\infty, 0], \\ e^{-t}, & t \in (0, +\infty). \end{cases}$
19. $f(x) = \begin{cases} \sin t, & t \in [-\pi, \pi], \\ 0, & t \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$
20. $f(x) = \begin{cases} -e^{\pi-t} \sin t, & t \in [-\pi, 0], \\ 0, & t \notin [-\pi, 0]. \end{cases}$
21. $f(x) = \begin{cases} e^t \cos t, & t \in (-\infty, 0], \\ e^{-2t}, & t \in (0, +\infty). \end{cases}$
22. $f(x) = \begin{cases} \sin t - 1, & t \in [-\pi, \pi], \\ 0, & t \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$
23. $f(x) = \begin{cases} e^{-t} \sin t, & t \in [0, \pi], \\ 0, & t \notin [0, \pi]. \end{cases}$
24. $f(x) = \begin{cases} e^{-|t|} \sin t, & t \in [-\pi, \pi], \\ 0, & t \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$
25. $f(x) = \begin{cases} e^t - e^{-t}, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$
26. $f(x) = \begin{cases} 2e^{-(t+1)}, & t \in [-2, 0], \\ 0, & t \notin [-2, 0]. \end{cases}$
27. $f(x) = \begin{cases} e^{-t/2}, & t \in [0, +\infty), \\ 0, & t \notin [0, +\infty). \end{cases}$

$$28. \quad f(x) = \begin{cases} e^{2t}, & t \in (-\infty, 0], \\ 0, & t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

$$29. \quad f(x) = \begin{cases} e^{t/2}, & t \in (-\infty, 0], \\ e^{-t} \cos t, & t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

$$30. \quad f(x) = \begin{cases} e^{|t|}, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Типовой расчет "Теория функций комплексного переменного"

Методические указания

Содержание расчетных заданий

- I. Изобразить область комплексной плоскости, заданную неравенствами.
- II. Найти все значения указанной функции комплексного переменного в указанной точке.
- III. Найти аналитическую функцию по известной действительной или мнимой части.
- IV. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по заданной кривой.
- V. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать область, в которой полученный ряд представляет данную функцию.
- VI. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.
- VII. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного с помощью вычетов.
- VIII. Вычислить несобственный интеграл от функции вещественного переменного с помощью вычетов.

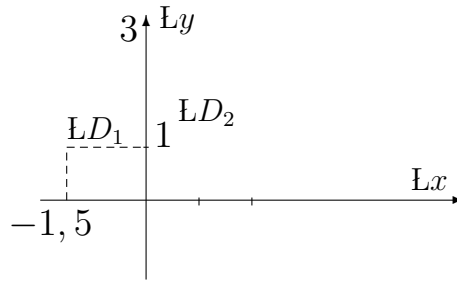
Образцы выполнения заданий

I. Изобразить на комплексной плоскости множество \mathcal{D} , заданное неравенствами:

а) $\mathcal{D} = \{z : |z - i| \leq 2, |z + 1,5 - i| > 1\}$.

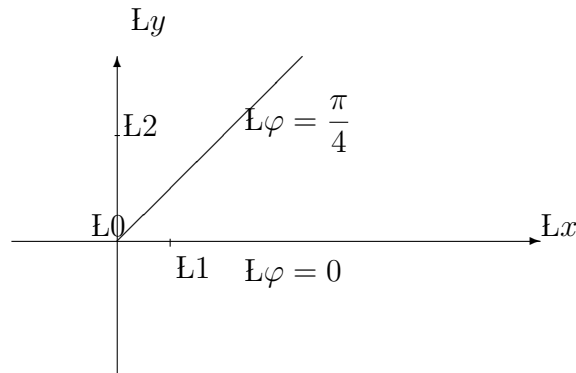
Неравенство $|z - i| \leq 2$ задает на комплексной плоскости замкнутый круг \mathcal{D}_1 радиуса 2 с центром в точке $z_1 = i$; неравенство $|z + 1,5 - i| > 1$ задает внешность круга \mathcal{D}_2 радиуса 1 с центром в точке $z_2 = -1,5 + i$.

Множество \mathcal{D} является пересечением множеств \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 . Множества \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 и \mathcal{D} изображены на рис. а). Множество \mathcal{D} заштриховано.



$$\text{б) } \mathcal{D} = \{z : |z| > 2 - \operatorname{Re} z, 0 \leq \arg z \leq \pi/4\}$$

Обозначим $z = x + iy$, тогда неравенство $|z| > 2 - \operatorname{Re} z$ в координатах x, y примет вид $\sqrt{x^2 + y^2} > 2 - x$. Если $x > 2$, то неравенство $|z| > 2 - \operatorname{Re} z$ справедливо при любом вещественном значении y ; если же $x \leq 2$, то из неравенства $\sqrt{x^2 + y^2} > 2 - x$ следует, что $x^2 + y^2 > (2 - x)^2$. Отсюда имеем, что при $x \leq 2$ выполнено неравенство $y^2 > 4(1 - x)$. Точки, координаты которых удовлетворяют этому неравенству, лежат правее параболы $y^2 = 4(1 - x)$. Таким образом, мы получили, что \mathcal{D}_1 – множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z| > 2 - \operatorname{Re} z$, лежит правее параболы $y^2 = 4(1 - x)$. Неравенство $0 \leq \arg z \leq \pi/4$ задает множество \mathcal{D}_2 , представляющее собой замыкание внутренности угла, сторонами которого являются лучи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$. Множество \mathcal{D} является пересечением множеств \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 , см. рис. 2:



II. Найти все значения функции в указанной точке.

а). Вычислить $\operatorname{th}(\ln 3 + \pi i/4)$.

По определению функции гиперболический тангенс имеем

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

Как и ранее, будем для удобства использовать обозначение $\exp(z)$ вместо e^z , в случае громоздких показателей. Используя определение, найдем значение функции $\operatorname{th} z$ в заданной точке (заметим, что функция $\operatorname{th} z$ однозначна и

имеет период πi):

$$\begin{aligned} \operatorname{th}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right) &= \frac{\exp\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right) - \exp\left(-\ln 3 - \frac{\pi i}{4}\right)}{\exp\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right) + \exp\left(-\ln 3 - \frac{\pi i}{4}\right)} = \\ &= \frac{3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) - 3^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)}{3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) + 3^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4 + 5i}{5 + 4i} = \frac{40}{41} + \frac{9i}{41}. \end{aligned}$$

б). Вычислить 6.

Функция $w = z$ по определению является обратной для периодической функции $z = \sin w$. При этом функция $z = \sin w$ не является ограниченной, как в случае вещественного аргумента. Отсюда, функция $w = z$ определена для всех $z \in C$ и многозначна.

