ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
КОРАБЛЕСТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

Кафедра начертательной геометрии и графики

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Методические указания
к практическим занятиям

Ленинград
1988

Методические указания содержат алгоритмы решения типовых задач по курсу начертательной геометрии, могут быть использованы также при изучении курса инженерной графики.

Указания предназначены для студентов дневных и вечернего факультетов Ленинградского кораблестроительного института.

НИКИФОРОВ
Андрей Геннадьевич

ЧЕРНЯЕВ
Михаил Германович

ЧЕХОВИЧ
Сергей Владиславович

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Методические указания
к практическим занятиям

Ответственный редактор канд.техн.наук, доц. М.К.Лисовский
Литературный редактор Е.В.Устинова

Зак.Р-148.Тир.700.Уч.-изд.л.2,0. 5.10.1988.Бесплатно.
Тип.ЛКИ, Лоцманская, 10.

I. ПРОЕКЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

I.I. Точка на эпюре Монжа

Основные положения

1. Положение точки в пространстве полностью определяется ортогональными проекциями на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций (рис.I).

2. Плоскости проекций $П_1$ и $П_2$ вместе с перпендикулярной к ним плоскостью $П_3$ образуют ортогональную систему координат, тождественную декартовой. При этом линия пересечения $П_1$ и $П_2$ (ось Ox_{12}) идентична оси Ox, линия пересечения $П_1$ и $П_3$ (ось Ox_{13}) – оси Oy, линия пересечения $П_2$ и $П_3$ (ось Ox_{23}) – оси Oz декартовой системы координат (рис.2).

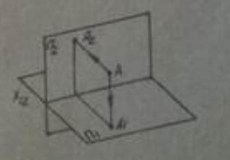

Рис.I

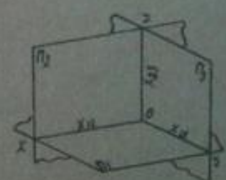

Рис.2

3. Плоский эпюр (чертеж) есть изображение, полученное следующим преобразованием системы плоскостей $П_1$; $П_2$; $П_3$ (рис.3):

плоскость $П_2$ – неподвижна,
плоскость $П_1$ – совмещается с $П_2$ вращением вокруг оси $Ox_{12}(Ox)$,

плоскость $П_3$ – совмещается с $П_2$ вращением вокруг оси $Ox_{23}(Oz)$ [x].

4. Представленная система плоскостей делит пространство на области, называемые угловыми пространствами, которые обозначаются римскими цифрами I, II, III, IУ (рис.4).

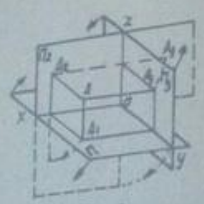

Рис.3

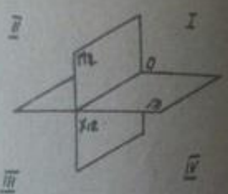

Рис.4

5. Плоскость, делящая пополам I и III угловые пространства, называется плоскостью симметрии, обозначается σ, а плоскость, делящая пополам II и IУ угловые пространства, называется плоскостью тождества и обозначается τ (рис.5).

6. Проекции точки на плоскости проекций $П_1$ и $П_2$ располагаются на прямой, перпендикулярной направлению оси проекций $Ox_{12}(Ox)$. Эта прямая называется линией связи или направлением проецирования (рис.6).

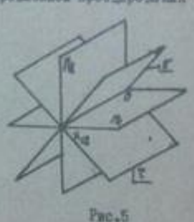

Рис.5

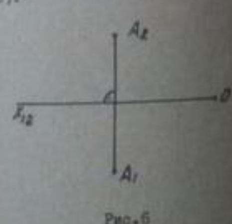

Рис.6

[x] Проекция объекта на плоскость $П_3$ – дополнительная, определяемая по проекциям на $П_1$ и $П_2$, строится лишь в случае необходимости. В машиностроительном черчении все три проекции являются основными и называются основными видами.

7. Координата y (z) точки на эпюре определяется как расстояние от проекции с нечетным (четным) индексом до оси $Ox_{12}(Ox)$. Положительный отсчет координаты y (z) производится вниз (вверх) от оси Ox_{12} (рис.7).

Алгоритмы типовых задач

Алгоритм AI. Определение положения точки в системе плоскостей $П_1$, $П_2$ (рис.8).

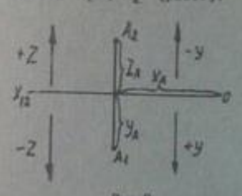

Рис.7

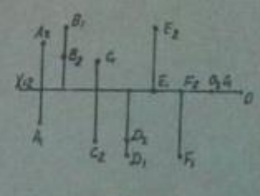

Рис.8

Для определения положения точки необходимо убедиться в выполнении одного из нижеприведенных условий.

I. Если горизонтальная (фронтальная) проекция точки находится ниже оси Ox_{12}, а фронтальная (горизонтальная) выше оси Ox_{12}, это означает, что точка находится в I (III) угловом пространстве.

2. Если обе проекции точки находятся выше (ниже) оси проекций Ox_{12}, это означает, что точка находится во II (IУ) угловом пространстве.

3. Если горизонтальная (фронтальная) проекция точки находится на оси Ox_{12}, это означает, что точка лежит в плоскости $П_2(П_1)$.

4. Если обе проекции точки лежат на оси Ox_{12}, это означает, что точка лежит на оси Ox_{12}.

5. Если обе проекции точки совпадают (тождественны), это означает, что точка лежит в плоскости тождества τ.

6. Если обе проекции точки располагаются симметрично относительно оси Ox_{12}, это означает, что точка лежит в плоскости симметрии σ.

В соответствии с AI: $A \in I$; $B \in II$; $C \in III$; $D \in IУ$; $E \in П_2$; $F \in П_1$; $G \in Ox_{12}$ (см.рис.8).

Алгоритм А2. Построение точки, симметричной данной относительно плоскости $П_1$ ($П_2$; σ : τ ; оси Ox_{12}) (рис.9).

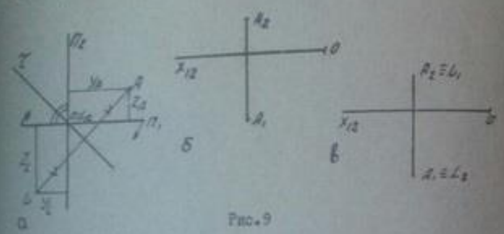

Рис.9

Для построения точки, симметричной данной относительно плоскости $П_1$ ($П_2$; σ ; τ ; оси Ox_{12}) необходимо следующее.

1. С помощью наглядной картинки (наглядная картинка получается при рассмотрении системы плоскостей $П_1$, $П_2$ с конца оси Ox_{12}) определить условие симметрии в координатах.

2. Установить величину и знак координат заданной и искомой точек.

3. Построить точку на эпюре.

Построение точки L , симметричной заданной точке A относительно плоскости тождества, показано на рис.9,а, б, в.

1.2. Прямая. Взаимное положение двух прямых

О с н о в н ы е п о л о ж е н и я

1. Проекция прямой линии есть в общем случае прямая линия (рис.10).

2. Если точка принадлежит прямой, то соответствующие проекции точки лежат на соответствующих проекциях прямой (верно и обратное) (рис.11).

3. Положение оси проекции Ox_{12} на эпюре не влияет на взаимное расположение геометрических элементов и на их метрические характеристики (рис.12).

4. В каком отношении точка делит отрезок прямой в про-

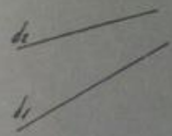

Рис.10

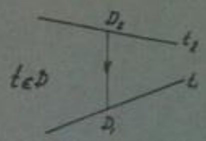

Рис.11

странстве, в таком же отношении соответствующие проекции точки делят соответствующие проекции отрезка[x] (рис.13).

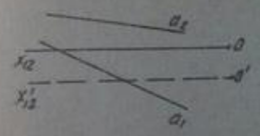

Рис.12

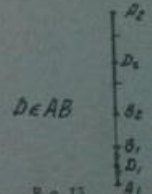

Рис.13

5. Если отрезок прямой параллелен плоскости проекций, то на эту плоскость проекций он проецируется без искажения (рис.14).

6. Если две прямые пересекаются, то точки пересечения соответственных проекций лежат на одном направлении проецирования (верно и обратное) (рис.15).

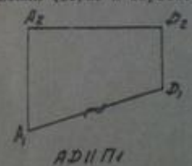

Рис.14

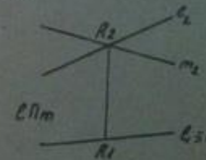

Рис.15

[x]Точка может делить отрезок в заданном отношении как внутренним образом (точка внутри отрезка), так и внешним (точка вне отрезка на его продолжении).

7. Если две прямые параллельны, то их соответствующие проекции параллельны (верно и обратное)[x] (рис.16).

8. Если хотя бы одна из сторон прямого угла между пересекающимися или скрещивающимися прямыми параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения (рис.17).

9. Если одна из сторон угла, образованного пересекающимися или скрещивающимися прямыми, параллельна плоскости проекций и на эту плоскость проекций угол проецируется без искажения, то и в пространстве угол между прямыми - прямой (см. рис.17).

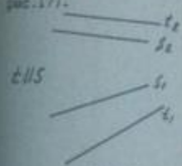

Рис.16

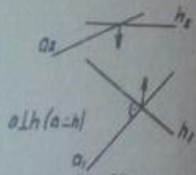

Рис.17

А л г о р и т м ы т и п о в ы х з а д а ч

Алгоритм А3. Определение истинной величины (ИВ) отрезка прямой общего положения (ОП) и углов его наклона к плоскостям проекций (рис.18).

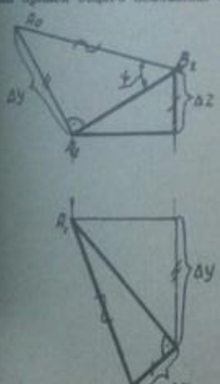

Рис.18

Для определения ИВ отрезка прямой ОП и углов его наклона к плоскостям проекций необходимо построить прямоугольный треугольник, для чего:

1. Выбрать одним из катетов треугольника горизонтальную (фронтальную) проекцию отрезка.

2. Построить направление второго катета - перпендикулярно первому.

3. Определить геометрическую разность аппликат (ординат) концов отрезка, для

[x]Если для двух прямых не выполняется ни п.6, ни п.7, то прямые скрещиваются.

чего из фронтальной (горизонтальной) проекции точки отрезка опустить перпендикуляр на линию связи, исходящую из фронтальной (горизонтальной) проекции второй точки. Разность аппликат (ординат) есть расстояние от фронтальной (горизонтальной) проекции второй точки до основания перпендикуляра.

4. Отложить на направлении второго катета величину разности аппликат (ординат) концов отрезка.

5. Построить гипотенузу треугольника.

Гипотенуза треугольника есть искомая истинная величина, а угол между гипотенузой и горизонтальной (фронтальной) проекцией есть угол φ (ψ)[x].

Алгоритм А4. Определение точки пересечения двух профильных прямых AB и CD (рис.19).

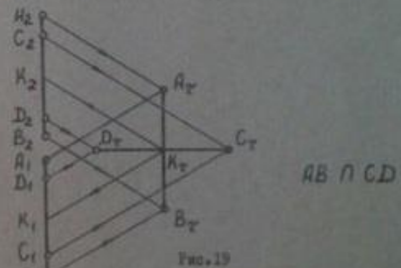

Рис.19

1. Выполняем косоугольное параллельное проецирование каждой из пересекающихся профильных прямых на плоскость тождества.

2. Строим проекции отрезков AB и CD на плоскости тождества.

3. Определяем точку K_τ пересечения $A_\tau B_\tau$ с $C_\tau D_\tau$.

4. Точку пересечения K проецируем с плоскости тождества на фронтальную $П_2$ и горизонтальную $П_1$ плоскости проекций.

Алгоритм А5. Построение профильной прямой, параллель-

[x] φ - угол наклона отрезка к $П_1$; ψ - к $П_2$.

ной заданной (рис.20).

Пусть задана прямая KF. Построить $CD \parallel KF$, если известно $C_1 D_1$ и C_2.

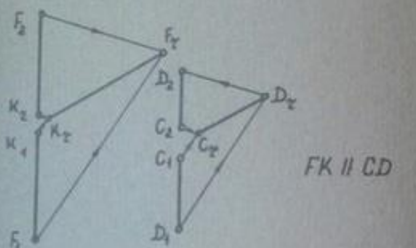

Рис.20

1. Используя косоугольное параллельное проецирование, строим проекцию на плоскость тождества отрезка $KF \to K_\tau F_\tau$.

2. Строим проекцию точки C на плоскость тождества $K_2 K_\tau \parallel C_2 C_\tau$, $K_1 K_\tau \parallel C_1 C_\tau$.

3. Выбираем направление проецирования D_1 на плоскость тождества параллельно $F_1 F_\tau$.

4. Получаем проекцию CD на плоскость тождества $C_\tau D_\tau \parallel K_\tau F_\tau$. Точка D_τ определена как точка встречи проекции CD на плоскость тождества и направления проецирования D_1 на плоскость тождества.

5. Проецируем точку D с плоскости тождества на фронтальную плоскость проекций Π_2.

1.3. Плоскость

Основные положения

1. Задание плоскости на эпюре Монжа (рис.21):
- тремя точками, не лежащими на одной прямой (рис.21,а);
- прямой с точкой вне ее (рис.21,б);
- пересекающимися прямыми (рис.21,в);
- параллельными прямыми (рис.21,г).

2. Плоскость, образующая произвольные углы с плоскостями проекций, называется плоскостью общего положения (плоскость удобно в ряде случаев задавать плоской фигурой - треугольником, четырехугольником и т.д.).

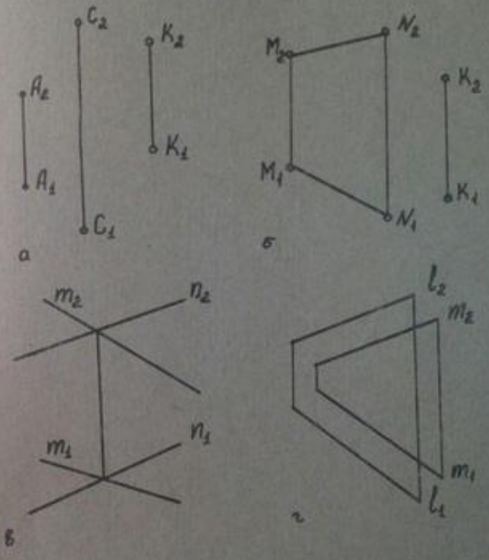

Рис.21

3. Плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций, называется проецирующей.