Выведем общую формулу для нахождения значений z . Используя равенство $z = \sin w = (e^{iw} - e^{-iw})/2i$, получим квадратное уравнение относительно e^{iw} :

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

где функция комплексного переменного \sqrt{z} многозначна (двузначна), любому значению аргумента соответствуют 2 значения функции.

Логарифмируя полученное выражение, деля затем на i и учитывая, что $1/i = -i$, получим:

$$w = z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Применяя теперь полученную формулу, находим:

$$\begin{aligned} 6 &= -i \operatorname{Ln}(6i + \sqrt{-35}) = -i \operatorname{Ln}[i(6 \pm \sqrt{35})] = \\ &= -i [\ln|i(6 \pm \sqrt{35})| + i(\arg(i(6 \pm \sqrt{35})) + \\ &+ 2k\pi)] = (\pi/2 + 2k\pi) - i \ln(6 \pm \sqrt{35}), \end{aligned}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Заметим, что $6 \pm \sqrt{35} > 0$, следовательно, $\arg(i(6 \pm \sqrt{35})) = \pi/2$.

в). Вычислить $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{-i}$.

Данное выражение является значением многозначной степенной функции $w(z) = z^{-i}$ в точке $z = (1+i)/2$. По определению имеем:

$$z^{-i} = e^{-iz} = \exp[-i(\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k))],$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для определенности будем считать, что $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Вычислим $-i((1+i)/2)$:

$$-i \frac{1+i}{2} = -i \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{8k+1}{4} \pi i \right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi + \frac{i \ln 2}{2},$$

откуда получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i}{2}\right)^{-i} &= \exp\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k + \frac{i \ln 2}{2}\right) = \\ &= \exp(\pi/4 + 2\pi k) (\cos((\ln 2)/2) + i \sin((\ln 2)/2)), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

III. Восстановить аналитическую функцию по известной действительной или мнимой части.

а). Найти аналитическую функцию $f(z)$, если известна ее действительная часть $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = e^{-y} \cos x + x$ и задано значение искомой функции в нуле: $f(0) = 1$.

Для того, чтобы функция $u(x, y)$ являлась вещественной частью аналитической в односвязной области \mathcal{D} функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в области \mathcal{D} функция $u(x, y)$ являлась гармонической, то есть удовлетворяла уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в области \mathcal{D} . В том случае, если гармоническая функция $u(x, y)$ задана в односвязной области \mathcal{D} , можно с точностью до постоянного слагаемого найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, то есть восстановить аналитическую функцию по заданной ее действительной (или мнимой) части. При этом сопряженная с $u(x, y)$ гармоническая функция $v(x, y)$ находится при помощи криволинейного интеграла:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C, \quad (1)$$

где $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ и $(x, y) \in \mathcal{D}$ (интеграл не зависит от кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y) , а зависит лишь от точки (x, y) , если точка (x_0, y_0) фиксирована).

Если область \mathcal{D} не односвязна, то найденная функция $v(x, y)$, а следовательно, и $f(z) = u + iv$ могут оказаться неоднозначными.

Сначала проверим, что заданная функция удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -e^{-y} \sin x + 1, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -e^{-y} \cos x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{-y} \cos x, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= e^{-y} \cos x. \end{aligned}$$

Следовательно, для нашей функции уравнение Лапласа выполнено при всех x и y ; то есть она является гармонической на всей плоскости.

Теперь найдем сопряженную по отношению к $u(x, y)$ (то есть связанную с ней условиями Коши-Римана) гармоническую функцию $v(x, y)$, тогда $f(z) = u + iv$ и будет искомой аналитической функцией. Для нахождения $v(x, y)$, можно воспользоваться формулой (1) или непосредственно условиями Коши-Римана. В этом примере покажем как для нахождения $v(x, y)$ использовать условия Коши-Римана.

По одному из условий Коши-Римана выполнено:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y} \sin x + 1.$$

Фиксируем $x = x_0$, при этом для определения функции $v(x, y)$ возникает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dy}(x_0, y) = -e^{-y} \sin x_0 + 1.$$

Интегрируя, находим

$$v(x_0, y) = \int (-e^{-y} \sin x_0 + 1) dy = e^{-y} \sin x_0 + y + c(x_0),$$

затем, варьируя константу x_0 , получим

$$v(x, y) = e^{-y} \sin x + y + c(x).$$

Осталось определить функцию $c(x)$. Из $v'_x = -u'_y$ – второго условия Коши-Римана, находим

$$e^{-y} \cos x + c'(x) = e^{-y} \cos x \implies c'(x) = 0 \implies c(x) = \text{const.}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f(z) &= (e^{-y} \cos x + x) + i(e^{-y} \sin x + y + c) = \\ &= e^{-y}(\cos x + i \sin x) + (x + iy) + ic = e^{iz} + z + ic. \end{aligned}$$

Используя условие $f(0) = 1$, получим $e^{i0} + 0 + ic = 1$, откуда следует, что $c = 0$. Окончательно получаем

Ответ: $f(z) = e^{iz} + z$.

б). Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной ее мнимой части $v(x, y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$.

Проверим сначала, что данная функция удовлетворяет уравнению Лапласа в области определения, то есть при $|z| > 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= 2x + \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 2 + \frac{y^3 - 3x^2y}{(x^2 + y^2)^3}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -2y - \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -2 + \frac{3x^2y - y^3}{(x^2 + y^2)^3}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и функция $v(x, y)$ является гармонической при $|z| > 0$. Для нахождения $u(x, y)$ воспользуемся криволинейным интегралом. В этом случае будем иметь:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + c.$$

Выберем в качестве фиксированной начальной точки точку $(x_0, y_0) = (1, 0)$, в качестве кривой L , соединяющей эту точку с точкой (x, y) , выберем ломаную, состоящую из двух отрезков, параллельных осям координат: с началом в точке $(1, 0)$, концом в точке $(x, 0)$ и с началом в точке $(x, 0)$, концом в точке (x, y) . Тогда, переобозначая переменные интегрирования: $x = t$, $y = s$, будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x \left(-2 \cdot 0 - \frac{t^2 - 0}{2(t^2 + 0)^2} \right) dt - \int_0^y \left(2x + \frac{xs}{(x^2 + s^2)^2} \right) ds = \\ &= \frac{1}{2t} \Big|_1^x - 2xs \Big|_0^y - \frac{x}{2} \int_0^y \frac{d(x^2 + s^2)}{(x^2 + s^2)^2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} - 2xy + \end{aligned}$$

$$+\frac{x}{2}\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2}\right)+c=\frac{x}{2(x^2+y^2)}-2xy+c,$$

откуда

$$f(z)=\frac{x}{2(x^2+y^2)}-2xy+c+i\left(3+x^2-y^2-\frac{y}{2(x^2+y^2)}\right).$$

Теперь, для того, чтобы получить выражение функции в зависимости от z , достаточно в найденном выражении положить $x = z$, $y = 0$. Окончательно имеем

$$\text{Ответ: } f(z) = \frac{1}{2z} + i(3 + z^2) + c.$$

Замечание. В этом примере мы получили в результате однозначную функцию $f(z)$, хотя область $\mathcal{D} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| > 0\}$, в которой заданная функция $v(x, y)$ является гармонической, не была односвязной.

IV. Вычислить интеграл от заданной функции $f(z)$ по заданной кривой C .

а). Вычислить $\int_C z \operatorname{Im} z^2 dz$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 1$ и $z_2 = 2 + i$.

Пусть кривая C задана уравнением $z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Интеграл по кривой C от функции комплексного переменного $f(z)$ можно выразить через криволинейный интеграл, а для его вычисления использовать одно из выражений:

$$\int_C f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))(dx(t) + i dy(t)).$$

В нашем случае кривую C – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 1 = (1, 0)$ и $z_2 = 2 + i = (2, 1)$, можно задать явным уравнением в координатах (x, y) : $y = x - 1$, $1 \leq x \leq 2$. В случае явного задания имеем $x(t) = x$, $y(t) = y(x)$, $dz = (1 + iy'(x))dx$, откуда

$$\begin{aligned} \int_C z \operatorname{Im} z^2 dz &= \int_1^2 (x + i(x - 1)) \operatorname{Im} (x + i(x - 1))^2 (1 + i(x - 1)') dx = \\ &= \int_1^2 (x(1 + i) - i)(2x(x - 1))(1 + i) dx = 2(1 + i) \int_1^2 ((1 + \\ &\quad + i)x^3 - (1 + 2i)x^2 + ix) dx = 5/3 + 4i. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int_C z \operatorname{Im} z^2 dz = 5/3 + 4i.$$

б). Вычислить интеграл $\int_C z dz$, где C – окружность $|z| = 2$ и $1 = 0$, контур обходится в положительном направлении.

Данная подынтегральная функция является многозначной. В этом случае выделяют однозначную ветвь функции заданием значения функции в некоторой точке. При этом, если кривая интегрирования замкнута (замкнутый контур), то начальной точкой пути интегрирования считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции (результаты интегрирования многозначной функции по замкнутому контуру при разных начальных точках могут оказаться различными, так как при этом может оказаться, что мы интегрируем различные непрерывные ветви заданной функции). Имеем

$$z = \ln z + i 2\pi k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, а $\varphi = \arg z$ – значение аргумента из произвольного фиксированного промежутка длины 2π . Конкретный выбор этого промежутка определяет разбиение многозначной функции на однозначные ветви из которых она "склеена". Функция $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $\arg z \in (-\pi, \pi)$ называется главным значением (главной ветвью) логарифма. Так как в условии задано значение $1 = 0$ и указано, что контур обходится в положительном направлении, то интегрировать нужно функцию $\ln z = \ln |z| + i \varphi$ – непрерывную ветвь логарифмической функции, соответствующую возрастанию аргумента φ в пределах от 0 до 2π .

Уравнение окружности $C : |z| = 2$ задается зависимостью z от полярного угла φ и имеет вид $z = 2e^{i\varphi}$, откуда

$$dz = 2ie^{i\varphi}d\varphi, \quad \ln z = \ln 2 + i\varphi, \quad \text{где } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_C \ln z dz &= \int_0^{2\pi} (\ln 2 + i\varphi) 2ie^{i\varphi} d\varphi = \\ &= 2i \left(-ie^{i\varphi} \ln 2 + \varphi e^{i\varphi} + ie^{i\varphi} \right) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi i. \end{aligned}$$

Ответ: $\int_C z dz = 4\pi i$.

в) Вычислить интеграл $\int_C (x - a) dz$, где C – окружность $|z - a| = a$, контур обходится в отрицательном направлении.

Зададим окружность уравнением $z - a = ae^{i\varphi}$, причем φ пробегает значения от π до $-\pi$ (в данном случае нужно интегрировать однозначную функцию, поэтому выбор начальной точки и промежутка длины 2π , в котором изменяется $\varphi = \arg(z - a)$, не влияет на результат). При этом $dz = aie^{i\varphi}d\varphi = ai(\cos \varphi + i \sin \varphi)d\varphi$, $x - a = \operatorname{Re}(z - a) = a \cos \varphi$.

Таким образом, меняя знак в связи с направлением обхода, имеем

$$\int_C (x - a) dz = -a^2 i \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 \varphi + i \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi = -a^2 \pi i.$$

Ответ: $\int_C (x - a) dz = -a^2 \pi i$.

V. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности указанной точки $z = z_0$. Найти область представимости функции полученным рядом.

а). $f(z) = \ln(3 + 2z)$ (однозначная главная ветвь логарифма), $z_0 = 1$.

Введем новую переменную $v = z - 1$. Тогда

$$\ln(3 + 2z) = \ln(3 + 2(v + 1)) = \ln 5 + \ln\left(1 + \frac{2v}{5}\right).$$

Теперь, положив $w = 2v/5 = 2(z - 1)/5$, воспользуемся стандартным разложением логарифмической функции

$$\ln(1 + w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{w^n}{n} \quad \text{при } |w| < 1,$$

откуда получаем

$$\ln(3 + 2z) = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n (z - 1)^n.$$

Этот ряд сходится абсолютно при $|w| = 2|z - 1|/5 < 1$ или при $|z - 1| < 5/2$, то есть в круге с центром в точке $z_0 = 1$, радиуса $R = 5/2$.

б). $f(z) = (z^2 - \pi z + \pi^2) \sin 3z$, $z_0 = \pi/2$.