4. Проецирующая плоскость задается следом на плоскости проекций, к которой она перпендикулярна (след - линия пересечения указанной плоскости и плоскости проекций).

5. Плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций, называется фронтально проецирующей (рис.22,а).

6. Плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций, называется горизонтально проецирующей (рис.22,б).

7. Плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций, называется профильно проецирующей (рис.22,в).

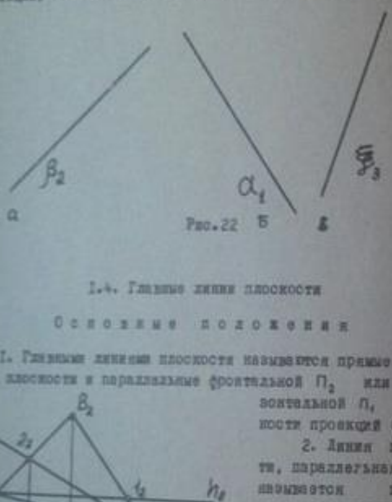

Рис.22

1.4. Главные линии плоскости

Основные положения

1. Главными линиями плоскости называются прямые, лежащие в плоскости и параллельные фронтальной Π_2 или горизонтальной Π_1 плоскости проекций (рис.23).

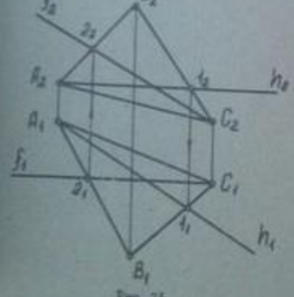

Рис.23

2. Линия плоскости, параллельная Π_1, называется горизонталью плоскости $h(h_1, h_2)$.

3. Линия плоскости, параллельная Π_2, называется фронталью плоскости $f(f_1, f_2)$.

4. В каждой плоскости бесчисленное множество фронталей и горизонталей.

5. Через точку плоскости можно построить только одну фронталь и одну горизонталь плоскости.

Алгоритмы типовых задач

Алгоритм А6. Построение точки в плоскости (рис.24).

Пусть плоскость α задана двумя параллельными прямыми $(a \parallel b)$ и известна горизонтальная проекция точки $M \in \alpha (M_1)$. Построить фронтальную проекцию точки M_2.

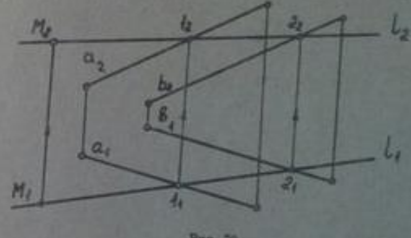

Рис.24

1. В плоскости α построим прямую ℓ, проходящую через точку M. Построение начинаем с горизонтальной проекции.

2. Определяем точки пересечения прямой ℓ с прямыми a и b на горизонтальной проекции (точки 1_1 и 2_1).

3. Определяем фронтальные проекции точек 1 и 2 (1_2 и 2_2).

4. Строим через точки 1 и 2 фронтальную проекцию прямой $\ell (\ell_2)$.

5. Находим фронтальную проекцию точки M $(M \in \ell)$ по известной горизонтальной.

1.5. Прямая и проецирующая плоскость

Основные положения

1. По отношению к плоскости прямая может занимать следующие положения:
- прямая параллельна проецирующей плоскости (рис.25);
- прямая лежит в проецирующей плоскости (рис.26);
- прямая пересекается с проецирующей плоскостью (рис.27).

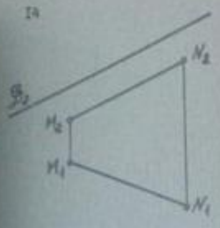

Рис.25

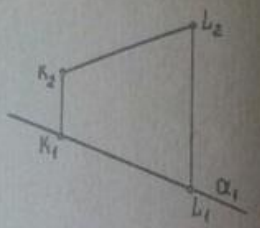

Рис.26

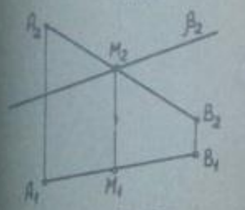

Рис.27

2. Прямая, лежащая в проецирующей плоскости, имеет одну проекцию, совпадающую со следом проецирующей плоскости, и вторую - произвольно расположенную.

3. Прямая, параллельная проецирующей плоскости, имеет одну проекцию, параллельную следу проецирующей плоскости, и вторую - произвольно расположенную.

4. Прямая, пересекающаяся с проецирующей плоскостью, имеет одну проекцию точки пересечения в месте пересечения следа плоскости и соответствующей проекции. Вторая проекция

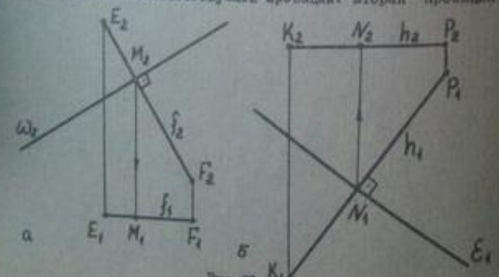

Рис.28

точки пересечения находится по направлению проецирования (рис.28,а, б).

5. Прямая, перпендикулярная к проецирующей плоскости, параллельна той плоскости, по отношению к которой плоскость перпендикулярна (прямая называется фронталью либо горизонталью) (см.рис.28,а, б).

I.6. Две плоскости

Основные положения

1. По отношению друг к другу две плоскости могут занимать следующие положения:

- параллельны;
- пересекаются.

2. Проецирующие плоскости параллельны, если параллельны их одноименные следы ($\omega_1 \parallel \xi_1$, $\alpha_2 \parallel \beta_2$) (рис.29).

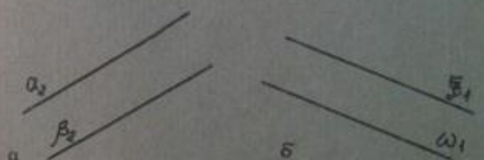

Рис.29

3. Плоскости общего положения параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости имеют себе параллельные две пересекающиеся прямые другой плоскости (соответствующие проекции параллельны) $\alpha(a \cap b), \beta(c \cap d)$, если $c \parallel a, b \parallel d \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ (рис.30).

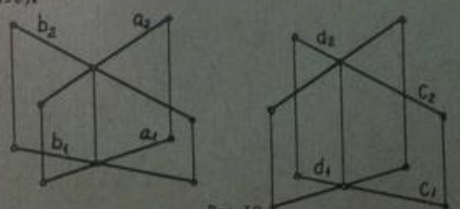

Рис.30

Для установления параллельности двух плоскостей удобно использовать фронталь и горизонталь.

4. Линия пересечения двух проецирующих плоскостей, перпендикулярных одной плоскости проекций, есть прямая, перпендикулярная той же плоскости проекций и параллельная второй плоскости проекций (рис.31).

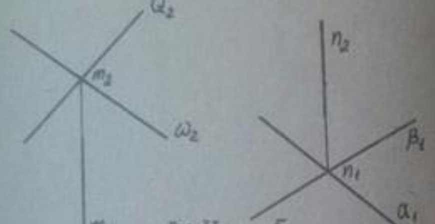

Рис.31

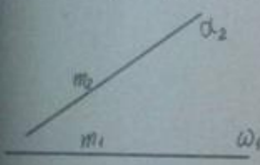

Рис.32

5. Линия пересечения двух разноименных проецирующих плоскостей есть прямая, одна проекция которой совпадает со следом одной проецирующей плоскости, а вторая - со следом другой (рис.32): m - линия пересечения плоскостей ω и α.

Алгоритмы типовых задач

Алгоритм А7. Определение линии пересечения проецирующей плоскости и плоскости общего положения (рис.33).

Пусть задана плоскость $\gamma(a \parallel b)$ и плоскость $\alpha \perp \Pi_2$.

1. Определить точки пересечения α с прямыми a и b, задающими плоскость (положение п.4 параграфа I.5).

2. Точки I и 2 принадлежат одновременно двум плоскостям α и γ.

3. Так как через две точки можно провести одну пря-

мую - прямая m ($1 \in m, 2 \in m$) есть линия пересечения плоскостей γ и α.

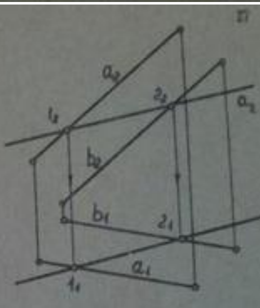

Рис.33

Алгоритм А8. Определение линии пересечения двух плоскостей общего положения (рис.34).

Пусть заданы плоскости $\alpha(a \parallel b), \beta(c \cap d)$.

Для определения линии пересечения двух плоскостей найдем две точки, одновременно принадлежащие обеим плоскостям. Для этого необходимо выполнить следующее.

1. Построить две проецирующие плоскости γ и ω (удобнее параллельные), пересекающие α и β.

2. Построить линии пересечения $m(\alpha \cap \gamma)$; $n(\alpha \cap \omega)$; $\ell(\beta \cap \gamma)$; $k(\beta \cap \omega)$, используя для построений алгоритм А7.

3. Прямая m принадлежит плоскостям α и γ , ℓ принадлежит β и γ , так как являются линиями их пересе-

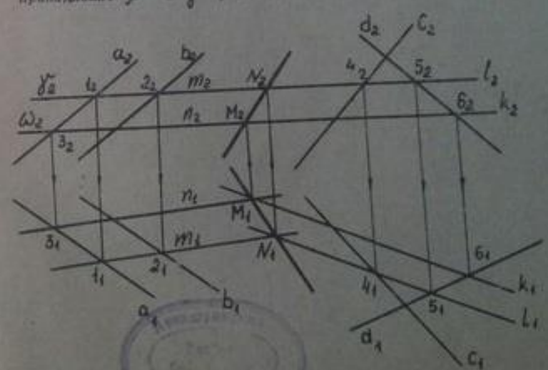

Рис.34

чения, из этого следует $m \cap \ell$ в точке N, а значит, $N \in \alpha$ и $N \in \beta$.

Аналогично $n \in \alpha, n \in \omega, k \in \beta, k \in \omega \Rightarrow M : n \cap k \Rightarrow M \in \alpha, M \in \beta$.

4. Имеем две точки N и M, одновременно принадлежащие плоскостям α и β. Через указанные точки строим прямую, являющуюся линией пересечения двух плоскостей.

1.7. Прямая линия и плоскость общего положения

Основные положения

1. Прямая линия по отношению к плоскости общего положения может:
- лежать в плоскости;
- быть параллельна плоскости;
- пересекаться с плоскостью.

2. Построение прямой, лежащей в плоскости, по известной одной проекции рассмотрено в алгоритме А6.

3. Прямая параллельна плоскости, если она параллельна хотя бы одной прямой, лежащей в плоскости.

Алгоритмы типовых задач

Алгоритм А9. Через точку построить прямую, параллельную заданной плоскости (рис.35).

Пусть задана точка A. Построим через нее прямую $\ell \parallel \alpha$, параллельную плоскости $\alpha (a \parallel b)$.

1. Построим через точку A произвольно фронтальную или горизонтальную проекцию прямой $\ell_2 \ni A_2$.

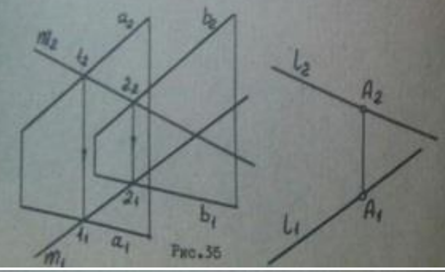

Рис.35

2. В плоскости α построим прямую $m (m_2 \parallel \ell_2)$.
3. Используя А6, определим m_1.
4. Проведем горизонтальную проекцию $\ell_1 (\ell_1 \parallel m_1), (\ell_1 \ni A_1)$.
5. Прямая $\ell \parallel \alpha$, так как параллельна прямой $m (m \in \alpha)$.

Алгоритм А10. Прямая пересекает плоскость. Определение точки встречи прямой и плоскости (рис.36,а).

Пусть плоскость задана треугольником ABC. Найти точку встречи прямой с плоскостью $\triangle ABC$.

1. Построим через прямую фронтально или горизонтально проецирующую плоскость ω.
2. Используя А7, определим линию пересечения ω и ABC: $1{,}2 = \omega \cap \triangle ABC$.
3. Прямая $1{,}2 \in \alpha, K \in ABC, n \in \omega \Rightarrow K = (1{,}2 \cap n) \Rightarrow K \in n$.

Точка K – точка встречи прямой n с плоскостью $\triangle ABC$.

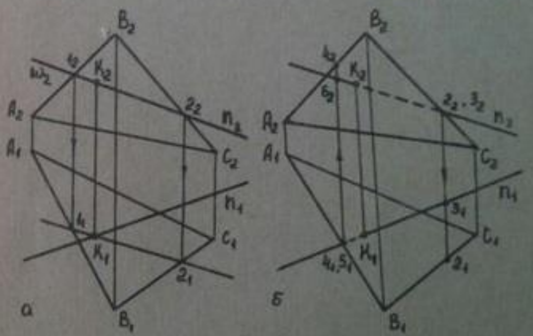

Рис.36

Алгоритм А11. Определение видимости прямой при пересечении ее с плоскостью (рис.36,б).

Пусть при помощи А10 найдена точка встречи прямой с плоскостью. Требуется определить видимость прямой. Для этого воспользуемся способом "конкурирующих точек".

1. Определим видимость на фронтальной проекции. Для этого на фронтальной проекции найдем две скрещивающиеся пря-

мые, одна из которых прямая n (исследуемая), а вторая, прямая принадлежит плоскости $\triangle ABC$. Возьмем на них точки, проекции которых совпадают: точка $2 \in BC$, точка $3 \in n$.

2. Проецируем точки 2 и 3 на горизонтальную проекцию $(2_1, 3_1)$.

3. Сопоставляя положение точек 2_1 и 3_1 на горизонтальной проекции, видим, что точка 2 ближе к нам, так как больше удалена от $\Pi_2 (y_2 > y_3)$, поэтому она, а с ней отрезок BC закрывает прямую n. Следовательно, отрезок $K_2 3_2$ на фронтальной проекции будет невидим. Остальная часть прямой – видима.

4. Аналогично определяют видимость прямой на горизонтальной проекции, используя, например, конкурирующие точки 4 и 5 $(4_1, 5_1)$.

1.8. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Основные положения

1. Прямая линия перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

2. Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из плоскостей имеет прямую линию, перпендикулярную другой плоскости.

3. Через точку пространства можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной плоскости.

Алгоритмы типовых задач

Алгоритм А12. Из заданной точки опустить перпендикуляр на плоскость (рис.37).

Пусть задана точка M и плоскость $\beta (a \cap b)$.

1. Построим главные линии плоскости f и h (пп.2 и 3 параграфа 1.4).

2. Через точку M построим прямую ℓ так, чтобы ее фронтальная проекция была перпендикулярна фронтальной проекции фронтали плоскости $(\ell_2 \perp f_2)$, а горизонтальная проекция – перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости $(\ell_1 \perp h_1)$.

3. На основании пп.8 и 9 параграфа 1.2 следует, что $\ell \perp f$ и $\ell \perp h$.

4. Учитывая п.1 параграфа 1.8, можно сделать вывод: $\ell \perp \beta$.

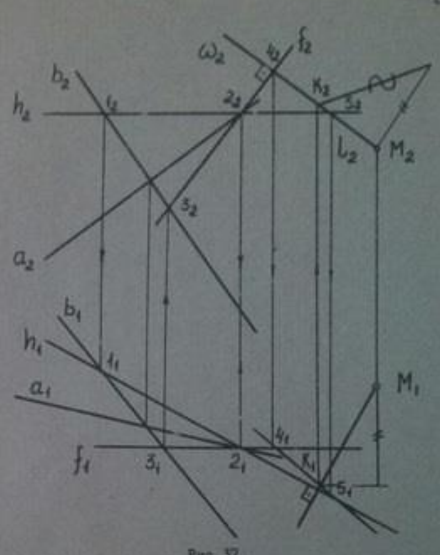

Рис.37

5. Для определения точки встречи прямой ℓ и плоскости β воспользуемся А10. Точка K – точка встречи перпендикуляра с плоскостью.

6. Определим истинную величину перпендикуляра MK, воспользовавшись А3.

Алгоритм А13. Из заданной точки опустить перпендикуляр на прямую (рис.38).

Пусть задана точка N и прямая m.

1. Через точку N построим плоскость γ, перпендикулярно прямой $m (\gamma (h \cap f))$. Плоскость γ задаем фронталью и горизонталью, причем $(f_2 \perp m_2)$; $(h_1 \perp m_1)$ (см.п.8 параграфа 1.2 и п.1 параграфа 1.8).

2. Определим точку K (точку встречи прямой m и плоскости

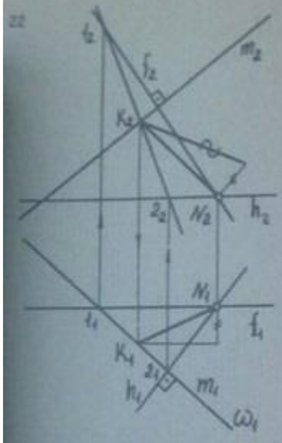

Рис.38

ности γ), используя А10.

3. Поскольку $N \in \gamma$, $K \in \gamma$, $K \in m$, $\gamma \perp m$, $\Rightarrow$ $NK \perp m$.

4. Истинную величину отрезка NK определяем, используя А3.

Алгоритм А14. Построение плоскости, перпендикулярной заданной (рис.39).

Пусть задана плоскость α ($\triangle ABC$). Построить плоскость $\beta \perp \alpha$ через точку M.

1. Используя А12, построим перпендикуляр ℓ к плоскости α через точку M.

2. Зададим плоскость $\beta(\ell \cap m)$. Для этого

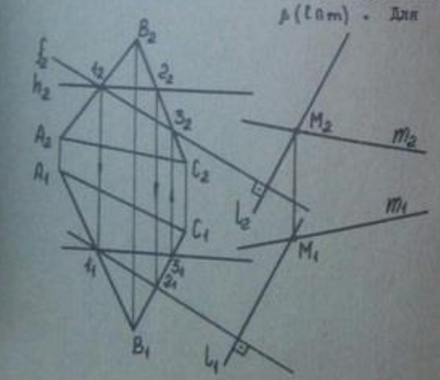

Рис.39

воспользуемся положением п.2 параграфа 1.8, на основании которого прямая m может быть прямой общего положения, пересекающейся с прямой ℓ в любой точке (например, точке M).

3. Так как через прямую (в данном случае $\ell \perp \alpha$) можно построить бесчисленное множество плоскостей, задача имеет множество решений. На рис.39 представлено одно из них.

2. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

2.1. Метод перемены плоскостей проекций

Суть метода перемены плоскостей проекций (МПП) сводится к последовательной замене плоскостей $П_1$ и $П_2$ на новые $П_5$ и $П_4$ с целью перевести рассматриваемый объект в частное положение по отношению к новым плоскостям проекций.

О с н о в н ы е   п о л о ж е н и я

1. За одно преобразование плоскостей может быть заменена только одна плоскость проекций, а вторая остается без изменения.

2. После преобразования сохраняется перпендикулярность плоскостей проекций.

3. При замене горизонтальной плоскости проекций остаются постоянными аппликаты точек объекта (-координаты). При замене фронтальной плоскости проекций остаются постоянными ординаты (x -координаты).

А л г о р и т м ы   т и п о в ы х   з а д а ч

Алгоритм А15. Переход к новой системе плоскостей проекций, в которой исходная прямая общего положения является линией уровня (рис.40).

Для того чтобы прямая a общего положения в исходной системе плоскостей проекций $П_1$, $П_2$ стала прямой уровня в новой системе плоскостей проекций (т.е. параллельной какой-либо из плоскостей проекций), необходимо так поменять одну из "старых" плоскостей ($П_1$ или $П_2$), что в "новой" системе ($П_1$, $П_4$) или ($П_5$, $П_2$) прямая станет располагаться параллельно плоскости $П_4$ (фронталь) или $П_5$ (гори-

зонталь.

Для выполнения такого преобразования необходимо:

1. На исходном эпюре прямой общего положения $a(a_1, a_2)$ (рис.40,а) вводим исходную (старую) систему плоскостей проекций $(П_1П_2)$, для чего в произвольном месте эпюра проводим ось проекций ox_{12}, располагая ее перпендикулярно линиям связи проекций точек, принадлежащих прямой a (рис.40,б).

2. Выбираем две произвольные точки, принадлежащие прямой a, - точки 1 и 2 (рис.40,в). Иногда удобно одну из точек выбирать так, чтобы одна из ее проекций располагалась на оси ox_{12} (на рис.40,в проекция $1_2 \in ox_{12}$).

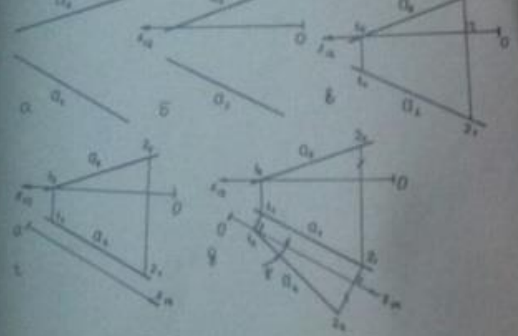

Рис.40

3. Меняем одну из плоскостей проекций таким образом, чтобы в новом положении она располагалась параллельно прямой a, при этом на эпюре ось проекций новой системы плоскостей проекций должна располагаться параллельно одной из проекций прямой, а именно:

1) чтобы получить фронталь, меняем плоскость $П_2$ на $П_4 \parallel a$ и ось $ox_{14} \parallel a_1$ (рис.40,г);

2) чтобы получить горизонталь, меняем плоскость $П_1$ на $П_5 \parallel a$ и ось $ox_{25} \parallel a_2$.

4. Переводим в новую систему плоскостей проекций $(П_1П_4)$ две выбранные на прямой a точки 1 и 2. Для чего (рис.40,д):

1) из горизонтальных проекций точек 1 и 2 проводим линии связи, соответствующие новому положению оси проекций ox_{14}, т.е. перпендикулярно последней;

2) на направлениях новых линий связи откладываем от новой оси проекций ox_{14} отрезки, равные удалениям точек 1 и 2 от плоскости $П_1$ соответственно, с учетом знака, которые определяют положения новых фронтальных проекций в системе плоскостей $(П_1П_4)$ (на рис.40,д удаление точки 1 от плоскости $П_1$ равнялось нулю, поэтому и проекция $1_4 \in ox_{14}$);

3) соединив проекции 1_4 и 2_4 прямой a_4, получим эпюр исходной прямой a в новой системе плоскостей проекций $(П_1П_4)$, где прямая a – фронталь.

П р и м е ч а н и е. Чтобы из прямой a получить горизонталь, последовательно выполняем шаги 1, 2 и 3), а шаг 4 выполняем аналогично шагу 4 при построении фронтали, заменив индексы 1 на 5, а 4 на 2 и, кроме того, слово "фронтальный" на "горизонтальный" и наоборот.

Алгоритм А16. Переход к новой системе плоскостей проекций, в которой исходная прямая уровня (фронталь или горизонталь) становится проецирующей прямой (рис.41).

Для того чтобы прямая уровня (фронталь или горизонталь) стала проецирующей прямой в новой системе плоскостей проекций (т.е. перпендикулярной какой-либо из плоскостей проекций), необходимо поменять ту из плоскостей, которой рассматриваемая прямая параллельна, на новую, занимающую перпендикулярное к прямой положение.

1. На эпюре горизонтальной прямой a (рис.41,а) вводим старую систему плоскостей проекций $(П_1П_2)$, задавая ее положение осью проекций ox_{12}, перпендикулярной линиям связи точек прямой (рис.41,б).

2. Выбираем две произвольные точки, принадлежащие прямой a (точки 1, 2 $\in a$, рис.41,в). Вообще говоря, здесь достаточно выбрать только одну точку 1 или 2; почему это так, видно из следующих шагов алгоритма.

3. Меняем ту плоскость проекций, которая параллельна исходной прямой a, на новую, занимающую перпендикулярное положение к прямой a, при этом на эпюре новая ось проекций располагается перпендикулярно к той проекции прямой a, которая является ее истинной величиной:

1) чтобы получить фронтально проецирующую прямую, заменяем плоскость Π_1 на $\Pi_4 \perp a$, на эпюре ось $Ox_{14} \perp$ проекции a_1 (рис.41,г);

2) чтобы получить горизонтально проецирующую прямую, заменяем плоскость Π_2 на новую $\Pi_4 \perp a$, а на эпюре ось $Ox_{12} \perp a_2$ (рис.41,д).

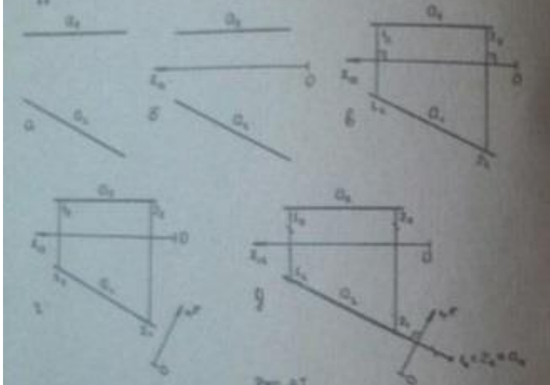

Рис.41

4. Строим эпюр прямой a в новой системе плоскостей проекций $(\Pi_4 \Pi_4)$, для чего:

1) из горизонтальных проекций точек 1 и 2 проводим новые направления линий связи, перпендикулярные новой оси проекций Ox_{14}. Естественно, что они совпадают, по построению, с направлением проекции a_1;

2) на новых направлениях линий связи от оси Ox_{14} откладываем удаления точек $1, 2 \in a$ от плоскости Π_4, определяющие новые фронтальные проекции точек 1_4 и 2_4. Естественно, что $1_4 \equiv 2_4$, а значит, и все проекции a_4 в новой системе плоскостей проекций проецируются в точку.

Примечания. 1. Фронтально проецирующую прямую за одну перемену плоскостей проекций можно получать только из горизонтали.

2. Горизонтально проецирующую прямую получаем из фронтали по аналогичному алгоритму с учетом примечания к А10.

Алгоритм А17. Переход к новой системе плоскостей проекций, в которой исходная плоскость общего положения становится проецирующей (рис.42).

Для того чтобы плоскость общего положения стала проецирующей в некоторой новой системе плоскостей проекций, необходимо, чтобы соответствующие линии уровня (фронтали или горизонтали плоскости) стали проецирующими (перпендикулярными) к новой плоскости проекций, так как все фронтали (или горизонтали) одной и той же плоскости взаимно параллельны, а значит, они образуют след плоскости на новой плоскости проекций.

1. На эпюре (рис.42,а) плоскости общего положения ($\triangle ABC$) вводим исходную систему плоскостей проекций $(\Pi_1 \Pi_2)$. Обычно ось проекций Ox_{12} проводит через какую-либо проекцию одной из задающих плоскость точек (например $C_1 \in Ox_{12}$ на рис.42,б). Этот выбор определяется тем, какую плоскость проекций предполагается менять: если меняем горизонтальную плоскость, то ось проводит через горизонтальную проекцию точки, если фронтальную – то наоборот.

2. Проводим в плоскости одну из главных линий:

1) если предполагается построение эпюра фронтально проецирующей плоскости, то проводит горизонталь плоскости;

2) если предполагается построение эпюра горизонтально проецирующей плоскости, то проводит фронталь плоскости (рис.42,в).

3. Меняем одну из плоскостей проекций $(\Pi_1 \Pi_2)$ так, чтобы в новой системе соответствующая линия уровня стала проецирующей. На эпюре это равносильно выбору новой оси проекций, располагающейся перпендикулярно либо к f_2 (рис.42,г), либо к h_1, а именно:

1) при построении горизонтально проецирующей плоскости меняют плоскость Π_1 на новую Π_5 и ось Ox_{52} проводят перпендикулярно f_2 (см.рис.42,г);

2) в случае построения фронтально проецирующей плоскости заменяют плоскость Π_2 на Π_4 и ось Ox_{14}.