Введем новую переменную $v = z - \pi/2$. Тогда

$$(z^2 - \pi z + \pi^2) \sin 3z = \left(\left(v + \frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi \left(v + \frac{\pi}{2}\right) + \pi^2 \right) \sin 3 \left(v + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= - \left(v^2 + 3\pi^2/4\right) \cos 3v. \text{ Используем стандартное разложение } \cos w =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n w^{2n} / (2n)!), \quad |w| < \infty, \text{ откуда, полагая } w = 3v,$$

получим при всех v

$$\begin{aligned} f(z) &= - \left(v^2 + \frac{3}{4} \pi^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} v^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{2n}}{(2n)!} v^{2n+2} + \frac{3}{4} \pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{2n}}{(2n)!} v^{2n}. \end{aligned}$$

Заменим в первой из сумм переменную суммирования: $n + 1 = k$, $k = 1, 2, \dots$ и преобразуем эту сумму к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{2n}}{(2n)!} v^{2n+2} = \frac{(-1)^k 3^{2k-2}}{(2k-2)!} v^{2k}.$$

Во второй сумме выделим первое слагаемое и, аналогично, заменим переменную суммирования: $n = k$, получим

$$\frac{3}{4}\pi^2 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{2n}}{(2n)!} v^{2n} = -\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{3}{4}\pi^2 (-1)^k 3^{2k} (2k)! v^{2k}.$$

Таким образом, при всех $v = z - 1$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(-1)^k 3^{2k-2}}{(2k-2)!} v^{2k} - \frac{3}{4}\pi^2 - \frac{3}{4}\pi^2 \frac{(-1)^k 3^{2k}}{(2k)!} v^{2k} = \\ &= -\frac{3}{4}\pi^2 + (-1)^k \left(\frac{3^{2k-2}}{(2k-2)!} - \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{3^{2k+1}}{(2k)!} \right) (z-1)^{2k} = -\frac{3}{4}\pi^2 + \\ &+ \frac{1}{4} (-1)^k \frac{3^{2k-2} (16k^2 - 8k - 27\pi^2)}{(2k)!} (z-1)^{2k} \quad \text{при } |z| < \infty. \end{aligned}$$

в). $f(z) = (1-z)^{-2}, \quad z_0 = 0.$

Заметим, что $\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right)$. Отсюда, учитывая, что $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ при $|z| < 1$, и дифференцируя почленно степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ внутри круга сходимости $|z| < 1$, получим искомое разложение $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$, справедливое при $|z| < 1$.

г). $f(z) = \frac{2z-1}{z^2-z-2}, \quad z_0 = 1.$

Введем переменную $v = z - 1$. Тогда $f(z(v)) = \frac{2v+1}{v^2+v-2}$.

Разложим полученное выражение на простейшие

$$\frac{2v+1}{v^2+v-2} = \frac{1}{v+2} + \frac{1}{v-1}.$$

Воспользуемся стандартным разложением степенной функции $(1+w)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$, справедливым при $|w| < 1$, откуда, полагая $w = v/2$ и $w = -v$, находим

$$\frac{1}{v+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+v/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{v}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{v^n}{2^{n+1}}, \quad |v| < 2;$$

$$\frac{1}{v-1} = -\frac{1}{1-v} = -\sum_{n=0}^{\infty} v^n, \quad |v| < 1.$$

Возвращаясь к переменной z , получаем, что для исходной функции имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1 \right) (z-1)^n,$$

справедливое при $|v| = |z-1| < 1$, то есть внутри круга радиуса $R = 1$ с центром в точке $z_0 = 1$.

VI. Разложить указанную функцию в ряд Лорана в указанной области.

а). Разложить функцию $f(z) = (2 - z - z^2)^{-1}$ в ряд Лорана по степеням z в каждой из областей аналитичности этой функции.

Для нахождения областей аналитичности разложим знаменатель на множители, имеем: $f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$. Следовательно, функция $f(z)$ аналитична в областях: $\mathcal{D}_1 = \{z : |z| < 1\}$, $\mathcal{D}_2 = \{z : 1 < |z| < 2\}$, $\mathcal{D}_3 = \{z : |z| > 2\}$. Для того, чтобы разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в каждой из этих областей, представим $f(z)$ в виде суммы простейших дробей: $f(z) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2} \right)$. Теперь найдем для каждой из простейших дробей все возможные их разложения по степеням z . Так как у обеих дробей имеется только одна особая точка, то для любой из них таких разложений ровно два (приводим их без коэффициента $1/3$). Для получения разложений используем формулу суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии: $a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \dots = \frac{a_0}{1-q}$, $|q| < 1$.

$$\text{При } |z| < 1 \text{ имеем } \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad a_0 = 1, \quad q = z. \quad (0.1)$$

Если же $|z| > 1$ (то есть во внешности единичного круга), то

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z(1-1/z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right) \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad (0.2)$$

в этом случае $a_0 = -1/z$, $q = 1/z$, а из $|q| = 1/|z| < 1$ следует, что $|z| > 1$.

Аналогично, если $|z| < 2$, то

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2(1+z/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}, \quad a_0 = \frac{1}{2}, \quad q = -\frac{z}{2}, \quad (0.3)$$

а при $|z| > 2$ (во внешности круга радиуса 2)

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z(1+2/z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad a_0 = \frac{1}{z}, \quad q = -\frac{2}{z}. \quad (0.4)$$

Последний ряд сходится при $|q| = 2/|z| < 1$, то есть при $|z| > 2$.

Следовательно, в круге \mathcal{D}_1 справедливы разложения (0.1) и (0.3); в кольце \mathcal{D}_2 справедливы разложения (0.2) и (0.3); наконец, в области \mathcal{D}_3 – внешности круга радиуса 2 – разложения (0.2) и (0.4).

Таким образом, в круге \mathcal{D}_1 имеем

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + 1 \right] z^n;$$

в кольце \mathcal{D}_2 имеем

$$f(z) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n};$$

во внешности круга радиуса 2 – области \mathcal{D}_3 – имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n 2^n - 1] \frac{1}{z^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1} - 1}{z^n}. \end{aligned}$$

б) Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{\exp(2z+3)}{z-1}$ в кольце $0 < |z-1| < \infty$.

Поскольку функция $f(z) = \frac{\exp(2z+3)}{z-1}$ регулярна в кольце $0 < |z-1| < \infty$, в этом кольце существует единственное ее представление рядом вида $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n$, который называется рядом Лорана функции $f(z)$ в кольце $0 < |z-1| < \infty$. Для нахождения коэффициентов этого ряда воспользуемся стандартным разложением $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$, справедливым при всех w ($|w| < \infty$). При $w = 2(z-1)$ будем иметь:

$$\exp(2z+3) = e^5 \exp(2(z-1)) = e^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z-1)^n}{n!}, \quad |z-1| < \infty.$$

Следовательно, в кольце $0 < |z-1| < \infty$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\exp(2z+3)}{(z-1)} = \frac{e^5}{z-1} + e^5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (z-1)^{n-1}}{n!} = \frac{e^5}{z-1} + \\ &+ e^5 \frac{2^{k+1} (z-1)^k}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

VII. Вычислить интеграл $\int_L f(z) dz$ от функции комплексного аргумента $f(z)$ по указанному замкнутому кусочно-гладкому контуру L при помощи вычетов.

а) $f(z) = \frac{\cos az}{z^2(e^z + 1)}$, где a – вещественный числовой параметр, а $L = \{z : |z - i/2| = 3\}$.