4. Строим эпюр плоскости ($\triangle ABC$) в новой системе плоскостей проекций (рис.42,д):

1) проводим из каждой фронтальной проекции точек, задающих исходную плоскость, новые линии связи, перпендикулярные оси Ox_{52} (линия из A_2 совпадает по построению с f_2);

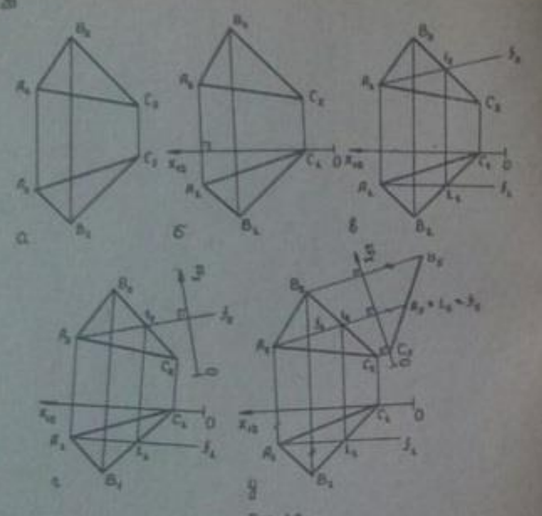

Рис.42

2) откладываем на новых направлениях линий связи от оси Ox_{52} удаления каждой из трех точек от плоскости Π_2 соответственно, которые и определяют положения новых горизонтальных проекций точек A, B, C (A_5, B_5, C_5);

3) соединив проекции A_5, B_5, C_5 прямой, получаем след плоскости ($\triangle ABC$), уже перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций Π_5 в новой системе плоскостей проекций $(\Pi_5 \Pi_2)$.

Алгоритм А18. Переход к новой системе плоскостей проекций, в которой исходная проецирующая плоскость является плоскостью уровня (рис.43).

Для того чтобы проецирующая плоскость стала плоскостью уровня в некоторой новой системе плоскостей проекций (т.е. параллельной какой-либо из плоскостей проекций), необходимо выбрать новую плоскость проекций, параллельную исходной про-

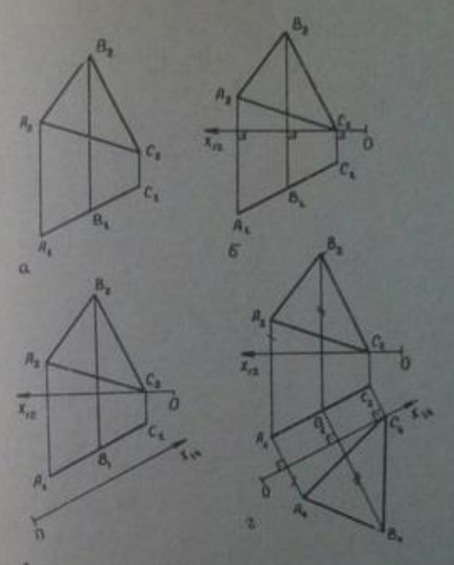

Рис.43

ецирующей плоскости, для чего:

1. На исходном эпюре проецирующей плоскости ($\triangle ABC$) (рис.43,а) проводим ось проекций Ox_{12}, соответствующую исходной системе плоскостей проекций $(\Pi_1 \Pi_2)$ (рис.43,б). Рассматривается случай горизонтально проецирующей плоскости (перпендикулярной плоскости Π_1) и ее след $A_1B_1C_1$.

2. Меняем одну из плоскостей проекций таким образом, чтобы она заняла положение, параллельное исходной проецирующей плоскости, что соответствует на эпюре положению новой оси проекций, параллельному следу проецирующей плоскости:

1) если исходная плоскость – горизонтально проецирующая, то старую плоскость проекций Π_2 меняем на новую

$\Pi_4 \parallel \triangle ABC$, причем ось Ox_{14} параллельна следу $A_4B_4C_4$ (рис.43,в);

2) если исходная плоскость – фронтально проецирующая, то меняем плоскость Π_4 на $\Pi_5 \parallel \triangle ABC$.

3. Строим вид плоскости $\triangle ABC$ в новой системе плоскостей проекций (рис.43,г), для чего:

1) проводим новые линии связи, перпендикулярные новой оси, из горизонтальных проекций A_1, B_1, C_1;

2) от оси Ox_{14} откладываем удаления точек A, B, C от плоскости Π_1 и определяем положения проекций $(A_4B_4C_4)$ этих точек в системе проекций (Π_1, Π_4). Таким образом, получили фронтальную плоскость уровня.

Примечания. 1. За одну перемену плоскостей горизонтальную плоскость уровня можно получить только из фронтально проецирующей плоскости.

2. За одну перемену плоскостей фронтальную плоскость уровня можно получить только из горизонтально проецирующей плоскости.

2.2. Метод вращения

Метод вращения ставит своей целью поворот исследуемого объекта вокруг выбранной оси на некоторый угол с тем, чтобы объект занял частное положение в системе плоскостей.

2.2.1. Метод вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций.

Основные положения

1. При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости $\Pi_1(\Pi_2)$, горизонтальная (фронтальная) проекция точки описывает окружность с центром в горизонтальной (фронтальной) проекции оси, а фронтальная (горизонтальная) проекция точки движется по прямой, параллельной направлению оси проекций (перпендикулярно линии связи и оси вращения).

2. Точки, лежащие на оси вращения, – неподвижны.

Алгоритмы типовых задач

Алгоритм А19. Перевод прямой общего положения в прямую уровня вращением вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций (рис.44).

Для того чтобы прямую общего положения перевести в по-

ложение фронтали или горизонтали, необходимо вращать ее вокруг оси, перпендикулярной какой-либо плоскости проекций, до положения, параллельного соответствующей плоскости проекций.

1. На исходном эпюре прямой общего положения (рис.44,а) выбираем две произвольные точки $1,2 \in a$ (рис.44,б).

2. Через одну из точек $1,2 \in a$ проводим ось вращения, перпендикулярную плоскости проекций Π_1 или Π_2, а именно:

1) если хотим получить фронталь, то проводим ось вращения, перпендикулярную плоскости проекций Π_1 (рис.44,в);

2) если хотим получить горизонталь, то проводим ось, перпендикулярную Π_2.

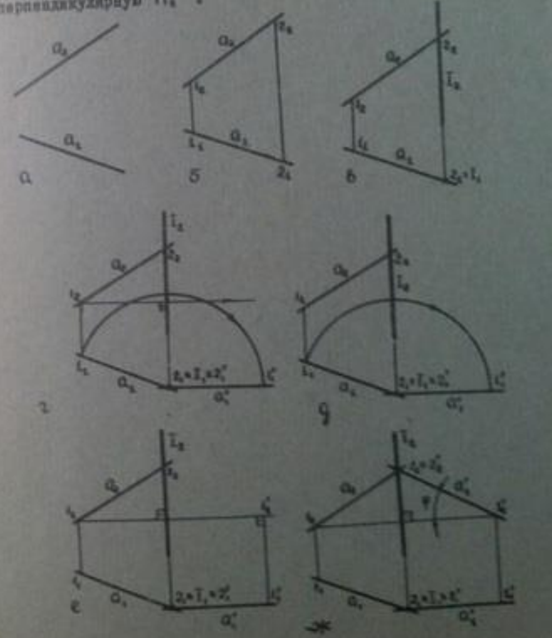

Рис.44

3. Производим поворот прямой a относительно проведенной оси вращения I до положения, параллельного соответствующей плоскости (рис.44,г), для чего:

1) строим траекторию движения проекции 1_1 при вращении точки 1 вокруг оси I, представляющую собой окружность (дугу) радиуса 1_1I_1 с центром в точке I_1. При этом положение точки $1_1'$ после поворота определяется при достижении проекцией a_1' положения, параллельного оси проекций Ox_{12} (на рис.44,г ось отсутствует, но ее всегда можно нарисовать или представить мысленно);

2) строим траекторию движения проекции 1_2 точки 1 при этом ее вращении, которая является прямой, перпендикулярной фронтальной проекции оси вращения I_2 (рис.44,д);

3) положение проекции $1_2'$ после поворота определим, восстанавливая из проекции $1_1'$ линию связи до пересечения с траекторией движения проекции 1_2 (рис.44,е);

4) соединяя точки $1_2'$ и 2_2 прямой a_2', получаем фронталь $a'(a_1', a_2')$ (рис.44,ж).

Примечания. 1. При таком вращении (вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций Π_1) не меняется угол наклона a к плоскости Π_1 (угол φ). Поэтому при повороте a до положения фронтали мы видим истинную величину прямой a (проекция a_2') и угол φ (рис.44,ж).

2. Мы специально провели ось вращения I через точку $2 \in a$, так как в этом случае алгоритм работает наиболее просто (поворачивается только одна точка прямой a, а именно – точка 1).

3. Из прямой общего положения по аналогичному алгоритму можно построить и горизонталь, при этом выполняются шаги 1, 2, 3, а также шаг, аналогичный шагу 3, с учетом того, что ось вращения теперь перпендикулярна плоскости Π_2, поэтому траектория движения проекции 1_2 будет дугой окружности, а траектория проекции 1_1 – прямой, перпендикулярной горизонтальной проекции оси вращения.

Алгоритм А20. Перевод прямой уровня (фронтали или горизонтали) в проецирующее положение вращением вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций (рис.45).

Для того чтобы перевести прямую, параллельную какой-либо плоскости проекций, в положение, перпендикулярное плоскости проекций, необходимо выбрать ось вращения перпендикулярно той плоскости, которой исходная прямая параллельна, и вращать прямую до проецирующего положения.

1. На эпюре исходной прямой (рис.45,а) выбираем две произвольные точки 1,2 (рис.45,б).

2. Через точку $2 \in a$ проводим ось вращения I, пер-

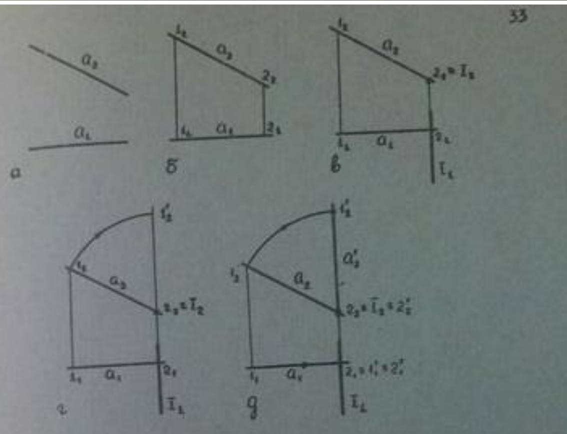

Рис.45

пендикулярную плоскости проекций Π_2 (или Π_1):

1) если исходная прямая фронталь, то $I \perp \Pi_2$ (рис.45,в);

2) если исходная прямая горизонталь, то $I \perp \Pi_1$.

3. Производим поворот прямой a вокруг оси I до занятия прямой проецирующего положения, для чего:

1) строим траекторию движения проекции 1_2 при таком повороте, представляющую собой дугу окружности радиуса 1_2I_2 с центром в точке I_2. Положение точки $1_2'$ после поворота, а значит, и всей проекции a_2', определяется приведением последней в положение, перпендикулярное оси проекций Ox_{12} (рис.45,г);

2) чертим траекторию движения точки 1_1, которая является прямой линией, перпендикулярной горизонтальной проекции оси I_1, и по построению совпадает с направлением проекции прямой a_1. Конечное положение проекции $1_1'$ определяется пересечением линии связи, опущенной из проекции $1_2'$, с траекторией движения точки 1_1 и совпадает с проекцией 2_1. Таким образом, вся горизонтальная проекция прямой a после поворота "собралась" в точку (рис.45,д).

Примечания. 1. Как и в МЗПП, за один поворот в проецирующее положение можно перевести только прямую уровня, поэтому если требуется перевести в проецирующее положение прямую общего положения, необходимо сначала, применяя А19, перевести заданную прямую в положение уровня, а потом, применяя А20, построить то, что требуется, а именно:

1) если необходимо построить горизонтально проецирующую прямую, то по А19 строим фронталь;

2) если необходимо построить фронтально проецирующую прямую, тогда по А19 строим горизонталь.

Алгоритм А21. Перевод плоскости общего положения в проецирующую методом вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций (рис.46).

Для того чтобы перевести плоскость общего положения в проецирующее (т.е. перпендикулярное какой-либо плоскости проекций), необходимо, выбрав ось вращения, перпендикулярную одной из плоскостей проекций, поворачивать вокруг нее плоскость до тех пор, пока одна из главных линий плоскости не займет проецирующее положение.

I. Проводим в плоскости общего положения (рис.46,а) одну из главных линий, а именно:

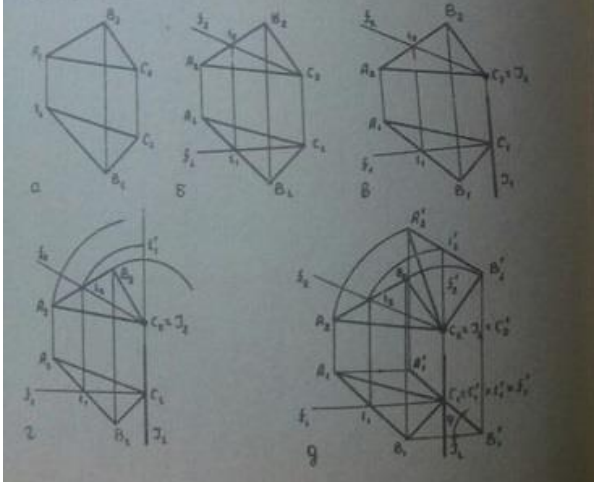

Рис.46

1) если нам требуется получить горизонтально проецирующую плоскость, то проводим фронталь f (рис.46,б);

2) если требуется получить фронтально проецирующую плоскость, то проводим горизонталь h.

2. Выбираем и строим на эпюре ось вращения, при этом:

1) для вращения плоскости до горизонтально проецирующего положения используется ось J, перпендикулярная плоскости $П_2$ (рис.46,в), которую удобно провести через точку C плоскости (точку, через которую проходит фронталь f);

2) для вращения плоскости до фронтально проецирующего положения выбирают ось, перпендикулярную плоскости $П_1$.

3. Поворачиваем плоскость вокруг оси J до тех пор, пока фронталь плоскости f не займет проецирующего положения, для чего:

1) строим траектории движения фронтальных проекций A_2; 1_2; B_2, которые являются дугами окружностей, каждая своего радиуса, но с общим центром в точке J_2 (рис.46,г). Так как при таком повороте фронталь f плоскости должна занять проецирующее положение, проекцию f_2 поворачиваем до тех пор, пока проекция f_2 не придет в положение, перпендикулярное оси проекций Ox_{12} (на рис.46,г это соответствует положению f_2'). Проекции A_2 и B_2 должны повернуться на точно такой же угол, чтобы вся проекция $A_2B_2C_2$ плоскости при повороте не искажалась;

2) строим траектории движения проекции A_1, 1_1, B_1, которые представляют собой прямые, перпендикулярные горизонтальной проекции J_1 оси вращения. Конечные положения A_1', $1_1'$, B_1' определяются пересечением линий связи из соответствующих фронтальных проекций A_2', $1_2'$, B_2' с соответствующими траекториями перемещения горизонтальных проекций (рис.46,д);

3) соединяя последовательно проекции A_1', C_1', $1_1'$, B_1' прямой, получим след плоскости на горизонтальной плоскости проекций, т.е. исходная плоскость повернулась до положения горизонтально проецирующей.

Примечания. 1. Точка C плоскости как лежащая на оси вращения J не меняет своего положения, т.е. $C \equiv C'$.

2. При рассмотренном вращении, очевидно, не меняется угол наклона исходной плоскости общего положения к фронтальной плоскости проекций $П_2$, т.е. β, поэтому после поворота мы его можем видеть на эпюре (см.рис.46,д).

3. При аналогичном вращении плоскости до положения фронтально проецирующей мы можем определить другой угол наклона плоскости к $П_1$, т.е. α.

Алгоритм А22. Перевод проецирующей плоскости в положение плоскости уровня методом вращения вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций (рис.47,а).

Для того чтобы проецирующую плоскость повернуть до положения плоскости уровня, необходимо выбрать ось вращения, перпендикулярную той плоскости проекций, которой перпендикулярна исходная проецирующая плоскость, и поворачивать последнюю до параллельного положения к другой плоскости проекций.

I. Выбираем и строим на исходном эпюре ось вращения J.

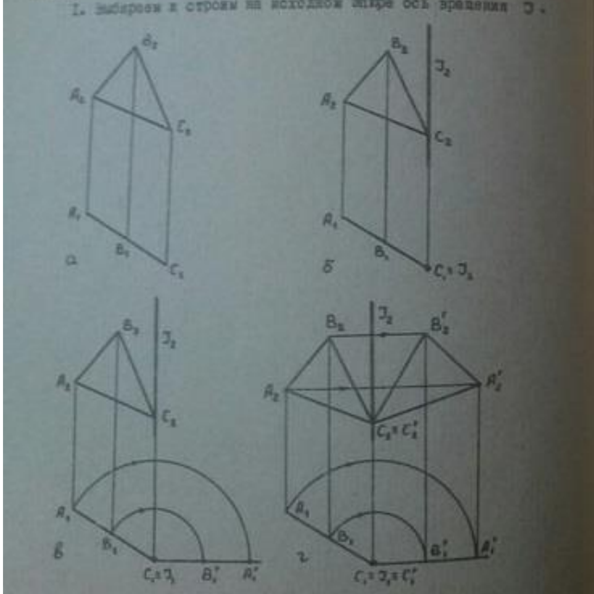

Рис.47

Наиболее просто выбрать ось проходящей через след проецирующей плоскости (на рис.47,б ось J проходит через точку C и перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций, так как исходная плоскость горизонтально проецирующая).

2. Поворачиваем плоскость вокруг оси J до положения плоскости уровня, для чего:

1) строим траектории вращения горизонтальных проекций A_1, B_1 (точка C лежит на оси вращения) как дуги окружностей соответствующих радиусов с общим центром J_1. Поворот производим до тех пор, пока след плоскости не займет положения, параллельного оси проекций Ox_{12} (рис.47,в);

2) строим траектории перемещения фронтальных проекций A_2 и B_2, которые, как обычно, представляют собой прямые, перпендикулярные фронтальной проекции оси вращения J_2. Конечные положения проекций A_2', B_2' находим в точках пересечения соответствующих линий связи горизонтальных проекций A_1', B_1' с соответствующими фронтальными траекториями (рис.47,г).

2.2.2. Метод вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекций.

Основные положения

I. При вращении точки вокруг оси, параллельной плоскости проекций $П_1(П_2)$, траектория движения ее на плоскости $П_1(П_2)$ представляет собой прямую линию, перпендикулярную горизонтальной (фронтальной) проекции оси вращения.

2. Точки, лежащие на оси вращения, неподвижны.

Алгоритм А23. Перевод плоскости общего положения в плоскость уровня вращением вокруг главных линий плоскости (рис.48).

Рассматриваемый ниже способ позволяет перевести плоскость общего положения в плоскость уровня (т.е. в плоскость, параллельную какой-либо плоскости проекций) одним поворотом, в отличие от предыдущих методов. При этом осью вращения выбирается одна из главных линий плоскости (фронталь или горизонталь), в зависимости от того, какую плоскость уровня мы хотим получить – фронтальную или горизонтальную.

I. На исходном эпюре (рис.48,а) плоскости общего положения проводим одну из главных линий:

– фронталь $f(f_1, f_2)$ (рис.48,б)

ходящей через проекцию A_2^1, A_2 до пересечения с проецирующей плоскостью β_2, в которой перемещается точка B при вращении плоскости;

б) соединяя построенные проекции A_2^1, B_2^1 и C_2^1, получим проекцию фигуры на фронтальную плоскость в истинную величину, а горизонтальные проекции A_1^1, B_1^1 определим проецированием на β_1 (рис.48,в).

О Г Л А В Л Е Н И Е

I. Проекции геометрических элементов 3

I.I. Точка на эпюре Монжа 3

I.2. Прямая. Взаимное положение двух прямых 6

I.3. Плоскость I0

I.4. Главные линии плоскости I2

I.5. Прямая и проецирующая плоскость I3

I.6. Две плоскости I5

I.7. Прямая линия и плоскость общего положения .. I8

I.8. Перпендикулярность прямых и плоскостей 20

2. Методы преобразования чертежа 23

2.I. Метод перемены плоскостей проекций 23

2.2. Методы вращения 30

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
КОРАБЛЕСТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

Кафедра начертательной геометрии
и графики

АЛГОРИТМЫ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Часть П

Методические указания к практическим заданиям
по курсу "Начертательная геометрия"

Ленинград
1989

В методических указаниях изложены основные алгоритмы решения задач, связанных с построением пересечения поверхностей с плоскостью и прямой линией. Рассмотрены алгоритмы построения касательной и нормали к кривой линии.

Методические указания предназначены для студентов Ленинградского кораблестроительного института, изучающих курс "Начертательная геометрия".

ЧЕХОВИЧ
Сергей Владиславович

АЛГОРИТМЫ ЗАДАЧ
НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Часть II

Методические указания к практическим заданиям по курсу "Начертательная геометрия"

Ответственный редактор А.Г.Никифоров
Литературный редактор Т.А.Канн

Зак.Р-85. Тир.600. Уч.-изд.л.2,0. 25.07.1989.
Бесплатно. Тип.ЛКИ. Лоцманская, 10.

I. МНОГОГРАННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

I.1. Общие положения

Многогранниками называются тела, ограниченные плоскими многоугольниками, вершины и стороны которых являются вершинами и ребрами многогранника.

Если все вершины и ребра многогранника лежат по одну сторону плоскости одной из его граней, то многоугольник называется выпуклым.

Наибольший практический интерес представляют призма, пирамида и выпуклые однородные многогранники – тела Платона (тетраэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) и др. [I], [3].

Из многогранников рассмотрим только пирамиды и призмы.

Призма – многогранник, две грани которого (основания призмы) представляют собой равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами, а все другие грани – параллелограммы.

Призма называется прямой, если ребра перпендикулярны основаниям.

Пирамида – многогранник, одна грань которого – многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной.

Пирамиду называют правильной, если в основании лежит правильный многоугольник, а высота пирамиды проходит через центр этого многоугольника.

Изображение призмы и пирамиды на эпюре приведено на рис.I.

I.2. Построение точки на гранной поверхности

Алгоритм А24. Построение точки на поверхности призмы (рис.2,а).

Пусть задана призма с основанием MKF и известна фронтальная проекция точки L (L_2), принадлежащей поверхности призмы. Определить горизонтальную проекцию точки L(L_1).

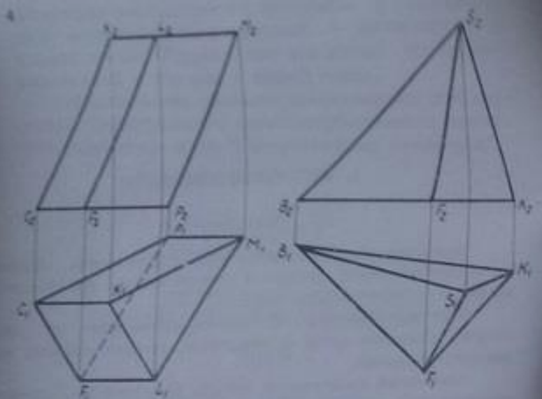

Рис.I. Призма и пирамида

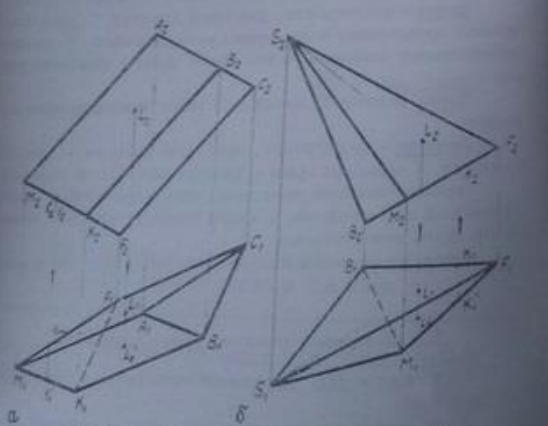

Рис.2. Точка на поверхности призмы и пирамиды

1. Точка L может принадлежать грани MFCA или MABK.

2. Построим прямую, параллельную ребрам призмы и проходящую через точку L (построение начинаем выполнять с фронтальной проекции). Прямая принадлежит грани MFCA или MABK и пересекает соответственно ребро основания MF в точке I или MK в точке I'.

3. На горизонтальной проекции получаем два возможных варианта прямой: в первом случае она принадлежит грани MFCA и проходит через точки I∈MF, во втором – грани MABK и проходит через точку I'∈MK.

4. Поскольку точка L может принадлежать одной из указанных прямых, определяем две возможные ее горизонтальные проекции (L_1 и L_1').

Алгоритм А25. Построение точки на поверхности пирамиды (рис.2,б).

Задана пирамида с основанием MBF и вершиной S. Известна фронтальная проекция точки L (L_2), принадлежащей поверхности пирамиды. Определить горизонтальную проекцию точки L(L_1).

I. Строим прямую, проходящую через вершину S и точку L (построение начинаем выполнять на фронтальной проекции).

2. Прямая пересекает ребро основания BF или ребро основания MF в точке K или K'.

3. Находим горизонтальные проекции прямых SK и SK' (соответственно S_1K_1 или S_1K_1').

4. Проецируем точку L на горизонтальную проекцию, где отмечаем два возможных ее положения (L_1 и L_1').

Примечание. В случае, если определена грань многогранника, которой принадлежит точка, решение будет единственным.

I.3. Пересечение многогранников плоскостью

Алгоритм А26. Пересечение многогранника проецирующей плоскостью.

Задан многогранник и фронтально проецирующая плоскость α_2.

Рассмотрим алгоритм А26 применительно к призме (рис.3) и пирамиде (рис.4).

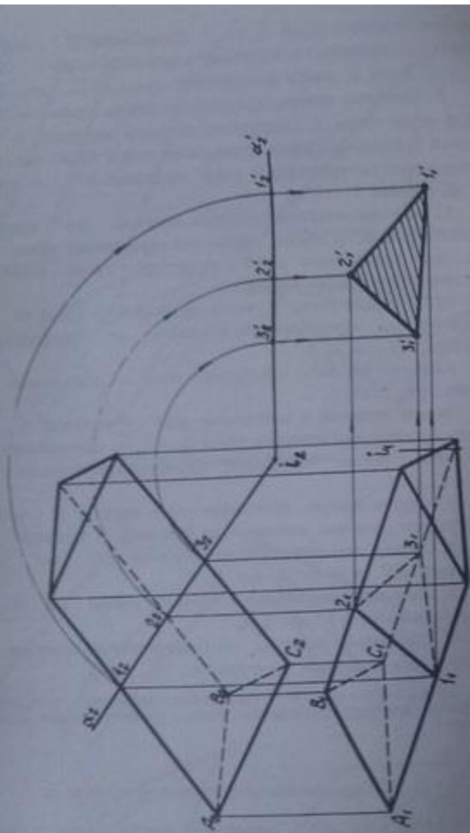

Рис.3. Пересечение призмы проецирующей плоскостью

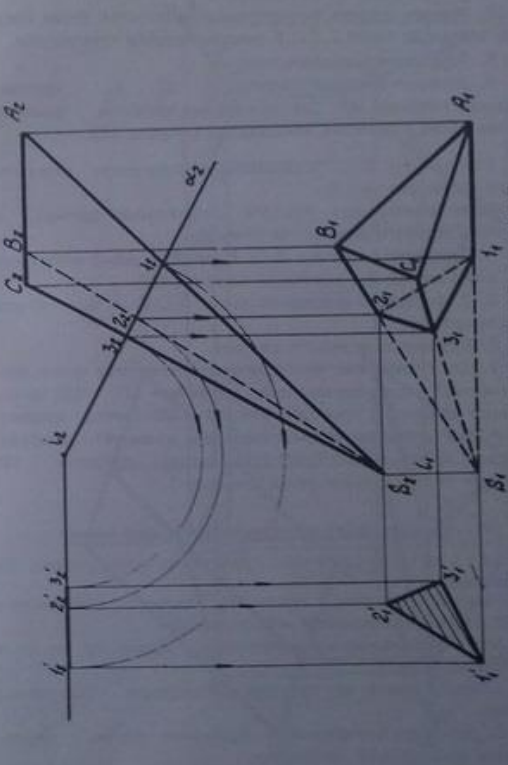

Рис.4. Пересечение пирамиды проецирующей плоскостью

Примечание. В качестве примера рассмотрен случай, когда секущая плоскость считается непрозрачной.

1. Используя положение 5.4 [4] определяем точки I, 2, 3 встречи ребер призмы с плоскостью α_2.

2. Находим сечение многогранника плоскостью путем соединения найденных точек I,2,3. В сечении получен треугольник.

3. Определяем видимость сечения.

4. Истинную величину сечения $1'_1$, $2'_1$, $3'_1$ находим, используя алгоритм A22. Для определения истинной величины сечения также может быть использован алгоритм AI8.

Алгоритм A27. Пересечение многогранника плоскостью общего положения (рис.5).

Задан многогранник FGHLMN (трехгранная призма) и плоскость общего положения Q $(a \cap b)$.

I. Определяем точки A, B и C встречи ребер многогранника с плоскостью Q, используя алгоритм AI0.

2. В результате соединения точек A, B и C получаем искомое сечение.

3. Определяем видимость сечения.