Подынтегральная функция $f(z) = \frac{\cos az}{z^2(e^z + 1)}$ имеет в круге $|z - i/2| < 3$ две особые точки: $z_1 = 0$ – полюс второго порядка и $z_2 = \pi i$ – простой полюс. По теореме Коши о вычетах имеем

$$\int_L \frac{\cos az dz}{z^2(e^z + 1)} = 2\pi i (\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=\pi i} f(z)).$$

Найдем вычеты в особых точках: $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d(z^2 f(z))}{dz} =$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{\cos az}{e^z + 1} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-a \sin az (e^z + 1) - e^z \cos az}{(e^z + 1)^2} = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{res}_{z=\pi i} f(z) = \left(\frac{\cos az}{z^2} \cdot \frac{1}{(e^z + 1)'} \right) \Big|_{z=\pi i} = \frac{\cos a\pi i}{(\pi i)^2 e^{\pi i}} = \frac{\operatorname{ch} a\pi}{\pi^2}.$$

Следовательно,

$$\int_L \frac{\cos az dz}{z^2(e^z + 1)} = 2\pi i \left(\frac{\operatorname{ch} a\pi}{\pi^2} - \frac{1}{4} \right).$$

б) $f(z) = (2z - 1) \sin \frac{\pi z}{a(z - 1)}$, где a – вещественный числовой параметр, а $L = \{z : |z| = 2\}$.

Функция $f(z) = (2z - 1) \sin \frac{\pi z}{a(z - 1)}$ в круге $|z| < 2$ имеет одну существенно особую точку $z_0 = 1$, поэтому, применив теорему Коши о вычетах, будем иметь

$$\int_L (2z - 1) \sin \frac{\pi z}{a(z - 1)} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=1} f(z).$$

Для нахождения вычета в существенно особой точке необходимо знать разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 1$. Запишем ряд

Лорана в окрестности точки $z = 1$ функции $\sin \frac{\pi z}{a(z - 1)}$:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi z}{a(z - 1)} &= \sin \left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{a(z - 1)} \right) = \sin \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi}{a(z - 1)} + \\ &+ \cos \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a(z - 1)} = \sin \frac{\pi}{a} \left(1 - \frac{\pi^2}{2a^2(z - 1)^2} + \dots \right) + \end{aligned}$$

$$+ \cos \frac{\pi}{a} \left(\frac{\pi}{a(z-1)} - \frac{\pi^3}{6a^3(z-1)^3} + \dots \right).$$

Тогда вычет функции $f(z) = (2(z-1) + 1) \sin \frac{\pi z}{a(z-1)}$ в точке $z = 1$ будет равен коэффициенту c_{-1} при $(z-1)^{-1}$ в этом произведении. Этот коэффициент возникает при умножении первого слагаемого разложения функции $\sin \frac{\pi z}{a(z-1)}$ в ряд Лорана на $2(z-1)$ и второго слагаемого этого разложения на 1. Отсюда имеем $c_{-1} = \frac{\pi}{a} \left(\cos \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} \right)$. Следовательно,

$$\int_L (2z-1) \sin \frac{\pi z}{a(z-1)} dz = 2\pi i c_{-1} = \frac{2i\pi^2}{a} \left(\cos \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} \right).$$

VIII. Вычислить несобственный интеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2x^2 + b^2} dx$, где a, b, m – вещественные числовые параметры, причем $ab > 0, m > 0$.

Заметим, что $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{a^2x^2 + b^2} dx$. Теперь воспользуемся тем, что для непрерывной на действительной оси (знаменатель не имеет вещественных корней) правильной рациональной функции $R(z)$ при $m > 0$ справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{imx} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} (R(z) e^{imx}),$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам функции $R(z)$, расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Если же $m < 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{imx} dx = -2\pi i \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} (R(z) e^{imx}),$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам функции $R(z)$, расположенным в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Так как в условии задачи $m > 0$, а в верхней полуплоскости $R(z) = \frac{1}{a^2z^2 + b^2}$ имеет единственный полюс первого порядка

$z = i \cdot \frac{b}{a}$, то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{a^2x^2 + b^2} dx &= 2\pi i \operatorname{res}_{z=ib/a} f(z) = 2\pi i \frac{e^{imz}}{(a^2z^2 + b^2)'} \Big|_{z=ib/a} = \\ &= \frac{\pi}{ab} \exp\left(-\frac{bm}{a}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, $I = \frac{\pi}{2ab} \exp\left(-\frac{bm}{a}\right)$.

Расчетные задания

I. Изобразить на комплексной плоскости множество D .

1. $D = \{z : |z - 4| \leq 5, |z + i| > 2\}$.
2. $D = \{z : |z - 1 - i| > \sqrt{2}, |z - 2 - 2i| \leq 2\sqrt{2}\}$.
3. $D = \{z : 2 \leq |z + 2| < 3, -\pi/2 < z \leq \pi/2\}$.
4. $D = \{z : 1 < |z + 1 - 2i| \leq 3, \pi \leq z < 2\pi\}$.
5. $D = \{z : 1 \leq |z + 3 - 2i| < 4, |z| \leq 3\pi/4\}$.
6. $D = \{z : 2 < |z + 2 + 4i| \leq 5, |z| > \pi/2\}$.
7. $D = \{z : |z| > 3 + z, \pi/2 \leq z < 2\pi/3\}$.
8. $D = \{z : |z + 2 + 3i| < 3, \pi \leq z \leq 3\pi/2\}$.
9. $D = \{z : |z| \leq 5, |3\pi/2 - z| < \pi/3\}$.
10. $D = \{z : |z| < 6 - z, |z| \leq 4\}$.
11. $D = \{z : |z| \geq 3 - z, |z| > 4\}$.
12. $D = \{z : |z| > 3, |z - 4| \leq 2, -\pi/2 \leq z < 0\}$.
13. $D = \{z : |z - 1| < 1, z + z \leq 1\}$.
14. $D = \{z : |z + i| \leq 1, |3\pi/2 - z| < \pi/3\}$.
15. $D = \{z : |z - 3 + 2i| \leq 2, 0 < (iz) \leq 1\}$.
16. $D = \{z : |z| \leq 4 - z, 0 < z < \pi\}$.
17. $D = \{z : |z| > 1 + z, |z - i| \leq 2\}$.
18. $D = \{z : 1 < |z - 1| \leq 2, \pi/4 \leq z < \pi/3\}$.
19. $D = \{z : |z| \leq 4 + z, |z - 0,5| < 4\}$.
20. $D = \{z : |z - 4 - 3i| \geq 2, z + z < 1\}$.
21. $D = \{z : \pi/4 \leq z \leq 3\pi/4, |(iz)| < 1\}$.
22. $D = \{z : |z + 1 - i| > \sqrt{2}, |(iz)| \leq 1\}$.
23. $D = \{z : 1 \leq |z - 3 + 2i| < 3, (z^2) \geq 2\}$.
24. $D = \{z : 2 < |z - 3 + 4i| \leq 4, z + z > 1\}$.

25. $D = \{z : -3\pi/4 \leq z \leq -\pi/4, -6 \leq z \leq -3\}$.
26. $D = \{z : |z| < 2 - z, |z + 1| \leq 2\}$.
27. $D = \{z : |z + i| \geq 1, |z - 3i| < 5\}$.
28. $D = \{z : |z + 2 - 2i| > 3, \pi/2 \leq z < \pi\}$.
29. $D = \{z : |7\pi/4 - z| < \pi/4, |z - 1| \leq 2\}$.
30. $D = \{z : 0 < (iz) < 2, |z| \geq \pi/4\}$.

II. Вычислить все значения функции в указанной точке.

1. 3^{2+i} .
2. i^{1+i} .
3. $(1 + i)$.
4. $(-2)^{\sqrt{2}}$.
5. 4^i .
6. $(3 + 4i)^{1+i}$.
7. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.
8. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$.
9. $(2 - 3i)$.
10. $(-2 - 3i)$.
11. $\cos(5 - i)$.
12. $\sin(1 - 5i)$.
13. $\operatorname{tg}(2 - i)$.
14. $\operatorname{sh}(-3 + i)$.
15. $\exp(\exp i)$.
16. $\exp(\exp(1 + \pi i/2))$.
17. $\cos(2 + i)$.
18. $\sin(2i)$.
19. $\operatorname{ctg}(\pi/4 - i \ln 2)$.
20. $\operatorname{cth}(2 + i)$.
21. $\operatorname{tg}(2 - i)$.
22. $(1 + 2i)$.
23. $(\sqrt{2} - i)$.
24. $(1 - i)$.
25. (i) .
26. $(2i)$.
27. $(1 - i)$.
28. $1 + i + \operatorname{sh}(1 + i)$.
29. $(2 - i) \exp(2 - i)$.
30. $\operatorname{ch}(3 - 2i)$.

III. Найти аналитическую функцию по известной ее действительной или мнимой части.

1. $v(x, y) = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2, f(0) = 2.$

2. $v(x, y) = -2 \sin(2x) \operatorname{sh}(2y) + y, f(0) = 2.$

3. $v(x, y) = \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \cos \frac{x}{2} - \frac{y^3}{3} + x^2 y.$

4. $u(x, y) = \operatorname{sh} \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2} + 4(x^2 - y^2) - 4x + 1.$

5. $u(x, y) = \operatorname{ch} \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} - 2xy - 2x.$
6. $v(x, y) = \exp(-2y) \sin(2x) - \frac{x^3}{3} + xy^2.$
7. $v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, f(\pi) = \frac{1}{\pi}.$
8. $u(x, y) = \exp(2y) \sin(2x) + 3xy^2 - x^3.$
9. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$
10. $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$
11. $u(x, y) = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x.$
12. $v(x, y) = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy), f(0) = 0.$
13. $u(x, y) = x^2 + 2x - y^2, f(i) = 2i - 1.$
14. $v(x, y) = \operatorname{ch} \frac{y}{3} \sin \frac{x}{3} + 2xy + 4y.$
15. $u(x, y) = \operatorname{sh}(2x) \cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4.$
16. $v(x, y) = \operatorname{sh} \frac{y}{3} \cos \frac{x}{3} + 4(x^2 - y^2) - 4x + 1.$
17. $u(x, y) = \operatorname{sh} 3y \cos 3x + 4(x^2 - y^2) + 4y - 1.$
18. $v(x, y) = 2(2 \operatorname{sh} x \sin y + xy), f(0) = 3.$
19. $v(x, y) = \operatorname{sh} \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} - 8xy + 4x.$
20. $u(x, y) = \operatorname{ch}(3y) \sin(3x) - 8xy + 4y.$
21. $v(x, y) = \operatorname{ch}(2y) \cos(2x) + x^2 - y^2 - 2y + 1.$
22. $u(x, y) = 3x^2y - y^3 + x + 5.$
23. $v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, f(1) = 0.$
24. $u(x, y) = x^2 - y^2 - x.$
25. $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y.$
26. $u(x, y) = 2 \exp x \cos y + x^2y^2 - \frac{x^4 + y^4}{6}.$
27. $v(x, y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}.$
28. $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$
29. $v(x, y) = \operatorname{sh}(2y) \sin(2x) + x^2 - y^2 + 2x - 1.$
30. $u(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3.$

IV. Вычислить интеграл по заданной кривой в указанном направлении.

1. $\int_C z dz$, C – полуокружность $|z - 1| = 1$, $z \geq 0$. Начало пути интегрирования в точке $z = 2$.
2. $\int_C x dz$, C – радиус-вектор точки $z = 2 + i$.
3. $\int_C x dz$, C – полуокружность $|z| = 1$, $0 \leq z \leq \pi$. Начало пути интегрирования в точке $z = 1$.
4. $\int_C x dz$, C – окружность $|z - a| = R$. Обход контура в положительном направлении.
5. $\int_C y dz$, C – окружность $|z - a| = R$. Обход контура в отрицательном направлении.
6. $\int_C y dz$, C – полуокружность $|z| = 1$, $z \geq 0$. Начало пути интегрирования в точке $z = 1$.
7. $\int_C (\bar{z} - 1) dz$, C – ломаная $ABCD$ с вершинами $A(-2; 0)$, $B(-1; 1)$, $C(1; 1)$, $D(2; 0)$.
8. $\int_C y dz$, C – радиус-вектор точки $z = 2 - i$.
9. $\int_C \bar{z} dz$, C – окружность $|z - 2| = 2$. Обход контура в отрицательном направлении.
10. $\int_C z dz$, C – ломаная с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 1)$, $B(2; 0)$.
11. $\int_C z dz$, C – окружность $|z - 2| = 2$. Обход контура в положительном направлении.
12. $\int_C z dz$, C – окружность $|z| = R$, $R = \ln R + 2\pi i$. Обход контура в отрицательном направлении.
13. $\int_C z dz$, C – окружность $|z| = R$, $R = \ln R + 2\pi i$. Обход контура в положительном направлении.
14. $\int_C z dz$, C – полуокружность $|z - 1| = 1$, $z \geq 1$. Начало пути интегрирования в точке $z = 2$.