4. Для определения истинной величины сечения можно воспользоваться последовательностью алгоритмов AI7 и AI8 (метод перемены плоскостей проекций) или A2I и A22 (метод вращения вокруг осей перпендикулярных плоскостям проекций). Наиболее удобным в данном случае будет использование алгоритма A23 (вращение вокруг главных линий плоскости).

I.4. Пересечение многогранников прямой линией

Алгоритмы A28 и A29. Пересечение многогранника прямой линией.

Задан многогранник и прямая d. Определить точки встречи прямой линии с поверхностью многогранника.

Алгоритм рассмотрен применительно к призме A28 (рис.6) и пирамиде A29 (рис.7).

I. Через прямую d проводим проецирующую плоскость, например α_2.

2. Используя алгоритм A26, определяем сечение многогранника проецирующей плоскостью.

3. Поскольку прямая d принадлежит плоскости сечения, точки встречи прямой с контуром сечения и будут искомыми.

4. Определяем видимость прямой. (Часть прямой, лежащую внутри тела, будем обозначать тонкой линией).

Рис.5. Пересечение призмы плоскостью общего положения

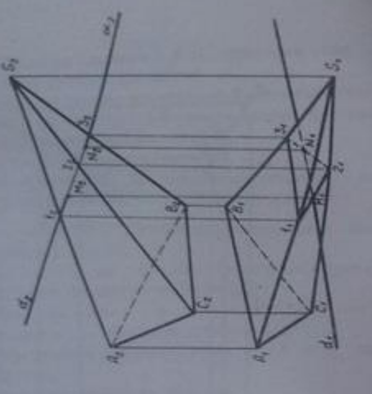

Рис.7. Пересечение пирамиды прямой линией

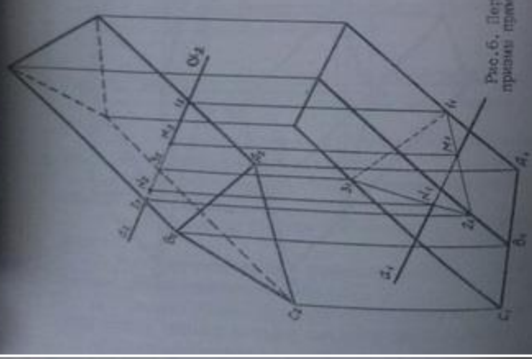

Рис.6. Пересечение призмы прямой линией

2. КРИВЫЕ ЛИНИИ

2.I. Общие положения

Линией называют геометрический элемент, представляющий собой непрерывное однопараметрическое множество точек.

Кривые линии, все точки которых принадлежат одной плоскости, называются плоскими (рис.8,б), а остальные – пространственными (рис.8,а).

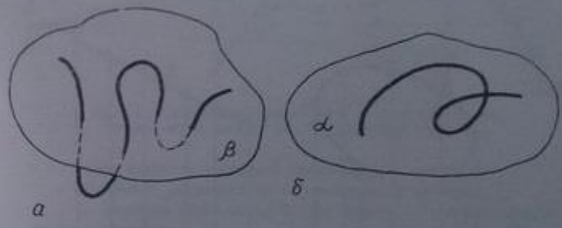

Рис.8. Виды кривых линий: а – пространственная кривая; б – плоская кривая линии

Линии подразделяются на трансцендентные, если они описываются трансцендентными уравнениями, и алгебраические, если в декартовой системе координат они определяются алгебраическими уравнениями. К трансцендентным линиям относятся синусоида, циклоида и др. К алгебраическим – окружность, парабола, гипербола, эллипс и др.

В каждой точке любой кривой линии может быть построена только одна касательная.

Для каждой точки пространственной кривой может быть проведено множество перпендикулярных прямых, образующих нормальную плоскость.

2.2. Плоские кривые линии

Плоская кривая в каждой ее точке имеет только одну нормаль – прямую, перпендикулярную к касательной в данной точке кривой и принадлежащую плоскости кривой.

Касательная к кривой линии проецируется в касательную к проекции кривой или, что то же самое, касательная к проекции кривой есть проекция касательной к кривой линии в рассматриваемой точке.

На рис.9 приведен пример задания плоской кривой на эпюре.

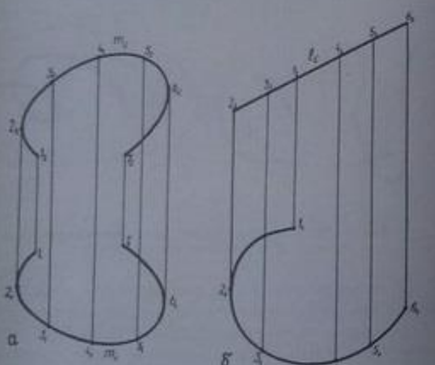

Рис.9. Изображение плоской кривой на эпюре: а – кривая лежит в плоскости общего положения; б – кривая лежит в проецирующей плоскости

2.2.I. Касательная к плоской кривой линии.

Алгоритм А30. Построение касательной к плоской кривой линии через точку, не принадлежащую кривой (приближенный способ) (рис.I0).

Задана кривая m и точка B, лежащие в проецирующей плоскости β_2.

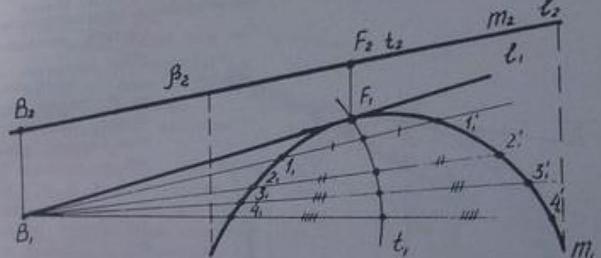

Рис.I0. Построение касательной к плоской кривой линии через точку, не принадлежащую кривой

Через точку B построить касательную к кривой m.

Построение выполняем на горизонтальной проекции.

I. Проведем через точку B ряд прямых, пересекающих плоскую кривую m.

2. Обозначим точки пересечения секущих с кривой m (I, 2, 3, 4, I$'$, 2$'$, 3$'$, 4$'$).

3. Полученные хорды (I,I$'$; 2,2$'$; 3,3$'$; 4,4$'$) разделим пополам и через найденные точки проведем плавную кривую t.

4. Точка пересечения кривых m и t определяет точку касания F.

5. Искомую касательную ℓ к кривой линии m проведем через точки B и F.

6. Фронтальные проекции линий построения на чертеже не нанесены, так как они сливаются со следом проецирующей плоскости β_2.

Алгоритм А3I. Построение касательной к плоской кривой линии в заданной точке касания (приближенный способ) (рис.II).

Задана кривая m и точка F ($F \in m$), лежащие в проецирующей плоскости α_2.

Построить касательную в точке F.

14

Построения выполняется на горизонтальной проекции в плоскости α_1.

1. Проведем прямую n, ориентировочно перпендикулярную искомой касательной.

2. Через точку F строим ряд прямых (секущих), пересекающих кривую m в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

3. От точек пересечения секущих с прямой n откладываем (на секущих) отрезки, равные хордам $F_1 1_1$; $F_1 2_1$; $F_1 3_1$ и т.д. (см.рис.II). Хорды, расположенные по разные стороны от точки касания F, строим с разных сторон от прямой n.

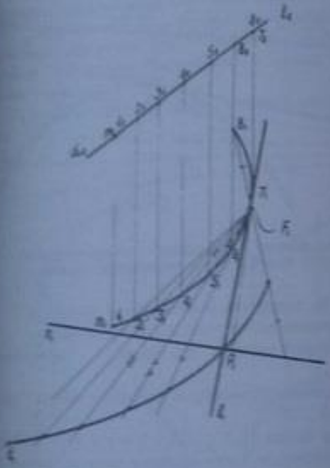

Рис.II. Построение касательной к плоской кривой линии в заданной точке касания

4. Полученные горизонтальные проекции точек соединяем плавной кривой t.

5. Кривая t и прямая n пересекаются в точке P, принадлежащей касательной.

6. Строим прямую ℓ через точки F и P, которая и будет являться искомой касательной.

7. На фронтальной проекции искомая касательная сливается со следом проецирующей плоскости α_2, как и все линии построения. В связи с этим они на чертеже не нанесены.

15

Алгоритм A32. Построение касательной к плоской кривой линии параллельно заданному направлению (приближенный способ) (рис.12).

Заданы кривая m и направление касательной S. Кривая m лежит в проецирующей плоскости α_1.

Построить касательную к кривой m.

Построение выполняем на фронтальной проекции.

1. Проведем ряд секущих, параллельных заданному направлению касательной S.

2. Определим точки пересечения секущих с кривой m(1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4').

3. Полученные хорды (1,1'; 2,2'; 3,3'; 4,4') разделим пополам и через найденные точки построим плавную кривую t.

4. Точка касания F определяется как точка пересечения кривых m и t.

5. Через точку F строим касательную к кривой m параллельно заданному направлению S.

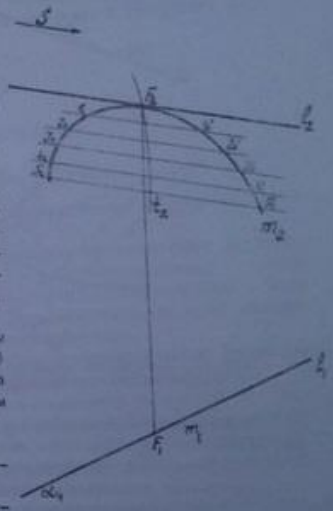

Рис.12. Построение касательной к плоской кривой линии параллельно заданному направлению

6. Линии построения на горизонтальной проекции совпадут со следом проецирующей плоскости α_1, поэтому они не обозначены. Горизонтальная проекция касательной $\ell(\ell_1)$ совпадает с горизонтальной проекцией кривой $m(m_1)$.

2.2.2. Нормаль к плоской кривой.

Алгоритм A33. Построение нормали к плоской кривой линии через точку, не принадлежащую данной кривой (приближенный способ) (рис.13).

16

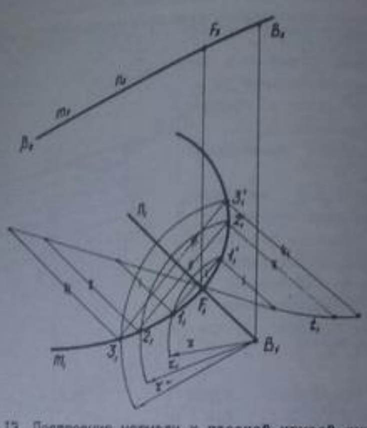

Рис.13. Построение нормали к плоской кривой линии через точку, не принадлежащую данной кривой

Заданы кривая m и точка B, принадлежащие проецирующей плоскости β_2.

Через точку B построить нормаль к кривой m.

Построение выполняем на горизонтальной проекции.

1. Построим ряд концентрических окружностей разных радиусов (r, r', r'') с центром в точке B.

2. Окружности пересекут кривую m в точках (1, 2, 3, 1', 2', 3').

3. Из точек (1, 2, 3, 1', 2', 3') восстановим перпендикуляры к соответствующим хордам, причем перпендикуляры, восстановленные из точек 1, 2, 3, имеют направление, противоположное перпендикулярам, восстановленным из точек 1', 2', 3'.

4. На перпендикулярах отложим отрезки, равные соответствующим хордам.

5. Найденные на перпендикулярах точки соединяем привой t.

6. Кривые m и t пересекаются в точке F.

17

7. Искомая нормаль n проходит через точки B и F.

8. Фронтальная проекция нормали совпадает с фронтальной проекцией кривой m, так как обе лежат в плоскости β_2.

3. ПОВЕРХНОСТИ

3.1. Общие положения

Математика определяет поверхности как непрерывное множество точек.

Если между точками этого множества может быть установлена зависимость $f(x,y,z)=0$, представляющая собой многочлен n-й степени, поверхность – алгебраическая. Если указанная функция является трансцендентной, то такая поверхность относится к разряду трансцендентных.

В начертательной геометрии поверхности можно рассматривать как непрерывное множество положений перемещающейся в пространстве линии. Эта линия называется образующей, а линия, определяющая направление ее перемещения, – направляющей. Такой подход дает возможность определить поверхность как непрерывное однопараметрическое множество линий или непрерывное двупараметрическое множество точек.

При образовании поверхности образующая может оставаться неизменной либо менять форму. На рис.14 приведен каркасный способ задания поверхности, где множество точек или линий, определяющих поверхность, называется ее каркасом.

Для ответа на вопрос, принадлежит ли выбранная точка поверхности при ее кинематическом задании, рассмотренном выше, необходимо ввести определитель, под которым подразумевается совокупность независимых условий, однозначно задающих поверхность.

Определитель содержит в себе некоторые постоянные геометрические элементы и соотношения между ними, другими словами, закон образования поверхности, который обеспечивает переход от постоянных геометрических элементов поверхности к ее переменным элементам – точкам и линиям в различных положениях на поверхности.

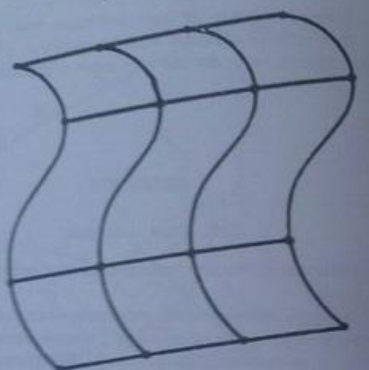

Рис.14. Задание поверхности каркасом

Введение определителя позволяет классифицировать поверхности [2], [5].

Поверхности делятся на нелинейчатые и линейчатые.

Нелинейчатые поверхности образованы перемещением кривой линии (образующей) в заданном направлении.

Линейчатые поверхности образованы перемещением прямой в заданном направлении.

В свою очередь, эти две большие группы поверхностей можно разбить на 3 класса:

1) поверхности параллельного переноса, полученные в результате поступательного перемещения образующей;

2) поверхности вращения, полученные вращением образующей вокруг выбранной оси;

3) поверхности винтовые, полученные винтовым перемещением образующей.

В следующих параграфах будут рассмотрены наиболее часто встречающиеся поверхности.

3.2. Нелинейчатые поверхности

Пусть кривая m перемещается в пространстве в заданном направлении S. След, оставляемый движущейся кривой m, будет являться нелинейчатой поверхностью (рис.15).

3.2.1. Точка на нелинейчатой поверхности.

Алгоритм 34. Построение точки на нелинейчатой поверхности (рис.16).

Поверхность задана кривой ℓ, перемещающейся в направлении S. Точка A принадлежит поверхности. Определить недостающую проекцию точки $A(A_1)$.

1. Через точку A проведем прямую m, принадлежащую поверхности, параллельную S и пересекающую кривую ℓ в точке 1 (построение начинаем выполнять на фронтальной проекции).