15. $\int_C z dz$, C – полуокружность $|z - 1| = 1$, $z \geq 0$. Начало пути интегрирования в точке $z = 2$.
16. $\int_C z^2 z dz$, C – окружность $|z| = 1$, $1 = 0$. Обход контура в отрицательном направлении.
17. $\int_C z dz$, C – ломаная с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 1)$, $B(2; 0)$.
18. $\int_C z dz$, C – окружность $|z - 2| = 3$. Обход контура в положительном направлении.
19. $\int_C |z| dz$, C – окружность $|z| = R$. Обход контура в отрицательном направлении.
20. $\int_C |z| dz$, C – ломаная с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 1)$, $B(2; 1)$.
21. $\int_C \bar{z} dz$, C – полуокружность $|z - 1| = 1$, $z \geq 1$. Начало пути интегрирования в точке $z = 1 - i$.
22. $\int_C |z| dz$, C – полуокружность $|z| = 1$, $z \geq 0$. Начало пути интегрирования в точке $z = 1$.
23. $\int_C |z| dz$, C – полуокружность $|z| = 1$, $z \geq 0$. Начало пути интегрирования в точке $z = i$.
24. $\int_C z dz$, C – ломаная с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 1)$, $B(2; 1)$.
25. $\int_C z dz$, C – полуокружность $|z - 1| = 1$, $z \leq 1$. Начало пути интегрирования в точке $z = 1 - i$.
26. $\int_C \bar{z} dz$, C – ломаная $OABO$ с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 1)$, $B(2; 1)$.
27. $\int_C z dz$, C – ломаная $OABO$ с вершинами $O(0; 0)$, $A(-1; 1)$, $B(1; 1)$.
28. $\int_C z dz$, C – ломаная $OABO$ с вершинами $O(0; 0)$, $A(2; 1)$, $B(4; 0)$.
29. $\int_C (z - z) dz$, C – окружность $|z| = 1$. Обход контура в положительном направлении.
30. $\int_C |z| dz$, C – радиус-вектор точки $z = 3 - 4i$.

V. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать область, в которой ряд представляет данную функцию.

1. $f(z) = 6 \sin z^3 + z^3(z^6 - 6), \quad z_0 = 0.$
2. $f(z) = (z + 1)(z^2 + 5z + 6)^{-1}, \quad z_0 = -1.$
3. $f(z) = (z + 1)(z - 2)^{-1}, \quad z_0 = 1.$
4. $f(z) = \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)), \quad z_0 = 0.$
5. $f(z) = (z - 1)(z + 3)^{-1}, \quad z_0 = -1.$
6. $f(z) = z^2(\exp(z^2) - 1), \quad z_0 = 0.$
7. $f(z) = \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)), \quad z_0 = 1.$
8. $f(z) = (3z - 3)(z^2 - z - 2)^{-1}, \quad z_0 = 1.$
9. $f(z) = (z + 1)(z - 2)^{-1}, \quad z_0 = 0.$
10. $f(z) = z \exp z, \quad z_0 = 1.$
11. $f(z) = \frac{z}{z + 2}, \quad z_0 = 1.$
12. $f(z) = z^2(1 + z)^{-2}, \quad z_0 = 0.$
13. $f(z) = \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)), \quad z_0 = 0.$
14. $f(z) = z(z^2 - 2z + 5)^{-1}, \quad z_0 = 1.$
15. $f(z) = z^2 \exp z, \quad z_0 = 1.$
16. $f(z) = \ln \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right), \quad z_0 = 0.$
17. $f(z) = \cos^2 z, \quad z_0 = 0.$
18. $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{-1}, \quad z_0 = 0.$
19. $f(z) = \sin^2 z, \quad z_0 = 0.$
20. $f(z) = (z + 1)(1 + z^2)^{-1}, \quad z_0 = 0.$
21. $f(z) = z \ln(1 + 2z), \quad z_0 = 1.$
22. $f(z) = (3z - 3)(z^2 - z - 2)^{-1}, \quad z_0 = 0.$
23. $f(z) = \ln(2 + z), \quad z_0 = 0.$
24. $f(z) = \ln \left(\frac{1 - z}{1 + z} \right), \quad z_0 = 0.$
25. $f(z) = \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)), \quad z_0 = 1.$

26. $f(z) = \sin^2 z, \quad z_0 = -1.$
 27. $f(z) = \exp(2z - 1) - \exp 1, \quad z_0 = 1.$
 28. $f(z) = \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)), \quad z_0 = -2.$
 29. $f(z) = \sin(2z - z^2), \quad z_0 = 1.$
 30. $f(z) = z^2 \ln(3 - 2z), \quad z_0 = 2.$

VI. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанной области.

1. $f(z) = z^{-1}(1 - z)^{-1}, \quad 0 < |z| < 1.$
 2. $f(z) = (z + 1) \exp(-1/z^2), \quad 0 < |z| < \infty.$
 3. $f(z) = (3z/2 - 1/z) \cos(1/z), \quad 0 < |z| < \infty.$
 4. $f(z) = z^{-1}(1 - z)^{-1}, \quad 0 < |z - 1| < 1.$
 5. $f(z) = (z - 1) \sin(1/z), \quad 0 < |z| < \infty.$
 6. $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z - 2)(z^2 + 1)}, \quad 1 < |z| < 2.$
 7. $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{-1}, \quad 2 < |z| < \infty.$
 8. $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z - 1}\right), \quad 0 < |z - 1| < \infty.$
 9. $f(z) = z \exp\left(\frac{1}{1 - z}\right), \quad 0 < |z - 1| < \infty.$
 10. $f(z) = 2(z^2 - 6z + 8)^{-1}, \quad 2 < |z| < 4.$
 11. $f(z) = z^2 \exp(1/z), \quad 0 < |z| < \infty.$
 12. $f(z) = \exp\left(\frac{z}{1 - z}\right), \quad 0 < |z - 1| < \infty.$
 13. $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{-1}, \quad 1 < |z| < 2.$
 14. $f(z) = z^{-2} \cos(z + 1), \quad 0 < |z| < \infty.$
 15. $f(z) = 3(z^2 - 7z + 10)^{-1}, \quad 2 < |z| < 5.$
 16. $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z - 2)(z^2 + 1)}, \quad 0 < |z - 2| < \sqrt{5}.$
 17. $f(z) = 2(z^2 - 6z + 8)^{-1}, \quad 0 < |z - 4| < 2.$
 18. $f(z) = (z - 1)^{-1} \exp z, \quad 0 < |z - 1| < \infty.$
 19. $f(z) = 3(z^2 - 5z + 4)^{-1}, \quad 1 < |z| < 4.$

20. $f(z) = (z - 1)^{-1} \exp(z^2 - 2z)$, $0 < |z - 1| < \infty$.
21. $f(z) = z^{-1}(1 - z)^{-1}$, $|z| > 1$.
22. $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{1 - z}\right)$, $0 < |z - 1| < \infty$.
23. $f(z) = 2(z^2 - 6z + 8)^{-1}$, $0 < |z - 2| < 2$.
24. $f(z) = z(z - 2)^{-1}$, $|z| > 2$.
25. $f(z) = 3(z^2 - 5z + 4)^{-1}$, $0 < |z - 1| < 3$.
26. $f(z) = 9(z^2 - 5z + 4)^{-1}$, $0 < |z - 4| < 3$.
27. $f(z) = 3(z^2 - 7z + 10)^{-1}$, $0 < |z - 2| < 3$.
28. $f(z) = 6(z^2 - 7z + 10)^{-1}$, $0 < |z - 5| < 3$.
29. $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{-1}$, $0 < |z - 1| < 1$.
30. $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{-1}$, $0 < |z - 2| < 1$.