2. Определим горизонтальную проекцию точки 1_1 из условия, что $1 \in \ell$.

3. Через горизонтальную проекцию точки 1_1 построим соответствующую проекцию прямой $m(m_1)$, $m_1 \parallel S_1$.

4. Спроецируем точку A на горизонтальную проекцию прямой m и найдем ее недостающую проекцию (A_1).

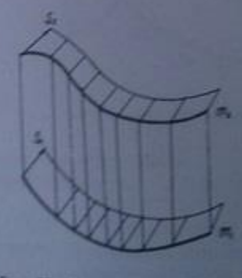

Рис.15. Задание поверхности перемещением кривой в пространстве

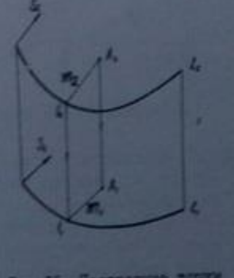

Рис.16. Построение точки на поверхности

3.2.2. Пересечение нелинейчатой поверхности плоскостью и прямой линией.

Остановимся на рассмотрении сечения поверхности проецирующей плоскостью, так как в случае задания плоскости общего положения, она может быть переведена в проецирующее положение с помощью алгоритма A17 или алгоритма A21.

Алгоритм A35. Пересечение нелинейчатой поверхности проецирующей плоскостью (рис.17).

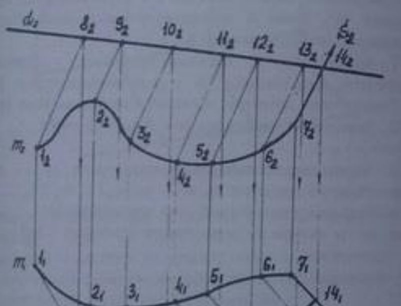

Рис.17. Пересечение поверхности плоскостью

Задана поверхность (кривой m и направлением ее перемещения S) и проецирующая плоскость α_2. Определить линию их пересечения.

1. Выберем ряд произвольных точек на прямой m (1–7) и построим через них прямые, параллельные направлению перемещения S (построения выполняем на обеих проекциях).

2. На фронтальной проекции построенные прямые пересекут проецирующую плоскость α_2 в точках (8_2-14_2), определяющих линию пересечения, сливающуюся со следом проецирующей плоскости.

3. На горизонтальной проекции точки, принадлежащие линии пересечения, определяются путем проецирования точек 8–14 на соответствующие горизонтальные проекции прямых, параллельных направлению S_1 и проведенные через точки 1–7.

4. Полученные точки соединим лекальной кривой, которая и будет являться горизонтальной проекцией линии пересечения.

Алгоритм A36. Пересечение нелинейчатой поверхности прямой линией (рис.18).

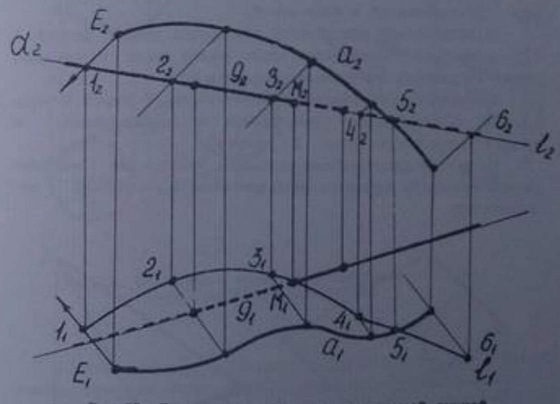

Рис.18. Пересечение поверхности прямой линией

Задана поверхность (перемещающейся кривой m в направлении E) и прямая q.

Определить точку встречи прямой с поверхностью.

1. Построим проецирующую плоскость β_2, проходящую через прямую q.

2. Используя алгоритм A35, определим ℓ линию пересечения плоскости β_2 с заданной поверхностью.

3. Поскольку прямая q и линия пересечения ℓ принадлежат одной плоскости β_2, точка их пересечения M является

искомой точкой встречи прямой с поверхностью, определяемой на горизонтальной проекции.

4. Определим фронтальную проекцию точки $M(M_2)$.

5. Для определения видимости прямой можно воспользоваться алгоритмом AII.

3.3. Линейчатые поверхности

При рассмотрении линейчатых поверхностей остановимся на двух: цилиндрической и конической.

Цилиндрическая поверхность образуется прямой линией l (образующей), перемещающейся вдоль кривой линии m (направляющей) и имеющей постоянное направление S.

Коническая поверхность образуется прямой линией l (образующей), перемещающейся вдоль кривой m (направляющей) и имеющей неподвижную точку S (вершину).

На рис.I9 представлены цилиндр и конус как наиболее распространенные варианты цилиндрической и конической поверхностей.

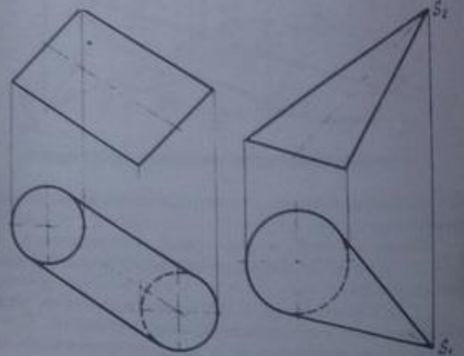

Рис.I9. Цилиндрическая и коническая поверхности

Алгоритм A37. Построение точки на цилиндрической и конической поверхностях (рис.20,а,б).

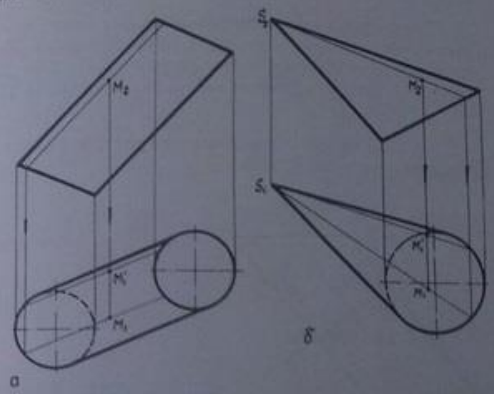

Рис.20. Построение точки на цилиндрической (а) и конической (б) поверхностях

Задана поверхность (цилиндр, конус), и известна фронтальная проекция точки $M(M_2)$, принадлежащей поверхности.

Определить недостающую проекцию точки $M(M_1)$.

I. На фронтальной проекции проводим образующую через точку M.

2. Строим соответствующую образующую на горизонтальной проекции (возможны два варианта).

3. Проецируем точку M на горизонтальную проекцию образующей, которой она принадлежит.

4. В случае, если в условии не было указано, на какой поверхности (видимой, невидимой) лежит точка M, решением следует считать указание двух возможных положений точки M на горизонтальной проекции M_1 и M_1'.

3.3.2. Пересечение поверхности цилиндра и конуса плоскостью.

При рассмотрении пересечения цилиндра и конуса плоскостями остановимся только на случае с проецирующей плоскостью, поскольку любая плоскость общего положения может быть преобразована в проецирующую путем использования алгоритма AI7 или алгоритма A2I.

Алгоритм A38. Пересечение поверхности цилиндра проецирующей плоскостью (рис.2I).

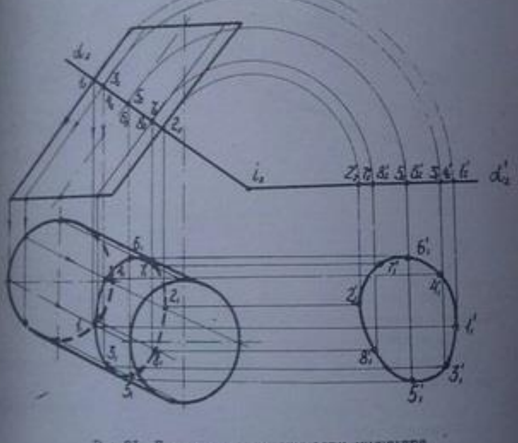

Рис.2I. Пересечение поверхности цилиндра проецирующей плоскостью

Задана цилиндрическая поверхность и фронтально проецирующая плоскость α_2.

Определить сечение и его истинную величину.

I. Построим ряд образующих на поверхности цилиндра (параллельно очерковым образующим). Построение выполним сначала на фронтальной проекции, а затем, используя точки пересечения образующих с основанием, достроим горизонтальные проекции образующих.

2. Определим на фронтальной проекции точки пересечения образующих с проецирующей плоскостью и спроецируем их на соответствующие образующие на горизонтальной проекции.

3. Найденные на горизонтальной проекции точки соединим плавной лекальной кривой. В сечении получится эллипс.

4. Покажем видимость геометрических элементов. В данной задаче точками границ видимости сечения будут точки касания линии сечения (эллипса) с очерковыми образующими цилиндра.

5. Для определения истинной величины сечения можно воспользоваться алгоритмом A22.

Алгоритм A39. Пересечение поверхности конуса проецирующей плоскостью (рис.22).

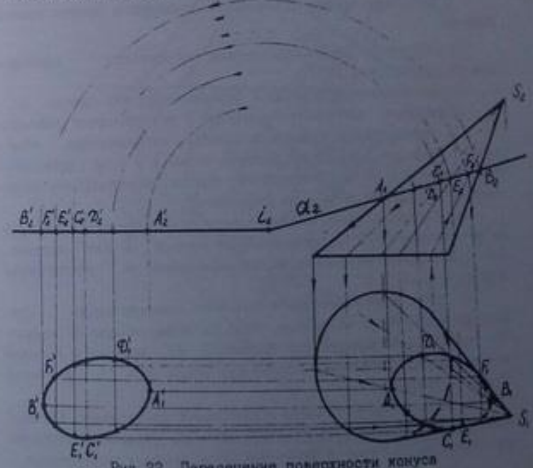

Рис.22. Пересечение поверхности конуса проецирующей плоскостью

Задан конус с вершиной в точке S и фронтально проецирующая плоскость α_2.

Определить сечение и его истинную величину.

1. Через вершину конуса S построим ряд образующих на фронтальной проекции и по точкам пересечения образующих с основанием найдем горизонтальные проекции образующих.

2. На фронтальной проекции определим точки пересечения образующих с проецирующей плоскостью α_2.

3. Спроецируем найденные точки на соответствующие горизонтальные проекции образующих.

4. Полученные точки соединим плавной лекальной кривой. В сечении получим эллипс.

5. Определим видимость сечения. Границами видимости будут являться точки касания сечения с очерковыми образующими.

6. Для нахождения истинной величины сечения воспользуемся алгоритмом А22.

3.3.3. Пересечение поверхности цилиндра и конуса прямой линией.

А л г о р и т м А40. Пересечение поверхности цилиндра прямой линией (рис.23).

Задан наклонный цилиндр и пересекающая его прямая n.

Определить точки встречи прямой с поверхностью цилиндра.

1. Через прямую зададим плоскость, параллельную образующим цилиндра. Для этого выберем точки 1 и 2 на фронтальной проекции и проведем через них прямые, параллельные фронтальным проекциям очерковых образующих.

2. Горизонтальные проекции построенных прямых определятся через точки 1 и 2, принадлежащие прямой n (из условия, что прямые параллельны очерковым образующим на горизонтальной проекции).

3. Построенная плоскость рассечет цилиндр вдоль оси. Сечение может быть построено, если на горизонтальной проекции найти точки пересечения прямой (3, 4), лежащей в основании цилиндра, с контуром основания. Точки K и L являются искомыми точками.

4. Для построения линии пересечения плоскости с боковой поверхностью цилиндра через точки K и L проводим образующие цилиндра, которые и будут являться линиями пересечения.

5. Поскольку прямая n лежит в указанной плоскости, точки ее встречи с поверхностью цилиндра находим как точки ее пересечения с контуром построенного на горизонтальной проекции сечения. Найденные точки обозначены M и N.

6. Для нахождения фронтальных проекций точек встречи прямой с поверхностью цилиндра достаточно точки M и N спроецировать на фронтальную проекцию прямой n.

Укажем видимость прямой. Если это вызовет затруднения, можно воспользоваться алгоритмом А11.

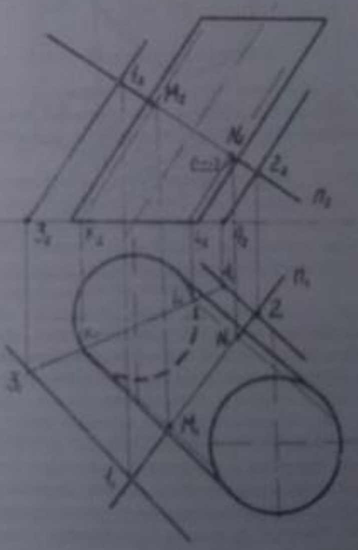

Рис.23. Пересечение поверхности цилиндра прямой линией

А л г о р и т м А41. Пересечение поверхности конуса с прямой линией (рис.24).

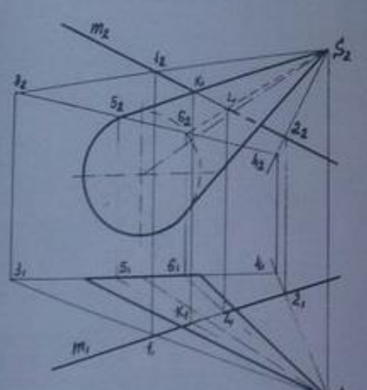

Рис.24. Пересечение поверхности конуса прямой линией

Задан наклонный конус и пересекающая его прямая m. Определить точки встречи прямой с поверхностью конуса.

1. Строим вспомогательную плоскость общего положения через вершину конуса и заданную прямую m. Для этого через вершину S на горизонтальной проекции проводим две вспомогательные прямые, пересекающие прямую m в точках 1, 2, а плоскость основания – в точках 3 и 4.

2. Определяем фронтальные проекции точек 1 и 2 ($1 \in m$; $2 \in m$), что позволяет построить фронтальные проекции вспомогательных прямых ($S_2 1_2$, $S_2 2_2$) и найти соответствующие проекции точек их пересечения с плоскостью основания (3_2 , 4_2).

3. Строим прямую (3, 4), лежащую в плоскости основания, и определяем точки ее пересечения с контуром основания (5, 6).

4. Таким образом, на эпюре можно построить сечение конуса вспомогательной плоскостью. Боковая поверхность конуса сечется плоскостью по образующим S5 и S6.

5. Исследуемая прямая m принадлежит полученному сечению и пересекает его контур в точках K и L (K_2, L_2). А так как контур сечения принадлежит поверхности конуса, точки K и L являются точками пересечения прямой m с поверхностью.

6. Находим недостающие проекции точек K и L, принадлежащих прямой m. (K_1, L_1)

7. Определяем видимость прямой.

3.4. Поверхности вращения

Поверхность вращения представляет собой след, оставляемый кривой линией при вращении ее вокруг неподвижной оси. На рис.25 приводится изображение поверхности вращения на эпюре.

Произвольная точка, принадлежащая кривой, образующей при вращении поверхность, движется по окружности с центром на оси вращения. Окружности, являющиеся траекториями движения точек, принадлежащих образующей, называются параллелями. Параллель наименьшего диаметра называется "горлом", а наибольшего – "экватором".

Плоскости, проходящие через ось вращения, называются меридиональными. Меридиональная плоскость, параллельная плоскости проекций, называется главной меридиональной плоскостью, а линия ее пересечения с поверхностью – главным меридианом.

3.4.1. Пересечение поверхности вращения и плоскости.

Рассмотрим пересечение поверхности вращения только проецирующей плоскостью, так как в случае задания плоскости общего положения могут быть использованы алгоритмы А17 или А21 для перевода ее в проецирующее положение, хотя это и сопряжено с некоторыми неудобствами, связанными с нахождением новой проекции тела вращения.

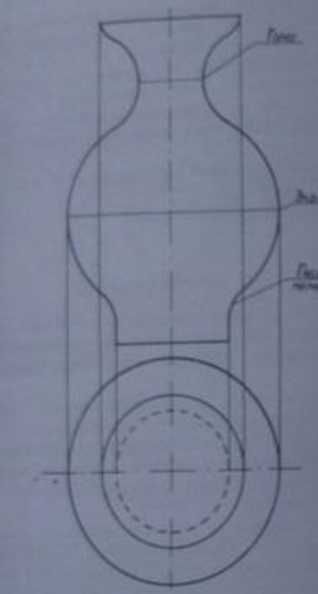

Рис.25. Поверхность вращения

Алгоритм А42. Пересечение поверхности сферы проецирующей плоскостью (рис.26).

Заданы сферическая поверхность и проецирующая плоскость α_2. Определить сечение сферы плоскостью α_2 и найти его истинную величину.

1. Из центра сферы $O(O_1; O_2)$ опускаем перпендикуляр OC на проецирующую плоскость α_2.

2. Находим характерные точки 1 и 2 пересечения проецирующей плоскости с очерком сферы на фронтальной проекции.

3. Проводим вспомогательную проецирующую плоскость γ_2. На горизонтальной проекции линия ее пересечения со сферой будет проецироваться окружностью с центром в точке O_1.

4. Находим характерные точки 3 и 4 из условия, что $1_2C_2 = C_2 2_2 = 3_1C_1 = 4_1C_1$.

5. Строим вспомогательные проецирующие плоскости β_2 и δ_2 и находим по аналогии с п.3 данного алгоритма промежуточные точки 5 и 6, 7 и 8.

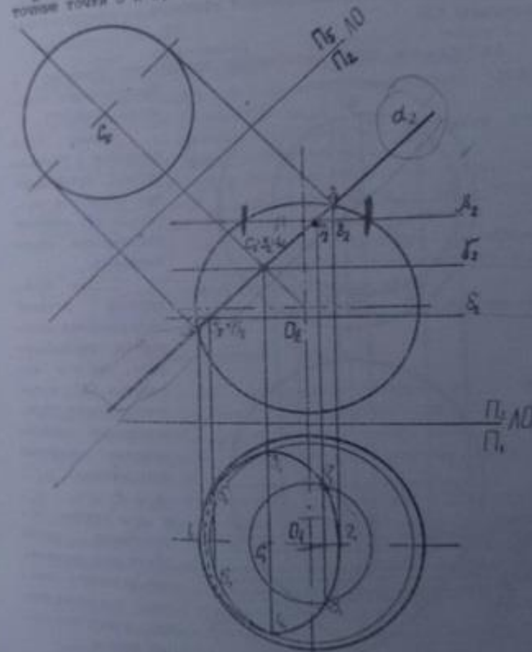

Рис.26. Пересечение поверхности сферы проецирующей плоскостью

6. На горизонтальной проекции полученные в результате построений точки 1_1, 5_1, 3_1, 7_1, 2_1, 8_1, 4_1, 6_1, 7_1 соединяем плавной кривой. На горизонтальную проекцию сечение проецируется в виде эллипса.

7. Определяем видимость сечения.

8. Сечение сферы плоскостью представляет собой окружность, для определения ее истинной величины воспользуемся алгоритмом А18.

Алгоритм А43. Пересечение поверхности вращения и проецирующей плоскостью (рис.27).

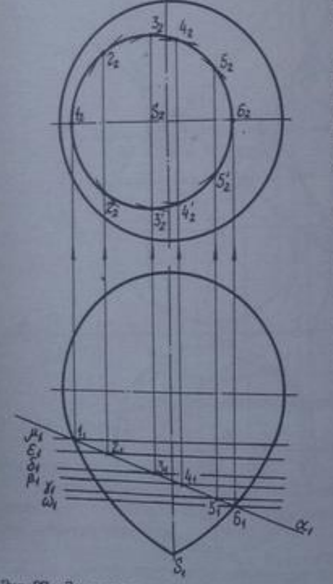

Рис.27. Пересечение произвольной поверхности вращения проецирующей плоскостью

Задано тело вращения и горизонтально проецирующая плоскость α_1. Определить сечение поверхности плоскостью α_1.

1. Для определения сечения тела вращения плоскостью воспользуемся, как и в алгоритме А42, вспомогательными горизонтально проецирующими секущими плоскостями μ_1, ε_1, δ_1, β_1, γ_1 и ω_1 и найдем необходимое число точек для построения искомого сечения, представляющего собой лекальную кривую.

2. Определяем видимость линии пересечения (в данном случае она является видимой).

3. Истинная величина сечения может быть определена с помощью или алгоритма А18, или алгоритма А22, или алгоритма А23.

3.4.2. Пересечение поверхности вращения и прямой.

Алгоритм А44. Пересечение поверхности сферы прямой линией (рис.28).

Заданы сферическая поверхность и прямая ℓ. Определить точки встречи прямой с поверхностью сферы.

1. Через прямую ℓ построим горизонтально (фронтально) проецирующую плоскость α_1.

2. Воспользовавшись алгоритмом А18, определим истинную величину сечения сферы плоскостью α_1.

3. Используя метод перемены плоскостей, найдем положение проекции прямой ℓ на плоскости π_4, для построения используем точки 1 и 2, принадлежащие прямой ℓ.

4. Точки 3_4, 4_4 пересечения проекции ℓ_4, принадлежащей плоскости, с контуром сечения и будут являться искомыми точками встречи прямой с поверхностью сферы.

5. Находим проекции точек 3, 4 на плоскости проекций π_1 и π_2.

6. Определяем видимость прямой ℓ.

Алгоритм А45. Пересечение поверхности вращения прямой линией, пересекающей ось вращения (рис.29).

Заданы поверхность вращения и прямая линия q, пересекающая ось вращения. Определить точки встречи прямой с поверхностью вращения.

1. Зададим на прямой q отрезок AB и воспользуемся алгоритмом А19 для перевода прямой в положение, параллельное плоскости π_2. При этом образующая тела вращения, которую пересекает прямая, займет положение главного меридиана.

2. На фронтальной проекции определяем точки $1'$ и $2'$ пересечения прямой с главным меридианом.

3. Найденные точки $1'$ и $2'$ являются точками встречи прямой с поверхностью вращения.

4. Для определения проекций точек пересечения прямой с телом вращения на исходных проекциях необходимо выполнить

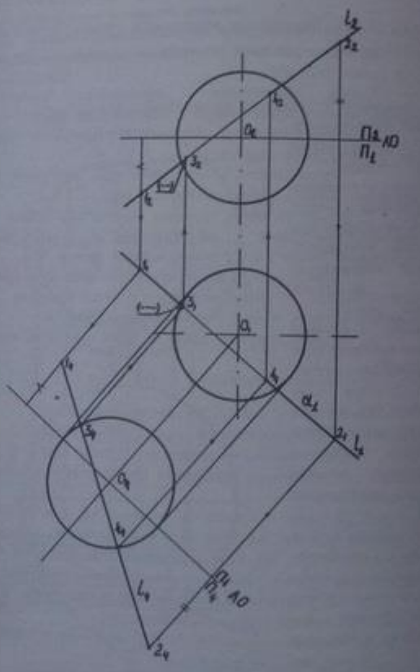

Рис.28. Пересечение поверхности шара прямой линией

обратное вращение вокруг оси i и указать положение точек I и 2 на фронтальной и горизонтальной проекциях.

5. Видимость прямой определяем по общим правилам.

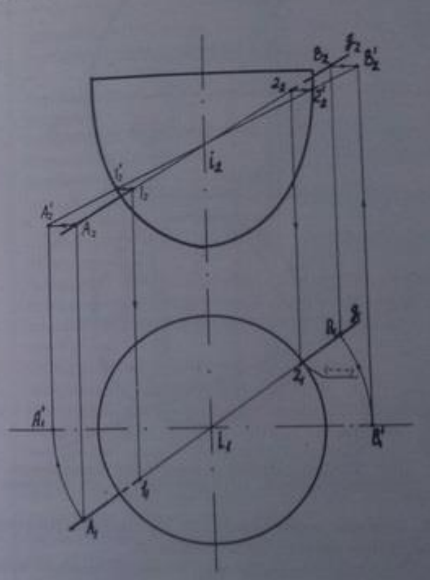

Рис.29. Пересечение произвольной поверхности вращения прямой, пересекающей ось вращения

Алгоритм А46. Пересечение поверхности вращения прямой линией, не пересекающей ось вращения (рис.30).

Заданы поверхность вращения и прямая d, ее пересекающая. Определить точки встречи прямой с поверхностью вращения.

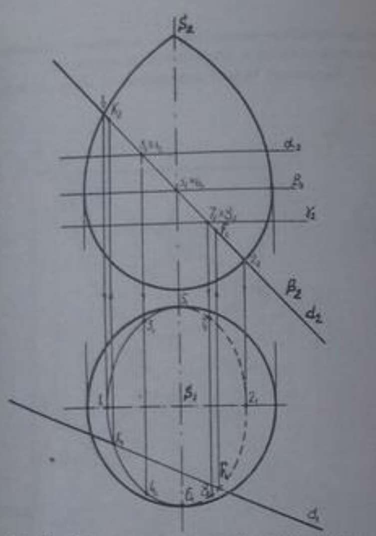

Рис.30. Пересечение произвольной поверхности вращения прямой, не пересекающей ось вращения

1. Построим через прямую d фронтально проецирующую (горизонтально проецирующую) плоскость.

2. Используя алгоритм А43, определим сечение поверхности вращения проецирующей плоскостью β_2.

3. Поскольку прямая d принадлежит плоскости β_2, определим точки $K(K_1)$ и $F(F_1)$ пересечения горизонтальной проекции прямой $d(d_1)$ с контуром сечения.

4. Найденные точки K и F являются искомыми точками встречи прямой с поверхностью вращения.

5. Видимость прямой определяем по общим правилам.

СПИСОК АЛГОРИТМОВ*

Номер алгоритма	Название алгоритма
A1	Определение положения точки в системе плоскостей
A2	Построение точки, симметричной данной относительно одной из плоскостей (π_1 ; π_2 ; σ ; τ)
A3	Определение истинной величины отрезка прямой общего положения
A4	Определение точки пересечения двух профильных прямых
A5	Построение профильной прямой, параллельной данной
A6	Построение точки в плоскости
A7	Определение линии пересечения проецирующей плоскости и плоскости общего положения
A8	Определение линии пересечения двух плоскостей общего положения
A9	Построение прямой, параллельной заданной плоскости
A10	Определение точки встречи прямой и плоскости
A11	Определение видимости прямой при пересечении ее с плоскостью
A12	Построение перпендикуляра к плоскости
A13	Построение перпендикуляра к прямой
A14	Построение плоскости, перпендикулярной к заданной
A15	Переход к новой системе плоскостей проекций, в которой прямая общего положения является линией уровня
A16	Переход к новой системе плоскостей проекций, в которой исходная прямая уровня (фронталь или горизонталь) становится проецирующей прямой
A17	Переход к новой системе плоскостей проекций, в которой исходная плоскость общего положения становится проецирующей
A18	Переход к новой системе плоскостей проекций, в которой исходная проецирующая плоскость является плоскостью уровня
A19	Перевод прямой общего положения в прямую уровня вра-

* Алгоритмы с А1 по А23 приведены в [4], алгоритмы с А24 по А46 – в данных методических указаниях.

Номер алгоритма	Название алгоритма
	щением вокруг оси перпендикулярной плоскости проекций
А20	Перевод прямой уровня (фронтали или горизонтали) в проецирующее положение вращением вокруг оси перпендикулярной плоскости проекций
А21	Перевод плоскости общего положения в проецирующее вращением вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций
А22	Перевод проецирующей плоскости в положение плоскости уровня вращением вокруг оси перпендикулярной плоскости проекций
А23	Вращение плоскости вокруг главных линий (фронтали, горизонтали)
А24	Построение точки на поверхности призмы
А25	Построение точки на поверхности пирамиды
А26	Пересечение многогранника проецирующей плоскостью
А27	Пересечение многогранника плоскостью общего положения
А28	Пересечение призмы прямой линией
А29	Пересечение пирамиды прямой линией
А30	Построение касательной к плоской кривой линии через точку, не принадлежащую кривой (приближенный способ)
А31	Построение касательной к плоской кривой линии в заданной точке касания (приближенный способ)
А32	Построение касательной к плоской кривой линии параллельно заданному направлению (приближенный способ)
А33	Построение нормали к плоской кривой линии через точку, не принадлежащую данной кривой (приближенный способ)
А34	Построение точки на нелинейчатой поверхности
А35	Пересечение нелинейчатой поверхности проецирующей плоскостью
А36	Пересечение нелинейчатой поверхности прямой линией
А37	Построение точки на цилиндрической и конической поверхностях

Номер алгоритма	Название алгоритма
А38	Пересечение поверхности цилиндра проецирующей плоскостью
А39	Пересечение поверхности конуса проецирующей плоскостью
А40	Пересечение поверхности цилиндра прямой линией
А41	Пересечение поверхности конуса прямой линией
А42	Пересечение поверхности сферы проецирующей плоскостью
А43	Пересечение поверхности вращения проецирующей плоскостью
А44	Пересечение поверхности сферы прямой линией
А45	Пересечение поверхности вращения прямой линией, пересекающей ось вращения
А46	Пересечение поверхности вращения прямой линией, не пересекающей ось вращения