VII. Вычислить интеграл.

1. $\int_L (z^3 + 1) \exp\left(\frac{1}{z + 1}\right) dz$, $L = \{z : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$.
2. $\int_L \frac{z + 1}{z(z - 1)^2(z - 3)} dz$, $L = \{z : |z| = 2\}$.
3. $\int_L \frac{dz}{z^4 + 2z^3}$, $L = \{z : |z| = 3\}$.
4. $\int_L \frac{\exp(iz) - 1}{z^3} dz$, $L = \{z : |z| = 1\}$.
5. $\int_L \frac{\exp z - \sin z}{z^4} dz$, $L = \{z : |z| = 1/3\}$.
6. $\int_L \frac{\sin z}{(z^3 - z)(z - 1)} dz$, $L = \{z : |z - 1| = 3/2\}$.
7. $\int_L \frac{z^3}{z^4 - 1} dz$, $L = \{z : |z| = 3/2\}$.
8. $\int_L \left(z + \frac{1}{6}\right) \exp\left(\frac{1}{3z}\right) dz$, $L = \{z : |z| = 1/2\}$.

9. $\int_L z \sin\left(\frac{1}{1-z}\right) dz, \quad L = \{z : |z-1| = 1/2\}.$
10. $\int_L (z+2) \exp\left(\frac{1}{1-z}\right) dz, \quad L = \{z : |z-1| = 2\}.$
11. $\int_L (z-5) \cos\left(\frac{1}{z+1}\right) dz, \quad L = \{z : |z| = 3\}.$
12. $\int_L (z^2-1) \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz, \quad L = \{z : |z| = \sqrt{2}\}.$
13. $\int_L \frac{dz}{(z+3)(z^2+1)}, \quad L = \{z : |z| = 4\}.$
14. $\int_L \frac{z^2 \exp(3/z^2) - 1}{z} dz, \quad L = \{z : |z| = \sqrt{5}\}.$
15. $\int_L z^3 \cos(2i/z) dz, \quad L = \{z : |z| = \sqrt{2}\}.$
16. $\int_L \frac{dz}{z^2(z^{10}-2)}, \quad L = \{z : |z| = 1\}.$
17. $\int_L \frac{\sin z}{z(z-6)^2} dz, \quad L = \{z : |z| = 10\}.$
18. $\int_L \frac{2z}{1-2\sin^2 z} dz, \quad L = \{z : |z| = 1\}.$
19. $\int_L \frac{z^2 + \sin z + 2}{z^3 + z^2\pi} dz, \quad L = \{z : |z| = 2\}.$
20. $\int_L \frac{\sin z}{z^2(z-8)} dz, \quad L = \{z : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\}.$
21. $\int_L \exp(3/z^2)(z^3 - z) dz, \quad L = \{z : |z| = \sqrt{3}\}.$
22. $\int_L (z^2 + 1) \exp(-1/z) dz, \quad L = \{z : |z| = 2\}.$
23. $\int_L \frac{dz}{(z^2+4)^2}, \quad L = \{z : |z-2i| = 2\}.$
24. $\int_L \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz, \quad L = \{z : |z| = 5/2\}.$
25. $\int_L \frac{z^2}{(z^2+1)(z-5)} dz, \quad L = \{z : |z| = 3\}.$

$$26. \int_L \exp\left(\frac{z}{z+2}\right) dz, \quad L = \{z : |z+2| = 1\}.$$

$$27. \int_L (z-2) \exp\left(\frac{1}{z-1}\right) dz, \quad L = \{z : |z| = 3\}.$$

$$28. \int_L \frac{dz}{z^4+1}, \quad L = \{z : |z-1| = 1\}.$$

$$29. \int_L \frac{dz}{(z-1)(z-2)^2}, \quad L = \{z : |z-2| = 1/2\}.$$

$$30. \int_L (z+i) \exp(2/z) dz, \quad L = \{z : |z| = 2\}.$$

VIII. Вычислить интеграл.

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 3} dx, \quad a > 0.$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 - 2x + 5} dx, \quad a < 0.$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 2x + 10} dx, \quad a > 0.$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 7} dx, \quad a < 0.$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 11} dx, \quad a < 0.$$

$$6. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 + 2x + 5} dx, \quad a > 0.$$

$$7. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 11} dx, \quad a < 0.$$

$$8. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 + 2x + 2} dx, \quad a > 0.$$

$$9. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 - 4x + 8} dx, \quad a > 0.$$

$$10. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 2} dx, \quad a < 0.$$

$$11. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 5} dx, \quad a < 0.$$

$$12. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 - 2x + 10} dx, \quad a < 0.$$

$$13. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 6x - 10} dx, \quad a < 0.$$

$$14. \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{b^2 x^2 + 10} dx, \quad a > 0.$$

15. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 + 4x + 8} dx, \quad a > 0.$
16. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 - 2x + 17} dx, \quad a < 0.$
17. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 - 4x + 5} dx, \quad a > 0.$
18. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 4x + 5} dx, \quad a < 0.$
19. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 - 4x + 20} dx, \quad a > 0.$
20. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 12} dx, \quad a < 0.$
21. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{b^2 x^2 + 13} dx, \quad a < 0.$
22. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 2x + 2} dx, \quad a > 0.$
23. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 - 2x + 2} dx, \quad a < 0.$
24. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 8} dx, \quad a < 0.$
25. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 - 8x + 17} dx, \quad a > 0.$
26. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 8x + 17} dx, \quad a > 0.$
27. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 + 4x + 13} dx, \quad a < 0.$
28. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 - 10x + 26} dx, \quad a > 0.$

$$29. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 + 10x + 26} dx, \quad a > 0.$$

$$30. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x^2 - 2x + 2} dx, \quad a < 0.$$